

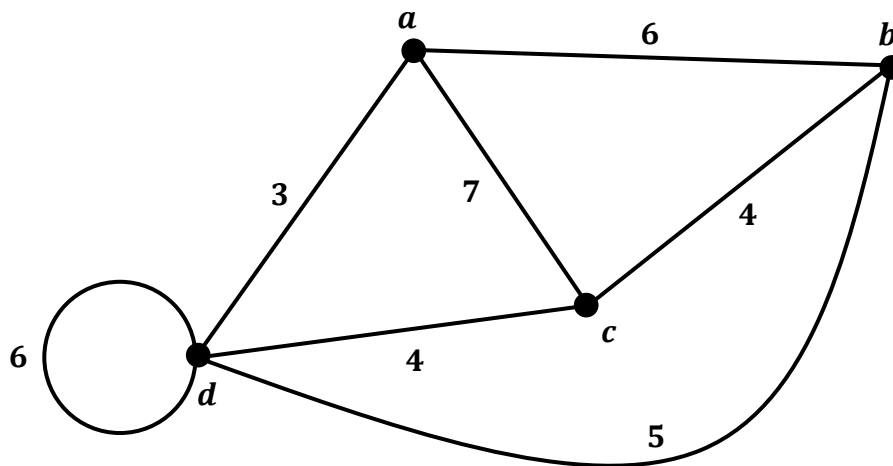
# POHON

## (Bagian II)

### 13.1. Graf Berbobot

**Graf berbobot** (*weighted graph*) adalah suatu graf tanpa busur paralel dimana setiap busurnya berhubungan dengan suatu bilangan real tak negatif yang menyatakan bobot pada busur tersebut.

Berikut adalah contoh graf berbobot.



### 13.2. Pohon Rentangan Minimum

Jika sebelumnya telah dipelajari cara mencari pohon rentangan dari suatu graf, kali ini akan dipelajari cara mencari pohon rentangan dari suatu graf berbobot dengan total bobot minimum. Pohon rentangan inilah yang disebut sebagai **pohon rentangan minimum** (*minimum spanning tree*).

Pada graf tak berarah yang berbobot, ada beberapa cara yang dapat digunakan untuk mencari pohon rentangan minimum, diantaranya:

- algoritma Kruskal, dan
- algoritma Prim.

Sementara pada graf berarah yang berbobot, ada beberapa cara yang dapat digunakan untuk mencari pohon rentangan minimum, diantaranya:

- algoritma Warshall, dan
- algoritma Dijkstra.

Pada bab ini, yang akan dipelajari adalah tentang penggunaan algoritma Kruskal dan algoritma Prim pada graf tak berarah yang berbobot.

### Algoritma Kruskal

Misalkan  $G$  adalah graf terhubung dengan  $n$  simpul. Langkah-langkah berikut akan menghasilkan penyelesaian pada persoalan penghubung terpendek.

1. Urutkan bobot yang ada dari kecil ke besar.
2. Misalkan  $e_1$  adalah busur dengan bobot terkecil di  $G$ ; pilih  $e_1$ .
3. Definisikan  $e_2, e_3, \dots, e_{n-1}$ ; pilih, pada setiap langkah, satu busur (yang belum pernah dipilih) dengan bobot terkecil *berikutnya* dan pastikan tidak membuat sirkuit dengan busur-busur yang sudah dipilih.

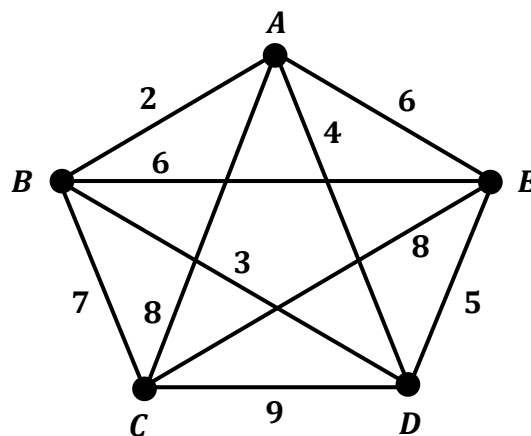
### Algoritma Prim

Misalkan  $G$  adalah graf terhubung dengan  $n$  simpul. Langkah-langkah berikut akan menghasilkan penyelesaian pada persoalan penghubung terpendek.

1. Pilihlah busur dengan bobot terkecil di  $G$ .
2. Perhatikan busur-busur yang bertetangga dengan busur(-busur) yang sudah dipilih; pilih, pada setiap langkah, satu busur dengan bobot terkecil dan pastikan tidak membuat sirkuit dengan busur-busur yang sudah terpilih.
3. Ulangi langkah kedua sampai tersisa satu busur yang harus dipilih.
4. Perhatikan busur-busur tersisa yang tidak membentuk sirkuit. Misalkan  $e_{n-1}$  adalah busur dengan bobot terkecil di antara busur yang tersisa; pilih  $e_{n-1}$ .

Perhatikan contoh berikut.

Jika diketahui graf berbobot  $K_5$  seperti pada gambar berikut.



Gambarkanlah pohon rentangan minimumnya, lalu hitunglah berapa bobot minimumnya!

Jawab:

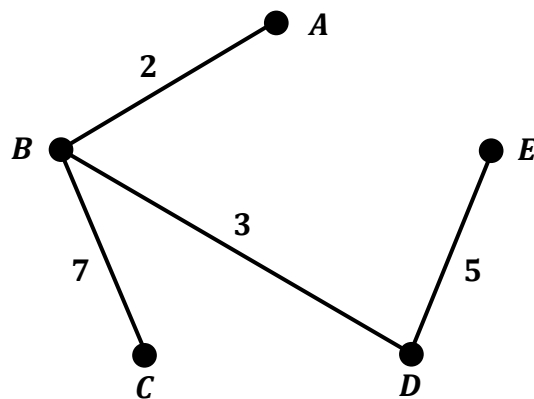
Dengan **Algoritma Kruskal**

Perhatikan bahwa graf  $K_5$  memiliki 5 simpul, sehingga dibutuhkan  $5 - 1 = 4$  busur untuk membentuk pohon rentangannya.

$$AB = 2; \quad BD = 3; \quad AD = 4; \quad DE = 5; \quad AE = 6; \quad BE = 6; \quad BC = 7; \quad AC = 8 \\ CE = 8; \quad CD = 9$$

| Langkah | Busur Terkecil | Bobot | Terbentuk Sirkuit   | Dipilih |
|---------|----------------|-------|---------------------|---------|
| 1       | $AB$           | 2     | Tidak               | Ya      |
| 2       | $BD$           | 3     | Tidak               | Ya      |
| 3       | $AD$           | 4     | $AB - BD - DA$      | Tidak   |
| 4       | $DE$           | 5     | Tidak               | Ya      |
| 5       | $AE$           | 6     | $AB - BD - DE - EA$ | Tidak   |
| 6       | $BE$           | 6     | $BD - DE - EB$      | Tidak   |
| 7       | $BC$           | 7     | Tidak               | Ya      |

sehingga didapat pohon rentangan minimumnya:

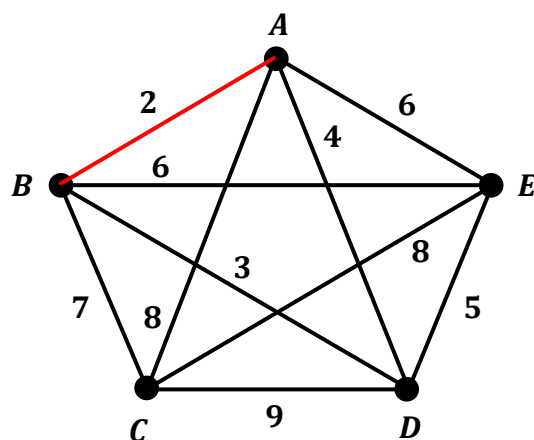


Bobot minimumnya adalah:  $2 + 3 + 5 + 7 = 17$ .

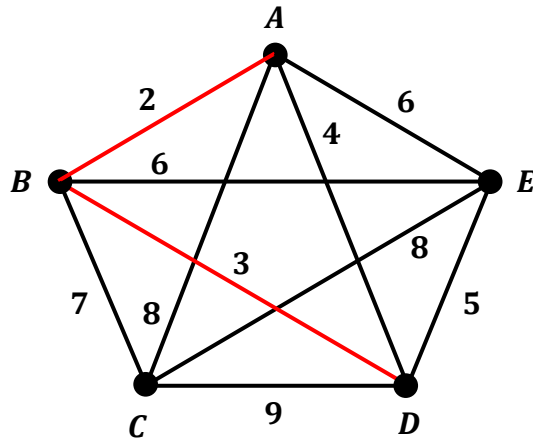
Dengan **Algoritma Prim**

Perhatikan bahwa graf  $K_5$  memiliki 5 simpul, sehingga dibutuhkan  $5 - 1 = 4$  busur untuk membentuk pohon rentangannya.

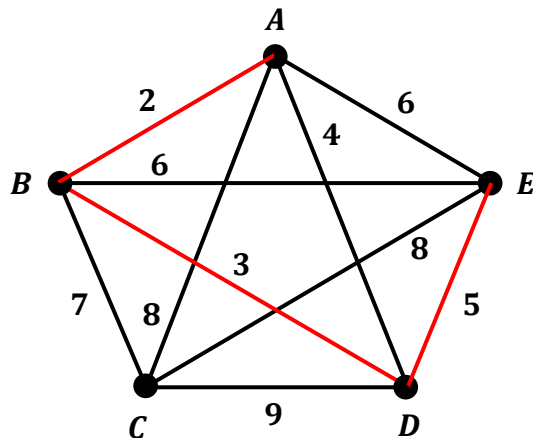
- 1) Karena  $AB$  adalah busur dengan bobot terkecil, maka pilih  $AB$ .



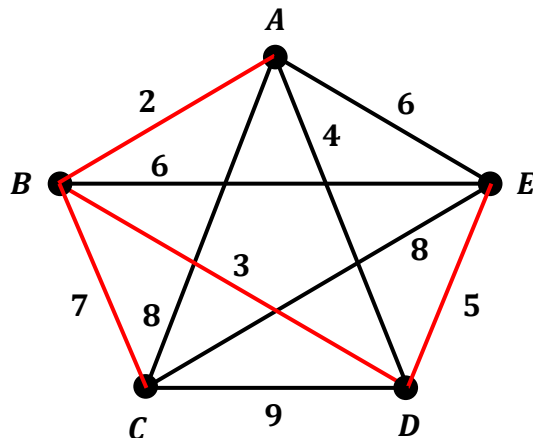
- 2) Busur yang bertetangga dengan  $AB$  adalah:  $AE(6)$ ,  $AD(4)$ ,  $AC(8)$ ,  $BE(6)$ ,  $BD(3)$ , dan  $BC(7)$ . Karena  $BD$  adalah busur dengan bobot yang terkecil, maka pilih  $BD$ .



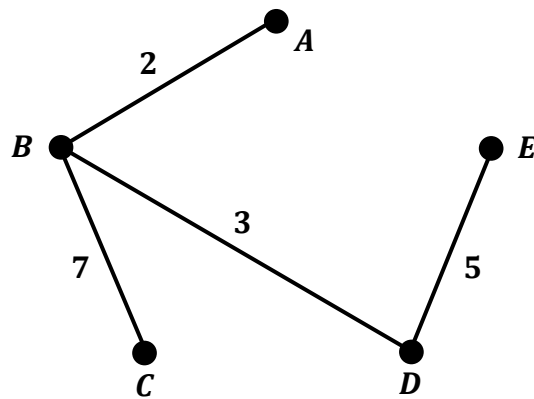
- 3) Perhatikan bahwa busur  $AD$  tidak mungkin dipilih karena akan membentuk sirkuit. Busur yang bertetangga dengan  $AB$  (selain  $BD$  dan  $AD$ ) adalah:  $AE(6)$ ,  $AC(8)$ ,  $BE(6)$ , dan  $BC(7)$ . Busur yang bertetangga dengan  $BD$  adalah  $BE(6)$ ,  $BC(7)$ ,  $DE(5)$ , dan  $DC(9)$ . Karena  $DE$  adalah busur dengan bobot terkecil, maka pilih  $DE$ .



- 4) Perhatikan bahwa  $AE$  dan  $BE$  tidak mungkin dipilih karena akan membentuk sirkuit. Busur-busur tersisa yang tidak akan membentuk sirkuit adalah  $CE(8)$ ,  $CD(9)$ ,  $AC(8)$ , dan  $BC(7)$ . Karena  $BC$  adalah busur dengan bobot terkecil, maka pilih  $BC$ .



Jadi, didapatlah pohon rentangan minimumnya:

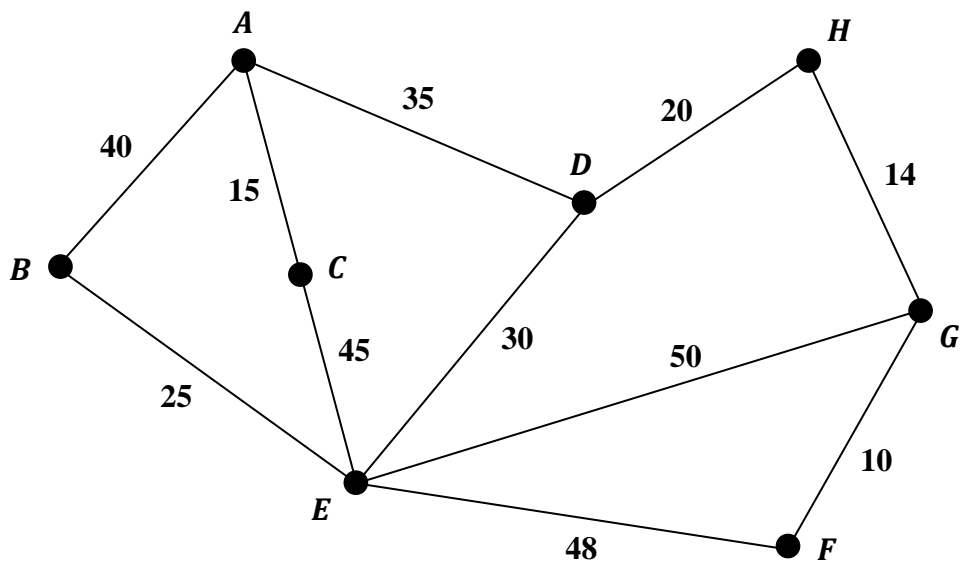


Bobot minimumnya adalah:  $2 + 3 + 5 + 7 = 17$ .

---

### LATIHAN

Jika diketahui graf berbobot seperti pada gambar berikut.



Gambarkanlah pohon rentangan minimumnya, lalu hitunglah berapa bobot minimumnya!

---