

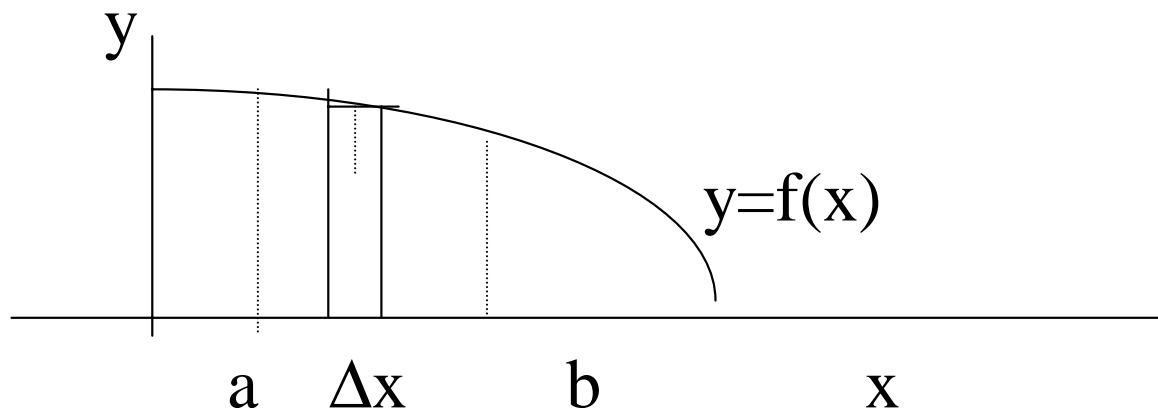
Pertemuan 27.

Aplikasi Integral :

I. Luas bidang

Misalkan $f(x)$ kontinu pada $a \leq x \leq b$. Maka luas daerah dari bidang adalah:

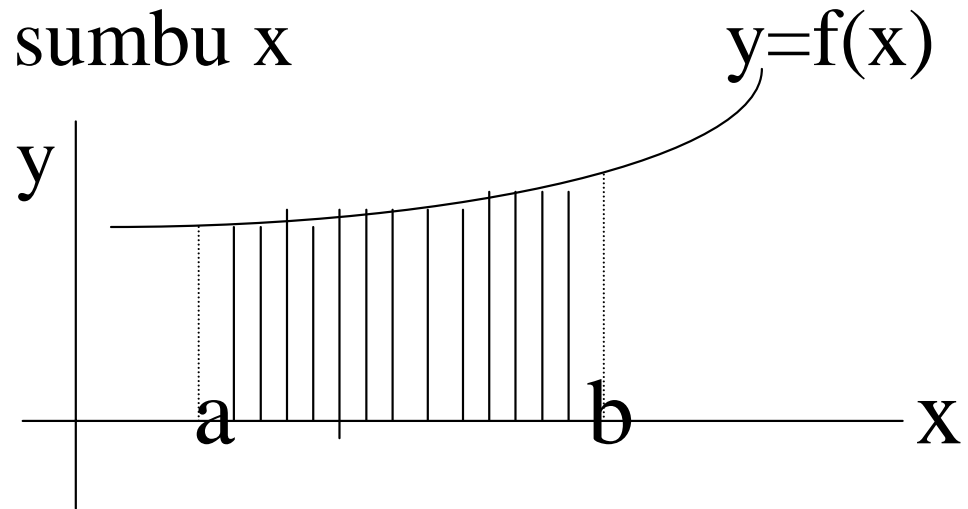
$$\text{Luas} = L = \int_a^b f(x) \, dx$$



Bentuk dari luas bidang dilihat dari bentuk gambar fungsinya.

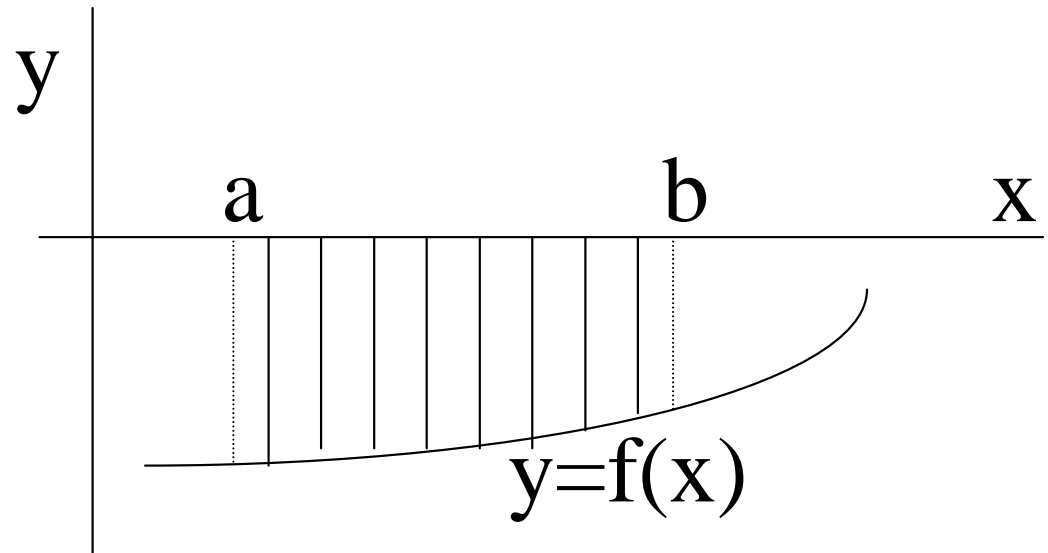
1. Kalau $f(x)$ kontinu pada interval $a \leq x \leq b$ dan $f(x) \leq 0$, maka luas daerahn yang dibatasi oleh $f(x)$, $x = a$, $x = b$ dan sumbu x

$$L = \int_a^b f(x) dx$$

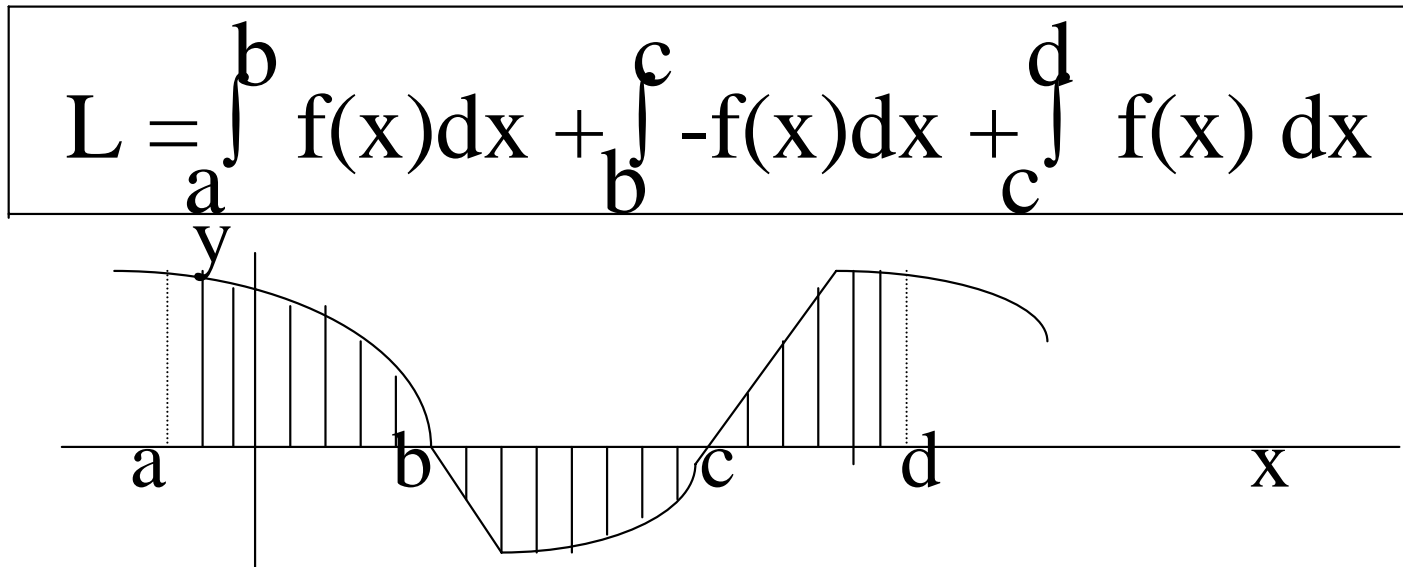


2. Kalau $f(x)$ kontinu pada $a \leq x \leq b$ dan $f(x) \leq 0$ pada interval tersebut, maka luas daerah yang dibatasi oleh $f(x)$, $x = a$, $x = b$ dan sumbu x .

$$L = \int_a^b -f(x) \, dx$$

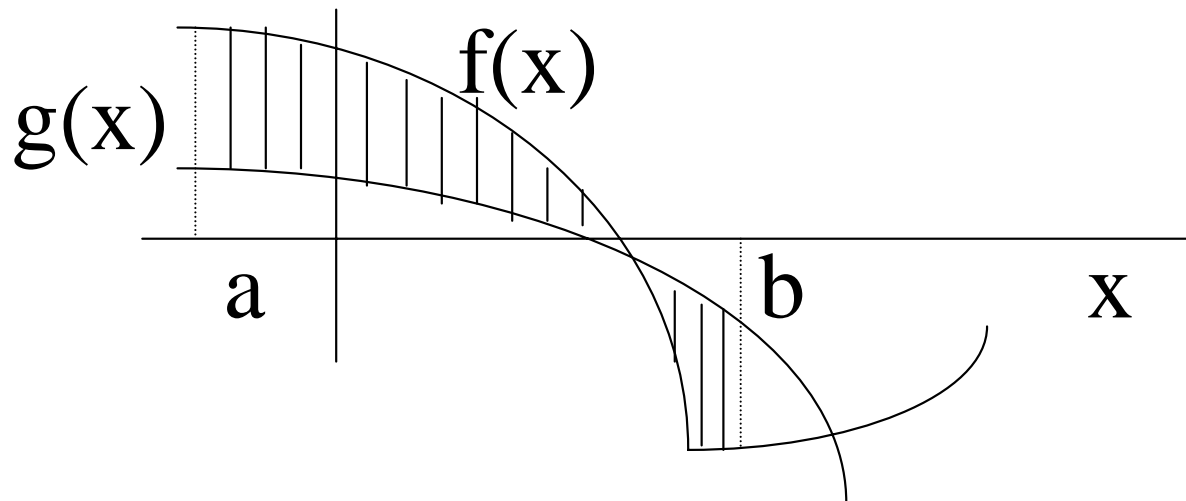


3. Kalau $f(x)$ kontinu pada interval $a \leq x \leq b$ dan bertukar tanda, maka luas daerah yang dibatasi oleh $f(x) \leq 0$, $x = a$, $x = b$ dan sumbu x dengan penjumlahan luas daerah masing-masing daerah.



4. Kalau fungsi $f(x)$ dan $g(x)$ kontinu pada $a \leq x \leq b$, secara umum berlaku bahwa luas daerah yang dibatasi oleh $f(x)$ dan $g(x)$, garis $x = a$ serta $x = b$

$$L = \int_a^b \{f(x) - g(x)\} dx$$

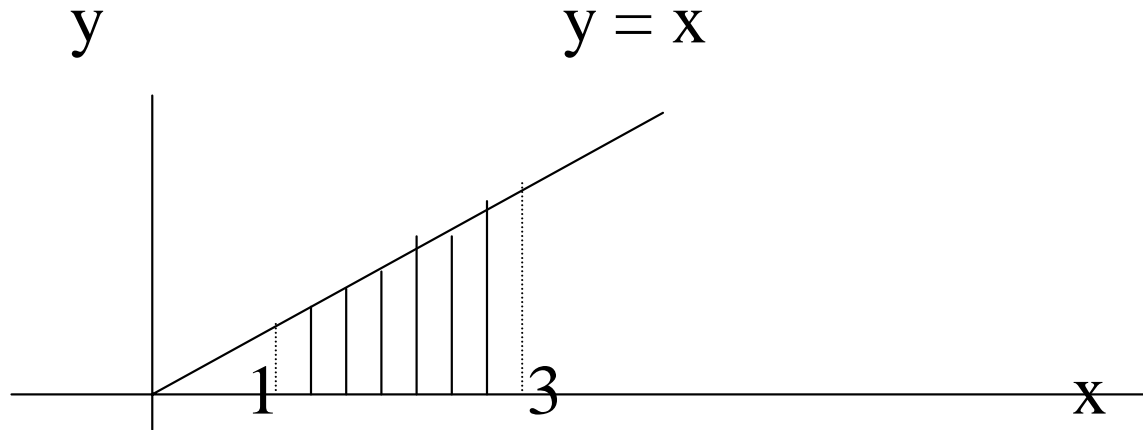


Contoh :

1. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh garis $y = x$, sumbu x , $x = 1$ dan $x = 3$.

$$\int_1^3 x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \Big|_1^3 = \frac{1}{2} (3)^2 - \frac{1}{2} (1)^2$$

$$= \frac{1}{2} (9) - \frac{1}{2} (1) = 4,5 - 0,5 = 4$$



Soal latihan:

1. Berapakah luas daerah yang dibatasi oleh parabola

$y = x^2 - 4$, garis $x = 0$, $x = 3$ dan sumbu x

2. Hitunglah luas daerah yang dibatasi oleh parabola $y = x^2 - 4$ dan garis $y = 3x$.

3. Hitunglah luas daerah yang dibatasi oleh $y = 9 - x^2$, $y = x + 3$.

Pertemuan 28.

II. Isi benda putar:

Suatu benda putar (solid) terjadi bila suatu daerah diputar mengelilingi suatu garis lurus (yang disebut sumbu putar).

a. Metode piringan (disk)

Pandang daerah yang dibatasi oleh fungsi $y = f(x)$, sumbu x , garis $x = a$ dan $x = b$. Dibuat persegi panjang-persegi panjang (pendekatan) tegak dengan tebal Δx dan tinggi y .

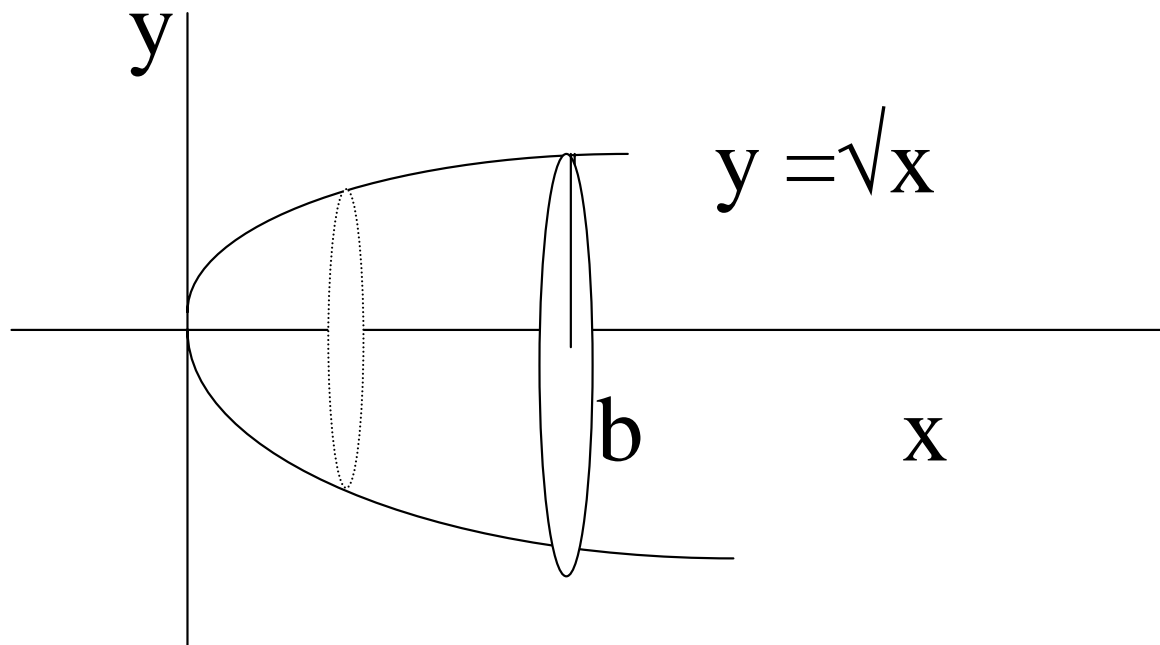
- Bila diputar terhadap sumbu x :

$$\text{volume} = V = \pi \int_a^b y^2 dx$$

- Bila diputar terhadap sumbu y :

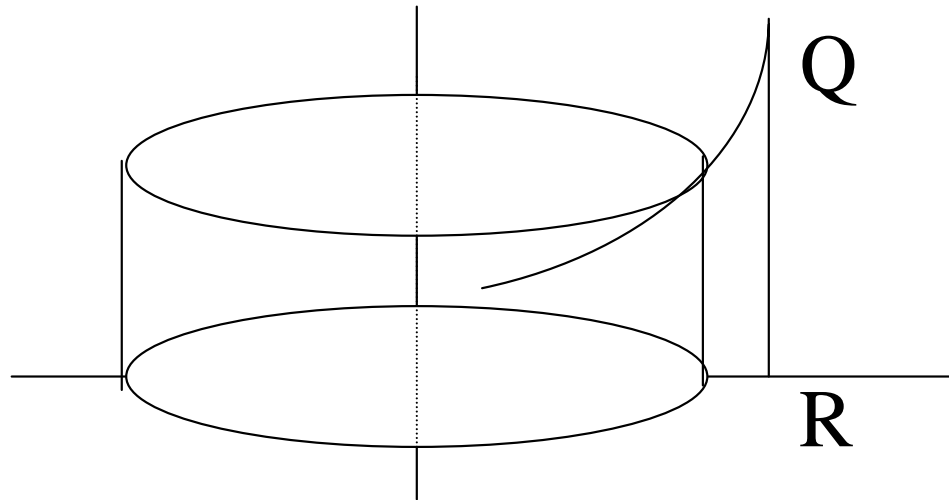
$$\text{Volume} = v = \pi \int_a^b x^2 dx$$

- Gambar :



b. Metode kulit berlapis :

Pandang bahwa daerah akan diputar sekeliling sumbu y. Dibuat persegi panjang pendekatan yang sejajar sumbu y (sumbu putar).



Maka isi benda putar :

$$\text{volume} = V = 2\pi \int_a^b |xy| dx$$

Contoh :

1. Tentukan isi benda putar yang dibatasi oleh grafik $y = \sqrt{x}$, sumbu x , garis $x = 0$ dan $x = 4$, diputar sekeliling sumbu x .

jawab.

$$V = \pi \int_0^4 \sqrt{x} \, dx = \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^4 = 8 \pi$$

2. Isi benda putar akibat perputaran sekeliling sumbu y dari daerah yang dibatasi oleh $y = \sqrt{x}$, $x = 4$ dan sumbu x adalah.....

Jawab:

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^4 x\sqrt{x} \, dx = 4/5 \pi x^{5/4} \Big|_0^4 \\ &= 128 \pi / 5 \end{aligned}$$

Contoh :

1. Tentukan isi benda putar yang dibatasi oleh
 $y = 2x^2, y = 0, x = 0, x = 5$, sumbu putar sumbu x .
2. Tentukan isi benda putar yang dibatasi oleh
 $y = 4x^2, x = 0, y = 16$, sumbu putar sumbu y .
3. Tentukan isi benda putar yang dibatasi $y^2 - x^2 = 16$,
 $y = 0, x = 8$, sumbu putar sumbu x .