RELASI REKURSIF

5.1. Definisi Relasi Rekursif

Relasi rekursif dari suatu barisan a_n adalah suatu rumus yang menyatakan suku ke-n menjadi suku-suku sebelumnya untuk suatu n bilangan bulat nonnegatif sedemikian rupa sehingga terbentuk suatu persamaan dari hubungan suku-suku tersebut. Persamaan yang menyatakan antara beberapa suku tersebut dinamakan relasi rekurensi.

Sebagai contoh, perhatikan barisan berikut ini.

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$$

$a_{10} = a_9 + a_8$

Jika diperhatikan lebih lanjut, maka dari barisan di atas diperoleh:

- suku ke-3 = suku ke-2 + suku ke-1, $\rightarrow$ $a_3 = a_2 + a_1$
- suku ke-4 = suku ke-3 + suku ke-2, $\rightarrow$ $a_4 = a_3 + a_2$
- suku ke-5 = suku ke-4 + suku ke-3, $\rightarrow$ $a_5 = a_4 + a_3$
- suku ke-6 = suku ke-5 + suku ke-4, $\rightarrow$ $a_6 = a_5 + a_4$
- dan seterusnya.

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

Bila hubungan antarsuku pada barisan di atas diubah menjadi suatu rumus, maka akan diperoleh:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

Bentuk relasi rekursif a_n di atas dikenal dengan sebutan rumus Fibonacci, dan barisannya dikenal dengan barisan Fibonacci.

$a_1 = 1$

$a_2 = 2 \times a_1 + 1$
$= 3$

$a_3 = 2 \times a_2 + 1$
$= 7$

Contoh 1:

Diketahui relasi rekursif dari barisan a_n sebagai berikut

$$a_n = 2a_{n-1} + 1$$

dengan kondisi awal $a_1 = 1$ untuk $n \geq 2$.

Tentukanlah 6 suku pertama dari barisan tersebut!

Jawab:

Telah diketahui bahwa $a_1 = 1$. Maka, langkah selanjutnya adalah menentukan a_2, a_3, a_4, a_5, dan a_6.

$$a_2 = 2a_1 + 1 = 2(1) + 1 = 3$$

$$a_3 = 2a_2 + 1 = 2(3) + 1 = 7$$

$$a_4 = 2a_3 + 1 = 2(7) + 1 = 15$$

$$a_5 = 2a_4 + 1 = 2(15) + 1 = 31$$

$$a_6 = 2a_5 + 1 = 2(31) + 1 = 63$$

Jadi, 6 suku pertama dari barisan tersebut:

1, 3, 7, 15, 31, 63

Jika diketahui relasi rekursif dari suatu barisan, dan mau menentukan nilai suku ke-n dengan n yang cukup besar, maka cara perhitungan seperti pada Contoh 1 sangatlah tidak efektif. Misalkan, jika mau mencari nilai suku ke-100 dari barisan pada Contoh 1, ini berarti bahwa kita harus menentukan nilai dari suku-suku sebelumnya, yaitu suku ke-1 sampai dengan suku ke-99. Tentulah cara seperti ini sangat tidak efektif.

Oleh karena itu, bentuk umum dari relasi rekursif haruslah ditentukan sehingga bisa menentukan suku ke-n tanpa harus mencari nilai dari suku-suku sebelum suku ke-n.

5.2. Relasi Rekursif dengan Iterasi

Penyelesaian relasi rekursif dengan iterasi (pengulangan) merupakan metode paling mendasar. Langkah-langkah penyelesaian dengan iterasi adalah sebagai berikut.

1. Tulis suku-suku barisan secara berurutan dan terus menerus hingga memperoleh pola tertentu;
   barisannya bisa menaik : $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{n-2},\ a_{n-1},\ a_n$
   barisannya bisa menurun : $a_n,\ a_{n-1},\ a_{n-2},\ \ldots,\ a_3,\ a_2,\ a_1$
2. Berdasarkan pola yang telah didapat pada langkah awal, buat rumus umumnya.

Ada beberapa deret yang sering digunakan dalam menyelesaikan relasi rekursif dengan iterasi, yaitu:

1. $1+2+3+4+\ldots+r=\dfrac{r(r+1)}{2}$
2. $1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+r^2=\dfrac{r(r+1)(2r+1)}{6}$
3. $1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots+r^3=\left[\dfrac{r(r+1)}{2}\right]^2$
4. $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+4\cdot 5+\ldots+(r-1)\cdot r+r\cdot(r+1)=\dfrac{r(r+1)(r+2)}{3}$
5. $1+r+r^2+r^3+\ldots+r^k=\dfrac{r^{k+1}-1}{r-1}$ dengan $r>1$.

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$

$a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0$

Contoh 2: $\boxed{a_0 = 2}$

Tentukan solusi relasi rekursif dari barisan a_n berikut

$$a_n = 2a_{n-1} + 1$$

dengan kondisi awal $a_1 = 1$ untuk $n \geq 2$!

$a_2 = 2a_1 + 1$

$a_3 = 2(a_2) + 1$
$= 2(2a_1 + 1) + 1$
$= \boxed{2^2 a_1 + 2 + 1}$

Jawab:

Contoh ini akan diselesaikan dengan 2 cara, yaitu dengan barisan menaik dan dengan barisan menurun.

Penyelesaian dengan barisan menaik.

$a_4 = 2a_3 + 1$
$= 2(2^2 a_1 + 2 + 1) + 1$
$= 2^3 a_1 + 2^2 + 2^1 + 2^0$

$a_2 = 2a_1 + 1$

$a_3 = 2a_2 + 1$

$\quad = 2(2a_1 + 1) + 1 = 2^2 a_1 + 2 + 1$

$a_5 = 2^4 a_1 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1$

$$a_8 = 2^7 a_1 + 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2$$

$$a_n = 2^{n-1} a_1 + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \dots + 2 + 1$$

$$a_4 = 2a_3 + 1$$
$$= 2(2^2 a_1 + 2 + 1) + 1 = 2^3 a_1 + 2^2 + 2 + 1$$
$$a_5 = 2a_4 + 1$$
$$= 2(2^3 a_1 + 2^2 + 2 + 1) + 1 = 2^4 a_1 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1$$
$$\vdots$$
$$a_n = 2^{n-1} a_1 + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \dots + 2^2 + 2 + 1$$
$$= 2^{n-1} \cdot 1 + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \dots + 2^2 + 2 + 1$$
$$= 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \dots + 2^2 + 2 + 1$$
$$= 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-3} + 2^{n-2} + 2^{n-1}$$

$k = n - 1$

Perhatikan kembali bentuk deret: $1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^k = \dfrac{r^{k+1} - 1}{r - 1}$

Maka, dengan membuat $r = 2$ dan $k = n - 1$, didapatlah

$$= \frac{2^{(n-1)+1} - 1}{2 - 1}$$
$$= \frac{2^n - 1}{1}$$
$$= 2^n - 1$$

$$\frac{2^{(n-1)+1} - 1}{2 - 1}$$

$$a_n = \boxed{2^n - 1}$$

Penyelesaian dengan barisan menurun.

$n \to n-1$

$$a_n = 2a_{n-1} + 1$$

$$a_{n-1} = 2a_{(n-1)-1} + 1 = 2a_{n-2} + 1$$

$n \to n-2$

$$a_{n-2} = 2a_{(n-2)-1} + 1 = 2a_{n-3} + 1$$

Karena $a_{n-1} = 2a_{n-2} + 1$, maka
$$= 2(2a_{n-2} + 1) + 1$$
$$= 2^2 a_{n-2} + 2 + 1$$

Karena $a_{n-2} = 2a_{n-3} + 1$, maka
$$= 2^2(2a_{n-3} + 1) + 2 + 1$$
$$= 2^3 a_{n-3} + 2^2 + 2 + 1$$

$n \to n-3$

$$a_{n-3} = 2a_{(n-3)-1} + 1$$

Karena $a_{n-3} = 2a_{n-4} + 1$, maka
$$= 2^3(2a_{n-4} + 1) + 2^2 + 2 + 1$$
$$= 2^4 a_{n-4} + 2^3 + 2^2 + 2 + 1$$

$2^6 a_{n-6} \;\|\; 2^4 a_{n-4} \;|\; a_1$

a_1

$n - 4 = 1$

$n - 1 = 4$

$$\vdots$$
$$= 2^{n-1} a_{n-(n-1)} + 2^{(n-1)-1} + 2^{(n-2)-1} + \dots + 2^3 + 2^2 + 2 + 1$$
$$= 2^{n-1} a_1 + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \dots + 2^3 + 2^2 + 2 + 1$$
$$= 2^{n-1} \cdot 1 + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \dots + 2^3 + 2^2 + 2 + 1$$
$$= 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \dots + 2^3 + 2^2 + 2 + 1$$
$$= 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-3} + 2^{n-2} + 2^{n-1}$$

Perhatikan kembali bentuk deret: $1+r+r^2+r^3+...+r^k = \dfrac{r^{k+1}-1}{r-1}$

Maka, dengan membuat $r=2$ dan $k=n-1$, didapatlah

$$= \frac{2^{(n-1)+1}-1}{2-1}$$

$$= \frac{2^n-1}{1}$$

$$= 2^n - 1$$

Salah satu keuntungan penggunaan metode iterasi ini adalah tidak diperlukan rumus khusus dalam mencari solusi/bentuk umum suatu relasi rekursif. Namun, penggunaan iterasi ini kurang efektif apabila pola yang didapat tidak familier dengan kelima bentuk deret yang sudah disampaikan sebelumnya. Oleh karena itu, materi selanjutnya akan mempelajari bagaimana mencari solusi/bentuk umum dari suatu relasi rekursif dengan memanfaatkan persamaan karakteristiknya.

5.3. Bentuk Umum Relasi Rekurensi

Misalkan n dan k adalah bilangan bulat nonnegatif dengan $n \geq k$. Bentuk umum dari relasi rekurensi linear berderajat k adalah sebagai berikut.

$$C_0 a_n + C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} + ... + C_k a_{n-k} = f(n)$$

dengan $C_0 \neq 0$ dan $C_k \neq 0$.

Sebagai contoh, $a_n - 2a_{n-1} = 1$ $a_n = a_{n-4} + 1$

- $a_n = 2a_{n-1} + 1$ $\rightarrow$ berderajat 1
- $a_n - 7a_{n-1} + 10a_{n-2} = 0$ $\rightarrow$ berderajat 2
- $a_n - n \cdot a_{n-1} = 5a_{n-3} + 2$ $\rightarrow$ berderajat 3

derajat 4

Perhatikan kembali bentuk umum dari relasi rekurensi linear berderajat k. Jika C_0, C_1, C_2, ..., C_k semuanya adalah konstanta, maka relasi rekurensi linear di atas disebut sebagai relasi rekurensi linear dengan koefisien konstan.

- Jika C_0, C_1, C_2, ..., C_k semuanya adalah konstanta dan $f(n)=0$, maka relasi rekurensi linear di atas disebut sebagai relasi rekurensi linear *homogen* dengan koefisien konstan.
- Jika C_0, C_1, C_2, ..., C_k semuanya adalah konstanta dan $f(n) \neq 0$, maka relasi rekurensi linear di atas disebut sebagai relasi rekurensi linear *nonhomogen* dengan koefisien konstan.

Pada bab ini, materi yang akan dipelajari adalah relasi rekurensi linear homogen dengan koefisien konstan.

$$\boxed{a_n = a_{n-1} + a_{n-2}}$$

$$a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0$$

$a_n = a_{n-2} + 2a_{n-4}$

$a_n - a_{n-2} - 2a_{n-4} = 0$

$b^n - b^{n-2} - 2b^{n-4} = 0$

$b^4 - b^2 - 2 = 0$

5.4. Relasi Rekurensi Linear Homogen dengan Koefisien Konstan

Pada subbab sebelumnya, telah diketahui bahwa bentuk umum dari relasi rekurensi linear homogen dengan koefisien konstan adalah sebagai berikut.

$$C_0\, a_n + C_1\, a_{n-1} + C_2\, a_{n-2} + \ldots + C_k\, a_{n-k} = 0$$

dengan C_0, C_1, C_2, ..., C_k semuanya adalah konstanta, $C_0 \neq 0$, dan $C_k \neq 0$.

Sebelum mencari penyelesaian dari relasi rekurensi ini, kita harus melihat bagaimana membentuk suatu persamaan karakteristik yang sesuai dengan relasi rekurensi yang diketahui. Untuk lebih jelasnya, perhatikan contoh-contoh di bawah ini.

$n-2$

- $a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0$

  $b^n - 4b^{n-1} + 4b^{n-2} = 0$

  Relasi rekurensi di atas merupakan relasi rekurensi yang berderajat 2. Maka, persamaan karakteristiknya juga harus berderajat 2. Jadi,

  (ganti n dengan 2, lalu ubah jadi bentuk pangkat)

  $b^2 - 4b + 4 = 0$

  $(b-2)^2$

  $x^2 - 4x^{2-1} + 4x^{2-2} = 0$

  $x^2 - 4x + 4 = 0 \quad \leftarrow$ *persamaan karakteristiknya*

  $a_n - 3a_{n-1} + 3a_{n-2} - a_{n-3} = 0$

- $a_n + 3a_{n-2} = 3a_{n-1} + a_{n-3}$

  Relasi rekurensi di atas merupakan relasi rekurensi yang berderajat 3. Maka, persamaan karakteristiknya juga harus berderajat 3. Jadi,

  (jadikan satu ruas terlebih dahulu)

  $b^n - 3b^{n-1} + 3b^{n-2} - b^{n-3} = 0$

  $a_n - 3a_{n-1} + 3a_{n-2} - a_{n-3} = 0$

  (ganti n dengan 3, lalu ubah jadi bentuk pangkat)

  $b^3 - 3b^2 + 3b - 1 = 0$

  $x^3 - 3x^{3-1} + 3x^{3-2} - x^{3-3} = 0$

  $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0 \quad \leftarrow$ *persamaan karakteristiknya*

Langkah-langkah dalam menyelesaikan relasi rekurensi linear homogen dengan koefisien tetap adalah sebagai berikut.

1. Ubah relasi rekurensi menjadi persamaan karakteristik.
2. Cari akar-akar persamaan karakteristiknya dengan ketentuan:

   a. jika semua akarnya berbeda ($x_1 \neq x_2 \neq x_3 \neq \ldots \neq x_k$), maka solusinya adalah

   $$\boxed{a_n = p_1 x_1^{\,n} + p_2 x_2^{\,n} + p_3 x_3^{\,n} + \ldots + p_k x_k^{\,n}}$$

   $b_1 = 2$
   $b_2 = 2$
   $b_3 = 2$

   dengan p_1, p_2, p_3, ..., p_k semuanya adalah konstanta,

   b. jika ada r akar yang sama ($x_1 = x_2 = \ldots = x_r$, x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_k), maka solusinya adalah

   $$\boxed{a_n = \left(p_1 + p_2 \cdot n + p_3 \cdot n^2 + \ldots + p_r \cdot n^{r-1}\right) x_1^{\,n} + \ldots + p_{r+1} \ldots x^{n}}$$

   dengan p_1, p_2, p_3, ..., p_k semuanya adalah konstanta.

3. Carilah nilai dari p_1, p_2, p_3, ..., p_k, kemudian substitusi ke rumus a_n yang telah dikonstruksi pada langkah kedua.

$a_n - 3a_{n-1} - 4a_{n-2} = 0$

$\to b^2 - 3b - 4 = 0 \Rightarrow (b-4)(b+1)$

$b_1 = 4 \mid b_2 = -1$

Contoh 3:
Selesaikanlah relasi rekurensi berikut

$$\boxed{a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2}}$$

dengan kondisi awal $a_0 = 1$ dan $a_1 = 3$ untuk $n \geq 2$!

Jawab:

$$a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} \quad \to \quad a_n - 3a_{n-1} - 4a_{n-2} = 0$$

Relasi rekurensi di atas merupakan relasi rekurensi yang berderajat 2. Maka, persamaan karakteristiknya juga harus berderajat 2. Jadi,

(ganti *n* dengan 2, lalu ubah jadi bentuk pangkat)

$$x^2 - 3x^{2-1} - 4x^{2-2} = 0$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

Kemudian, faktorkanlah persamaan karakteristiknya, sehingga didapat:

$$(x-4)(x+1) = 0$$

$$x_1 = 4 \quad \text{V} \quad x_2 = -1$$

Kondisi awal

$a_1 = 3$

Perhatikan bahwa akar-akar persamaan karakteristiknya berbeda. Maka,

$a_0 = 1$

$$\boxed{a_n = p_1 x_1^{\,n} + p_2 x_2^{\,n}}$$

$$\to a_n = p_1(4)^n + p_2(-1)^n$$

$a_0 = p_1 4^0 + p_2(-1)^0$

$\to \boxed{1 = p_1 + p_2}$

$a_1 = p_1 4^1 + p_2(-1)^1$

$\to \boxed{3 = 4p_1 - p_2}$

Selanjutnya, cari nilai p_1 dan p_2.

- Dengan memanfaatkan kondisi awal $a_0 = 1$, diperoleh:

$$a_0 = p_1(4)^0 + p_2(-1)^0 = 1$$

$$p_1 + p_2 = 1 \quad \text{..... (persamaan ke-1)}$$

- Dengan memanfaatkan kondisi awal $a_1 = 3$, diperoleh:

$$a_1 = p_1(4)^1 + p_2(-1)^1 = 3$$

$$4p_1 - p_2 = 3 \quad \text{..... (persamaan ke-2)}$$

Dengan menggunakan metode eliminasi terhadap persamaan ke-1 dan persamaan ke-2, diperoleh

$$p_1 = \frac{4}{5} \text{ dan } p_2 = \frac{1}{5}$$

Jadi, solusinya adalah: $\boxed{a_n = \frac{4}{5}\cdot(4)^n + \frac{1}{5}\cdot(-1)^n}$

$a_{10} = \frac{4}{5} 4^{10} + \frac{1}{5}(-1)^{10}$

Contoh 4:
Selesaikanlah relasi rekurensi berikut

$$a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0$$

dengan kondisi awal $a_0 = 2$ dan $a_1 = 5$ untuk $n \geq 2$!

$b^2 - 4b + 4 = 0$

$(b-2)^2$

$b_1 = 2 \quad b_2 = 2$

Jawab:
Relasi rekurensi di atas merupakan relasi rekurensi yang berderajat 2. Maka, persamaan karakteristiknya juga harus berderajat 2. Jadi,

(ganti *n* dengan 2, lalu ubah jadi bentuk pangkat)

$$x^2 - 4x^{2-1} + 4x^{2-2} = 0$$
$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

Kemudian, faktorkanlah persamaan karakteristiknya, sehingga didapat:

$a_0 = (p_1 + p_2 \cdot 0)\, 2^0$

$a_0 = 2$

$a_1 = 5$

$$(x-2)(x-2) = 0$$
$$x_1 = 2 \quad \text{V} \quad x_2 = 2$$

$2 = p_1$

Perhatikan bahwa ada dua akar persamaan karakteristiknya yang sama. Maka,

$$a_n = \left(p_1 + p_2 \cdot n\right) x_1^{\,n}$$
$$\boxed{a_n = \left(p_1 + p_2 \cdot n\right) \cdot (2)^n}$$

$a_1 = (p_1 + p_2 \cdot 1)\, 2^1$

Selanjutnya, cari nilai p_1 dan p_2.

- Dengan memanfaatkan kondisi awal $a_0 = 2$, diperoleh:

$5 = 2p_1 + 2p_2$

$$a_0 = \left(p_1 + p_2 \cdot 0\right) \cdot 2^0 = 2$$
$$p_1 = 2 \qquad \text{..... (persamaan ke-1)}$$

$5 = 2(2) + 2p_2$

$p_2 = \frac{1}{2}$

- Dengan memanfaatkan kondisi awal $a_1 = 5$, diperoleh:

$$a_1 = \left(p_1 + p_2 \cdot 1\right) \cdot 2^1 = 5$$
$$2p_1 + 2p_2 = 5 \qquad \text{..... (persamaan ke-2)}$$

Karena nilai p_1 sudah diketahui pada persamaan ke-1, substitusilah p_1 yang ada pada persamaan ke-2, sehingga diperoleh

$$p_1 = 2 \quad \text{dan} \quad p_2 = \frac{1}{2}$$

Jadi, solusinya adalah: $a_n = \boxed{\left(2 + \frac{1}{2}n\right) \cdot (2)^n} = 2 \cdot (2)^n + \frac{1}{2} n \cdot (2)^n$

Contoh 5:

Selesaikanlah relasi rekurensi berikut

$$a_n = 2a_{n-1} + 5a_{n-2} - 6a_{n-3}$$

dengan kondisi awal $a_0 = 17$, $a_1 = 14$, dan $a_2 = 110$ untuk $n \geq 3$!

$b^3 - 2b^2 - 5b + 6 = 0$

Jawab:

$$a_n = 2a_{n-1} + 5a_{n-2} - 6a_{n-3} \quad \rightarrow \quad \boxed{a_n - 2a_{n-1} - 5a_{n-2} + 6a_{n-3} = 0}$$

Relasi rekurensi di atas merupakan relasi rekurensi yang berderajat 3. Maka, persamaan karakteristiknya juga harus berderajat 3. Jadi,

(ganti *n* dengan 3, lalu ubah jadi bentuk pangkat)

$$x^3 - 2x^{3-1} - 5x^{3-2} + 6x^{3-3} = 0$$
$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$$

Kemudian, faktorkanlah persamaan karakteristiknya, sehingga didapat:

$$(x-1)(x-3)(x+2) = 0$$
$$x_1 = 1 \quad \text{V} \quad x_2 = 3 \quad \text{V} \quad x_3 = -2$$

a_0, a_1, a_2 } 3 pers

Perhatikan bahwa akar-akar persamaan karakteristiknya berbeda. Maka,

$$a_n = p_1 x_1^{\,n} + p_2 x_2^{\,n} + \boxed{p_3 x_3^{\,n}}$$

$$a_n = p_1(1)^n + p_2(3)^n + p_3(-2)^n$$

$$= p_1 + p_2(3)^n + p_3(-2)^n$$

Selanjutnya, cari nilai p_1, p_2, dan p_3.

- Dengan memanfaatkan kondisi awal $a_0 = 17$, diperoleh:

$$a_0 = p_1 + p_2(3)^0 + p_3(-2)^0 = 17$$

$$p_1 + p_2 + p_3 = 17 \quad \text{..... (persamaan ke-1)}$$

- Dengan memanfaatkan kondisi awal $a_1 = 14$, diperoleh:

$$a_1 = p_1 + p_2(3)^1 + p_3(-2)^1 = 14$$

$$p_1 + 3p_2 - 2p_3 = 14 \quad \text{..... (persamaan ke-2)}$$

- Dengan memanfaatkan kondisi awal $a_2 = 110$, diperoleh:

$$a_2 = p_1 + p_2(3)^2 + p_3(-2)^2 = 110$$

$$p_1 + 9p_2 + 4p_3 = 110 \quad \text{..... (persamaan ke-3)}$$

Dengan menggunakan metode eliminasi terhadap persamaan ke-1, persamaan ke-2, dan persamaan ke-3, diperoleh

$$p_1 = 1 \quad , \quad p_2 = 9, \quad \text{dan} \quad p_3 = 7$$

Jadi, solusinya adalah: $a_n = 1 + 9\cdot(3)^n + 7\cdot(-2)^n$

Contoh 6:

Selesaikanlah relasi rekurensi berikut

$$a_n + a_{n-1} = a_{n-2} + a_{n-3}$$ → pers kar

dengan kondisi awal $a_0 = 2$, $a_1 = 4$, dan $a_2 = 6$ untuk $n \geq 3$!

Jawab:

$$a_n + a_{n-1} = a_{n-2} + a_{n-3} \quad \rightarrow \quad a_n + a_{n-1} - a_{n-2} - a_{n-3} = 0$$

Relasi rekurensi di atas merupakan relasi rekurensi yang berderajat 3. Maka, persamaan karakteristiknya juga harus berderajat 3. Jadi,

(ganti *n* dengan 3, lalu ubah jadi bentuk pangkat)

$$x^3 + x^{3-1} - x^{3-2} - x^{3-3} = 0$$

$$x^3 + x^2 - x - 1 = 0$$

(u+1)(u-3)(u+1)

Kemudian, faktorkanlah persamaan karakteristiknya, sehingga didapat:

$$(x+1)(x+1)(x-1) = 0$$

$$x_1 = -1 \quad \text{V} \quad x_2 = -1 \quad \text{V} \quad x_3 = 1$$

a_0 a_1 a_2

Perhatikan bahwa ada dua akar persamaan karakteristiknya yang sama, dan 1 akar persamaan karakteristiknya yang berbeda. Maka,

$$a_n = (p_1 + p_2 \cdot n)x_1^{\,n} + p_3 x_3^{\,n}$$

$$
\begin{aligned}
a_n &= \left(p_1 + p_2 \cdot n\right)\left(-1\right)^n + p_3 \cdot \left(1\right)^n \\
&= \left(p_1 + p_2 \cdot n\right)\left(-1\right)^n + p_3
\end{aligned}
$$

Selanjutnya, cari nilai p_1, p_2, dan p_3.

- Dengan memanfaatkan kondisi awal $a_0 = 2$, diperoleh:

$$a_0 = \left(p_1 + p_2 \cdot 0\right)\left(-1\right)^0 + p_3 = 2$$

$$p_1 + p_3 = 2 \qquad \text{..... (persamaan ke-1)}$$

- Dengan memanfaatkan kondisi awal $a_1 = 4$, diperoleh:

$$a_1 = \left(p_1 + p_2 \cdot 1\right)\left(-1\right)^1 + p_3 = 4$$

$$-p_1 - p_2 + p_3 = 4 \qquad \text{..... (persamaan ke-2)}$$

- Dengan memanfaatkan kondisi awal $a_2 = 6$, diperoleh:

$$a_2 = \left(p_1 + p_2 \cdot 2\right)\left(-1\right)^2 + p_3 = 6$$

$$p_1 + 2p_2 + p_3 = 6 \qquad \text{..... (persamaan ke-3)}$$

Dengan menggunakan metode eliminasi terhadap persamaan ke-1, persamaan ke-2, dan persamaan ke-3, diperoleh

$$p_1 = -2 \quad , \quad p_2 = 2 \, , \quad \text{dan} \quad p_3 = 4$$

Jadi, solusinya adalah: $a_n = \boxed{(-2+2n)(-1)^n + 4} = -2 \cdot (-1)^n + 2n \cdot (-1)^n + 4$

L A T I H A N   S O A L

Selesaikanlah relasi rekurensi homogen berikut ini.

1. $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$; dengan kondisi awal $a_0 = 2$ dan $a_1 = 7$ untuk $n \geq 2$.

2. $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$; dengan kondisi awal $a_0 = 1$ dan $a_1 = 6$ untuk $n \geq 2$.

3. $a_n - 4a_{n-2} = 0$; dengan kondisi awal $a_0 = 3$ dan $a_1 = 8$ untuk $n \geq 2$.

4. $a_n + 11a_{n-2} = 6a_{n-1} + 6a_{n-3}$; dengan kondisi awal $a_0 = 2$, $a_1 = 5$, dan $a_2 = 15$ untuk $n \geq 3$.

5. $a_n + 3a_{n-2} + 3a_{n-1} + a_{n-3} = 0$; dengan kondisi awal $a_0 = 1$, $a_1 = -2$, dan $a_2 = -1$ untuk $n \geq 3$.