RELASI

(Bagian II)

3.1. Relasi Ekuivalen, Partisi, dan Kelas Ekuivalen

3.1.1. Relasi Ekuivalen

Relasi R pada himpunan A disebut **relasi ekuivalen** jika R memenuhi tiga sifat, yaitu *refleksif*, *simetris*, dan *transitif*.

Contoh 1:
Misalkan $A=\{1,2,3,4\}$ dan relasi R pada himpunan A dengan

$$R=\{(a,b)\mid a\equiv b \pmod 3\}$$

Tunjukkanlah:
a. apa saja anggota dari relasi R!
b. apakah relasi R merupakan suatu relasi ekuivalen!

Jawab:
a. $a\equiv b \pmod 3$ artinya 3 habis membagi $a-b$. Jadi,

$$R=\{(1,1),(1,4),(2,2),(3,3),(4,1),(4,4)\}$$

b. Perhatikan bahwa (1,1), (2,2), (3,3), dan (4,4) ada di R. Jadi, R bersifat refleksif.

Lalu,

$(1,1)\in R \to (1,1)\in R$; $(1,4)\in R \to (4,1)\in R$; $(2,2)\in R \to (2,2)\in R$;
$(3,3)\in R \to (3,3)\in R$; $(4,1)\in R \to (1,4)\in R$; $(4,4)\in R \to (4,4)\in R$.

Jadi, R bersifat simetris.
Kemudian,

$(1,1)\in R$ & $(1,4)\in R \to (1,4)\in R$; $(4,1)\in R$ & $(1,1)\in R \to (4,1)\in R$;
$(1,4)\in R$ & $(4,1)\in R \to (1,1)\in R$; $(4,1)\in R$ & $(1,4)\in R \to (4,4)\in R$;
$(1,4)\in R$ & $(4,4)\in R \to (1,4)\in R$; $(4,4)\in R$ & $(4,1)\in R \to (4,1)\in R$.

Jadi, R bersifat transitif.

Dengan demikian, $R=\{(a,b)\mid a\equiv b \pmod 3\}$ pada himpunan $A=\{1,2,3,4\}$ adalah suatu relasi ekuivalen.

3.1.2. Partisi

Misalkan A adalah suatu himpunan tak kosong. Suatu partisi dari himpunan A adalah membagi-bagi himpunan A menjadi n himpunan bagian tak kosong A_1, A_2, ..., A_n yang masing-masing himpunan bagiannya saling lepas dan gabungan dari keseluruhan himpunan bagiannya merupakan himpunan asal A. Dengan kata lain:

Misalkan $A\neq\varnothing$.
Partisi n bagian dari himpunan A adalah A_1, A_2, ..., A_n dengan syarat:

1) $A_i\neq\varnothing \quad ; \quad i=1,2,\dots,n$
2) $A_i\cap A_j=\varnothing \quad ; \quad i\neq j$
3) $A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_n=A$

Contoh 2:
Diketahui $A = \{1,2,3,...,9\}$.
I. $A_1 = \{1,2,3\}$; $A_2 = \{4\}$; $A_3 = \{5,7,9\}$; $A_4 = \{6,8\}$
II. $A_1 = \{1,3,5,7\}$; $A_2 = \{2,4,5,6\}$; $A_3 = \{8,9\}$
III. $A_1 = \{1,2,3,7\}$; $A_2 = \{5\}$; $A_3 = \{6,8\}$; $A_4 = \{4\}$
Manakah yang merupakan partisi dari himpunan *A*?

Jawab:
I merupakan partisi dari himpunan *A* karena memenuhi ketiga syarat partisi.
II *bukan* merupakan partisi dari himpunan *A* karena $A_1 \cap A_2 = \{5\} \neq \varnothing$.
III *bukan* merupakan partisi dari himpunan *A* karena $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \neq A$.

3.1.3. Kelas Ekuivalen

Misalkan *R* adalah suatu relasi ekuivalen pada himpunan *A*. Kelas ekuivalen pada anggota *a* didefinisikan sebagai berikut:

Untuk setiap $a \in A$, himpunan $[a]$ disebut sebagai kelas ekuivalen *a* dengan:

$$[a] = \{x \mid (a,x) \in R\}$$

dengan *R* merupakan suatu relasi ekuivalen pada himpunan *A*.

Contoh 3:
Pada Contoh 1, telah ditunjukkan bahwa relasi *R* pada himpunan $A = \{1,2,3,4\}$ dengan $R = \{(a,b) \mid a \equiv b \pmod 3\}$ adalah suatu relasi ekuivalen. Tentukanlah berapa banyak kelas ekuivalen yang ada pada relasi ekuivalen tersebut!
Jawab:
$R = \{(1,1),(1,4),(2,2),(3,3),(4,1),(4,4)\}$
$[1] = \{x \mid (1,x) \in R\} = \{1,4\}$
$[2] = \{x \mid (2,x) \in R\} = \{2\}$
$[3] = \{x \mid (3,x) \in R\} = \{3\}$
$[4] = \{x \mid (4,x) \in R\} = \{4,1\} = \{1,4\} = [1]$
Jadi, kelas ekuivalen yang ada sebanyak 3 kelas, yaitu [1], [2], dan [3].

3.2. Relasi Terurut Sebagian

Relasi *R* pada himpunan *A* disebut **relasi terurut sebagian** jika *R* memenuhi tiga sifat, yaitu *refleksif*, *transitif*, dan *antisimetris*.

Contoh 4:
Misalkan $A = \{1,2,3\}$ dan relasi *R* pada himpunan *A* dengan

$$R = \{(a,b) \mid a \geq b\}$$

Tunjukkan apakah *R* merupakan relasi terurut sebagian!

Jawab:

$$R = \{(1,1),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),(3,3)\}$$

Perhatikan bahwa (1,1), (2,2), dan (3,3) ada di *R*. Jadi, *R* bersifat refleksif.

Kemudian,

$$(2,1)\in R \ \& \ (1,1)\in R \rightarrow (2,1)\in R; \qquad (3,1)\in R \ \& \ (1,1)\in R \rightarrow (3,1)\in R;$$
$$(2,2)\in R \ \& \ (2,1)\in R \rightarrow (2,1)\in R; \qquad (3,2)\in R \ \& \ (2,1)\in R \rightarrow (3,1)\in R;$$
$$(3,2)\in R \ \& \ (2,2)\in R \rightarrow (3,2)\in R; \qquad (3,3)\in R \ \& \ (3,1)\in R \rightarrow (3,1)\in R;$$
$$(3,3)\in R \ \& \ (3,2)\in R \rightarrow (3,2)\in R$$

Jadi, R bersifat transitif.

Selanjutnya,

$$(1,1)\in R \ \& \ (1,1)\in R \text{ maka } 1=1;$$
$$(2,1)\in R \ \& \ (1,2)\notin R;$$
$$(2,2)\in R \ \& \ (2,2)\in R \text{ maka } 2=2;$$
$$(3,1)\in R \ \& \ (1,3)\notin R;$$
$$(3,2)\in R \ \& \ (2,3)\notin R;$$
$$(3,3)\in R \ \& \ (3,3)\in R \text{ maka } 3=3;$$

Jadi, R bersifat antisimetris.

Dengan demikian, $R=\{(a,b)\,|\,a\geq b\}$ pada himpunan $A=\{1,2,3\}$ adalah suatu relasi terurut sebagian.

3.3. Himpunan Terurut Sebagian (*Partial Ordered Set* / Poset)

Suatu himpunan A dengan relasi R yang merupakan relasi terurut sebagian disebut sebagai himpunan terurut sebagian (*partial ordered set*), atau disebut juga poset; dinotasikan (A,R). Dan, anggota-anggota pada himpunan A disebut sebagai anggota-anggota dari poset.

Sebagai contoh, pada Contoh 4, himpunan $A=\{1,2,3\}$ dengan relasi $'\geq'$ merupakan suatu poset; dinotasikan (A,R) atau (A, $\geq$).

Anggota a dan b pada suatu poset (A,R) dikatakan <u>dapat dibandingkan</u> jika $(a,b)\in R$ atau $(b,a)\in R$. Jika tidak memenuhi salah satunya saja, maka a dan b dikatakan tidak dapat dibandingkan.

Sebagai contoh, misalkan $A=\{1,2,3,\ldots,9,10\}$ dan R adalah relasi pada himpunan N dengan $R=\{(a,b)\,|\,a \text{ habis membagi } b\}$ untuk setiap a dan b di N. 3 dan 9 dapat dibandingkan karena 3 habis membagi 9, sementara 7 dan 10 tidak dapat dibandingkan karena 7 tidak habis membagi 10 dan juga 10 tidak habis membagi 7.

3.4. Diagram Hasse (Diagram Poset)

Selain dengan keempat penyajian relasi seperti yang dijelaskan pada pertemuan sebelumnya, relasi terurut sebagian atau poset ini bisa disajikan dalam bentuk lain, yaitu diagram Hasse. Diagram Hasse ini diperkenalkan oleh matematikawan asal Jerman yang bernama Helmut Hasse.

Diagram Hasse ini adalah suatu diagram yang merepresentasikan suatu poset dengan menarik garis dari anggota yang satu ke anggota lainnya yang berhubungan secara langsung.

Berikut langkah-langkah dalam menggambar diagram Hasse untuk suatu poset (A,R):

1) daftarkan anggota relasi R,
2) hapus semua anggota R yang menyatakan sifat refleksif (atau antisimetris),
3) hapus anggota R yang menyatakan sifat transitif; jika hasil komposisi antar dua anggota R adalah *bukan* dari komponen komposisinya, maka hapuslah hasil komposisi tersebut,
4) urutkan anggota poset dari 'kecil' ke 'besar' (berdasarkan anggota R yang tidak terhapus) mulai dari bawah ke atas, kemudian tarik garis antar anggotanya sesuai dengan anggota relasi R yang tersisa.

Contoh 5:

Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}$ dan relasi terurut sebagian R pada himpunan A dengan

$$R = \{(a,b) \mid a \text{ habis membagi } b\}$$

Gambarkan diagram Hasse dari poset (A,R)!

Jawab:

Langkah 1

Daftarkan anggota relasi R.

$$R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,6),(1,8),(1,12),(2,2),(2,4),(2,6),(2,8),(2,12),$$
$$(3,3),(3,6),(3,12),(4,4),(4,8),(4,12),(6,6),(6,12),(8,8),(12,12)\}$$

Langkah 2

Hapus semua anggota R yang menyatakan sifat refleksif (atau antisimetris).

$$R = \{\cancel{(1,1)},(1,2),(1,3),(1,4),(1,6),(1,8),(1,12),\cancel{(2,2)},(2,4),(2,6),(2,8),(2,12),$$
$$\cancel{(3,3)},(3,6),(3,12),\cancel{(4,4)},(4,8),(4,12),\cancel{(6,6)},(6,12),\cancel{(8,8)},\cancel{(12,12)}\}$$

Langkah 3

Hapus anggota R yang menyatakan sifat transitif dengan ketentuan sebagai berikut.

Untuk memahami langkah ini, perhatikan pemisalan berikut:

$(1,1) \circ (1,2) \rightarrow (1,2)$ maka hasil komposisinya (1,2) tidak dicoret

$(1,2) \circ (2,4) \rightarrow (1,4)$ maka hasil komposisinya (1,4) dicoret

Jadi,

$$R = \{(1,1),(1,2),(1,3),\cancel{(1,4)},\cancel{(1,6)},\cancel{(1,8)},\cancel{(1,12)},(2,2),(2,4),(2,6),\cancel{(2,8)},\cancel{(2,12)},$$
$$(3,3),(3,6),\cancel{(3,12)},(4,4),(4,8),(4,12),(6,6),(6,12),(8,8),(12,12)\}$$

Langkah 4

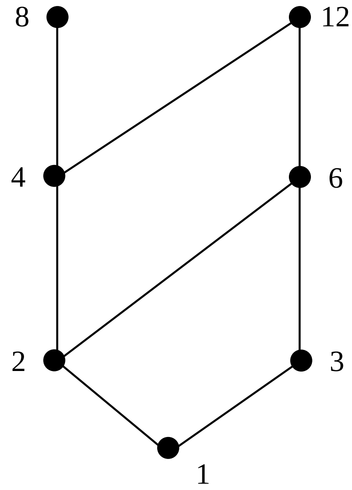
Dengan menggabungkan hasil dari Langkah 2 dan 3, maka anggota yang tersisa adalah

(1,2), (1,3), (2,4), (2,6), (3,6), (4,8), (4,12), (6,12).

Sebelum pengurutan, mari pahami terlebih dahulu makna 'kecil' dan 'besar'.

- Jika (1,2), maka 1 lebih kecil dari 2, atau 2 lebih besar dari 1. Artinya, dalam diagram Hasse, posisi 1 ada di bawah 2.
- Jika (2,1), maka 2 lebih kecil dari 1, atau 1 lebih besar dari 2. Artinya, dalam diagram Hasse, posisi 2 ada di bawah 1.

Berdasarkan pengurutan dari ‘kecil’ ke ‘besar’, maka gambar diagram Hassenya adalah:



Contoh 6:
Misalkan $A = \{3, 5, 9, 15, 24, 45\}$ dan relasi terurut sebagian R pada himpunan A dengan

$$R = \{(a, b) \mid a \text{ habis membagi } b\}$$

Gambarkan diagram Hasse dari poset (A,R)!

Jawab:
Langkah 1
Daftarkan anggota relasi R.

$$R = \{(3,3), (3,9), (3,15), (3,24), (3,45), (5,5), (5,15), (5,45), (9,9), (9,45), (15,15), (15,45), (24,24), (45,45)\}$$

Langkah 2
Hapus semua anggota R yang menyatakan sifat refleksif (atau antisimetris).

$$R = \{\cancel{(3,3)}, (3,9), (3,15), (3,24), (3,45), \cancel{(5,5)}, (5,15), (5,45), \cancel{(9,9)}, (9,45), \cancel{(15,15)}, (15,45), \cancel{(24,24)}, \cancel{(45,45)}\}$$

Langkah 3
Hapus anggota R yang menyatakan sifat transitif dengan ketentuan sebagai berikut.

Untuk memahami langkah ini, perhatikan pemisalan berikut:
$(1,1) \circ (1,2) \to (1,2)$ maka hasil komposisinya (1,2) tidak dicoret
$(1,2) \circ (2,3) \to (1,3)$ maka hasil komposisinya (1,3) dicoret

Jadi,
$$R = \{(3,3), (3,9), (3,15), (3,24), \cancel{(3,45)}, (5,5), (5,15), \cancel{(5,45)}, (9,9), (9,45), (15,15), (15,45), (24,24), (45,45)\}$$

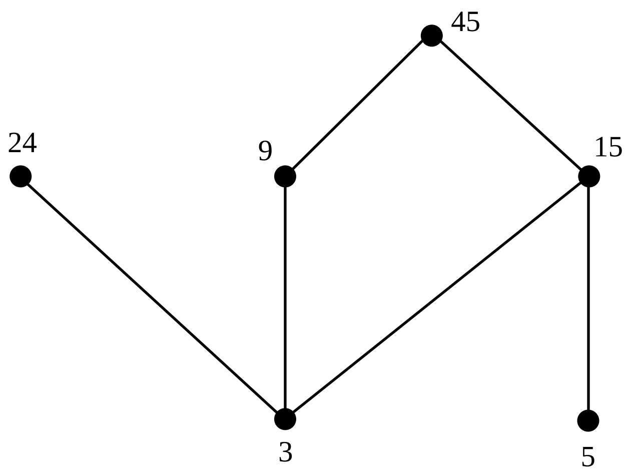
Langkah 4
Dengan menggabungkan hasil dari Langkah 2 dan 3, maka anggota yang tersisa adalah:

(3,9), (3,15), (3,24), (5,15), (9,45), (15,45).

Sebelum pengurutan, mari pahami terlebih dahulu makna ‘kecil’ dan ‘besar’.

- Jika (1,2), maka 1 lebih kecil dari 2, atau 2 lebih besar dari 1. Artinya, dalam diagram Hasse, posisi 1 ada di bawah 2.
- Jika (2,1), maka 2 lebih kecil dari 1, atau 1 lebih besar dari 2. Artinya, dalam diagram Hasse, posisi 2 ada di bawah 1.

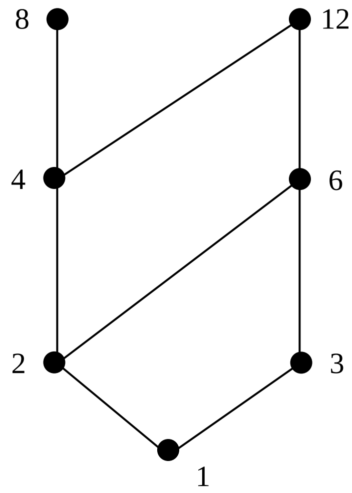
Berdasarkan pengurutan dari 'kecil' ke 'besar', maka gambar diagram Hasse-nya adalah:



3.5. Elemen Maksimal dan Elemen Minimal

Suatu elemen *a* pada poset dikatakan ***elemen maksimal*** jika ***tidak ada lagi*** elemen pada poset ***yang lebih besar*** daripada elemen *a*. Suatu elemen *a* pada poset dikatakan ***elemen minimal*** jika ***tidak ada lagi*** elemen pada poset ***yang lebih kecil*** daripada elemen *a*.

Contoh 7:
Perhatikan diagram Hasse berikut.



Tentukanlah elemen maksimal dan elemen minimalnya!
Jawab:
Karena ***tidak ada lagi*** elemen pada poset ***yang lebih besar*** daripada elemen 8 dan 12, maka elemen maksimalnya adalah 8 dan 12.

Lalu, karena ***tidak ada lagi*** elemen pada poset ***yang lebih kecil*** daripada elemen 1, maka elemen minimalnya adalah 1.

3.6. Batas Atas, Batas Bawah, Supremum, dan Infimum

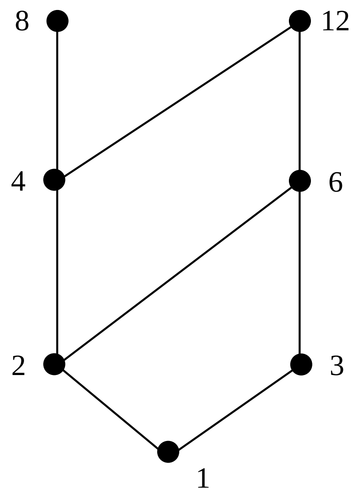
Elemen *a* dikatakan sebagai ***batas atas*** dari *b* jika ***a lebih besar atau sama dengan b***. Elemen *a* dikatakan sebagai ***batas bawah*** dari *b* jika ***a lebih kecil atau sama dengan b***.

Sebagai catatan, setiap elemen pada suatu poset merupakan batas atas sekaligus batas bawah dari dirinya sendiri.

Supremum adalah ***batas atas terkecil*** dari suatu poset. ***Infimum*** adalah ***batas bawah terbesar*** dari suatu poset.

Banyaknya supremum atau infimum dari suatu poset harus tepat satu. Jika suatu poset memiliki 2 atau lebih batas atas terkecil, maka poset tersebut tidak memiliki supremum. Lalu, jika suatu poset memiliki 2 atau lebih batas bawah terbesar, maka poset tersebut tidak memiliki infimum.

Contoh 8:
Perhatikan diagram Hasse berikut.



Tentukanlah:

a. batas atas dari {3,4} serta supremum dari {3,4}.
b. batas bawah dari {4,6} serta infimum dari {4,6}.

Jawab:

a. Sebelum menentukan batas atas dari {3,4}, terlebih dahulu cari batas atas untuk {3} dan batas atas untuk {4}.

Batas atas untuk 3 adalah: $BA(\{3\}) = \{3,6,12\}$

Batas atas untuk 4 adalah: $BA(\{4\}) = \{4,8,12\}$

Maka, batas atas untuk 3 dan 4 adalah:

$$\begin{aligned} BA(\{3,4\}) &= BA(\{3\}) \cap BA(\{4\}) \\ &= \{3,6,12\} \cap \{4,8,12\} \\ &= \{12\} \end{aligned}$$

Jadi, supremum dari 3 dan 4 adalah:

$$\sup(\{3,4\}) = 12$$

b. Sebelum menentukan batas bawah dari {4,6}, terlebih dahulu cari batas bawah untuk {4} dan batas bawah untuk {6}.

Batas bawah untuk 4 adalah: $BB(\{4\}) = \{1,2,4\}$

Batas bawah untuk 6 adalah: $BB(\{6\}) = \{1,2,3,6\}$

Maka, batas bawah untuk 4 dan 6 adalah:

$$\begin{aligned} BB(\{4,6\}) &= BB(\{4\}) \cap BB(\{6\}) \\ &= \{1,2,4\} \cap \{1,2,3,6\} \\ &= \{1,2\} \end{aligned}$$

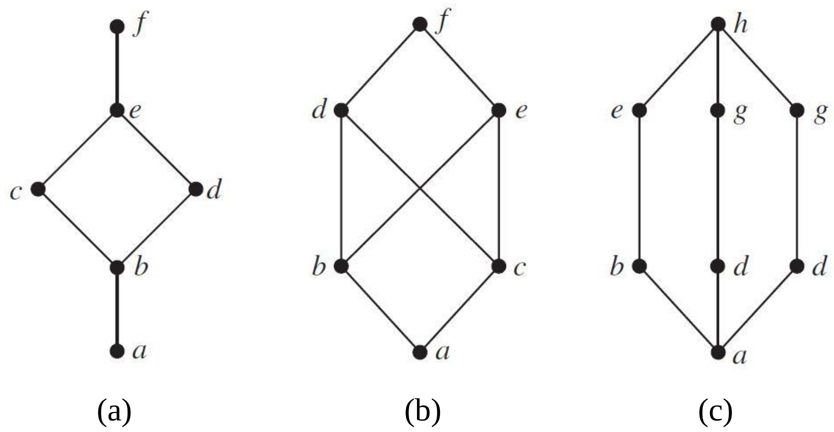
Jadi, infimum dari 4 dan 6 adalah:

$$\inf(\{4,6\}) = 2$$

3.7. Lattice

Suatu poset (A,R) disebut *lattice* jika ***setiap pasang*** anggota poset ***memiliki supremum sekaligus infimum***.

Contoh 9:
Perhatikan diagram-diagram Hasse dari suatu poset berikut.



Manakah yang merupakan lattice!

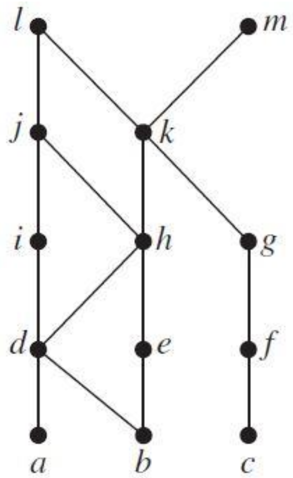
Jawab:
(a) dan (c).

L A T I H A N   S O A L

1. Misalkan $A = \{0, 1, 2, 3\}$ dan R di bawah ini merupakan relasi pada himpunan A.
   - a. $R = \{(0,0), (1,1), (2,2), (3,3)\}$
   - b. $R = \{(0,0), (0,2), (2,0), (2,2), (2,3), (3,2), (3,3)\}$
   - c. $R = \{(0,0), (1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3)\}$
   - d. $R = \{(0,0), (1,1), (1,3), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$
   - e. $R = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2), (2,0), (2,2), (2,3)\}$
   - f. $R = \{(0,0), (1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,3)\}$

   (i) Manakah yang merupakan relasi ekuiaven?
   (ii) Manakah yang merupakan relasi terurut sebagian?

2. Perhatikan diagram Hasse berikut.



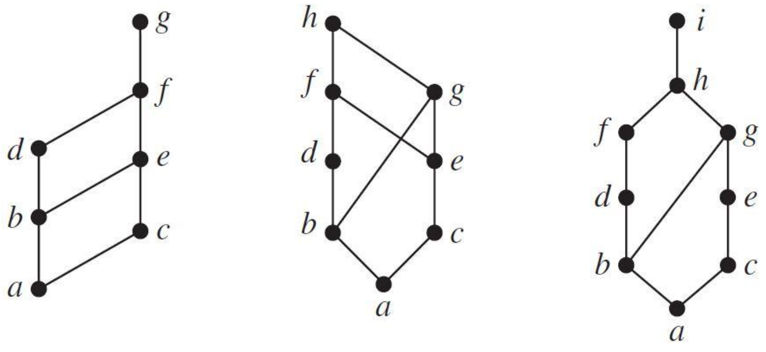
   - a. Tentukan elemen maksimal dan elemen minimalnya!
   - b. Jika diketahui $M = \{a, b, c\}$, tentukan batas atas dari M serta $\sup(M)$!
   - c. Jika diketahui $N = \{f, g, h\}$, tentukan batas bawah dari N serta $\inf(N)$!

3. Diketahui $P = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24\}$ dan R adalah suatu relasi terurut sebagian pada himpunan P dengan

$$R = \{(a,b) \mid a \text{ habis membagi } b\}$$

   - a. Buatlah diagram Hasse dari poset (P, R)!
   - b. Tentukan elemen maksimal dan elemen minimalnya!
   - c. Jika $A \subseteq P$ dengan A = {3,4}, tentukanlah sup(A)!
   - d. Jika $B \subseteq P$ dengan Q = {8,18}, tentukanlah inf(B)!

4. Perhatikan diagram-diagram Hasse dari suatu poset berikut.



(a) (b) (c)

Manakah yang merupakan lattice?