Exercice 6 :

Soit $M \in \mathbb{R}^{nxn}$, on pose $M = \begin{pmatrix} A & U \\ V^T & \alpha \end{pmatrix}$ avec A inversible et $\alpha \in \mathbb{R}$.

On cherche les expressions de matrices P, Q , W^T et l'entier s définis de la maniérés suivante :
$\begin{pmatrix} A & U \\ V^T & \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P & Q \\ W^T & 1/s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La recherches de ces choses revient a la recherche de l'inverse de M .

On commence par tenter de factoriser M. Un façon de factoriser un matrice en bloc est l'identité de Shur :

Identité de Schur :

Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ une matrice par blocs de dimension (n+p)x(n+p) avec A,B,C,D de dimensions pxp, pxq, qxp, qxq .

Si D est inversible, alors la suivante est vrai

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & B \cdot D^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I & 0 \\ D^{-1} \cdot C & I \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad S = A - B . D^{-1} . C \ .$$

S s'appelle le complément de Schur.

α est un matrice 1x1. Un matrice 1x1 est inversible et son inverse est $1/\alpha$.

Alors, on a :
$$\begin{pmatrix} A & U \\ V^T & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & \frac{1}{\alpha} U \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I & 0 \\ \frac{1}{\alpha} V^T & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad S = A - \frac{1}{\alpha} \cdot U \cdot V^T$$
.

On déduit que :

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A & U \\ V^T & \alpha \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ \frac{1}{\alpha} V^T & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} I & \frac{1}{\alpha} U \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 1$$

Donc, maintenant il faut trouver les inverses de ces trois matrices :

Inversion des matrices triangulaires par blocs :

Il nous un façon de inverser les matrices triangulaires par blocs qu'on a trouvé. C'est à dire, un maniéré de trouver T_1 telle que :

$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = T_1 \cdot \begin{pmatrix} I & 0 \\ X_0 & I \end{pmatrix}$ pour les matrices triangulaires supérieures par blocs.

On essaye de voir si on arrivera a construire un matrice T telle que :

$$T_1 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ X_1 & I \end{pmatrix} \quad .$$

La multiplication matricielle nous donne :

$$T_1 \cdot \begin{pmatrix} I & 0 \\ X_0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ X_0 + X_1 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \Rightarrow X_0 = -X_1 \quad .$$

En faisant la même chose on trouve une règle pour les matrices triangulaire inférieures.

Donc ,on trouve :

$$\begin{pmatrix} I & -\frac{1}{\alpha} U \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I & \frac{1}{\alpha} U \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} I & 0 \\ -\frac{1}{\alpha} V^T & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ \frac{1}{\alpha} V^T & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

De plus ; $\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & 1/\alpha \end{pmatrix}$.

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -\frac{1}{\alpha} V^T & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & 1/\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I & -\frac{1}{\alpha} U \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -\frac{1}{\alpha} V^T & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S^{-1} & 1/\alpha \cdot S^{-1} \cdot U \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} S^{-1} & -\frac{1}{\alpha} \cdot S^{-1} \cdot U \\ -\frac{1}{\alpha} \cdot V^T \cdot S^{-1} & \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} \cdot V^T \cdot S^{-1} \cdot U \end{pmatrix}$$

Donc on a ;

$$P = S^{-1} \quad \text{et} \quad Q = -\frac{1}{\alpha} \cdot S^{-1} \cdot U \quad \text{et} \quad W^T = -\frac{1}{\alpha} \cdot V^T \cdot S^{-1} \quad \text{et} \quad 1/s = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} \cdot V^T \cdot S^{-1} \cdot U \quad .$$

Exemple :

Essayons avec un exemple plus concrété. Posons $M=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Donc , on a : $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $U=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $V=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, et $\alpha=4$.

Utilisant Matlab, on calcule P,Q, W et s.

$P=\begin{pmatrix} -2{,}8 & 2{,}6 \\ 1{,}6 & -1{,}2 \end{pmatrix}$, $Q=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $W=\begin{pmatrix} -1{,}8 \\ 1{,}6 \end{pmatrix}$ et $s=-1$.

Encore avec Matlab, on calcule $M^{-1}=\begin{pmatrix} -2{,}8 & 2{,}6 & -2 \\ 1{,}6 & -1{,}2 & 1 \\ -1{,}8 & 1{,}6 & -1 \end{pmatrix}$.

Donc, on a bien $M=\begin{pmatrix} P & Q \\ W^T & s \end{pmatrix}$.