PROPOSISI

(Bagian I)

6.1. Proposisi, Pernyataan, Kalimat, dan Kalimat Terbuka

Berbicara tentang logika, berbicara tentang proposisi; dan, proposisi itu sendiri merupakan suatu metode dalam komputasi yang menggunakan kalimat deklaratif. Kalimat deklaratif adalah suatu kalimat yang berisi pernyataan. Dan, pernyataan itu merupakan kalimat yang hanya benar saja atau salah saja, tetapi tidak dapat sekaligus benar dan salah. Berikut adalah contoh kalimat yang merupakan pernyataan:

a. 4 adalah bilangan genap.
b. Taman Safari berada di Provinsi Jawa Barat.
c. Ibu kota negara Amerika Serikat adalah New York.

Berdasarkan arti dari pernyataan, jelas bahwa setiap pernyataan adalah kalimat. Namun, tidak semua kalimat merupakan pernyataan. Perhatikan kalimat-kalimat berikut ini:

a. Berapa jumlah penduduk yang ada di Jakarta?
b. Gedung ini tinggi.
c. Itu adalah benda cair.

Pada kalimat pertama, benar atau salahnya kalimat tersebut tidak dapat ditentukan, sehingga bukan termasuk pernyataan. Kemudian, kalimat yang kedua dapat saja bernilai benar atau bernilai salah, tetapi kata ‘tinggi’ bersifat relatif sehingga kalimat tersebut juga bukan termasuk pernyataan. Sementara kalimat yang ketiga, benar atau salahnya kalimat tersebut belum dapat ditentukan, tergantung pengganti kata ‘itu’ dalam kalimat tersebut, sehingga bukan juga termasuk pernyataan. Kalimat seperti kalimat ketiga ini adalah contoh kalimat terbuka.

Kalimat terbuka adalah kalimat yang memuat peubah/variabel, sehingga belum dapat ditentukan nilai kebenarannya. Pada contoh kalimat terbuka di atas, kata ‘itu’ merupakan peubah/variabel. Jika ‘itu’ diganti dengan air, maka termasuk pernyataan yang benar, sedangkan jika ‘itu’ diganti dengan kayu, maka termasuk pernyataan yang salah. Contoh lain kalimat terbuka adalah:

a. $4 - y = 13$
b. x adalah bilangan prima.

6.2. Dasar-Dasar Logika

6.2.1. Negasi (ingkaran)

Jika p adalah pernyataan yang diketahui, maka negasi (ingkaran) dari p dapat ditulis dengan simbol $\sim p$ atau $\neg p$. Nilai kebenaran dari negasi suatu pernyataan dapat ditentukan melalui tabel kebenaran berikut.

p	$\sim p$
B	S
S	B

6.2.2. Disjungsi

Disjungsi adalah pernyataan majemuk yang dirangkai dengan kata hubung *atau*. Disjungsi ini ada dua macam, yaitu disjungsi inklusif dan disjungsi ekslusif.

Jika p dan q adalah pernyataan yang diketahui, maka disjungsi inklusif dari p dan q dapat ditulis dengan lambang $p \vee q$. Nilai kebenaran dari disjungsi inklusif pernyataan majemuk dapat ditentukan melalui tabel kebenaran berikut.

p	q	$p \vee q$
B	B	B
B	S	B
S	B	B
S	S	S

Jika p dan q adalah pernyataan yang diketahui, maka disjungsi eksklusif dari p dan q dapat ditulis dengan lambang $p \oplus q$. Nilai kebenaran dari disjungsi eksklusif pernyataan majemuk dapat ditentukan melalui tabel kebenaran berikut.

p	q	$p \oplus q$
B	B	S
B	S	B
S	B	B
S	S	S

Untuk membedakan kedua jenis disjungsi ini, perhatikan disjungsi-disjungsi berikut.

a. Suatu bilangan asli adalah bilangan cacah atau bilangan bulat.
b. Hasil kali antar dua bilangan taknol adalah bilangan positif atau bilangan negatif.

Disjungsi (a), yang dimaksudkan adalah dapat keduanya, bilangan cacah atau bilangan bulat. Dalam hal ini, kata hubung *atau* bersifat mencakup (inklusif). Oleh karena itu, disjungsi seperti ini disebut disjungsi inklusif.

Disjungsi (b), yang dimaksudkan adalah salah satu saja, bilangan positif atau bilangan negatif, tetapi tidak keduanya sekaligus. Jika hasil kalinya adalah bilangan positif, pasti bukan bilangan negatif; demikian juga sebaliknya, jika hasil kalinya adalah bilangan negatif, pasti bukan bilangan positif. Dalam hal ini, kata hubung *atau* bersifat memisah (eksklusif). Oleh karena itu, disjungsi seperti ini disebut disjungsi eksklusif.

6.2.3. Konjungsi

Konjungsi adalah pernyataan majemuk yang dirangkai dengan kata hubung *dan*. Jika p dan q adalah pernyataan yang diketahui, maka konjungsi dari p dan q dapat ditulis dengan lambang $p \wedge q$. Nilai kebenaran dari konjungsi pernyataan majemuk dapat ditentukan melalui tabel kebenaran berikut.

p	q	$p \wedge q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	S

6.2.4. Implikasi

Implikasi adalah pernyataan majemuk yang disusun dari dua buah pernyataan yang dirangkai dengan kata "*jika ..., maka ...*". Jika p dan q adalah pernyataan yang diketahui, maka implikasi dari p ke q dapat ditulis dengan lambang $p \to q$. Nilai kebenaran dari implikasi suatu pernyataan majemuk dapat ditentukan melalui tabel kebenaran berikut.

p	q	$p \to q$
B	B	B
B	S	S
S	B	B
S	S	B

Bagian "jika p" dinamakan alasan atau sebab, sementara bagian "maka q" dinamakan kesimpulan atau akibat. Dalam berbagai penerapan, implikasi $p \to q$ dapat dibaca:

(i) p hanya jika q
(ii) q jika p
(iii) p syarat cukup bagi q
(iv) q syarat perlu bagi p

6.2.5. Biimplikasi (implikasi dwiarah)

Biimplikasi adalah pernyataan majemuk yang disusun dari dua buah pernyataan yang dirangkai dengan kata "*... jika dan hanya jika ...*". Jika p dan q adalah pernyataan yang diketahui, maka biimplikasi dari p dan q dapat ditulis dengan lambang $p \leftrightarrow q$. Nilai kebenaran dari biimplikasi suatu pernyataan majemuk dapat ditentukan melalui tabel kebenaran berikut.

p	q	$p \leftrightarrow q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	B

Dalam berbagai penerapan, biimplikasi $p \leftrightarrow q$ dapat dibaca:

(i) jika p maka q dan jika q maka p
(ii) p syarat perlu dan cukup bagi q
(iii) q syarat perlu dan cukup bagi p

6.3. Pernyataan Majemuk dan Pernyataan Majemuk yang Ekuivalen

Pada subbab sebelumnya, istilah pernyataan majemuk telah disinggung. Pernyataan majemuk itu adalah pernyataan yang dibentuk dari beberapa pernyataan tunggal yang dirangkai dengan menggunakan kata hubung logika. Berikut adalah beberapa contoh pernyataan majemuk selain dari yang telah disebutkan pada subbab sebelumnya:

a. $(\sim p \wedge q) \to p$
b. $q \leftrightarrow (p \vee \sim q)$
c. $\sim [p \wedge (p \leftrightarrow q)]$
d. $(p \vee q) \to r$

Nilai kebenaran pernyataan majemuk di atas dapat ditentukan dengan menggunakan tabel kebenaran. Untuk lebih memahami cara menentukan nilai kebenaran suatu pernyataan majemuk, perhatikan beberapa contoh berikut ini.

Contoh 1:
Tentukan nilai kebenaran dari pernyataan majemuk $(\sim p \wedge q) \rightarrow p$!
Jawab:

p	q	$\sim p$	$\sim p \wedge q$	$(\sim p \wedge q) \rightarrow p$
B	B	S	S	B
B	S	S	S	B
S	B	B	B	S
S	S	B	S	B

Jadi, nilai kebenaran dari pernyataan majemuk $(\sim p \wedge q) \rightarrow p$ adalah BBSB.

Contoh 2:
Tentukan nilai kebenaran dari pernyataan majemuk $(p \vee q) \rightarrow r$!
Jawab:

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \rightarrow r$
B	B	B	B	B
B	B	S	B	S
B	S	B	B	B
B	S	S	B	S
S	B	B	B	B
S	B	S	B	S
S	S	B	S	B
S	S	S	S	B

Jadi, nilai kebenaran dari pernyataan majemuk $(p \vee q) \rightarrow r$ adalah BSBSBSBB.

Catatan penting terkait tabel kebenaran pada pernyaataan majemuk.

Jika suatu pernyataan majemuk terdiri dari n pernyataan tunggal yang berlainan, maka banyaknya baris pada tabel kebenaran yang memuat nilai kebenaran adalah 2^n.

Selanjutnya, keekuivalenan antar pernyataan majemuk akan dibahas.

Dua buah pernyataan majemuk dikatakan ekuivalen jika kedua pernyataan majemuk itu mempunyai nilai kebenaran yang sama untuk semua kemungkinan nilai kebenaran pernyataan-pernyataan komponennya. Misalkan a dan b merupakan pernyataan majemuk; maka, pernyataan a ekuivalen dengan b disimbolkan dengan $a \equiv b$.

Perhatikan contoh berikut ini.

Contoh 3:
Tunjukkan bahwa $\sim (p \rightarrow q) \equiv (\sim q \wedge p)$!
Jawab:

Pertama, cari terlebih dahulu nilai kebenaran dari $\sim(p \to q)$.

p	q	$p \to q$	$\sim(p \to q)$
B	B	B	S
B	S	S	B
S	B	B	S
S	S	B	S

Jadi, nilai kebenaran dari $\sim(p \to q)$ adalah SBSS.

Selanjutnya, cari nilai kebenaran dari $(\sim q \wedge p)$.

p	q	$\sim q$	$\sim q \wedge p$
B	B	S	S
B	S	B	B
S	B	S	S
S	S	B	S

Jadi, nilai kebenaran dari $(\sim q \wedge p)$ adalah SBSS.
Karena kedua pernyataan majemuk memiliki nilai kebenaran yang sama, maka dapat disimpulkan bahwa $\sim(p \to q) \equiv (\sim q \wedge p)$.

Berikut ini adalah beberapa pernyataan majemuk yang saling ekuivalen:

a. $p \to q \equiv (\sim p \vee q)$

b. $p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$

c. $\sim(p \to q) \equiv (p \wedge \sim q)$

d. $\sim(p \leftrightarrow q) \equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$

Contoh 4:

Tentukan ingkaran dari kedua pernyataan di bawah ini:

a. Jika $x > 3$, maka $x^2 > 9$.

b. Segitiga sama sisi jika dan hanya jika ketiga sisinya sama panjang.

Jawab:

a. $p : x > 3$; $q : x^2 > 9$

Dengan $\sim(p \to q) \equiv (p \wedge \sim q)$, maka ingkarannya adalah:

"$x > 3$ dan $x^2 \leq 9$."

atau

"$x > 3$ tetapi $x^2 \leq 9$."

b. p: Segitiga sama sisi ; q: Ketiga sisinya sama panjang

Dengan $\sim(p \leftrightarrow q) \equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$, maka ingkarannya adalah:

"Segitiga sama sisi dan ketiga sisinya tidak sama panjang atau ketiga sisinya sama panjang dan bukan segitiga sama sisi."

atau

"Segitiga sama sisi tetapi ketiga sisinya tidak sama panjang atau ketiga sisinya sama panjang tetapi bukan segitiga sama sisi."

6.4. Hubungan Konvers, Invers, dan Kontraposisi dengan Implikasi

Misal diketahui implikasi $p \to q$. Maka,

1) konversnya adalah $q \to p$,
2) inversnya adalah $\sim p \to \sim q$, dan
3) kontraposisinya adalah $\sim q \to \sim p$.

Contoh 5:
Tentukan konvers, invers, dan kontraposisi dari kalimat berikut ini:
"Jika harga BBM naik, maka harga kebutuhan sehari-hari naik."
Jawab:
Diketahui p : harga BBM naik dan q : harga kebutuhan sehari-hari naik.
Maka,
Konvers : Jika harga kebutuhan sehari-hari naik, maka harga BBM naik.
Invers : Jika harga BBM tidak naik, maka harga kebutuhan sehari-hari tidak naik.
Kontraposisi : Jika harga kebutuhan sehari-hari tidak naik, maka harga BBM tidak naik.

Catatan penting terkait implikasi, konvers, invers, dan kontraposisi.

a. $p \to q \equiv (\sim q \to \sim p)$ [implikasi ekuivalen dengan kontraposisi]
b. $q \to p \equiv (\sim p \to \sim q)$ [konvers ekuivalen dengan invers]

6.5. Aljabar Proposisi

Idempoten	$p \vee p \equiv p$	$p \wedge p \equiv p$
Asosiatif	$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$	$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
Komutatif	$p \vee q \equiv q \vee p$	$p \wedge q \equiv q \wedge p$
Distributif	$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
Involusi	$\sim(\sim p) \equiv p$	
Absorbsi	$p \vee (p \wedge q) \equiv p$	$p \wedge (p \vee q) \equiv p$
De Morgan	$\sim(p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$	$\sim(p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$

Contoh 6:
Jika diketahui $(p \vee q) \to r$, tentukanlah konvers, invers, dan kontraposisinya!
Jawab:
Konvers:

$$r \to (p \vee q)$$

Invers:

$$\sim(p \vee q) \to \sim r$$

dengan menggunakan Hukum De Morgan diperoleh:

$$(\sim p \wedge \sim q) \to \sim r$$

Kontraposisi:

$$\sim r \to \sim(p \vee q)$$

dengan menggunakan Hukum De Morgan diperoleh:

$$\sim r \to (\sim p \wedge \sim q)$$

L A T I H A N   S O A L

1. Di antara kalimat-kalimat berikut, manakah yang merupakan pernyataan?
   a. Ada bilangan genap yang merupakan bilangan prima.
   b. Roti itu enak sekali.
   c. Hasil penjumlahan dua bilangan asli adalah bilangan genap.
   d. Andi memiliki badan yang tegap.
   e. Rumah Melissa letaknya sangat jauh.

2. Isilah titik-titik pada tabel berikut ini!

p	q	$(\sim p \to q) \wedge (\sim q \vee p)$
B	B	....
B	S	....
S	S	....

3. Tentukan nilai kebenaran dari pernyataan majemuk berikut!
   a. $\sim (p \to q) \wedge (p \wedge \sim q)$
   b. $p \to [p \vee (q \wedge r)]$
   c. $(q \vee r) \leftrightarrow (\sim p \wedge \sim r)$

4. Tentukan konvers, invers, dan kontraposisi dari setiap implikasi berikut!
   a. $\sim q \to p$
   b. $(p \wedge q) \to r$
   c. $p \to (\sim q \wedge r)$

5. Diketahui bahwa hukum absorbsi dalam aljabar prosisi adalah sebagai berikut:
   (i) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$
   (ii) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$
   Buktikan!

6. Tentukan ingkaran dari setiap pernyataan berikut ini!
   a. 3 adalah bilangan prima atau bilangan asli.
   b. Ayah membaca koran di teras dan ibu memasak di dapur.
   c. Jika harga barang naik, maka permintaan turun.