RELASI

(Bagian I)

2.1. Hasil Kali Cartesius (Cartesian Product)

Hasil kali Cartesius dari himpunan *A* ke himpunan *B*, $A \times B$, adalah himpunan semua pasangan terurut (a,b) dengan $a \in A$ dan $b \in B$; dapat pula dituliskan sebagai berikut:

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \text{ dan } b \in B\}$$

Kardinalitas dari $A \times B$ dapat ditentukan sebagai berikut:

$$n(A \times B) = n(A) \times n(B)$$

Contoh 1:
Diketahui $A = \{1,2,3\}$ dan $B = \{x, y\}$. Tentukanlah $A \times B$ dan $B \times A$!
Jawab:
$A \times B = \{(1,x),(1,y),(2,x),(2,y),(3,x),(3,y)\}$
$B \times A = \{(x,1),(x,2),(x,3),(y,1),(y,2),(y,3)\}$

2.2. Definisi Relasi

Relasi merupakan himpunan yang anggotanya adalah pasangan terurut. Relasi *N*-ary merupakan relasi antar *N* himpunan; sebagai contoh:

- jika *N* = 2, relasinya disebut relasi binar, yaitu himpunan bagian dari $A \times B$,
- jika *N* = 3, relasinya disebut relasi trinar, yaitu himpunan bagian dari $A \times B \times C$,
- jika *N* = 4, relasinya disebut relasi kuartnar, yaitu himpunan bagian dari $A \times B \times C \times D$.

Dalam bab ini, relasi yang akan dipelajari adalah relasi binar.

2.3. Relasi Binar

Relasi binar, katakanlah *R*, dari himpunan *A* ke himpunan *B* disimbolkan $R \subseteq A \times B$. Sementara relasi binar pada himpunan *A* disimbolkan sebagai $R \subseteq A \times A$.

Sebagai contoh, jika diketahui himpunan $T = \{1,2,4,16\}$. Maka, beberapa contoh relasi binar pada himpunan *T* adalah:

a. $R_1 = \{(x,y) \mid x \text{ adalah kuadrat dari } y\}$
$\quad = \{(1,1),(4,2),(16,4)\}$

b. $R_2 = \{(x,y) \mid x \text{ habis membagi } y\}$
$\quad = \{(1,1),(1,2),(1,4),(1,16),(2,2),(2,4),(2,16),(4,4),(4,16),(16,16)\}$

c. $R_3 = \{(x,y) \mid x - y = 5\}$
$\quad = \varnothing$

Dari ketiga contoh di atas, perhatikan bahwa R_1, R_2, dan R_3 merupakan himpunan bagian dari $T \times T$. Dengan kata lain, $R_1 \subseteq T \times T$, $R_2 \subseteq T \times T$, dan $R_3 \subseteq T \times T$.

Catatan penting terkait relasi binar.

Misalkan *A* dan *B* adalah sebarang himpunan. Maka,
1. banyaknya relasi binar dari himpunan *A* ke himpunan *B* adalah $2^{n(A \times B)}$.
2. banyaknya relasi binar pada himpunan *A* adalah $2^{n(A \times A)}$.

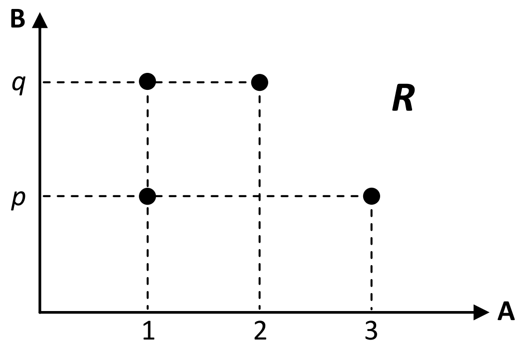
Mulai dari sekarang dan seterusnya, istilah relasi binar dalam bab ini akan disebut sebagai relasi saja.

2.4. Penyajian Relasi

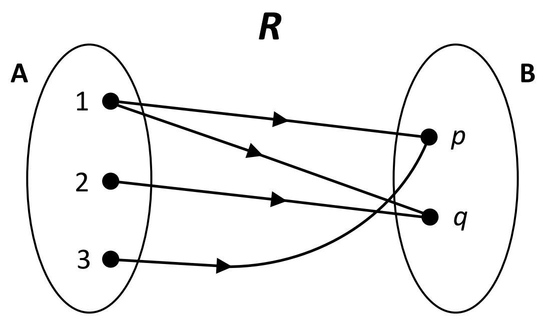
Penyajian relasi dari himpunan *A* ke himpunan *B* ada empat cara, yaitu:
1. penyajian dalam bentuk himpunan titik pada bidang Cartesius,
2. penyajian dalam bentuk diagram panah,
3. penyajian dalam bentuk matriks,
4. penyajian dalam bentuk digraf (graf berarah).

Perhatikan contoh berikut. Misalkan himpunan $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{p, q\}$. Diketahui suatu relasi dari *A* ke *B* dengan $R = \{(1, p), (1, q), (2, q), (3, p)\}$. Penyajian relasi *R* tersebut dinyatakan sebagai berikut:

a. dalam bentuk himpunan titik pada bidang Cartesius;
himpunan pertama sebagai sumbu-*x*, sementara himpunan kedua sebagai sumbu-*y*



b. dalam bentuk diagram panah;
himpunan pertama sebagai daerah asal (domain), sementara himpunan kedua sebagai daerah kawan (kodomain)

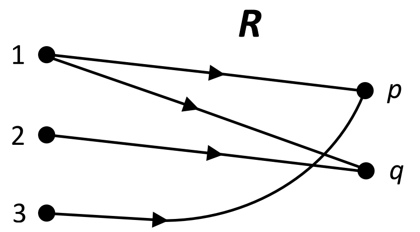


c. dalam bentuk matriks;
himpunan pertama sebagai baris, sementara himpunan kedua sebagai kolom, dengan ketentuan sebagai berikut

$$M_{ij} = \begin{cases} 1 \ ; \ i, j \text{ ada relasi} \\ 0 \ ; \ i, j \text{ tidak ada relasi} \end{cases}$$

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

d. dalam bentuk digraf (graf berarah);



2.5. Tanda Keanggotaan Relasi

Bentuk penulisan keanggotaan dalam suatu relasi ada beberapa macam, yaitu; jika *x* berelasi dengan *y*, penulisannya adalah:

$$(x, y) \in R \quad \text{atau} \quad x\,R\,y \quad \text{atau} \quad x \xrightarrow{R} y$$

Sebagai contoh, misal diberikan himpunan $A = \{1, 2, 4, 16\}$ dengan relasi $R = \{(x, y) \mid x \text{ adalah kuadrat dari } y\}$. Maka,

$(1,1) \in R$ (1 berelasi dengan 1)
$(4, 2) \in R$ (4 berelasi dengan 2)
$(2, 4) \notin R$ (2 *tidak* berelasi dengan 4)
$(4,16) \notin R$ (4 *tidak* berelasi dengan 16)

2.6. Relasi Invers

Diberikan suatu relasi *R* dari himpunan *A* ke himpunan *B*, $R = \{(x, y) \mid x \in A \text{ dan } y \in B\}$. Maka, relasi inversnya didefinisikan sebagai berikut:

$$R^{-1} = \{(y, x) \mid y \in B \text{ dan } x \in A\}$$

Contoh 2:
Diketahui himpunan $A = \{1, 2, 4,16\}$ dengan relasi $R = \{(x, y) \mid x \text{ adalah kuadrat dari } y\}$.
Tentukanlah relasi invers dari *R*!
Jawab:
$R = \{(x, y) \mid x \text{ adalah kuadrat dari } y\} = \{(1,1), (4, 2), (16, 4)\}$
$R^{-1} = \{(y, x) \mid y \text{ adalah akar kuadrat dari } x\} = \{(1,1), (2, 4), (4,16)\}$

Seperti yang sudah dijelaskan pada Subbab 2.4, penyajian relasi invers pun dapat disajikan dalam empat cara, yaitu:

1. dalam bentuk himpunan titik pada bidang Cartesius;
   Jika $R \subseteq A \times B$, maka $R^{-1} \subseteq B \times A$. Artinya, pada relasi invers, himpunan kedua (*B*) sebagai sumbu-*x*, sementara himpunan pertama (*A*) sebagai sumbu-*y*.
2. dalam bentuk diagram panah;
   Jika $R \subseteq A \times B$, maka $R^{-1} \subseteq B \times A$. Artinya, pada relasi invers, himpunan kedua (*B*) sebagai daerah asal (domain), sementara himpunan pertama (*A*) sebagai daerah kawan (kodomain).
3. dalam bentuk matriks;
   Jika $R \subseteq A \times B$, maka $R^{-1} \subseteq B \times A$. Artinya, pada relasi invers, himpunan kedua (*B*) sebagai baris, sementara himpunan pertama (*A*) sebagai kolom.
   Selain itu, jika diketahui M_R adalah suatu matriks relasi, maka matriks relasi inversnya adalah transpos dari M_R, yaitu $M_{R^{-1}} = M_R{}^T$.
4. dalam bentuk digraf (graf berarah);
   Jika relasi *R* disajikan dalam bentuk digraf, maka relasi inversnya dapat diperoleh dengan mengubah arah setiap busur pada digraf *R*.

2.7. Komposisi Relasi

Diketahui *R* merupakan suatu relasi dari himpunan *A* ke himpunan *B* ($R \subseteq A \times B$) dan *S* merupakan suatu relasi dari himpunan *B* ke himpunan *C* ($S \subseteq B \times C$). Maka, suatu relasi baru dari himpunan *A* ke himpunan *C*, $S \circ R$, didefinisikan sebagai semua pasangan terurut (a,c) dengan syarat bahwa ada $b \in B$ yang memenuhi $(a,b) \in R$ sehingga $(b,c) \in S$. Secara singkat,

$$S \circ R \subseteq A \times C \text{ dengan}$$
$$S \circ R = \{(a,c) \mid \text{ada } b \in B \text{ yang memenuhi } (a,b) \in R \text{ sehingga } (b,c) \in S\}$$

Contoh 3:
Diberikan himpunan $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{p,q,r,s\}$, dan $C = \{x,y,z\}$. Diketahui:

$R \subseteq A \times B$ dengan $R = \{(1,p),(2,s),(3,p),(3,q),(4,s)\}$

$S \subseteq B \times C$ dengan $S = \{(q,x),(q,z),(r,y),(s,z)\}$

Tentukanlah $S \circ R$!
Jawab:
$S \circ R = \{(2,z),(3,x),(3,z),(4,z)\}$

Catatan penting terkait komposisi relasi.

1. Jika M_R adalah matriks relasi *R* ($R \subseteq A \times B$) dan M_S adalah matriks relasi *S* ($S \subseteq B \times C$), maka matriks relasi $S \circ R$, disimbolkan $M_{S \circ R}$, dapat dicari dengan $M_{S \circ R} = M_R \cdot M_S$.
2. Komposisi relasi bersifat asosiatif. Artinya, $T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$.
3. $R^2 = R \circ R$; $R^3 = R \circ R \circ R$; $R^4 = R \circ R \circ R \circ R$; dan seterusnya.

Contoh 4:

Jika diketahui matriks relasi R dari himpunan A ke himpunan B adalah $M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

dan matriks relasi S dari himpunan B ke himpunan C adalah $M_S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, tuliskanlah

$S \circ R$ dalam bentuk matriks!

Jawab:

$$M_{S\circ R} = M_R \cdot M_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.8. Sifat Relasi

2.8.1. Refleksif

Suatu relasi R pada himpunan A dikatakan refleksif jika $(a,a) \in R$ untuk setiap $a \in A$. Dengan kata lain, suatu relasi pada himpunan A disebut refleksif jika setiap anggota pada A berelasi dengan dirinya sendiri.

2.8.2. Simetris

Suatu relasi R pada himpunan A dikatakan simetris jika $(a,b) \in R$, maka berlaku $(b,a) \in R$. Dengan kata lain, suatu relasi pada himpunan A disebut simetris jika dan hanya jika a berelasi dengan b, maka b haruslah berelasi dengan a.

2.8.3. Transitif

Suatu relasi R pada himpunan A dikatakan transitif jika $(a,b) \in R$ dan $(b,c) \in R$, maka berlaku $(a,c) \in R$ untuk setiap $a,b,c \in A$.

2.8.4 Antisimetris

Suatu relasi R pada himpunan A dikatakan antisimetris jika $(a,b) \in R$ dan $(b,a) \in R$, maka berlaku $a = b$ untuk setiap $a,b \in A$. Dengan kata lain, satu-satunya cara untuk menyatakan a berelasi dengan b dan b berelasi dengan a ialah a dan b harus merupakan anggota yang sama; $a = b$.

2.8.5. Irrefleksif

Suatu relasi R pada himpunan A dikatakan irrefleksif jika $(a,a) \notin R$ untuk setiap $a \in A$. Dengan kata lain, suatu relasi pada himpunan A disebut irrefleksif jika setiap anggota pada A tidak berelasi dengan dirinya sendiri.

2.8.6. Asimetris

Suatu relasi R pada himpunan A dikatakan asimetris jika $(a,b) \in R$, maka berlaku $(b,a) \notin R$. Dengan kata lain, suatu relasi pada himpunan A disebut asimetris jika dan hanya jika a berelasi dengan b, maka b tidak boleh berelasi dengan a.

Contoh 5:
Diberikan himpunan $A = \{1,2,3,4\}$ dengan beberapa relasi pada A sebagai berikut:

$R_1 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,4),(4,1),(4,4)\}$,

$R_2 = \{(1,1),(1,2),(2,1)\}$,

$R_3 = \{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(3,3),(4,1),(4,4)\}$,

$R_4 = \{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3)\}$,

$R_5 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)\}$,

$R_6 = \{(3,4)\}$.

Tentukanlah relasi mana saja yang memenuhi sifat refleksif, simetris, transitif, antisimetris, irrefleksif, dan asimetris!
Jawab:

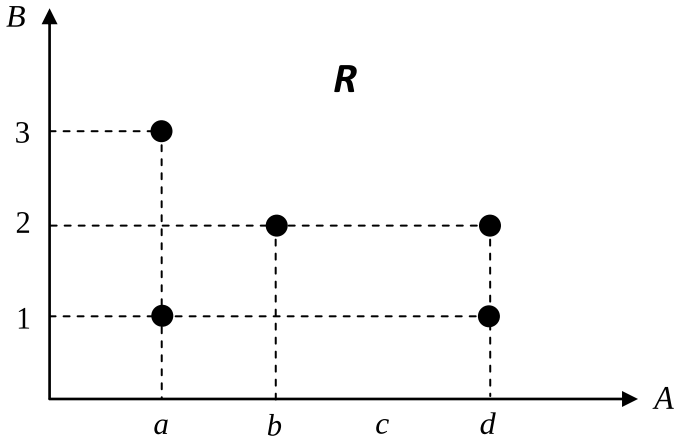
Refleksif	:	R_3, R_5
Simetris	:	R_2, R_3
Transitif	:	R_4, R_5, R_6
Antisimetris	:	R_4, R_5, R_6
Irrefleksif	:	R_4, R_6
Asimetris	:	R_4, R_6

L A T I H A N   S O A L

1. Misalkan himpunan A = {1,2,3,4,5,6} dan R adalah suatu relasi pada himpunan A dengan $R = \{(x, y) \mid x + y = 5\}$. Nyatakanlah R dalam:
   a. bidang Cartesius
   b. diagram panah
   c. matriks
   d. digraf

2. Diketahui A = {1,2,3} dan B = {1,2,3,4}. Diketahui pula relasi-relasi dari himpunan A ke himpunan B sebagai berikut:
   $R_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$
   $R_2 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4)\}$
   Tentukan:
   a. $R_1 \cup R_2$
   b. $R_1 \cap R_2$
   c. $R_2 - R_1$
   d. $R_2 \oplus R_1$

3. Perhatikanlah gambar berikut!



   Jika $R \subseteq A \times B$, nyatakanlah R^{-1} dalam bentuk matriks dan digraf!

4. Diketahui himpunan $A = \{a \mid a \text{ adalah faktor dari } 24\}$ dan R merupakan suatu relasi pada himpunan A dengan $R = \{(x, y) \mid x \le y\}$. Tentukanlah sifat-sifat dari relasi R tersebut!

5. Jika relasi R pada suatu himpunan disajikan dalam matriks berikut:

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Tentukanlah:
   a. matriks yang merepresentasikan R^{-1}!
   b. matriks yang merepresentasikan R^{C}!
   c. matriks yang merepresentasikan R^{2}!

6. Misalkan relasi R = {(1,2),(1,3),(2,3),(2,4),(3,1)} dan relasi S = {(2,1),(3,1),(3,2),(4,2)}. Tentukanlah $S \circ R$!