INDUKSI MATEMATIKA

8.1. Definisi Induksi Matematika

Induksi matematika adalah cara untuk membuktikan bahwa sebuah pernyataan yang diberikan berlaku untuk setiap bilangan asli.

Misalkan $S(n)$ adalah suatu pernyataan yang selalu bernilai benar untuk semua bilangan bulat positif *n*. Untuk membuktikan bahwa $S(n)$ bernilai benar untuk setiap bilangan bulat positif *n*, tunjukkanlah dengan dua langkah berikut:

BASIC STEP :

>> buktikan bahwa saat $n=1$, $S(n)$ bernilai benar; dengan kata lain, buktikan bahwa $S(1)$ bernilai benar

INDUCTIVE STEP :

>> misalkan saat $n=k$, $S(n)$ bernilai benar, lalu buktikan saat $n=k+1$, $S(n)$ juga bernilai benar; dengan kata lain, saat $S(k)$ bernilai benar, buktikan $S(k+1)$ juga bernilai benar

8.2. Penggunaan Induksi Matematika

Berikut akan disajikan beberapa contoh terkait penggunaan induksi matematika dalam membuktikan suatu pernyataan matematika.

<u>Contoh 1</u>:

Buktikan bahwa $1+2+3...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ untuk setiap *n* bilangan asli!

Jawab:

BASIC STEP :

Karena untuk setiap *n* bilangan asli, maka *n* dimulai dari 1, sehingga harus dibuktikan bahwa $S(1)$ bernilai benar.

$S(1)$ → ruas kiri: 1

$S(1)$ → ruas kanan: $\dfrac{1(1+1)}{2}=\dfrac{1\cdot 2}{2}=1$

Perhatikan bahwa ruas kiri *sama dengan* ruas kanan. Jadi, $S(1)$ bernilai benar.

INDUCTIVE STEP :

Misalkan $S(k)$ bernilai benar. Artinya:

$$1+2+3+...+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

Akan ditunjukkan bahwa $S(k+1)$ bernilai benar; dengan kata lain, harus ditunjukkan bahwa:

$$1+2+3+...+k+(k+1)=\boxed{\frac{(k+1)(k+2)}{2}}$$

$$\frac{k(k+1)}{2}$$

didapat dari : ganti k dengan $k+1$, menjadi

$$\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Bukti:

Karena $1+2+3+...+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$, maka

$$\begin{aligned}1+2+3+...+k+(k+1)&=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)\\&=\frac{k(k+1)}{2}+\frac{2(k+1)}{2}\\&=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}\\&=\frac{k^2+k+2k+2}{2}\\&=\frac{k^2+3k+2}{2}\\&=\frac{(k+1)(k+2)}{2}\end{aligned}$$

Dengan demikian, terbukti bahwa $1+2+3...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ untuk setiap n bilangan asli.

<u>Contoh 2</u>:

Buktikan bahwa $2^0+2^1+2^2+...+2^n=2^{n+1}-1$ untuk setiap bilangan bulat $n\geq 0$!

Jawab:

BASIC STEP :

Karena untuk setiap bilangan bulat $n\geq 0$, maka n dimulai dari 0, sehingga harus dibuktikan bahwa $S(0)$ bernilai benar.

$S(0)\rightarrow$ ruas kiri: $2^0=1$

$S(0)\rightarrow$ ruas kanan: $2^{0+1}-1=2-1=1$

Perhatikan bahwa ruas kiri *sama dengan* ruas kanan. Jadi, $S(0)$ bernilai benar.

INDUCTIVE STEP :

Misalkan $S(k)$ bernilai benar. Artinya:

$$2^0+2^1+2^2+...+2^k=2^{k+1}-1$$

Akan ditunjukkan bahwa $S(k+1)$ bernilai benar; dengan kata lain, harus ditunjukkan bahwa:

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^k + 2^{k+1} = \boxed{2^{k+2} - 1}$$

$2^{k+1} - 1$

didapat dari: ganti k dengan $k+1$, menjadi

$2^{(k+1)+1} - 1 = 2^{k+2} - 1$

Bukti:

Karena $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^k = 2^{k+1} - 1$, maka

$$\begin{aligned}
2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^k + 2^{k+1} &= (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} \\
&= 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 \\
&= 2 \cdot 2^{k+1} - 1 \\
&= 2^1 \cdot 2^{k+1} - 1 \\
&= 2^{1+k+1} - 1 \\
&= 2^{k+2} - 1
\end{aligned}$$

Dengan demikian, terbukti bahwa $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ untuk setiap bilangan bulat $n \geq 0$.

Contoh 3:

Buktikan bahwa $5^n > n^2$ untuk setiap n bilangan bulat positif!

Jawab:

BASIC STEP :

Karena untuk setiap n bilangan bulat positif, maka n dimulai dari 1, sehingga harus dibuktikan bahwa $S(1)$ bernilai benar.

$S(1) \rightarrow \quad 5^1 > 1^2 \rightarrow$ pernyataan ini bernilai benar

Jadi, $S(1)$ bernilai benar.

INDUCTIVE STEP :

Misalkan $S(k)$ bernilai benar. Artinya diketahui:

$$5^k > k^2$$

Akan ditunjukkan bahwa $S(k+1)$ bernilai benar; dengan kata lain, harus ditunjukkan bahwa:

$$5^{(k+1)} > (k+1)^2$$

Bukti:

$$\begin{aligned}
5^{(k+1)} &= 5^k \cdot 5 \\
&= 5 \cdot 5^k \\
&> 5k^2 \qquad (\text{karena } 5^k > k^2) \\
&= k^2 + 2k^2 + 2k^2 \qquad (\text{karena } 5k^2 = k^2 + 2k^2 + 2k^2) \\
&\geq k^2 + 2k + 1 \qquad (\text{karena } k^2 \geq k^2;\ 2k^2 \geq 2k;\ 2k^2 \geq 1) \\
&= (k+1)^2
\end{aligned}$$

Dengan demikian, terbukti bahwa $5^n > n^2$ untuk setiap n bilangan bulat positif.

Contoh 4:

Buktikan bahwa $n+1 \leq n^2$ untuk setiap bilangan asli $n \geq 2$!

Jawab:

BASIC STEP :

Karena untuk setiap bilangan asli $n \geq 2$, maka n dimulai dari 2, sehingga harus dibuktikan bahwa $S(2)$ bernilai benar.

$S(2) \rightarrow \quad 2+1 \leq 2^2 \rightarrow$ pernyataan ini bernilai benar

Jadi, $S(2)$ bernilai benar.

INDUCTIVE STEP :

Misalkan $S(k)$ bernilai benar. Artinya diketahui:

$$k+1 \leq k^2$$

Akan ditunjukkan bahwa $S(k+1)$ bernilai benar; dengan kata lain, harus ditunjukkan bahwa:

$$\boxed{k+2} \leq (k+1)^2$$

didapat dari: $k+1$
ganti k dengan $k+1$, menjadi
$(k+1)+1 = k+2$

Bukti:

$$\begin{aligned} k+2 &= (k+1)+1 \\ &\leq k^2+1 \quad \text{(karena } k+1 \leq k^2\text{)} \\ &\leq k^2+k \quad \text{(karena diketahui dari soal bahwa } k \geq 2\text{)} \\ &= k(k+1) \quad \text{(karena } k^2+k = k(k+1)\text{)} \\ &\leq (k+1)(k+1) \quad \text{(karena } k \leq k+1\text{)} \\ &= (k+1)^2 \end{aligned}$$

Dengan demikian, terbukti bahwa $n+1 \leq n^2$ untuk setiap bilangan asli $n \geq 2$.

L A T I H A N   S O A L

1. Tunjukkan bahwa $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ untuk setiap n bilangan bulat positif!

2. Tunjukkan bahwa $2 + 5 + 8 + ... + (3n-1) = \dfrac{n(3n+1)}{2}$ untuk setiap n bilangan bulat positif!

3. Tunjukkan bahwa $2^n > 2n+3$ untuk semua bilangan bulat $n \geq 4$!

4. Tunjukkan bahwa $n! \leq n^n$ untuk semua n bilangan asli!