

POHON

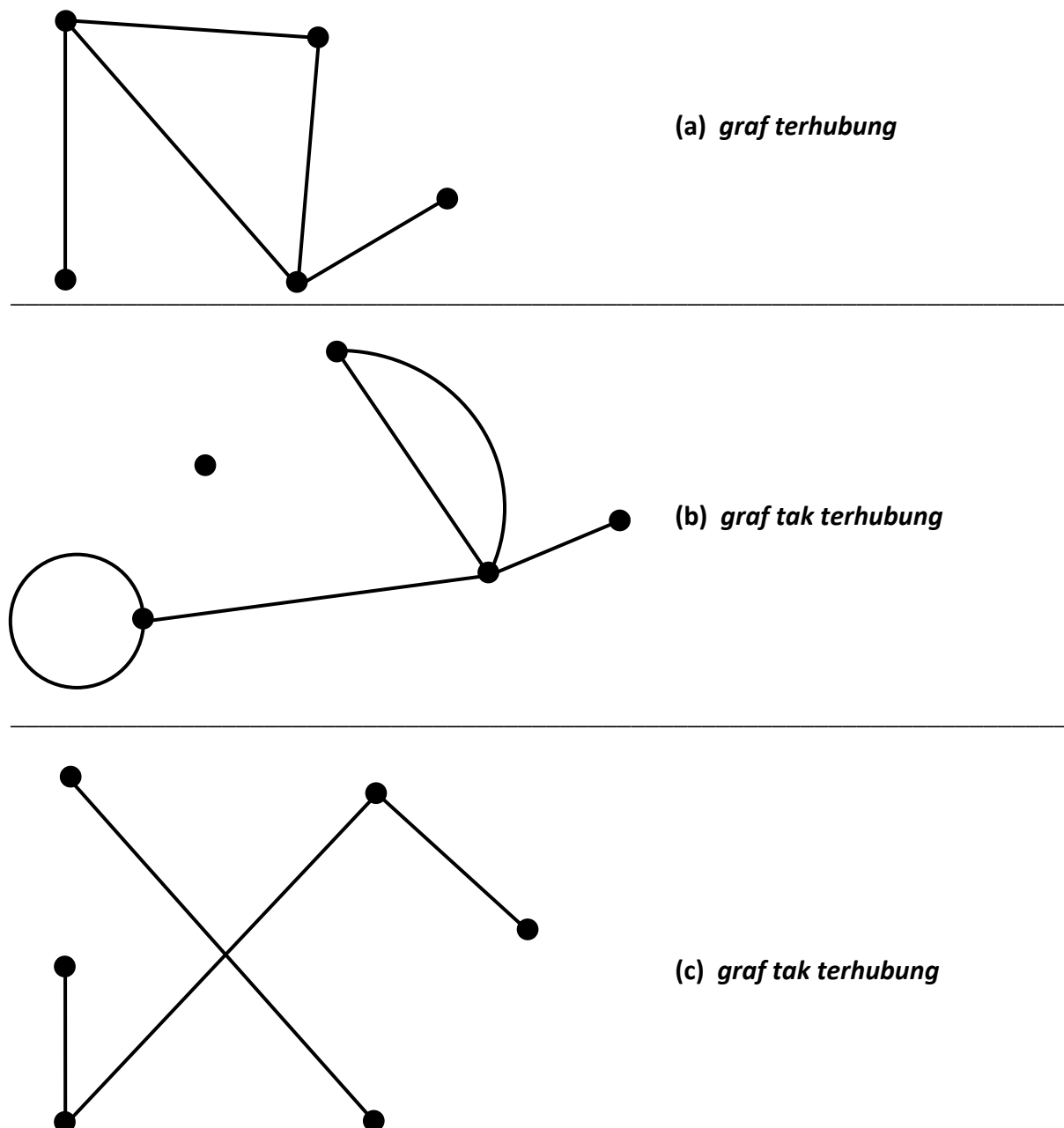
(Bagian I)

12.1. Graf Terhubung

Dua simpul a dan b pada graf G dikatakan **terhubung** jika terdapat lintasan yang menghubungkan a dan b .

Suatu graf G disebut **graf terhubung** jika terdapat suatu lintasan yang menghubungkan setiap pasang simpul di G .

Perhatikan contoh berikut.

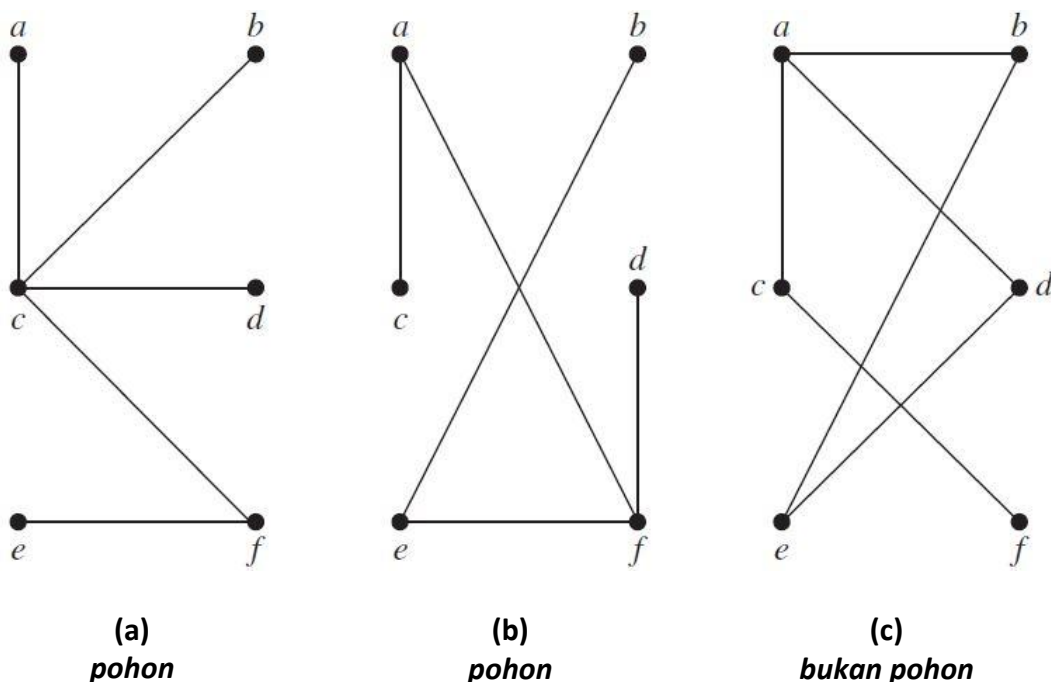


Jika G merupakan suatu graf terhubung, maka busur e yang ada pada G disebut **jembatan** jika graf $G \setminus \{e\}$ adalah suatu graf tak terhubung. Dengan kata lain, penghapusan busur e dari graf G akan memunculkan suatu graf tak terhubung.

12.2. Pohon

Suatu **pohon** (*tree*) merupakan suatu graf terhubung yang tidak memiliki sirkuit. Karena suatu pohon tidak memiliki sirkuit, maka pastilah suatu pohon tidak mengandung gelang ataupun busur paralel. Dengan kata lain, suatu graf pohon pastilah merupakan suatu graf sederhana.

Perhatikan contoh berikut.



Berikut adalah sifat-sifat yang dimiliki suatu pohon.

Diketahui G adalah suatu pohon dengan n simpul.

1. Pohon G berorder n ; $|V(G)| = n$.
2. Pohon G berukuran $n - 1$; $|E(G)| = n - 1$.
3. Semua busur yang ada pada pohon G merupakan jembatan.

Sebagai contoh, perhatikan kembali contoh pohon (a) dan (b) di atas.

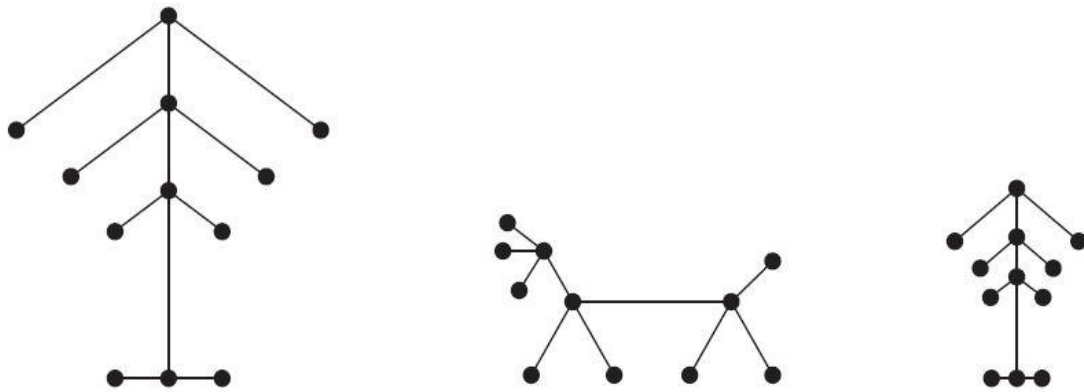
Pohon pada (a) memiliki 6 simpul dengan ukuran $6 - 1 = 5$.

Pohon pada (b) memiliki 6 simpul dengan ukuran $6 - 1 = 5$.

12.3. Hutan

Hutan (*forest*) merupakan kumpulan dari beberapa pohon. Setiap pohon yang ada dalam hutan ini disebut sebagai komponen.

Berikut adalah contoh hutan dengan 35 simpul dan terdiri dari 3 komponen.



Hutan G

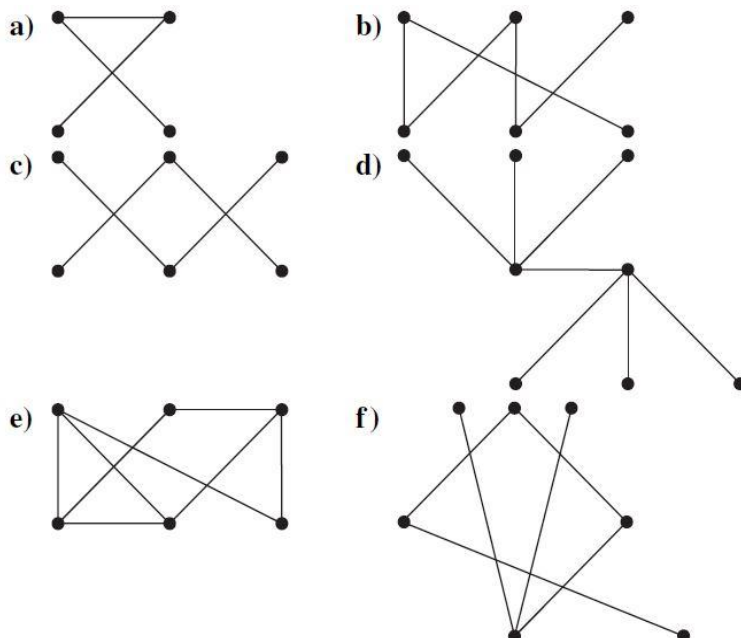
Jika G adalah suatu hutan dengan n simpul dan k komponen, maka ukuran dari hutan G adalah $n - k$;

$$|E(G)| = n - k$$

Sebagai contoh, hutan G di atas memiliki 35 simpul dan 3 komponen dengan ukuran $35 - 3 = 32$.

LATIHAN

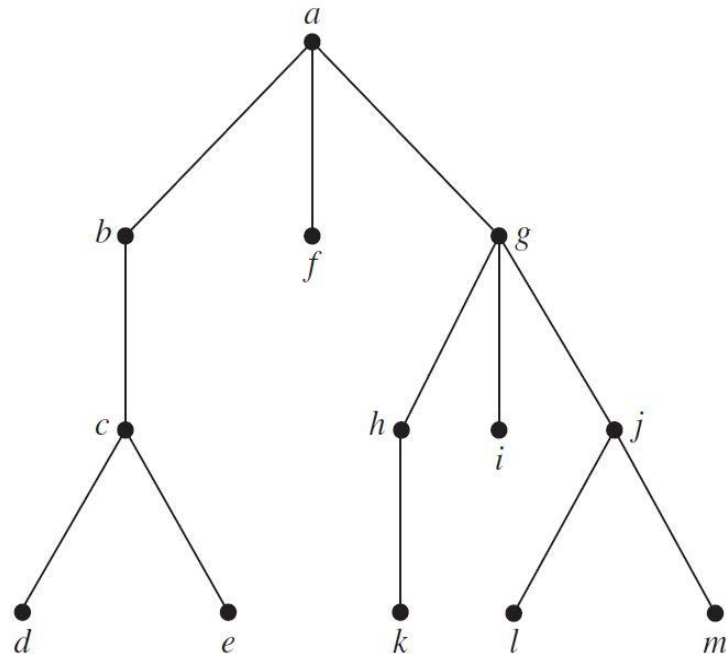
1. Dari graf di bawah ini, manakah yang merupakan pohon?



2. Berapa banyak busur yang dimiliki pohon T dengan 10000 simpul?
3. Jika hutan F berukuran 111 dan terdiri dari tujuh pohon biner, hitunglah berapa total simpul yang ada pada hutan F ?
-

12.4. Pohon Berakar dan Pohon Biner

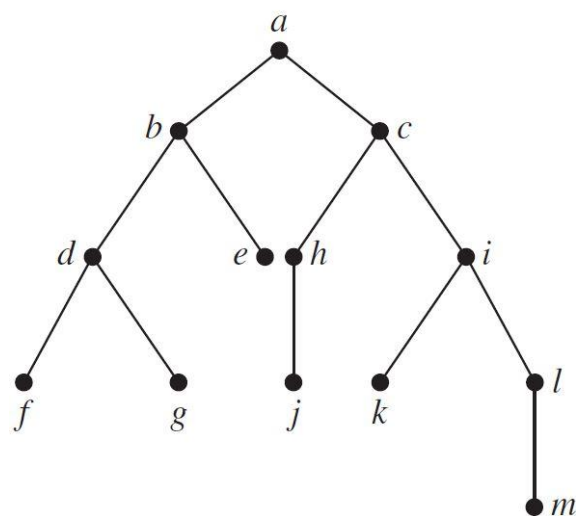
Pohon berakar (*rooted tree*) adalah suatu pohon dimana ada satu simpul yang dikhususkan dari yang lain. Satu simpul ini disebut **akar**, dan simpul lainnya yang berderajat satu disebut sebagai **daun**. Perhatikan contoh berikut.



Pohon Berakar G

Berdasarkan graf G di atas, simpul yang termasuk akar adalah simpul a ; sedangkan simpul yang termasuk daun adalah simpul d, e, f, k, i, l , dan m .

Pohon biner (*binary tree*) adalah pohon berakar yang setiap simpulnya hanya boleh mempunyai maksimum dua cabang ke arah bawah. Berikut adalah contoh pohon biner.



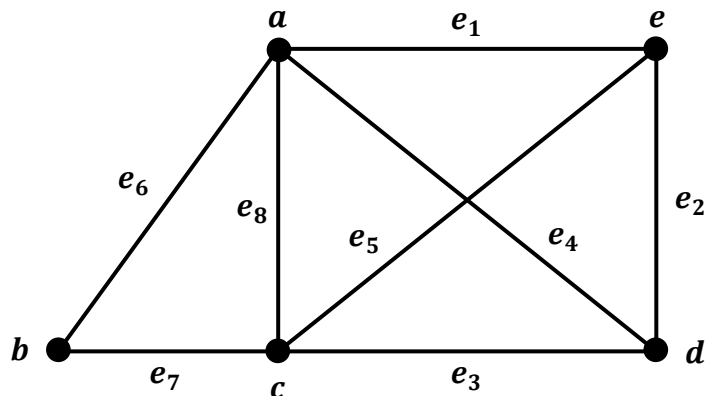
Pohon Biner G

12.5. Pohon Rentangan

Misalkan G adalah suatu graf terhubung yang bukan pohon. Suatu graf pohon dapat dibentuk dari graf G dengan cara memutus sirkuit-sirkuit yang ada pada graf G . Graf pohon yang dihasilkan inilah yang disebut sebagai **pohon rentangan** (*spanning tree*) dari graf G awal.

Cara memutus sirkuit-sirkuit yang ada hingga menghasilkan pohon rentangan adalah sebagai berikut. Pertama-tama, pilih satu sirkuit dan hapus satu busur dari sirkuit tersebut. Graf G akan tetap terhubung, tetapi sirkuitnya berkurang satu. Lakukan hal ini terus-menerus hingga tidak ada lagi sirkuit yang tersisa. Jika graf terhubung G yang memiliki m busur dan n simpul, maka banyaknya busur yang harus dihapus agar memperoleh suatu pohon rentangan adalah sebanyak $m - n + 1$ busur.

Sebagai contoh, jika diketahui graf G sebagai berikut.

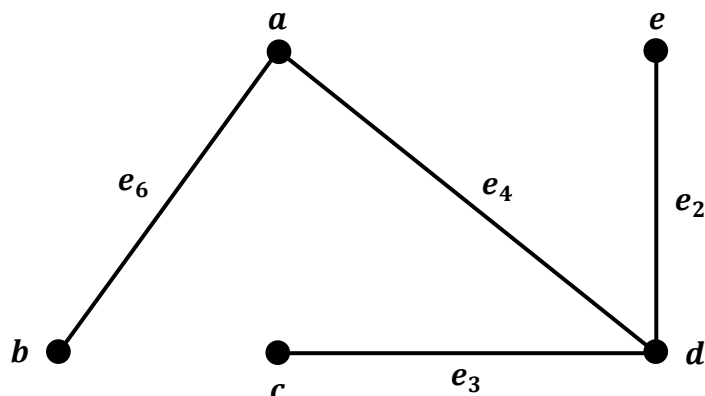


Untuk memperoleh suatu pohon rentangan dari graf di atas, maka banyaknya busur yang harus dihapus adalah sebanyak $8 - 5 + 1 = 4$ busur.

Salah satu pohon rentangan yang bisa diperoleh dari graf G di atas adalah:

Langkah	Sirkuit	Busur yang Dihapus
1	$b - e_6 - a - e_8 - c - e_7 - b$	e_7
2	$a - e_1 - e - e_5 - c - e_8 - a$	e_8
3	$e - e_2 - d - e_3 - c - e_5 - e$	e_5
4	$a - e_1 - e - e_2 - d - e_4 - a$	e_1

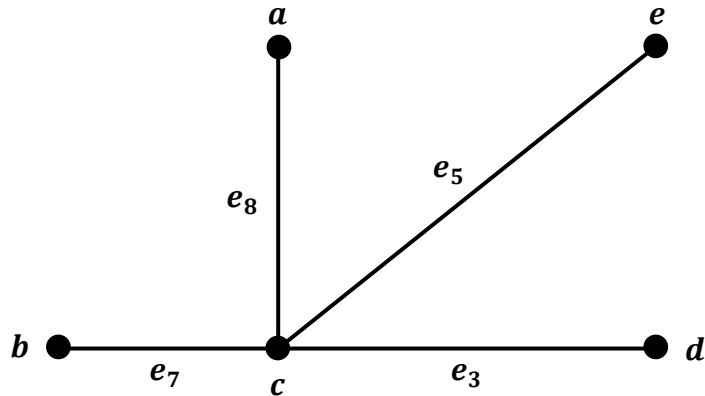
sehingga pohon rentangannya adalah:



Contoh lain pohon rentangan yang bisa diperoleh dari graf G di atas adalah:

Langkah	Sirkuit	Busur yang Dihapus
1	$a - e_1 - e - e_2 - d - e_3 - c - e_8 - a$	e_2
2	$a - e_1 - e - e_5 - c - e_7 - b - e_6 - a$	e_6
3	$a - e_1 - e - e_5 - c - e_8 - a$	e_1
4	$a - e_4 - d - e_3 - c - e_8 - a$	e_4

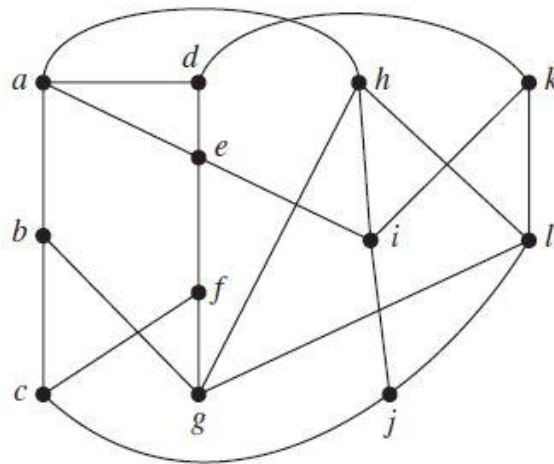
sehingga pohon rentangannya adalah:



Sebagai tambahan, jika diketahui suatu graf lengkap K_n , maka banyaknya pohon rentangan yang dapat dibuat adalah sebanyak n^{n-2} pohon rentangan, dengan $n \geq 2$.

LATIHAN

4. Gambarkanlah suatu pohon rentangan dari graf berikut:



5. Berapa banyak busur yang harus dihapus dari graf K_{10} agar diperoleh suatu pohon rentangan ?
6. Gambarkan semua pohon rentangan dari graf K_4 !
-