POHON

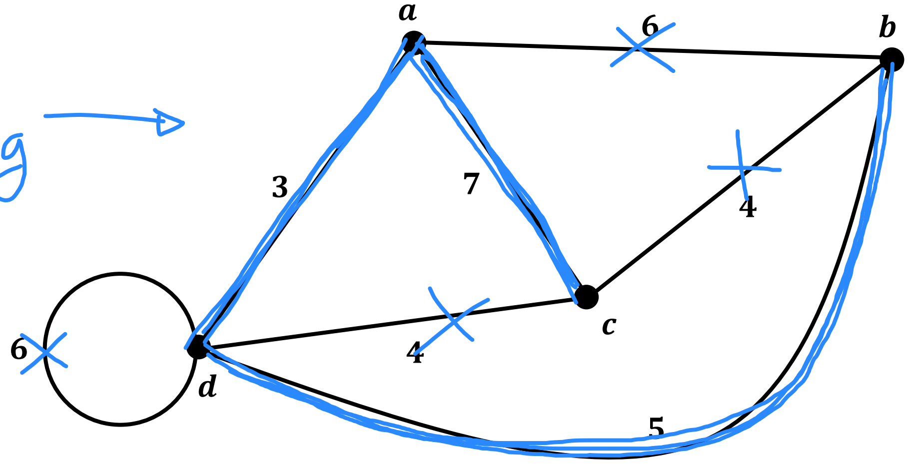
(Bagian II)

13.1. Graf Berbobot

Graf berbobot (***weighted graph***) adalah suatu graf tanpa busur paralel dimana setiap busurnya berhubungan dengan suatu bilangan real tak negatif yang menyatakan bobot pada busur tersebut.

Berikut adalah contoh graf berbobot.

Pohon rentang



13.2. Pohon Rentangan Minimum

Jika sebelumnya telah dipelajari cara mencari pohon rentangan dari suatu graf, kali ini akan dipelajari cara mencari pohon rentangan dari suatu graf berbobot dengan total bobot minimum. Pohon rentangan inilah yang disebut sebagai **pohon rentangan minimum** (***minimum spanning tree***).

Pada graf tak berarah yang berbobot, ada beberapa cara yang dapat digunakan untuk mencari pohon rentangan minimum, diantaranya:

a. algoritma Kruskal, dan
b. algoritma Prim.

Sementara pada graf berarah yang berbobot, ada beberapa cara yang dapat digunakan untuk mencari pohon rentangan minimum, diantaranya:

a. algoritma Warshall, dan
b. algoritma Djikstra.

Pada bab ini, yang akan dipelajari adalah tentang penggunaan algoritma Kruskal dan algoritma Prim pada graf tak berarah yang berbobot.

Algoritma Kruskal

Misalkan G adalah graf terhubung dengan n simpul. Langkah-langkah berikut akan menghasilkan penyelesaian pada persoalan penghubung terpendek.

1. Urutkan bobot yang ada dari kecil ke besar.
2. Misalkan e_1 adalah busur dengan bobot terkecil di G; pilih e_1.
3. Definisikan e_2, e_3, ..., e_{n-1}; pilih, pada setiap langkah, satu busur (yang belum pernah dipilih) dengan bobot terkecil *berikutnya* dan pastikan tidak membuat sirkuit dengan busur-busur yang sudah dipilih.

Algoritma Prim

5 simpul $\longrightarrow$ 4 busur

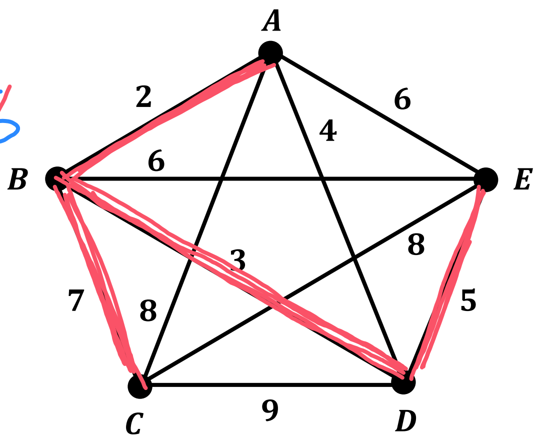
Misalkan G adalah graf terhubung dengan n simpul. Langkah-langkah berikut akan menghasilkan penyelesaian pada persoalan penghubung terpendek.

1. Pilihlah busur dengan bobot terkecil di G.
2. Perhatikan busur-busur yang bertetangga dengan busur(-busur) yang sudah dipilih; pilih, pada setiap langkah, satu busur dengan bobot terkecil dan pastikan tidak membuat sirkuit dengan busur-busur yang sudah terpilih.
3. Ulangi langkah kedua sampai tersisa satu busur yang harus dipilih
4. Perhatikan busur-busur tersisa yang tidak membentuk sirkuit. Misalkan e_{n-1} adalah busur dengan bobot terkecil di antara busur yang tersisa; pilih e_{n-1}.

Perhatikan contoh berikut.
Jika diketahui graf berbobot K_5 seperti pada gambar berikut.

Kruskal

$\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\cancel{4}$ $\boxed{5}$ $\cancel{6}$ $\cancel{6}$
$\boxed{7}$ 8 9
$\boxed{17}$



5 Simpul

Gambarkanlah pohon rentangan minimumnya, lalu hitunglah berapa bobot minimumnya!

<u>Jawab</u>:

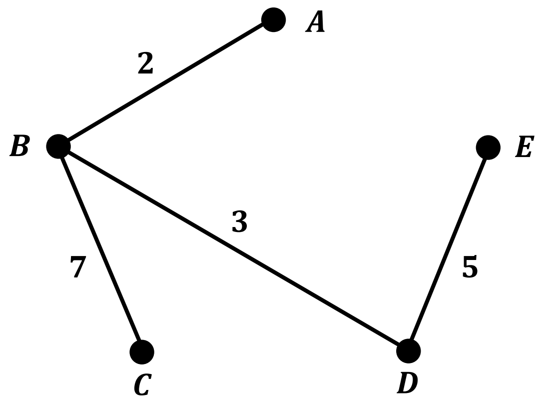
Dengan Algoritma Kruskal

Perhatikan bahwa graf K_5 memiliki 5 simpul, sehingga dibutuhkan $5 - 1 = 4$ busur untuk membentuk pohon rentangannya.

$$AB = 2;\quad BD = 3;\quad AD = 4;\quad DE = 5;\quad AE = 6;\quad BE = 6;\quad BC = 7;\quad AC = 8$$
$$CE = 8;\quad CD = 9$$

Langkah	Busur Terkecil	Bobot	Terbentuk Sirkuit	Dipilih
1	AB	2	Tidak	Ya
2	BD	3	Tidak	Ya
3	AD	4	$AB - BD - DA$	Tidak
4	DE	5	Tidak	Ya
5	AE	6	$AB - BD - DE - EA$	Tidak
6	BE	6	$BD - DE - EB$	Tidak
7	BC	7	Tidak	Ya

sehingga didapat pohon rentangan minimumnya:

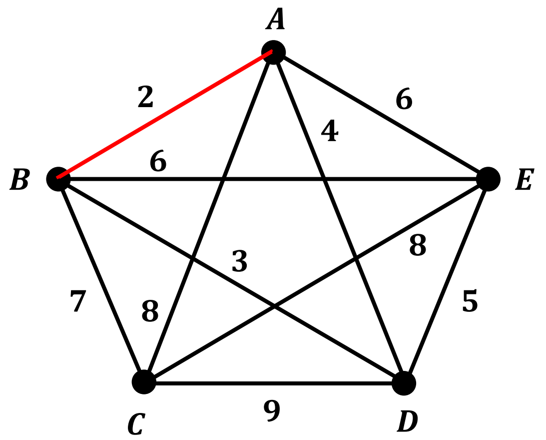


Bobot minimumnya adalah: $2 + 3 + 5 + 7 = 17.$

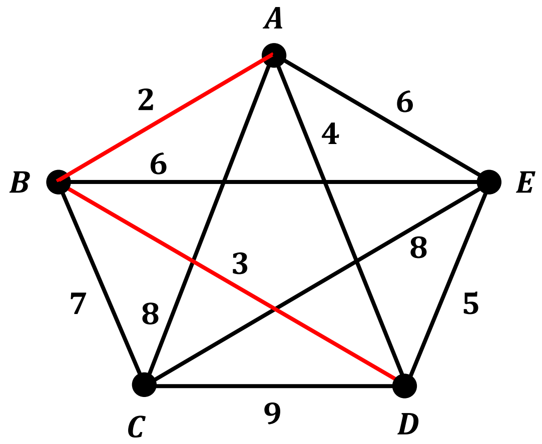
Dengan **Algoritma Prim**

Perhatikan bahwa graf K_5 memiliki 5 simpul, sehingga dibutuhkan $5 - 1 = 4$ busur untuk membentuk pohon rentangannya.

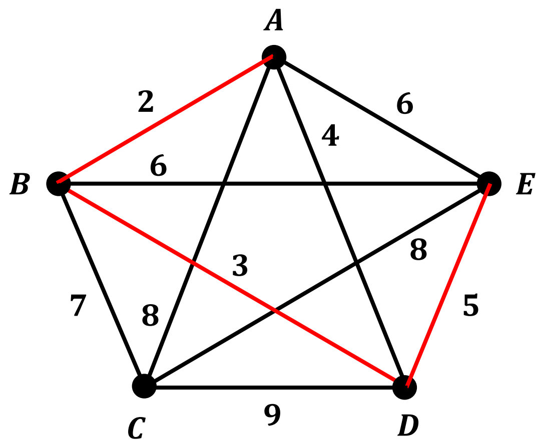
1) Karena AB adalah busur dengan bobot terkecil, maka <u>pilih AB</u>.



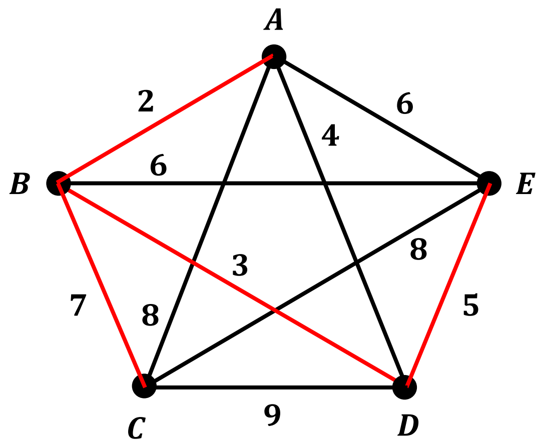
2) Busur yang bertetangga dengan AB adalah: $AE(6)$, $AD(4)$, $AC(8)$, $BE(6)$, $BD(3)$, dan $BC(7)$. Karena BD adalah busur dengan bobot yang terkecil, maka <u>pilih BD</u>.



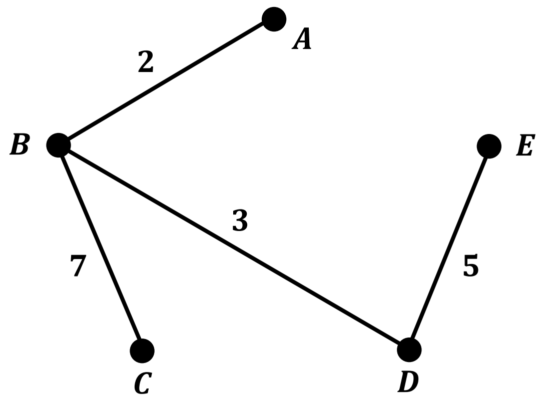
3) Perhatikan bahwa busur AD tidak mungkin dipilih karena akan membentuk sirkuit.
Busur yang bertetangga dengan AB (selain BD dan AD) adalah: $AE(6)$, $AC(8)$, $BE(6)$, dan $BC(7)$.
Busur yang bertetangga dengan BD adalah $BE(6)$, $BC(7)$, $DE(5)$, dan $DC(9)$.
Karena DE adalah busur dengan bobot terkecil, maka <u>pilih DE</u>.



4) Perhatikan bahwa AE dan BE tidak mungkin dipilih karena akan membentuk sirkuit.
Busur-busur tersisa yang tidak akan membentuk sirkuit adalah $CE(8)$, $CD(9)$, $AC(8)$, dan $BC(7)$. Karena BC adalah busur dengan bobot terkecil, maka <u>pilih BC</u>.



Jadi, didapatlah pohon rentangan minimumnya:



Bobot minimumnya adalah: $2 + 3 + 5 + 7 = 17$.

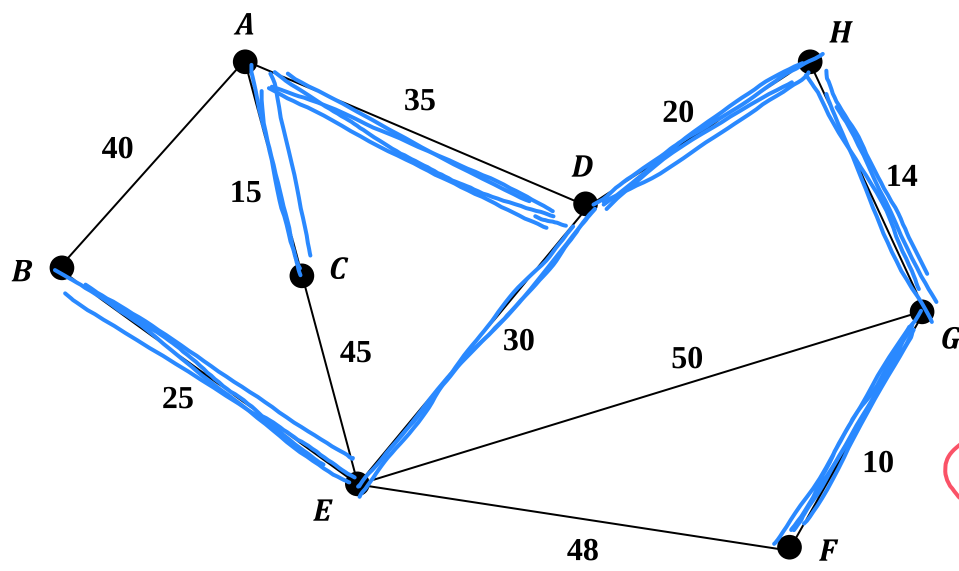
LATIHAN

8 simpul
→ 7 busur

Jika diketahui graf berbobot seperti pada gambar berikut.

10 ✓
14 ✓
15 ✓
20 ✓
25 ✓
30 ✓
35 ✓
40
45

48
50



149

Gambarkanlah pohon rentangan minimumnya, lalu hitunglah berapa bobot minimumnya!

Materi Tambahan terkait Struktur Aljabar.

Ingat kembali bahwa:

- Struktur aljabar (G, *) dikatakan ***semigrup*** jika:
  1. G merupakan himpunan tak kosong,
  2. G tertutup terhadap operasi biner *, dan
  3. operasi biner * bersifat asosiatif.

$a \in G \quad b \in G$

$a * b \in G$

- Struktur aljabar (G, *) dikatakan ***monoid*** jika:
  1. (G, *) merupakan suatu semigrup, dan
  2. G memiliki elemen identitas.

$0 + u = u$

- Struktur aljabar (G, *) dikatakan ***grup*** jika:
  1. (G, *) merupakan suatu monoid, dan
  2. setiap anggota di G memiliki invers masing-masing.

$u * u^{-1} = e$

- Struktur aljabar (G, *) dikatakan ***grup abelian*** jika:
  1. (G, *) merupakan suatu grup, dan
  2. operasi biner * bersifat komutatif.

Struktur aljabar (G, +, $\times$) dikatakan sebagai suatu ***ring*** (***gelanggang***) jika:

RING

1. (G, +) merupakan suatu grup abelian,
2. G tertutup terhadap operasi biner $\times$,
3. operasi biner $\times$ bersifat asosiatif,

} (G, $\times$) semigrup

4. operasi biner + dan $\times$ bersifat distributif (kiri dan kanan), yakni:

untuk setiap $a,b,c \in G$, berlaku $a\times(b+c)=(a\times b)+(a\times c)$ [distributif kiri]

$(b+c)\times a=(b\times a)+(c\times a)$ [distributif kanan]

.

Contoh 1:

Tunjukkan apakah himpunan $A=\{x \mid x=5n,\ n\in\mathbb{Z}\}$ merupakan suatu ring terhadap penjumlahan dan perkalian pada bilangan bulat! ($\mathbb{Z}$ bilangan bulat)

Jawab:

Pertama, harus ditunjukkan bahwa A adalah suatu himpunan tak kosong.
A adalah himpunan dengan $A=\{x \mid x=5n,\ n\in\mathbb{Z}\}$. Jika kita ambil n = 1, maka x = 5 $\in$ A. Ini berarti bahwa A merupakan himpunan tak kosong.

$u_1 = 5a$

$u_2 = 5b$

$u_1 + u_2 \in A$?

Kedua, harus ditunjukkan bahwa A tertutup terhadap operasi biner +.
Ambil sebarang x_1 dan x_2 pada A, katakanlah $x_1, x_2 \in A$. Ini berarti,

$$x_1 = 5a \text{ dan } x_2 = 5b, \text{ dengan } a,b\in\mathbb{Z}.$$

Akan ditunjukkan bahwa A tertutup terhadap operasi biner +.
Dengan kata lain, akan ditunjukkan bahwa $x_1 + x_2$ juga anggota A.

$$x_1 + x_2 = 5a + 5b = 5(a+b) \in A$$

Jadi, A tertutup terhadap +.

$(u_1+u_2)+u_3 = u_1+(u_2+u_3)$

Ketiga, harus ditunjukkan bahwa operasi biner + bersifat asosiatif.
Ambil sebarang x_1, x_2, dan x_3 pada A, katakanlah $x_1, x_2, x_3 \in A$. Ini berarti,

$$x_1 = 5a,\ x_2 = 5b,\ \text{dan}\ x_3 = 5c\ \text{dengan}\ a, b, c \in \mathbb{Z}.$$

Akan ditunjukkan bahwa operasi biner + bersifat asosiatif.
Dengan kata lain, akan ditunjukkan bahwa $(x_1 + x_2) + x_3 = x_1 + (x_2 + x_3)$.

$$(x_1 + x_2) + x_3 = (5a + 5b) + 5c = \boxed{5a + 5b + 5c} = 5a + (5b + 5c) = x_1 + (x_2 + x_3)$$

Sampai pada tahap ini, telah dibuktikan bahwa (A, +) adalah suatu semigrup.

Keempat, harus ditunjukkan bahwa himpunan A memiliki elemen identitas terhadap +.
Ambil sebarang x_1 pada A, katakanlah $x_1 \in A$. Ini berarti, $x_1 = 5a$ dengan $a \in \mathbb{Z}$.
Lalu, misalkan ada suatu elemen e.
Karena operasi binernya adalah +, maka e harus memenuhi:

$$\boxed{x_1 + e = e + x_1 = x_1}$$

$5(0) \in A$

Cari nilai e yang memenuhi kondisi di atas.

$$\boxed{x_1 + e = x_1} \rightarrow e = x_1 - x_1 = 0 \rightarrow e = 5a - 5a = 0$$

Setelah mendapatkan nilai e, pastikan apakah e terdapat dalam himpunan A.
A adalah himpunan dengan $A = \{x \mid x = 5n,\ n \in \mathbb{Z}\}$. Jika kita ambil $n = 0$, maka $x = 0 \in A$. Ini berarti bahwa A memiliki elemen identitas terhadap +.

Sampai pada tahap ini, telah dibuktikan bahwa (A, +) adalah suatu monoid.

Kelima, harus ditunjukkan bahwa setiap anggota di A memiliki invers masing-masing terhadap +.
Ambil sebarang x_1 pada A, katakanlah $x_1 \in A$. Ini berarti, $x_1 = 5a$ dengan $a \in \mathbb{Z}$.
Lalu, misalkan ada suatu elemen x_1^{-1}.
Karena operasi binernya adalah +, maka x_1^{-1} harus memenuhi:

$$x_1 + x_1^{-1} = x_1^{-1} + x_1 = 0$$

$5(-a) \in A$

Cari nilai x_1^{-1} yang memenuhi kondisi di atas.

$$x_1 + x_1^{-1} = 0 \rightarrow x_1^{-1} = 0 - x_1 \rightarrow x_1^{-1} = 0 - 5a = -5a$$

Setelah mendapatkan nilai x_1^{-1}, pastikan apakah x_1^{-1} terdapat dalam himpunan A.
A adalah himpunan dengan $A = \{x \mid x = 5n,\ n \in \mathbb{Z}\}$. Maka,

$$x_1^{-1} = -5a = 5(-a) \in A$$

Ini berarti bahwa setiap anggota di A memiliki invers masing-masing terhadap +.

Sampai pada tahap ini, telah dibuktikan bahwa (A, +) adalah suatu grup.

Keenam, akan ditunjukkan bahwa operasi biner + bersifat komutatif.
Ambil sebarang x_1 dan x_2 pada A, katakanlah $x_1, x_2 \in A$. Ini berarti,

$$x_1 = 5a\ \text{dan}\ x_2 = 5b,\ \text{dengan}\ a, b \in \mathbb{Z}.$$

Akan ditunjukkan bahwa operasi biner + bersifat komutatif.
Dengan kata lain, akan ditunjukkan bahwa $x_1 + x_2 = x_2 + x_1$.

$$\boxed{x_1 + x_2} = 5a + 5b = 5(a + b) = 5(b + a) = 5b + 5a = \boxed{x_2 + x_1}$$

Jadi, operasi biner + bersifat komutatif.

Ring I

Sampai pada tahap ini, telah dibuktikan bahwa (A, +) adalah suatu grup abelian.

$(G, \times)$ Semigrup ?

Ketujuh, harus ditunjukkan bahwa A tertutup terhadap operasi biner ×.
Ambil sebarang x_1 dan x_2 pada A, katakanlah $x_1, x_2 \in A$. Ini berarti,

$$x_1 = 5a \text{ dan } x_2 = 5b\text{, dengan } a, b \in \mathbb{Z}.$$

Akan ditunjukkan bahwa A tertutup terhadap operasi biner ×.
Dengan kata lain, akan ditunjukkan bahwa $x_1 \times x_2$ juga anggota A.

$$x_1 \times x_2 = 5a \times 5b = 5(a \times b) \in A$$

Jadi, A tertutup terhadap ×.

Kedelapan, harus ditunjukkan bahwa operasi biner × bersifat asosiatif.
Ambil sebarang x_1, x_2, dan x_3 pada A, katakanlah $x_1, x_2, x_3 \in A$. Ini berarti,

$$x_1 = 5a\text{, } x_2 = 5b\text{, dan } x_3 = 5c \text{ dengan } a, b, c \in \mathbb{Z}.$$

Akan ditunjukkan bahwa operasi biner × bersifat asosiatif.
Dengan kata lain, akan ditunjukkan bahwa $(x_1 \times x_2) \times x_3 = x_1 \times (x_2 \times x_3)$.

$$\boxed{(x_1 \times x_2) \times x_3} = (5a \times 5b) \times 5c = \boxed{5a \times 5b \times 5c} = 5a \times (5b \times 5c) = \boxed{x_1 \times (x_2 \times x_3)}$$

Kesembilan, harus ditunjukkan bahwa operasi biner + dan × bersifat distributif kiri dan distributif kanan.
Ambil sebarang x_1, x_2, dan x_3 pada A, katakanlah $x_1, x_2, x_3 \in A$. Ini berarti,

$$x_1 = 5a\text{, } x_2 = 5b\text{, dan } x_3 = 5c \text{ dengan } a, b, c \in \mathbb{Z}.$$

Akan ditunjukkan bahwa operasi biner + dan × bersifat distributif kiri dan distributif kanan.
Dengan kata lain akan ditunjukkan bahwa:

$$x_1 \times (x_2 + x_3) = (x_1 \times x_2) + (x_1 \times x_3) \quad \text{[distributif kiri]}$$
$$(x_2 + x_3) \times x_1 = (x_2 \times x_1) + (x_3 \times x_1) \quad \text{[distributif kanan]}$$

$$x_1 \times (x_2 + x_3) = 5a \times (5b + 5c) = 5a \times 5(b + c) = 5[a \times (b + c)]$$

[karena $a, b, c \in \mathbb{Z}$, maka $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$]

$$= 5[(a \times b) + (a \times c)] = 5(a \times b) + 5(a \times c)$$
$$= (x_1 \times x_2) + (x_1 \times x_3) \quad \text{[distributif kiri]}$$

$$(x_2 + x_3) \times x_1 = (5b + 5c) \times 5a = 5(b + c) \times 5a = 5[(b + c) \times a]$$

[karena $a, b, c \in \mathbb{Z}$, maka $(b + c) \times a = (b \times a) + (c \times a)$]

$$= 5[(b \times a) + (c \times a)] = 5(b \times a) + 5(c \times a)$$
$$= (x_2 \times x_1) + (x_3 \times x_1) \quad \text{[distributif kanan]}$$

Dengan demikian, (A, +, ×) adalah suatu ring. ■

Contoh 2:
Diketahui $\mathbb{Z}_2$ adalah himpunan bilangan bulat, dengan $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$. Tunjukkan bahwa $(\mathbb{Z}_2, +, \times)$ adalah ring dengan + dan × merupakan penjumlahan dan perkalian modulo 2!
Jawab:

$1 + 1 = 0$

$(\mathbb{Z}_2, +)$

Tabel Cayley

+	0	1
0	0	1
1	1	0

>> *Apakah* $\mathbb{Z}_2$ *merupakan himpunan tak kosong?*

$\mathbb{Z}_2$ jelas merupakan himpunan tak kosong.

>> *Apakah* $\mathbb{Z}_2$ *tertutup terhadap operasi biner* $+$ *?*

Karena semua hasil jumlahnya merupakan anggota dari $\mathbb{Z}_2$, maka $\mathbb{Z}_2$ tertutup terhadap operasi biner $+$.

>> *Apakah operasi biner* $+$ *bersifat asosiatif?*

Sebagai contoh,

$1 + (0 + 1) = 1 + 1 = 0$

$(1 + 0) + 1 = 1 + 1 = 0$

Dengan memandang sifat operasi $+$ pada bilangan bulat yang pasti bersifat asosiatif, maka operasi biner $+$ pada $\mathbb{Z}_2$ juga bersifat asosiatif.

Sampai pada tahap ini, telah dibuktikan bahwa $(\mathbb{Z}_2, +)$ adalah suatu semigrup.

>> *Apakah* $\mathbb{Z}_2$ *memiliki elemen identitas penjumlahan?*

Perhatikan 'baris 0' dan 'kolom 0'.

+	0	1
0	0	1
1	1	0

$0^{-1} = 0$

$1^{-1} = 1$

Karena setelah proses penjumlahan, hasil yang diperoleh tidak ada yang berubah, maka 0 adalah elemen identitas dari $\mathbb{Z}_2$ terhadap operasi biner $+$.

Sampai pada tahap ini, telah dibuktikan bahwa $(\mathbb{Z}_2, +)$ adalah suatu monoid.

>> *Apakah setiap anggota di* $\mathbb{Z}_4$ *memiliki invers masing-masing terhadap* $+$*?*

Sekarang kita cek apakah setiap anggotanya memiliki invers masing-masing.

Karena 0 adalah elemen identitas, maka setiap baris dan setiap kolomnya haruslah mengandung '0' sebanyak tepat satu.

$$0^{-1} = 0 \qquad ; \qquad 1^{-1} = 1$$

Jadi, setiap anggotanya memiliki invers masing-masing terhadap operasi biner +.

Sampai pada tahap ini, telah dibuktikan bahwa $(\mathbb{Z}_2, +)$ adalah suatu grup.

>> *Apakah operasi biner* $+$ *bersifat komutatif?*

Sebagai contoh,

$0 + 1 = 1 = 1 + 0$

Dengan memandang sifat operasi $+$ pada bilangan bulat yang pasti bersifat komuttif, maka operasi biner $+$ pada $\mathbb{Z}_2$ juga bersifat komutatif.

Sampai pada tahap ini, telah dibuktikan bahwa $(\mathbb{Z}_2, +)$ adalah suatu grup abelian.

$(\mathbb{Z}_2, \times)$

Tabel Cayley

$\times$	0	1
0	0	0
1	0	1

>> *Apakah $\mathbb{Z}_2$ tertutup terhadap operasi biner $\times$?*

Karena semua hasil kalinya merupakan anggota dari $\mathbb{Z}_2$, maka $\mathbb{Z}_2$ tertutup terhadap operasi biner $\times$.

>> *Apakah operasi biner $\times$ bersifat asosiatif?*

Semigrup

Sebagai contoh,

$1 \times (0 \times 1) = 1 \times 0 = 0$

$(1 \times 0) \times 1 = 0 \times 1 = 0$

Dengan memandang sifat operasi $\times$ pada bilangan bulat yang pasti bersifat asosiatif, maka operasi biner $\times$ pada $\mathbb{Z}_2$ juga bersifat asosiatif.

>> *Apakah operasi biner $+$ dan $\times$ bersifat distributif kiri dan distributif kanan?*

Sebagai contoh,

$$\left.\begin{array}{l} 1 \times (0+1) = 1 \times 1 = 1 \\ (1 \times 0) + (1 \times 1) = 0 + 1 = 1 \end{array}\right\} \quad 1 \times (0+1) = (1 \times 0) + (1 \times 1)$$

distributif KIRI

$$\left.\begin{array}{l} (0+1) \times 1 = 1 \times 1 = 1 \\ (0 \times 1) + (1 \times 1) = 0 + 1 = 1 \end{array}\right\} \quad (0+1) \times 1 = (0 \times 1) + (1 \times 1)$$

distributif KANAN

Dengan memandang sifat operasi $+$ dan $\times$ pada bilangan bulat yang pasti bersifat distributif, maka operasi biner $+$ dan $\times$ pada $\mathbb{Z}_2$ juga bersifat distributif (kiri dan kanan).

Dengan demikian, $(\mathbb{Z}_2, +, \times)$ adalah suatu ring. ■

→ $\mathbb{Z}_4 = \{0,1,2,3\}$

Apakah $(\mathbb{Z}_4, +, \times)$ merupakan suatu ring dgn

$+ \rightarrow$ penjumlahan mod 4

$\times \rightarrow$ perkalian mod 4 ?

→ Apakah himpunan semua bilangan bulat genap merupakan suatu ring terhadap penjumlahan & perkalian bilangan bulat ?