INDUKSI MATEMATIKA

8.1. Definisi Induksi Matematika

Induksi matematika adalah cara untuk membuktikan bahwa sebuah pernyataan yang diberikan berlaku untuk setiap bilangan asli.

Misalkan $S(n)$ adalah suatu pernyataan yang selalu bernilai benar untuk semua bilangan bulat positif *n*. Untuk membuktikan bahwa $S(n)$ bernilai benar untuk setiap bilangan bulat positif *n*, tunjukkanlah dengan dua langkah berikut:

BASIC STEP :

>> buktikan bahwa saat $n=1$, $S(n)$ bernilai benar; dengan kata lain, buktikan bahwa $S(1)$ bernilai benar

INDUCTIVE STEP :

>> misalkan saat $n=k$, $S(n)$ bernilai benar, lalu buktikan saat $n=k+1$, $S(n)$ juga bernilai benar; dengan kata lain, saat $S(k)$ bernilai benar, buktikan $S(k+1)$ juga bernilai benar

8.2. Penggunaan Induksi Matematika

Berikut akan disajikan beberapa contoh terkait penggunaan $\boxed{\text{induksi}}$ matematika dalam membuktikan suatu pernyataan matematika.

BS: $n=1$ $\boxed{S(1)}$

Contoh 1:

$S(n)$ kiri → $1+2+3+\ldots+n$

Buktikan bahwa $\boxed{1+2+3\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}}$ untuk setiap *n* bilangan asli!

$S(2)$ kanan → $\frac{2(2+1)}{2}$

Jawab:

BASIC STEP :

Karena untuk setiap *n* bilangan asli, maka *n* dimulai dari 1, sehingga harus dibuktikan bahwa $S(1)$ bernilai benar.

$S(1)$ → ruas kiri: 1 ✓

$S(1)$ → ruas kanan: $\frac{1(1+1)}{2}=\frac{1\cdot 2}{2}=1$ ✓

Perhatikan bahwa ruas kiri *sama dengan* ruas kanan. Jadi, $S(1)$ bernilai benar.

INDUCTIVE STEP : ✓

Misalkan $S(k)$ bernilai benar. Artinya:

$S(4)$ → $1+2+3+4$

$$S(k) \to \boxed{1+2+3+\ldots+k=\frac{k(k+1)}{2}}$$

$S(k+1)$.

Akan ditunjukkan bahwa $\boxed{S(k+1)}$ bernilai benar; dengan kata lain, harus ditunjukkan bahwa:

$S(k+1)$ kiri → $\boxed{1+2+3+\ldots+k+(k+1)}$

$S(k+1)$ kanan → $\frac{(k+1)(k+1+1)}{2}=\boxed{\frac{(k+1)(k+2)}{2}}$

$1+2+3+...+k = \frac{k(k+1)}{2}$ ✓

$$\rightarrow \boxed{1+2+3+...+k+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}}$$

$$\frac{k(k+1)}{2}$$

didapat dari : ganti k dengan $k+1$, menjadi

$$\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Bukti:

Karena $1+2+3+...+k = \frac{k(k+1)}{2}$, maka

$$\begin{aligned}
\boxed{1+2+3+...+k}+(k+1) &= \boxed{\frac{k(k+1)}{2}}+(k+1) \\
&= \frac{k(k+1)}{2}+\frac{2(k+1)}{2} \\
&= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} \\
&= \frac{k^2+k+2k+2}{2} \\
&= \frac{k^2+3k+2}{2} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2}
\end{aligned}$$

Dengan demikian, terbukti bahwa $1+2+3...+n = \frac{n(n+1)}{2}$ untuk setiap n bilangan asli.

$S(0)$

Contoh 2:

Buktikan bahwa $\boxed{2^0+2^1+2^2+...+2^n} = 2^{n+1}-1$ untuk setiap bilangan bulat $n \geq 0$!

Jawab:

$S(0)$ $S(1) = 2^0+2^1$

BASIC STEP :

Karena untuk setiap bilangan bulat $n \geq 0$, maka n dimulai dari 0, sehingga harus dibuktikan bahwa $S(0)$ bernilai benar.

$S(2) = 2^0+2^1+2^2$

$S(0) \rightarrow$ ruas kiri: $2^0 = 1$

$S(0) \rightarrow$ ruas kanan: $2^{0+1}-1 = 2-1 = 1$

Perhatikan bahwa ruas kiri *sama dengan* ruas kanan. Jadi, $S(0)$ bernilai benar.

INDUCTIVE STEP :

Misalkan $S(k)$ bernilai benar. Artinya:

$$\boxed{2^0+2^1+2^2+...+2^k = 2^{k+1}-1}$$

Akan ditunjukkan bahwa $S(k+1)$ bernilai benar; dengan kata lain, harus ditunjukkan bahwa:

$S(k+1)$ kiri $\rightarrow \boxed{2^0+2^1+2^2+...+2^k+2^{k+1}}$

— // — kanan $\rightarrow \boxed{2^{k+2}-1}$

$2^0+2^1+\dots+2^k=2^{k+1}-1$

$$\boxed{2^0+2^1+2^2+\dots+2^k}+2^{k+1}=2^{k+2}-1$$

$2^{k+1}-1$

didapat dari: ganti k dengan $k+1$, menjadi

$2^{(k+1)+1}-1=2^{k+2}-1$

$a+a$

$2a$

$2^2\times 2^3$

Bukti:

Karena $2^0+2^1+2^2+\dots+2^k=2^{k+1}-1$, maka

$$
\begin{aligned}
2^0+2^1+2^2+\dots+2^k+2^{k+1} &= (2^{k+1}-1)+2^{k+1}\\
&= 2^{k+1}+2^{k+1}-1\\
&= 2\cdot 2^{k+1}-1\\
&= 2^1\cdot 2^{k+1}-1\\
&= 2^{1+k+1}-1\\
&= 2^{k+2}-1
\end{aligned}
$$

$2^{k+2}-1$

Dengan demikian, terbukti bahwa $2^0+2^1+2^2+\dots+2^n=2^{n+1}-1$ untuk setiap bilangan bulat $n\geq 0$.

$S(1)$ kiri → $5^1=5$

kanan → $1^2=1$

$5>1$ ✓

Contoh 3:

Buktikan bahwa $5^n>n^2$ untuk setiap n bilangan bulat positif!

Jawab:

BASIC STEP :

Karena untuk setiap n bilangan bulat positif, maka n dimulai dari 1, sehingga harus dibuktikan bahwa $S(1)$ bernilai benar.

$S(1)\rightarrow \quad 5^1>1^2 \rightarrow \quad$ pernyataan ini bernilai benar

Jadi, $S(1)$ bernilai benar.

$S(k+1)\rightarrow 5^{k+1}>(k+1)^2$

INDUCTIVE STEP :

Misalkan $S(k)$ bernilai benar. Artinya diketahui:

k^2+2k+1

$$5^k>k^2$$

Akan ditunjukkan bahwa $S(k+1)$ bernilai benar; dengan kata lain, harus ditunjukkan bahwa:

$$5^{(k+1)}>(k+1)^2$$

$5^k>k^2$

Bukti:

$5\cdot 5^k>5k^2$

$$
\begin{aligned}
5^{(k+1)} &= 5^k\cdot 5\\
&= 5\cdot 5^k\\
&> 5k^2 && \text{(karena } 5^k>k^2\text{)}\\
&= k^2+2k^2+2k^2 && \text{(karena } 5k^2=k^2+2k^2+2k^2\text{)}\\
&\geq k^2+2k+1 && \text{(karena } k^2\geq k^2;\ 2k^2\geq 2k;\ 2k^2\geq 1\text{)}\\
&= (k+1)^2
\end{aligned}
$$

$3\geq 1$

Dengan demikian, terbukti bahwa $5^n>n^2$ untuk setiap n bilangan bulat positif.

Contoh 4:

Buktikan bahwa $n+1 \le n^2$ untuk setiap bilangan asli $n \ge 2$!

Jawab:

BASIC STEP : $3 \le 4$

Karena untuk setiap bilangan asli $n \ge 2$, maka n dimulai dari 2, sehingga harus dibuktikan bahwa $S(2)$ bernilai benar.

$S(2) \rightarrow \quad 2+1 \le 2^2 \rightarrow$ pernyataan ini bernilai benar ✓

Jadi, $S(2)$ bernilai benar.

$S(K+1) \rightarrow K+1+1 \le (K+1)^2$

$\boxed{K+2 \le (K+1)^2}$

INDUCTIVE STEP :

Misalkan $S(k)$ bernilai benar. Artinya diketahui:

$$\boxed{k+1 \le k^2}$$

Akan ditunjukkan bahwa $S(k+1)$ bernilai benar; dengan kata lain, harus ditunjukkan bahwa:

$$\boxed{k+2} \le (k+1)^2$$

$\boxed{K+1 \le K^2}$

$(K+1)+1 \le K^2+1$

didapat dari: $k+1$

ganti k dengan $k+1$, menjadi

$(k+1)+1 = k+2$

$\boxed{(K+1)^2}$

$\boxed{n \ge 2} \rightarrow \boxed{K \ge 2}$

Bukti:

$$
\begin{aligned}
k+2 &= (k+1)+1 \\
&\le k^2+1 && \text{(karena } k+1 \le k^2\text{)} \\
&\le k^2+k && \text{(karena diketahui dari soal bahwa } k \ge 2\text{)} \\
&= k(k+1) && \text{(karena } k^2+k = k(k+1)\text{)} \\
&\le (k+1)(k+1) && \text{(karena } k \le k+1\text{)} \\
&= (k+1)^2
\end{aligned}
$$

$K(K+1)$ $\quad K \ge 1$

$K^2+K \ge 1+K$

$1+K^2 \le K^2+K$

Dengan demikian, terbukti bahwa $n+1 \le n^2$ untuk setiap bilangan asli $n \ge 2$.

L A T I H A N   S O A L

1. Tunjukkan bahwa $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ untuk setiap n bilangan bulat positif!

2. Tunjukkan bahwa $2 + 5 + 8 + ... + (3n - 1) = \frac{n(3n+1)}{2}$ untuk setiap n bilangan bulat positif!

3. Tunjukkan bahwa $2^n > 2n + 3$ untuk semua bilangan bulat $n \geq 4$!

4. Tunjukkan bahwa $n! \leq n^n$ untuk semua n bilangan asli!

ALJABAR BOOLEAN

(Bagian I)

8.1. Definisi Aljabar Boolean

Aljabar Boolean merupakan aljabar yang berhubungan dengan variabel-variabel biner (0 atau 1) dan operasi-operasi logik. Variabel-variabel diperlihatkan dengan huruf-huruf alfabet dan tiga operasi dasar, yakni AND, OR, dan NOT (komplemen).

AND dinotasikan $x * y$ atau xy
OR dinotasikan $x + y$
NOT (komplemen) dinotasikan x' atau $\bar{x}$

Perhatikan tabel berikut.

Tabel AND — konj

x	y	xy
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Tabel OR — disj

x	y	$x + y$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

$1+1+1+1$
$\overline{\quad 1 \quad}$

Tabel NOT (Komplemen)

x	x'
1	0
0	1

$1' = 0$
$0' = 1$

Contoh 1:
Tentukan nilai dari $1 \cdot 0 + (0 + 1)'$!
$0 + (1)' = 0 + 0 = 0$
Jawab:

$$1 \cdot 0 + (0 + 1)' = 0 + 1' = 0 + 0 = 0$$

Selanjutnya, lihat definisi formal mengenai aljabar Boolean berikut.

Misalkan B adalah himpunan yang didefinisikan pada dua operasi biner (+ dan *) dan sebuah operasi unar (‘), serta menggunakan dua elemen 0 dan 1, maka (B, +, *, ‘) disebut aljabar Boolean jika memenuhi aksioma-aksioma berikut untuk setiap elemen x, y, dan z dari himpunan B.

Hukum Komutatif	$x + y = y + x$	$xy = yx$
Hukum Asosiatif	$(x + y) + z = x + (y + z)$	$(xy)z = x(yz)$
Hukum Distributif	$x + (yz) = (x + y)(x + z)$	$x(y + z) = (xy) + (xz)$
Hukum Identitas	$x + 0 = x$	$x \cdot 1 = x$
Hukum Komplemen	$x + x' = 1$	$x \cdot x' = 0$

8.2. Definisi Ekspresi Boolean

$E(1,1,0) = 1$

Misalkan $B = \{0, 1\}$. Maka, $B^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_i \in B$ untuk $1 \le i \le n\}$ adalah suatu himpunan dari semua n-tupel yang mungkin atas 0 dan 1. Suatu fungsi dari B^n ke B ini disebut sebagai fungsi Boolean atau ekspresi Boolean.

$E(1,0,1) = 0 \,\|\, E(0,1,1) = 0$

Contoh 2:
Tentukan nilai dari ekspresi Boolean berikut: $E(x, y, z) = \boxed{xy + z'}$!
Jawab:

x	y	z	xy	z'	E
1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	1	1

Contoh 3:
Tentukan nilai dari ekspresi Boolean berikut: $E(x, y, z) = xyz' + xy'z' + xy'z + x'yz'$!
Jawab:

x	y	z	xyz'	$xy'z'$	$xy'z$	$x'yz'$	E
1	1	1	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Berikutnya akan diberikan contoh bagaimana mencari ekspresi Boolean jika diketahui nilainya.

Contoh 4:
Carilah ekspresi Boolean dari x, y, dan z yang diberikan dalam tabel berikut:

x	y	z	E
1	1	1	0
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	0

$\to xy'z$
$\to xy'z'$
$\to x'y'z +$

Jawab:
Untuk mengetahui ekspresi Boolean, fokus pada angka "1" dalam kolom E, yaitu baris ketiga, baris keempat, dan baris ketujuh.

Baris ke-3 : $x = 1, y = 0, z = 1 \;\to$ ketiganya menghasilkan $E = 1$
sehingga diperoleh $xy'z$

Baris ke-4 : $x = 1, y = 0, z = 0 \;\to$ ketiganya menghasilkan $E = 1$
sehingga diperoleh $xy'z'$

Baris ke-7 : $x = 0, y = 0, z = 1 \;\to$ ketiganya menghasilkan $E = 1$
sehingga diperoleh $x'y'z$

Dengan demikian, $E(x, y, z) = xy'z + xy'z' + x'y'z$.

8.3. Tabel Identitas Boolean

Selain kelima aksioma yang telah dipaparkan pada Subbab 6.1, aljabar Boolean juga memiliki beberapa hukum lainnya. Perhatikan Tabel Identitas Boolean berikut.

Tabel Identitas Boolean

Hukum Idempoten	$x + x = x$	$xx = x$
Hukum Dominasi	$x + 1 = 1$	$x \cdot 0 = 0$
Hukum Absorpsi	$x + xy = x$	$x(x + y) = x$
Hukum Involusi	$(x')' = x$	
Hukum De Morgan	$(x + y)' = x'y'$	$(xy)' = x' + y'$

8.4. Dualitas

Dalam aljabar Boolean, ada istilah dualitas. Untuk mencari bentuk dual dari suatu aljabar Boolean, dapat diperoleh dengan:

"+" diubah menjadi "*"
"*" diubah menjadi "+"
"1" diubah menjadi "0"
"0" diubah menjadi "1"

$x \to x$
$y' \to y'$

Jika terdapat variabel seperti x atau x' pada suatu aljabar Boolean, maka bentuk tersebut tetap dalam bentuk dualnya.

Contoh 5:
Buktikan bahwa $\boxed{(x \cdot (x + (y \cdot 0)))' = x'}$, dan tuliskanlah bentuk dualnya!
Jawab:

$$\boxed{\left(x \cdot \left(x + \left(y \cdot 0\right)\right)\right)'} = \left(x \cdot \boxed{\left(x + 0\right)}\right)' \quad \text{(Hukum Dominasi)}$$

$$= \left(x \cdot x\right)' \quad \text{(Hukum Identitas)}$$

$$\boxed{= x'} \quad \text{(Hukum Idempoten)}$$

$(x + (x \cdot (y+1)))' =$

x'

Bentuk dualnya: $\left(x + \left(x \cdot \left(y + 1\right)\right)\right)' = x'$

L A T I H A N   S O A L

1. Guna~~kan tabel untuk mencari~~ nilai dari ekspresi Boolean berikut:
   a. $\boxed{E(x, y, z) = xy' + (xyz)'}$
   b. $\boxed{E(x, y, z) = y'(xz + x'z')}$

2. Carilah ekspresi Boolean dari variabel x, y, dan z pada tabel berikut:

x	y	z	E
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	0

SOP

3. Buktikan bahwa $\left(x + \left(x \cdot \left(y + 1\right)\right)\right)' = x'$!