TP4
EXO 2:

Dans cette exercice, on veut simuler la loi normale utilisant la methode d'inversion utilisee precedement. Pourtant,la fonction de repartition d'une loi normale ne peut pas etre exprime en termes des fonctions simple, donc on ne peut pas utiliser la methode directement.

On va essayer donc d'exprimer une variable aleatoire suivant une loi normale en fonctions des autres variables aleatoires qu'on peut simuler. De plus , il nous suffit de simuler une variable aleatoire suivant N(0,1) car pour simuler les autres il suffira de l'additioner l'esperance et le multiplier avec la ecart-type.

$$X \sim N(0,1), Y \sim N(\mu,\rho) \Rightarrow Y = (X+\mu)\cdot\rho$$

On va commencer par considerer un couple de variables aleatoires (X, Y) suivant les deux la loi N(0,1) avec $f_{X,Y}$ leur densite conjointe. X et Y sont independent donc;

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y) = \frac{1}{2\pi}\cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

Note: Les lettres majuscules represente les variables aleatoires et les lettres miniscules correspondent aux valeurs prises par ces variables aleatoires.

Puis, on considere deux autres variables aleatoire R et Θ, definit de la maniere suivant .

$$\begin{cases} X = R\cos\Theta \\ Y = R\sin\Theta \end{cases} \text{ avec } R \in \mathbb{R}^+ \text{ et } \Theta \in [0, 2\pi] \; .$$

Cette systeme admet une solution unique :

$$\begin{cases} R = \sqrt{X^2+Y^2} \\ \Theta = \tan(Y/X) \end{cases} .$$

De plus, la jacobien $J(r,\theta) = R$ est non nul.

Donc, on peut appliquer la theoreme de changement de variable qui nous dit que:

$$f_{X,Y}(x,y) = f_{R,\Theta}(r,\theta)\cdot|J(r,\theta)|^{-1}$$

qui nous donne la formule suivant:

$$f_{R,\Theta}(r,\theta) = r\cdot f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi}\cdot r e^{-\frac{r^2}{2}} \; .$$

<u>Les densité de R, et Θ:</u>

<u>-Θ:</u>

Pour trouver le densité de Θ, il suffit de integre l'expression trouver avant utilisant expression precedent.

$$f_\Theta(\theta) = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^\infty r e^{-\frac{r^2}{2}} dr = \frac{1}{2\pi}\cdot[-e^{-\frac{r^2}{2}}]_0^\infty = \frac{1}{2\pi}$$

On voit que Θ suit une loi uniforme sur [0,2π]. Donc, il suffira de multiplier une variable aleatoire uniforme sur [0,1] par 2π.

$$U_1 \sim U([0,1]), \Theta = 2\pi\cdot U_1$$

-R:

De meme maniere, on trouve le densité de R:

$$f_R(r) = r\, e^{-\frac{r^2}{2}}$$

Maintenant on cherche a trouver sa fonction de repartition:

$$F_R(r) = \int_0^r p\, e^{-\frac{p^2}{2}} dp = 1 - e^{-\frac{r^2}{2}}$$

Son reciproque devient:

$$F_R^{-1}(t) = \sqrt{-2 \cdot \ln(1-t)}$$

Donc, on peut dire que :

$$U_2 \sim U[0,1],\, R = \sqrt{-2 \cdot \ln(1-U_2)}$$

Note: Pour simuler la variable aleatoire R, nous avons utilise une methode different de la methode suggeré dans l'enonce. Apres avoir obtenu la loi conjointe , on a remarqué que la densité et la fonction de repartition peut etre exprime d'un maniere plus ou moins simple.

Donc, la loi normale peut etre simuler de la facon suivante:

```
function [X,Y] = loiNormale(N,moy,ecart)

    % rand(x,y) donne une matrice x*y avec des valeurs dans [0,1]
    to = 2*pi*rand(1,N);

    r = sqrt(-2*log(1-rand(1,N)));

    % VA suivant N(0,1)
    X = r .* cos(to);
    Y = r .* sin(to);

    % VA suivant N(moy,ecart)
    X = (X +moy)*ecart;
    Y = (Y +moy)*ecart;

end
```

Une test avec μ = 0 et σ= 1 nous donne la courbe suivant :

/*
  Met le code en annexe
*/

/*Figure 1 de test*/