HIMPUNAN

1.1. Definisi Himpunan

Himpunan merupakan sekumpulan objek yang memiliki karakteristik yang jelas. Dengan kata lain, himpunan itu adalah suatu kumpulan yang anggotanya dapat disebutkan dengan jelas. Sebagai contoh:

a. himpunan nama bulan dalam setahun,
b. himpunan huruf vokal,
c. himpunan bilangan ganjil.

Pada ketiga contoh di atas, setiap orang dapat menyebutkan anggota himpunannya dengan jelas sehingga hasilnya sama. Akan tetapi, seringkali ada kumpulan yang keanggotaannya tidak dapat disebutkan dengan jelas. Berikut contoh kumpulan yang bukan merupakan himpunan:

a. kumpulan orang pintar,
b. kumpulan mobil bagus,
c. sederetan rumah besar.

Pada contoh pertama di atas, batasan tentang orang pintar berbeda untuk tiap orang. Jika tiap orang diminta untuk menunjukkan orang pintar, maka dapat menghasilkan kumpulan orang pintar yang berbeda. Demikian pula batasan mengenai mobil bagus dan juga rumah besar. Dengan demikian, ketiga contoh di atas bukanlah himpunan karena anggotanya tidak dapat disebutkan dengan jelas.

1.2. Penulisan Himpunan

Himpunan biasanya dinyatakan dengan huruf kapital seperti *A*, *B*, dan lain-lain. Penulisan himpunan itu sendiri ada tiga cara, yaitu:

1. dengan mendeskripsikan karakteristik/sifat dari anggota himpunan,
2. dengan menyebutkan/mendaftar anggota himpunan,
3. dengan notasi pembentuk himpunan.

Perhatikan contoh berikut. Misalkan himpunan bilangan asli yang kurang dari 10 akan dinyatakan.

a. Dengan mendeskripsikan karakteristik/sifat dari anggota himpunan:
   $A = \{\text{bilangan asli yang kurang dari } 10\}$
b. Dengan menyebutkan/mendaftar anggota himpunan:
   $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
c. Dengan notasi pembentuk himpunan:
   $A = \{x \mid x < 10, x \text{ bilangan asli}\}$

Pada bagian (c), pembacaannya *A* adalah himpunan dari semua *x*, dengan *x* kurang dari 10 dan *x* bilangan asli.

Hal yang perlu diperhatikan, penggunaan x pada notasi pembentuk himpunan dapat diganti dengan huruf kecil lainnya. Misalkan, A = {p | $p < 10$, p bilangan asli} atau bisa juga A = {q | $q < 10$, q bilangan asli}. Hal lainnya adalah, dalam menuliskan anggota himpunan, cukup dituliskan anggota yang berbeda saja. Misalkan, A = {huruf yang membentuk kata 'matematika'}. Dengan cara mendaftar, himpunan A tersebut dapat dituliskan sebagai berikut: A = {m, a, t, e, i, k}. Huruf 'm', 'a', dan 't' cukup ditulis sekali.

Seringkali anggota himpunan terlalu banyak sehingga tidak dapat dituliskan keseluruhan anggotanya. Dalam hal ini, gunakanlah tanda tiga titik. Sebagai contoh, A adalah himpunan bilangan bulat dari 1 sampai 100; maka, A = {1, 2, 3, ..., 100}. Contoh lainnya, B adalah himpunan bilangan genap positif; maka, B = {2, 4, 6, 8, 10, ...}.

1.3. Tanda Keanggotaan Himpunan

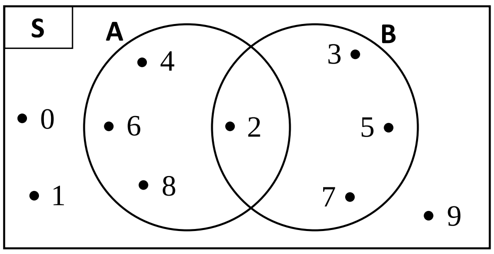
Misalkan himpunan A = {y | $0 \leq y \leq 13$, y bilangan prima}. Maka,

$7 \in A$ (7 adalah anggota/elemen dari himpunan A)
$13 \in A$ (13 adalah anggota/elemen dari himpunan A)
$0 \notin A$ (0 *bukan* anggota/elemen dari himpunan A)
$9 \notin A$ (9 *bukan* anggota/elemen dari himpunan A)

1.4 Diagram Venn

Diagram Venn pertama kali diperkenalkan oleh John Venn pada 1880 dalam tulisannya yang berjudul *"On the Diagrammatic and Mechanical Representation of Proposition and Reasonings"*.

Contoh 1:
Diketahui S = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, A = {2, 4, 6, 8}, dan B = {2, 3, 5, 7}.
Gambarkanlah dalam satu diagram Venn!
Jawab:



1.5. Kardinalitas Himpunan

Kardinalitas himpunan menyatakan banyaknya anggota himpunan dari suatu himpunan. Penulisannya, $n(A)$ atau $|A|$; menyatakan banyaknya anggota himpunan A. Sebagai contoh:

a. kardinalitas dari himpunan A = {a | a huruf penyusun kata 'jakarta'} adalah $n(A) = 5$,
b. kardinalitas dari himpunan B = {b | b faktor positif dari 18} adalah $n(B) = 6$.

1.6. Ekuivalensi Himpunan dan Kesamaan Himpunan

Dua himpunan dikatakan *ekuivalen* jika kedua himpunan tersebut memiliki kardinalitas yang sama. Sebagai contoh:

$$M = \{x \mid 0 \le x \le 10,\ x \text{ bilangan ganjil}\}$$
$$N = \{y \mid 0 \le y \le 10,\ y \text{ bilangan genap}\}$$

Karena $n(M) = n(N) = 5$, maka M dan N adalah dua himpunan yang saling ekuivalen.

Dua himpunan dikatakan *sama* jika kedua himpunan tersebut memiliki anggota yang sama. Sebagai contoh:

$$F = \{x \mid x \text{ huruf vokal pada kata 'matematika'}\} = \{a, e, i\}$$
$$G = \{y \mid y \text{ huruf vokal pada kata 'gembira'}\} = \{e, i, a\}$$

Karena F dan G memiliki anggota yang sama, maka F dan G adalah dua himpunan yang sama.

1.7. Himpunan Semesta dan Himpunan Kosong

Himpunan semesta adalah himpunan yang memuat semua objek yang disebutkan dalam suatu himpunan. Penulisan himpunan semesta biasanya dengan huruf *S*.

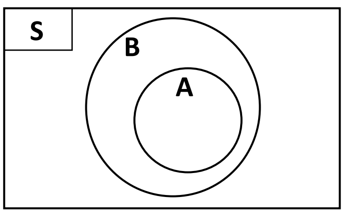
Contoh 2:
Tentukan himpunan semesta dari himpunan *A* = {anjing, kucing}!
Jawab:
S = {semua hewan yang ada di dunia}, atau
S = {hewan berkaki empat}, atau
S = {hewan yang melahirkan}

Perlu diperhatikan bahwa jawaban untuk himpunan semesta ini jelas tidak hanya satu.

Himpunan kosong merupakan himpunan yang tidak memiliki anggota. Dengan kata lain, himpunan kosong adalah himpunan yang memiliki kardinalitas 0. Penulisan himpunan kosong adalah { } atau $\varnothing$. Contohnya, *B* adalah himpunan semua bilangan ganjil yang habis dibagi dua; maka, $B = \{\ \}$ atau $B = \varnothing$.

1.8. Himpunan Bagian (Subset)

Himpunan *A* dikatakan himpunan bagian (*subset*) dari himpunan *B* jika dan hanya jika setiap anggota himpunan *A* juga merupakan anggota himpunan *B*; disimbolkan $A \subseteq B$. Diagram Venn yang menyatakan $A \subseteq B$ adalah sebagai berikut:



Dua himpunan, *A* dan *B*, dikatakan sama jika dan hanya jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$.

Catatan penting terkait himpunan bagian.
Misalkan *A* adalah sebarang himpunan. Maka,
1. $A \subseteq A$
2. $\varnothing \subseteq A$
3. Banyaknya himpunan bagian dari himpunan *A* adalah $2^{n(A)}$.

Contoh 3:
Tentukanlah banyaknya himpunan bagian dari himpunan *A* = {0, 1, 2} dan tulislah semuanya!
Jawab:
Banyaknya himpunan bagian dari himpunan *A* adalah $2^{n(A)} = 2^3 = 8$.

1. $\varnothing$
2. {0}
3. {1}
4. {2}
5. {0, 1}
6. {0, 2}
7. {1, 2}
8. {0, 1, 2} = *A*

1.9. Himpunan Kuasa (Power Set)

Himpunan kuasa (*power set*) dari himpunan *A* adalah suatu himpunan yang anggotanya merupakan semua himpunan bagian dari himpunan *A*; disimbolkan $P(A)$.

Perhatikan kembali Contoh 3 di atas. Maka, himpunan kuasa dari himpunan *A* tersebut adalah:

$$P(A) = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, A\}$$

1.10. Operasi Antar Himpunan

1.10.1. Gabungan (*union*)

Gabungan dua himpunan dilambangkan $A \cup B$. Misalkan dua buah himpunan *A* dan *B*, maka gabungan himpunan *A* dan himpunan *B* adalah himpunan semua anggota *A* atau anggota *B*. Secara singkat,

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ atau } x \in B\}$$

Contoh 4:
Diketahui himpunan *A* = {bilangan ganjil yang terletak antara 1 dan 10} dan diketahui pula himpunan *B* = {bilangan prima yang terletak antara 1 dan 10}. Tentukan $A \cup B$!
Jawab:
A = {3, 5, 7, 9} ; *B* = {2, 3, 5, 7}
Maka, $A \cup B = \{2, 3, 5, 7, 9\}$.

1.10.2. Irisan (*intersection*)

Irisan dua himpunan dilambangkan $A \cap B$. Misalkan dua buah himpunan *A* dan *B*, maka irisan himpunan *A* dan himpunan *B* adalah himpunan yang terdiri dari semua unsur yang merupakan anggota *A* dan sekaligus juga anggota *B*. Secara singkat,

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ dan } x \in B\}$$

Contoh 5:
Diketahui himpunan A = {bilangan ganjil yang terletak antara 1 dan 10} dan diketahui pula himpunan B = {bilangan prima yang terletak antara 1 dan 10}. Tentukan $A \cap B$!
Jawab:
$A = \{3, 5, 7, 9\}$; $B = \{2, 3, 5, 7\}$
Maka, $A \cap B = \{3, 5, 7\}$.

1.10.3. Komplemen (*complement*)

Komplemen himpunan dilambangkan A^C, A' atau $\overline{A}$. Komplemen dari suatu himpunan A adalah himpunan semua anggota yang ada di S tetapi bukan anggota A. Secara singkat,

$$A^C = \{x \mid x \in S \text{ dan } x \notin A\}$$

Contoh 6:
Diketahui $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{2, 4, 6, 8\}$, dan $B = \{2, 3, 5, 7\}$.
Tentukanlah A^C dan B^C!
Jawab:
$A^C = \{0, 1, 3, 5, 7, 9\}$; $B^C = \{0, 1, 4, 6, 8, 9\}$

1.10.4. Selisih (*difference*)

Selisih dua himpunan dilambangkan $A - B$ atau $B - A$. Misalkan dua buah himpunan A dan B, maka selisih himpunan A dan himpunan B ($A - B$) adalah himpunan yang terdiri dari semua unsur yang merupakan anggota A, namun bukan merupakan anggota B. Sebaliknya, selisih himpunan B dan himpunan A ($B - A$) adalah himpunan yang terdiri dari semua unsur yang merupakan anggota B, namun bukan merupakan anggota A. Secara singkat,

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ dan } x \notin B\}$$

$$B - A = \{x \mid x \in B \text{ dan } x \notin A\}$$

Contoh 7:
Diketahui $A = \{2, 4, 6, 8\}$ dan $B = \{1, 3, 4, 8\}$. Tentukanlah $A - B$ dan $B - A$!
Jawab:
$A - B = \{2, \cancel{4}, 6, \cancel{8}\} - \{1, 3, 4, 8\} = \{2, 6\}$
$B - A = \{1, 3, \cancel{4}, \cancel{8}\} - \{2, 4, 6, 8\} = \{1, 3\}$

1.10.5. Selisih simetris (beda setangkup)

Selisih simetris dua himpunan dilambangkan $A \oplus B$. Misalkan dua buah himpunan A dan B, maka selisih simetris himpunan A dan himpunan B adalah gabungan dari selisih A dan B dengan selisih B dan A; atau, selisih dari gabungan A dan B dengan irisan A dan B. Secara singkat,

$$\begin{aligned} A \oplus B &= (A - B) \cup (B - A) \\ &= (A \cup B) - (A \cap B) \end{aligned}$$

Contoh 8:
Diketahui $A = \{2, 4, 6, 8\}$ dan $B = \{1, 3, 4, 8\}$. Tentukanlah $A \oplus B$!
Jawab:
$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = \{2, 6\} \cup \{1, 3\} = \{1, 2, 3, 6\}$
atau
$A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B) = \{1, 2, 3, \cancel{4}, 6, \cancel{8}\} - \{4, 8\} = \{1, 2, 3, 6\}$

1.11. Aljabar Himpunan

Idempoten	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
Asosiatif	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Komutatif	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Distributif	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Identitas	$A \cup \varnothing = A$, $A \cup S = S$	$A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \cap S = A$
Involusi	$\left(A^C\right)^C = A$	
Komplemen	$A \cup A^C = S$, $S^C = \varnothing$	$A \cap A^C = \varnothing$, $\varnothing^C = S$
De Morgan	$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$	$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

1.12. Himpunan Hingga dan Perhitungan Anggota Himpunan

Himpunan hingga merupakan himpunan yang banyak anggotanya berhingga.

Perhitungan Anggota dari Dua Himpunan:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Contoh 9:

Dari satu kelas yang terdiri dari 43 mahasiswa, dilakukan pencatatan tentang kegemaran terhadap olahraga dan musik. Ternyata, ada 29 orang yang gemar olahraga, 18 orang yang gemar musik, dan 8 orang gemar keduanya.

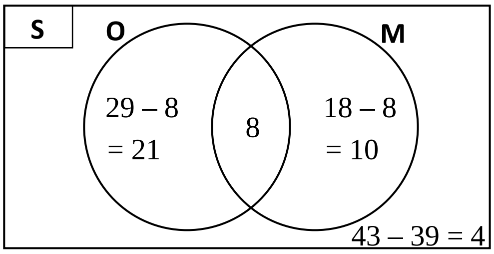
a. Tentukan berapa banyak mahasiswa yang *hanya* gemar olahraga!
b. Tentukan berapa banyak mahasiswa yang *hanya* gemar musik!
c. Tentukan berapa banyak mahasiswa yang tidak gemar keduanya!

Jawab:

$n(S) = 43$; $n(O) = 29$; $n(M) = 18$; $n(O \cap M) = 8$

Gemar olahraga atau musik:

$$n(O \cup M) = n(O) + n(M) - n(O \cap M) = 29 + 18 - 8 = 39$$



a. Banyak mahasiswa yang *hanya* gemar olahraga adalah 21 orang.
b. Banyak mahasiswa yang *hanya* gemar musik adalah 10 orang.
c. Banyak mahasiswa yang tidak gemar keduanya adalah 4 orang.

Perhitungan Anggota dari Tiga Himpunan:

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$$

Contoh 10:

Hitunglah banyaknya bilangan asli dari 1 sampai 100 yang habis dibagi 2, 3, atau 5!

Jawab:

Misalkan A = {bilangan asli dari 1 sampai 100 yang habis dibagi 2}. Maka,

$$n(A)=\left\lfloor \frac{100}{2} \right\rfloor=50$$

Misalkan B = {bilangan asli dari 1 sampai 100 yang habis dibagi 3}. Maka,

$$n(B)=\left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor=33$$

Misalkan C = {bilangan asli dari 1 sampai 100 yang habis dibagi 5}. Maka,

$$n(C)=\left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor=20$$

Lalu, $A\cap B$ = {bilangan asli dari 1 sampai 100 yang habis dibagi 2 dan 3}. Maka,

$$n(A\cap B)=\left\lfloor \frac{100}{KPK(2,3)} \right\rfloor=\left\lfloor \frac{100}{6} \right\rfloor=16$$

Lalu, $A\cap C$ = {bilangan asli dari 1 sampai 100 yang habis dibagi 2 dan 5}. Maka,

$$n(A\cap C)=\left\lfloor \frac{100}{KPK(2,5)} \right\rfloor=\left\lfloor \frac{100}{10} \right\rfloor=10$$

Lalu, $B\cap C$ = {bilangan asli dari 1 sampai 100 yang habis dibagi 3 dan 5}. Maka,

$$n(B\cap C)=\left\lfloor \frac{100}{KPK(3,5)} \right\rfloor=\left\lfloor \frac{100}{15} \right\rfloor=6$$

Kemudian, $A\cap B\cap C$ = {bilangan asli dari 1 sampai 100 yang habis dibagi 2, 3, dan 5}. Maka,

$$n(A\cap B\cap C)=\left\lfloor \frac{100}{KPK(2,3,5)} \right\rfloor=\left\lfloor \frac{100}{30} \right\rfloor=3$$

Jadi, banyaknya bilangan asli dari 1 sampai 100 yang habis dibagi 2, 3, atau 5, yaitu:

$$\begin{aligned} n(A\cup B\cup C)&=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)\\ &=50+33+20-16-10-6+3\\ &=74 \end{aligned}$$

L A T I H A N S O A L

1. Tulislah himpunan berikut dengan mendaftar anggotanya:
   a. $A = \{a \mid a$ bilangan asli genap yang kurang dari 10$\}$
   b. $B = \{b \mid b$ faktor positif dari 45$\}$
   c. $C = \{c \mid c$ bilangan prima yang lebih kecil dari 30$\}$
   d. $D = \{d \mid d$ huruf pembentuk kata 'manchester'$\}$

2. Diketahui himpunan $X = \{p, q, r, s\}$.
   a. Tuliskan semua himpunan bagian X yang memiliki tiga anggota!
   b. Tentukan himpunan kuasa dari himpunan X!

3. Diketahui himpunan H = {huruf pembentuk kata 'ilusi'}. Hitunglah berapa banyak himpunan bagian dari H yang berkardinalitas dua!

4. Diketahui $D = \{6, 7, 8\}$, $E = \{1, 2, 3, 5\}$, $F = \{4, 5, 7, 8\}$, dan S = {bilangan cacah yang kurang dari 11}. Tentukan:
   a. $S-(D\cup E\cup F)$
   b. $(S-D)\cap(S-E)\cap(S-F)$
   c. $(D\cap E)^C \cup (E\cap F)^C \cup (F\cap D)^C$
   d. $\left[(D\oplus E)-(F\oplus E)\right]^C$

5. Dari 500 warga lingkungan Sawangan, sebanyak 329 memiliki sepeda motor, 186 memiliki mobil pribadi, dan 83 memiliki keduanya. Hitunglah berapa warga yang tidak memiliki keduanya!

6. Dari 48 mahasiswa, diketahui ada 24 orang menyukai bola voli, 27 orang menyukai bola basket, 25 orang menyukai tenis, 12 orang menyukai bola voli dan bola basket, 11 orang menyukai bola voli dan tenis, 7 orang menyukai ketiganya, dan 4 orang tidak menyukai ketiganya. Berapakah banyaknya mahasiswa yang hanya menyukai bola basket?

7. Dari 100 mahasiswa Universitas Galatasaray, 77 orang mengikuti mata kuliah pilihan yang ditawarkan pada semester ganjil, yaitu Matematika Informatika, Statistika, dan Metode Penelitian. Setelah survei lebih lanjut, diperoleh bahwa 45 orang mengikuti Matematika Informatika, 21 orang mengikuti Statistika, 38 orang mengikuti Metode Penelitian, 9 orang mengikuti Matematika Informatika dan Statistika, 4 orang mengikuti Statistika dan Metode Penelitian, serta 18 orang mengikuti Metode Penelitian dan Matematika Informatika. Tentukanlah:
   a. banyaknya mahasiswa yang mengambil ketiga mata kuliah itu sekaligus!
   b. banyaknya mahasiswa yang hanya mengambil Metode Penelitian saja!
   c. banyaknya mahasiswa yang mengikuti Statistika dan Matematika Informatika tetapi tidak mengikuti Metode Penelitian!

8. Hitunglah:
   a. banyaknya bilangan bulat dari 1 sampai 1000 yang habis dibagi 2 atau 6!
   b. banyaknya bilangan bulat dari 1 sampai 2000 yang habis dibagi 3 tetapi tidak habis dibagi 7!
   c. banyaknya bilangan asli dari 1 sampai 500 yang habis dibagi 2, 3, dan 5!
   d. banyaknya bilangan asli dari 1 sampai 1000 yang habis dibagi 5, 7, atau 11!