Notasi Asimptotik

wijanarto

Definisi

- Notasi asimtotik menyatakan batas fungsi-fungsi tersebut apabila nilai n **semakin besar**, jadi Notasi asimtotik merupakan himpunan fungsi yang dibatasi oleh suatu fungsi $n \in N$ yang cukup besar.
- Contoh
  - $1000\ n^2 \le n^3$; untuk $n \ge 1000$

Kompleksitas Asimptotik

- Cara mengungkapkan komponen utama cost dari algoritma, dengan menggunakan unit ideal kerja komputasi.

Contoh

- Contoh berikut adalah, jika pada RAM menghasilkan waktu tempuh *(1) $10n^3+5n^2+7$, kita tahu bahwa T(n) tersebut berada pada area kubik, dan jika komputer lain menghasilkan (2) $2n^3+3n+79$, hal ini seharusnya dapat di nyatakan juga berada dalam ranah kubik.*
- *Dengan demikian (1) dan (2) berada pada kelas yang sama. Oleh karena itu di perlukan suatu notasi untuk menyatakan waktu tempuh, sedemikian rupa sehingga dapat berlaku di semua komputer. Maka kita perlu menentukan pengkelasan fungsi (classes of function)*

CLASSES OF FUNCTION

- *Asymptotic Notation merupakan notasi formal untuk mengungkapkan mengani suatu fungsi dan mengklasifikasikannya,*
- *Asymptotic Analysis adalah menganalisis dan mengklasifikasikan suatu fungsi ke dalam notasi asimptotik dan untuk mengklasifikasikan notasi kita perlu fitur-fitur untuk melakukannya.*

Fitur Utama

- Bagaimana meletakan fungsi yang berbeda ke dalam kelas yang sama, misal *$10n^3+5n^2+17$ dan $2n^3+3n+79$ seharusnya berada dalam satu kelas. Sehingga* ***pengali konstan (constant multiplier) harus diabaikan dalam kedua fungsi diatas.***
- Notasi pada Class juga harus memperhatikan adanya kencenderungan nilai *n ke arah tak* hingga ($n \rightarrow \infty$) *, sehingga kita juga harus memperhatikan ukuran dan prilaku dari input instance n.*

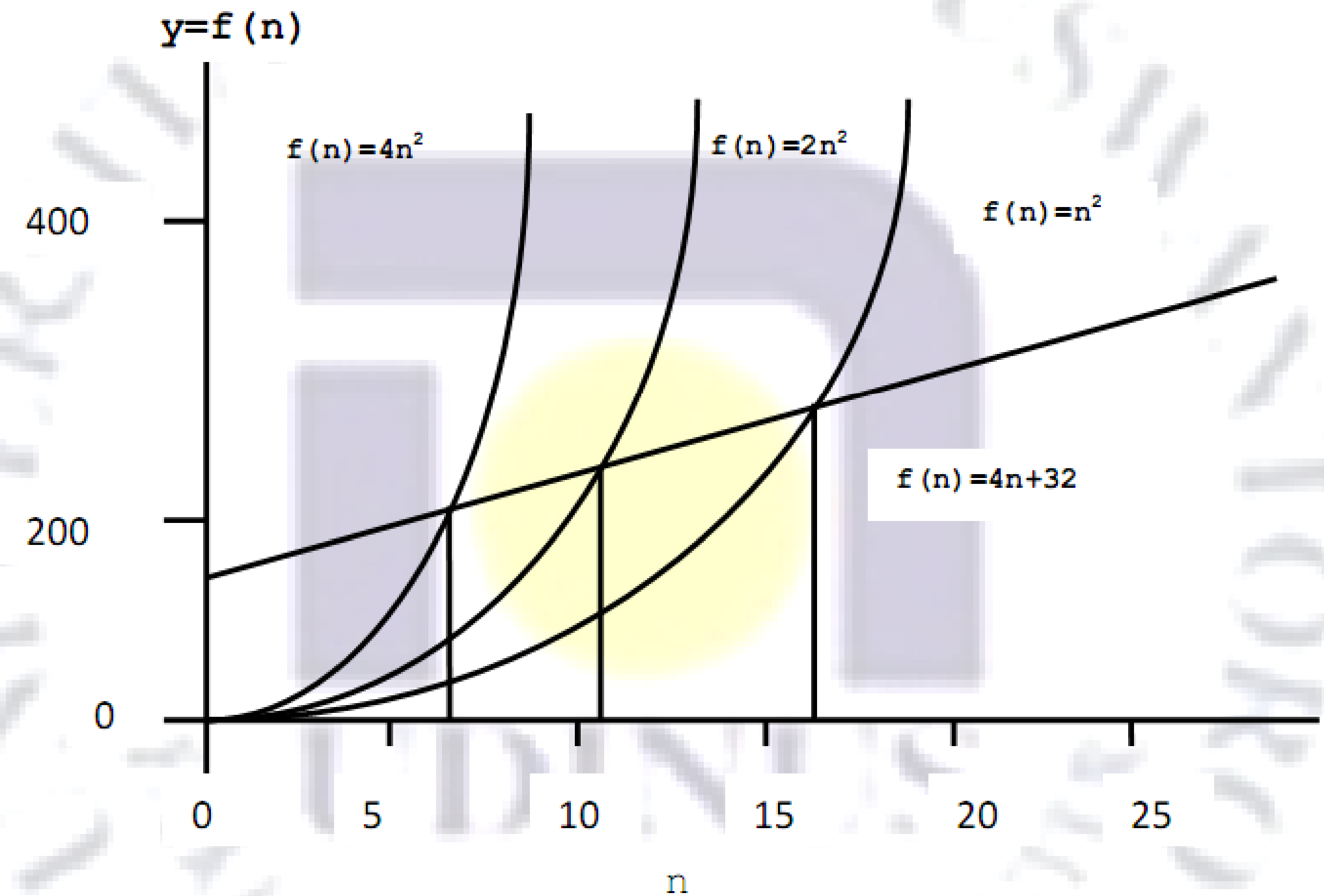
Macam NA

- Ada 3 Notasi Asimtotik :
- O (big oh atau order of)
- Ω (omega)
- Θ (theta)

Big Oh atau O

- Merupakan batas atas fungsi atau order waktu proses,
- g: N→ R^+ adalah suatu fungsi
- O(g(n)) merupakan kumpulan fungsi-fungsi N→ R^+ yang mempunyai **batas atas** g(n) untuk n yang **cukup besar**.
- $O(g(n)) = \{f(n)/(\exists c \in R^+)\ (\exists\ n \in N) \ni |f(n)| \leq c\ g(n),\ n \geq N)$

Big-Oh



Gambar 17. Fungsi $f(n)=4n+32 = O(n^2)$

contoh

- $1000\ n^2 \in O(n^3)$ karena

$1000\ n^2 \leq 1 \times n^3$ untuk $n \geq 1000$ $\quad 1 = c,\ 1000 = N$

- $1000\ n^2 \in O(n^2)$, Carilah c dan n

$1000\ n^2 \in O(n^2)$

$1000\ n^2 \leq c\ n^2$

$c = 1000$

$1000\ n^2 \leq 1000\ n^2$, $n \geq 1$

contoh

Apakah $5n + 10 \in O(n^2)$?

Ya, karena $5n + 10 < 5n^2 + 10n^2 = 15n^2$ untuk $n > 1$

Jadi untuk $c = 15$, $n_0 = 1$ $|5n + 10| < c \cdot |n^2|$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = L$$

Jika $L = 0$, maka $f(n) \in O(g(n))$

$g(n) \notin O(f(n))$

Jika $L \neq 0$, maka $f(n) \in O(g(n))$

$g(n) \in O(f(n))$

Jika $L = \pm\infty$, maka $f(n) \notin O(g(n))$

$g(n) \in O(f(n))$

contoh

- $f(n) = 3n^2+5n+10$
- $g(n)=n^2$ merupakan **order** atau **batas atas** untuk f(n)
- **$g(n) \leq f(n)$**
- misal : $3g(n)=3n^2 \leq 3n^2+5n+10$,
- Bagaimana dengan $(3+1)g(n)=4n^2$ …….$3n^2+5n+10 \leq 4\ n^2$
- dengan $n \geq 10$ dan $3n^2+5n+10 \leq 4n^2$

  n_0 c
- Jadi $3n^2+5n+10 \in O(n^2)$, karena untuk $n \geq 10$, $3n^2+5n+10 \leq 4n^2$

contoh

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+5n+10}{n^2} = 3+\frac{5}{n}+\frac{10}{n^2} = 3+0+0$$

$$= 0 \to c$$

Karena,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}\begin{cases} c\in\Re^{+}\cup\{0\}\to f(n)\in O(g(n)) \\ \infty\to f(n)\notin O(g(n)) \end{cases}$$

Sehingga, $3n^2+5n+10 \in O(n^2)$

Teorema Polinomial Dalam Notasi Oh

- Jika $a_0,a_1,\dots,a_n$ adalah bilangan riil dengan $a_n \neq 0$ maka $f(x)=a_n x^n+\dots+a_1 x+a_0$ adalah $O(x^n)$.
- Contoh :
- Cari Order deret 1+2+3+…+n ?
- Jawab :
- $1+2+3+\dots+n = = \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{2} n$, sehingga Ordernya adalah $O(n^2)$

Teorema Logaritma Dalam Notasi Oh

- Jika b adalah bilangan riil > 1 maka :
- ${}^{b}\log x$ adalah $O(x^n)$ untuk semua bilangan bulat $n \geq 1$
- x^n adalah $O(b^x)$ untuk semua ilangan bulat $n \geq 0$
- $x \; {}^{b}\log x$ adalah $O(x^2)$ $\forall$ $x \geq b$

Teorema Hirarki Dalam Notasi Oh

- Setiap fungsi merupakan big oh dari fungsi kanannya :
- 1,$^2\log(n)$,…., , , , n, n($^2\log$ (n)),n , n^2,n^3,…,2^n,n!,n^n.

Teorema Lainnya Dalam Notasi Oh

- Jika $f(n) = O(g(n))$ dan c adalah konstanta maka $c\, f(n)=O(g(n))$
- Jika $f(n) = O(g(n))$ dan $h(n)= O(g(n))$ maka $h(n)+f(n)=O(g(n))$
- Jika $f(n) = O(a(n))$ dan $g(n)= O(b(n))$ maka $f(n)\, g(n)=O(a(n)\, b(n))$
- Jika $a(n) = O(b(n))$ dan $b(n)= O(c(n))$ maka $a(n)=O(c(n))$
- Jika $f(n) = O(a(n))$ dan $g(n)= O(b(n))$ maka $f(n)+g(n)=O(\max\{|a(n)|,|b(n)|\})$

contoh

- Nyatakan fungsi di bawah ini dalam notasi O :

a. n+n(^{2} log n)

b. $\sqrt{n^3}\sin n(^2\log n)$

c. $\frac{1}{2}n(^2\log n)+3n+15$

jawab

a. n=O(n) ;n(^{2} log n)=O(n(^{2} log n)), sehingga O(n(^{2} log n))=O(max {n, n(^{2} log n)}), karena letak O(n) lebih kiri dari n(^{2} log n) maka max {n, n(^{2} log n)})= n(^{2} log n), sehingga n+n(^{2} log n) adalah O(n(^{2} log n))

b. $\sqrt{n^3}\sin n \le \sqrt{n^3}$ karena sin n ≤ 1, sehingga $\sqrt{n^3}\sin n$ adalah O($\sqrt{n^3}$), disamping itu ^{2} log n adalah O($\sqrt{n}$), maka $\sqrt{n^3}\sin n({}^2\log n)$ adalah O($\sqrt{n^3}$, $\sqrt{n}$)=O(n^2)

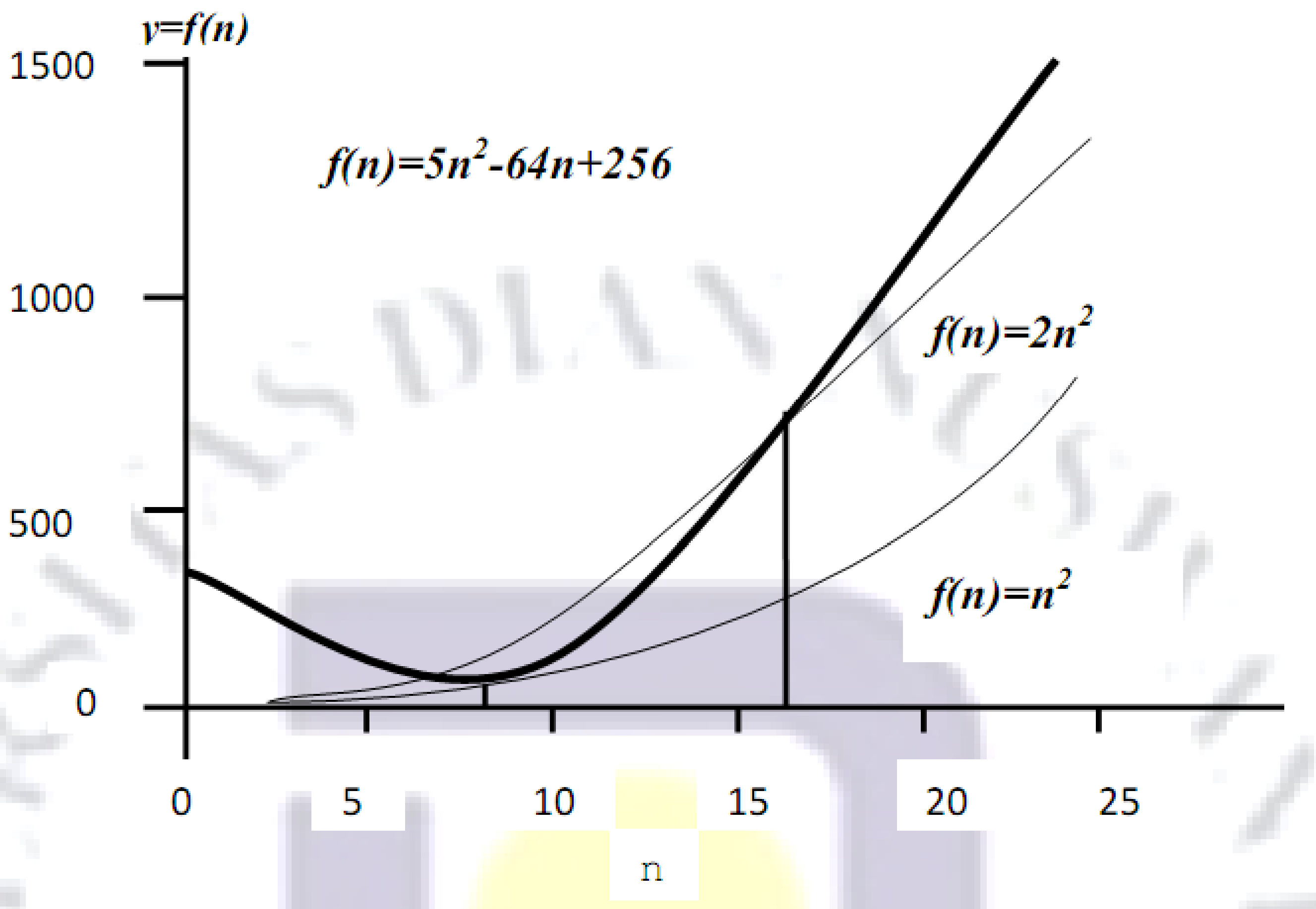
c. $\frac{1}{2}n({}^2\log n)$ adalah O(n(^{2} log n)), sebab 3n adalah O(n) dan 15 adalah O(1), jadi $\frac{1}{2}n({}^2\log n)+3n+15$ adalah O(max {n(^{2} log n), n, 1}), karena n(^{2} log n) terletak paling kanan, maka mx{n (^{2} log n), n, 1} = n (^{2} log n), sehingga $\frac{1}{2}n({}^2\log n)+3n+15$ adalah O(n (^{2} log n)).

Ω (omega)

- Merupakan kebalikan dari big Oh (Order)
- **Ω(g(n))=g(n) merupakan batas bawah fungsi-fungsi f(n)**
- **Ω (g(n)) = {f(n)/(∃c ∈ R$^+$) (∃ n ∈ N) ∍ |f(n)| ≥ c . g (n), n ≥ N)**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}\begin{cases} 0 \rightarrow f(n) \in O(g(n)) \\ \left.\begin{array}{l} c \in \Re^+ \\ \infty \end{array}\right\} \rightarrow f(n) \in \Omega(g(n)) \end{cases}$$

Omega



Gambar 18. Fungsi $f(n)=4n\text{-}64n+288 = \Omega(n^2)$

contoh

- Jadi dari contoh sebelumnya maka
- $3n^2+5n+10 \in \Omega(n\sqrt{n})$, tetapi $3n^2+5n+10 \notin \Omega(n^2 \log n)$, karena

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+5n+10}{n^2 \log n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{\log n} + \frac{5}{n \log n} + \frac{10}{n^2 \log n} = 0+0+0 = 0$$

contoh

- $n^3 \geq 1000\ n^2$ untuk $n \geq 1000$
  $n^3 \in \Omega\ (1000\ n^2)$
- $n^3 \geq n^2$, $n \geq 1$
  $n^3 \in \Omega\ (n^2)$
- $(n + 1)! = (n + 1)\ n! \geq n!$ untuk $n \geq 1$
  $(n + 1)! \in \Omega\ (n!)$
- $5000\ n^2 + 10000\ n + 10^6 \geq n^2$, untuk $n \geq 1$
  $5000\ n^2 + 10000\ n + 10^6 \in \Omega\ (n^2)$
  $5000\ n^2 + 10000\ n + 10^6 \in O(n^2)$
  $5000\ n^2 + 10000\ n + 10^6 \in O\ (n^2) \cap \Omega\ (n^2)$
  $O\ (n^2) \cap \Omega\ (n^2) = \theta(n^2)$

jadi

$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = L$ Jika L = 0, maka $f(n) \notin \Omega(g(n))$

$g(n) \in \Omega(f(n))$

Jika $L \neq 0$, maka $f(n) \in \Omega(g(n))$

$g(n) \in \Omega(f(n))$

Jika $L = \pm\infty$, maka $f(n) \in \Omega(g(n))$

$g(n) \notin \Omega(f(n))$

$50n + 10 \ln n \in \Omega(\ln n)$

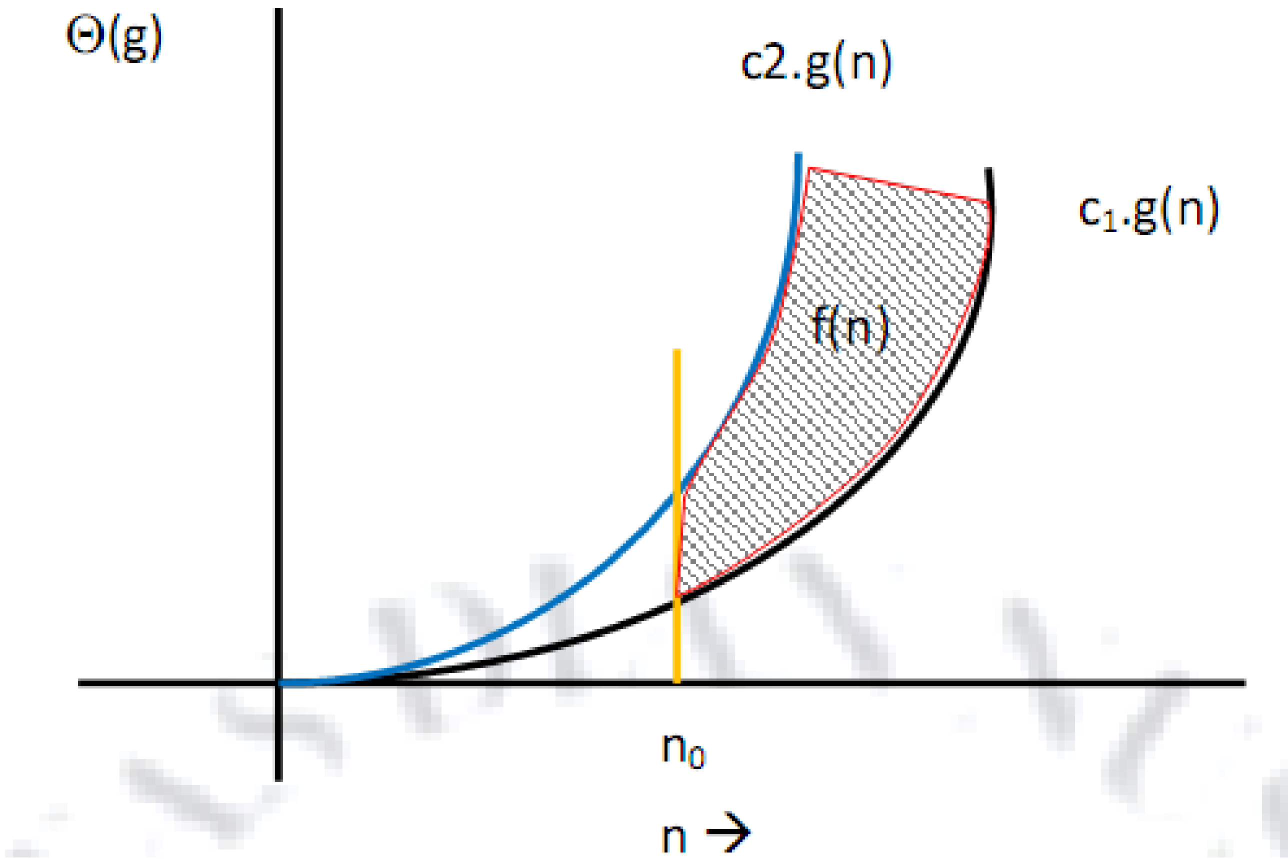
$n^2 \notin \Omega(n^3)$

Θ (theta)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}\begin{cases} 0 \to f(n) \in O(g(n)), f(n) \notin \Omega(g(n)) \\ c \in \Re^{+} \to f(n) \in O(g(n)) \cap \Omega(g(n)) > \Theta(g(n)) \\ \infty \to f(n) \notin O(g(n)), f(n) \in \Omega(g(n)) \end{cases}$$

- Sehingga,
- f(n) $\in\theta$ (g(n)) bila dan hanya bila f(n) $\in$ O (g(n) $\cap$ Ω (g(n)))
- f(n) mempunyai order yang sama dengan g(n)
- f(n) $\in\theta$ (g(n) bila dan hanya bila g(n) $\in\theta$ (f(n)), f(n) berupa fungsi non rekursif
- Notasi Asimtotik digunakan untuk menentukan kompleksitas suatu algoritma dengan melihat waktu tempuh algoritma. Waktu tempuh algoritma merupakan
- fungsi : N → $R^{+,}$
- Jadi
- O(g(n))$\cap$Ω(g(n))$\rightarrow$ **Θ(g(n)) maka,**
- **f(n)$\in$ Θ(g(n)) BILA DAN HANYA BILA (g(n)) $\in$ Θ(g(n))**

Theta



contoh

- $3n^2+5n+10 \in$ **$\Theta(n^2)$**
- **$2^{n+1} \in \Theta(2^{2n})$???????? jawabannya adalah BUKAN/TIDAK, karena**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2 \bullet 2^n}{\left(2^n\right)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{2^n} = 0$$

- Jadi $2^{n+1} \in$ **$O(2^{2n})$ tetapi** $2^{n+1} \notin \Omega$ **(2^{2n})**