

GRAF

11.1. Terminologi Graf

Graf adalah suatu visualisasi objek yang memuat informasi tertentu. Berikut adalah definisi formal dari graf.

Suatu **graf**, $G = (V, E)$, terdiri dari himpunan tak kosong $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ yang disebut **himpunan simpul** (*vertex set*) dan himpunan $E(G) = \{e_1, e_2, \dots\}$ yang disebut **himpunan busur** (*edge set*).

Banyaknya simpul dari suatu graf G disebut **order**, dinotasikan $|V(G)|$. Sementara, banyaknya busur dari suatu graf G disebut **ukuran**, dinotasikan $|E(G)|$.

Pada suatu graf, dua simpul dikatakan **bertetangga** (*adjacent*) jika terdapat satu atau lebih busur yang mengaitkan keduanya. Lalu, suatu busur disebut **hadir** (*incident*) pada suatu simpul jika simpul tersebut merupakan salah satu ujung dari busur tersebut.

Suatu busur yang memiliki simpul ujung yang sama disebut **gelang** (*loop*). Dua atau lebih busur dikatakan **busur paralel** atau **busur ganda** jika busur-busur tersebut memiliki simpul ujung yang sama.

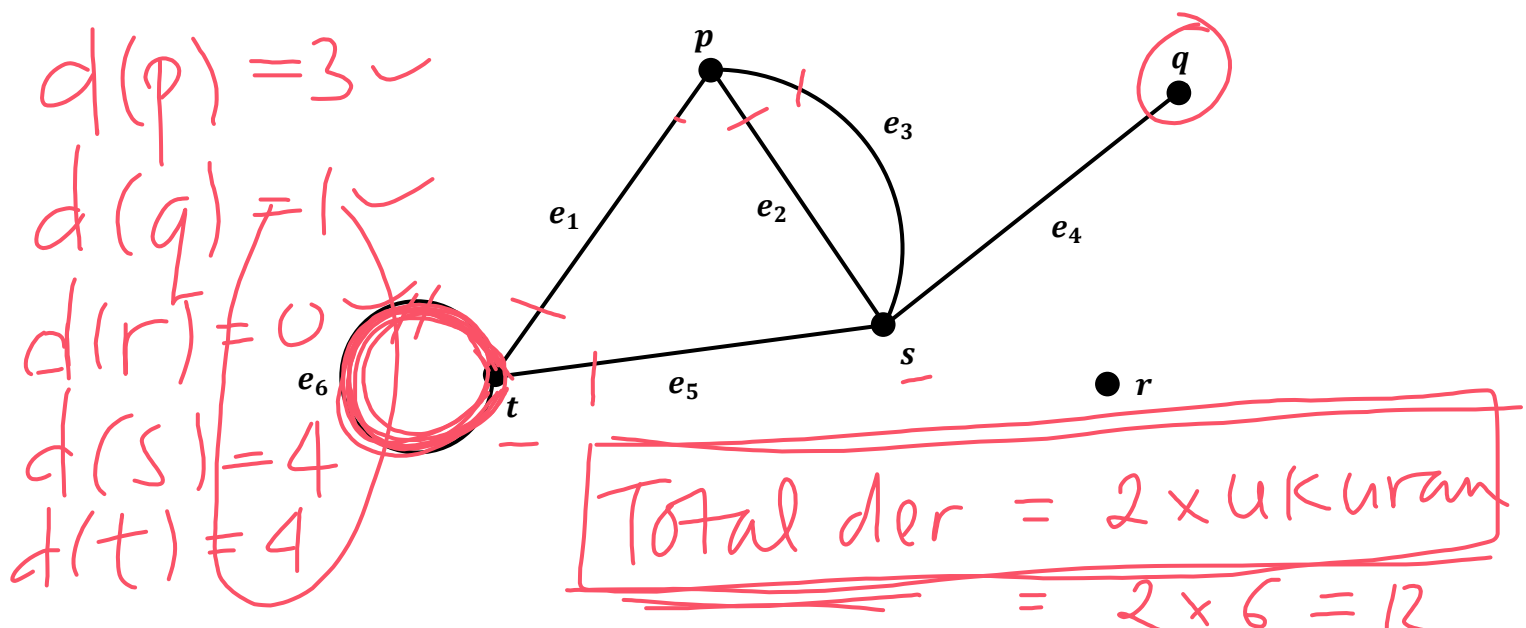
Banyaknya busur yang hadir pada suatu simpul v disebut sebagai **derajat** dari simpul v , dinotasikan $d(v)$.

Simpul dengan $d(v) = 0$ disebut **simpul terisolasi** atau **simpul terasing**.

Simpul dengan $d(v) = 1$ disebut **simpul pندان** atau **simpul daun**.

Perhatikan contoh graf berikut untuk lebih memahami terminologi di atas.

Diberikan graf G dengan himpunan simpul $V(G) = \{p, q, r, s, t\}$ dan himpunan busur $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$.



Order dari graf G di atas adalah $|V(G)| = 5$.

Ukuran dari graf G di atas adalah $|E(G)| = 6$.

Simpul p bertetangga dengan simpul s dan t .

Busur e_3 hadir pada simpul p dan s .

Busur e_6 adalah gelang atau loop.

$\{e_2, e_3\}$ merupakan busur paralel.

Derajat masing-masing simpul:

$$d(p) = 3$$

$$d(q) = 1$$

$$d(r) = 0$$

$$d(s) = 4$$

$$d(t) = 4$$

Perlu diperhatikan bahwa untuk gelang/loop, derajatnya dihitung dua.

(Lihat kembali derajat untuk simpul t)

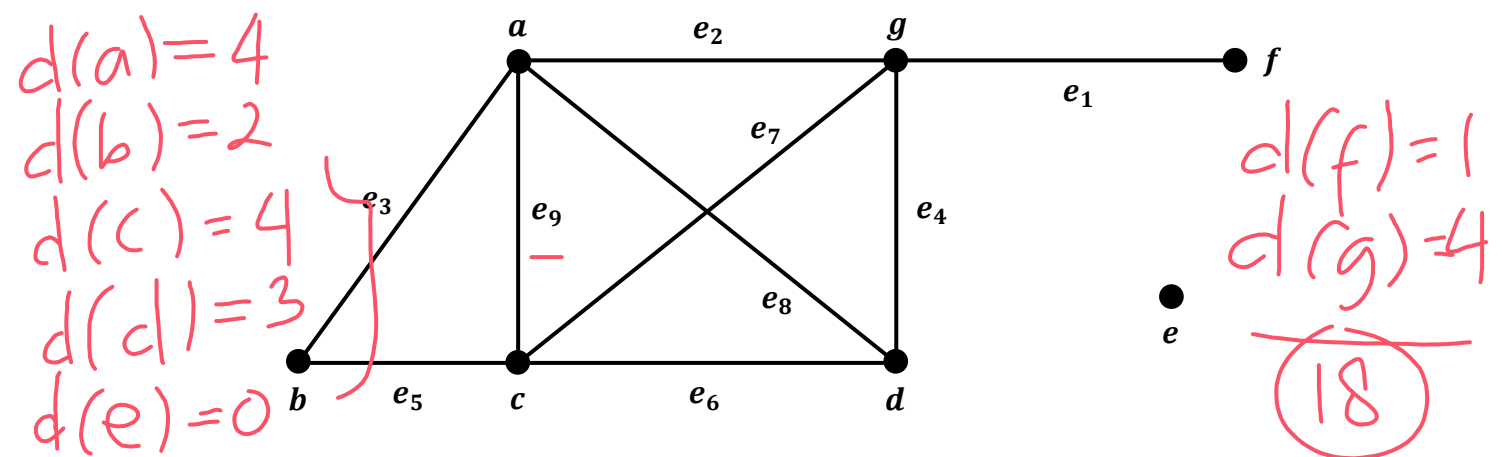
Karena $d(r) = 0$, maka r adalah simpul terisolasi atau simpul terasing.

Karena $d(q) = 1$, maka q adalah simpul pendan atau simpul daun.

Total derajat dalam graf G di atas adalah $3 + 1 + 0 + 4 + 4 + 4 = 12$.

LATIHAN

1. Diberikan graf G dengan himpunan simpul $V(G) = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ dan himpunan busur $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\}$.

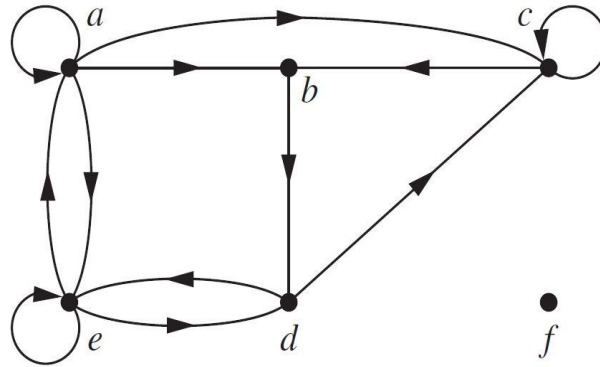


- Tentukan order dan ukuran dari graf G di atas!
 - Sebutkan simpul mana saja yang menjadi tetangga dari simpul g !
 - Sebutkan busur apa saja yang hadir pada simpul c !
 - Tentukanlah derajat dari masing-masing simpul pada graf G di atas!
Berapakah total derajatnya?
 - Manakah yang merupakan simpul terisolasi, simpul pendan, gelang, dan busur paralel?
-

11.2. Graf Tak Berarah dan Graf Berarah

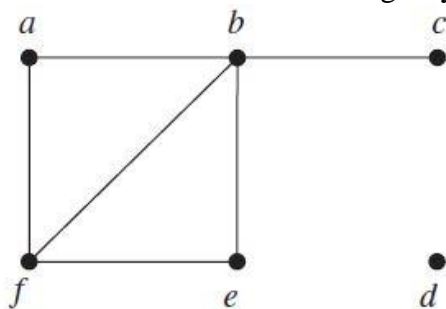
Graf tak berarah merupakan graf yang busur-busurnya tidak memiliki arah. Graf G di atas merupakan contoh dari graf tak berarah.

Graf berarah (digraf) merupakan graf yang busur-busurnya memiliki arah. Berikut adalah contoh graf berarah.

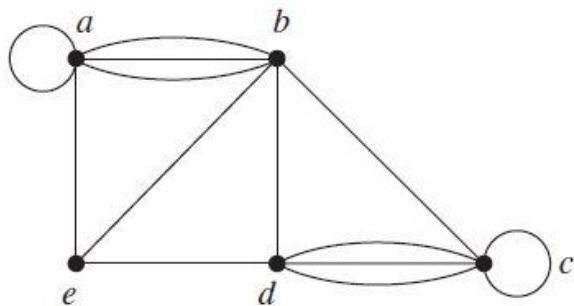


11.3. Graf Sederhana

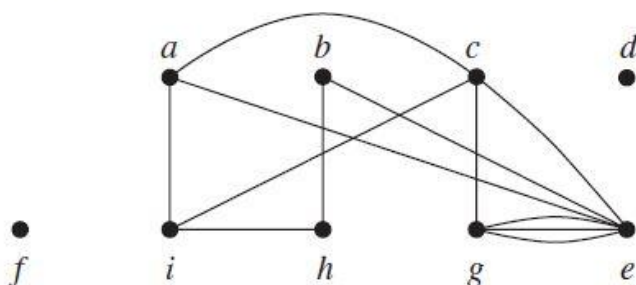
Graf sederhana (simple graph) merupakan graf yang tidak memuat gelang ataupun busur paralel. Berikut adalah contoh graf yang sederhana dan yang bukan sederhana.



graf sederhana



*bukan
graf sederhana*



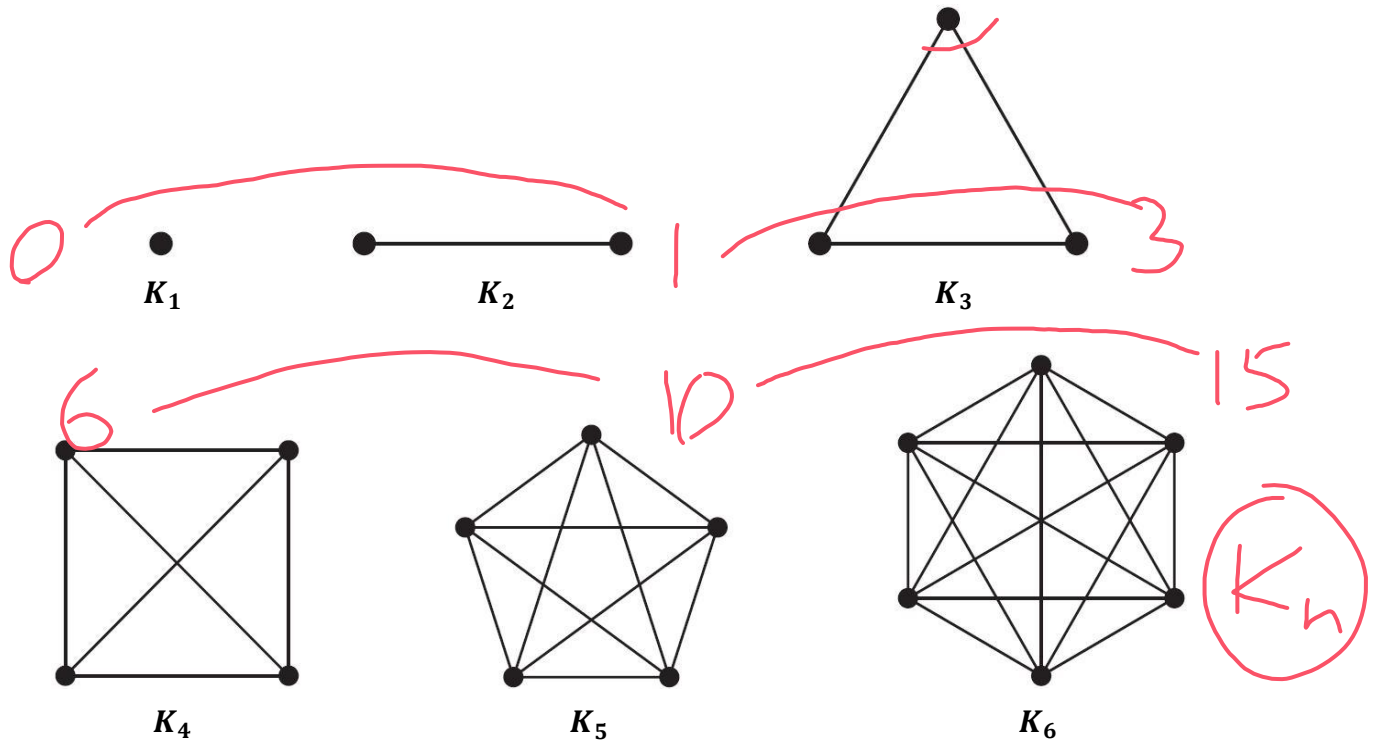
*bukan
graf sederhana*

11.4. Graf Lengkap

Graf lengkap (*complete graph*) merupakan graf sederhana dimana setiap pasang simpulnya merupakan simpul-simpul bertetangga.

Graf lengkap dengan n simpul dinotasikan K_n .

Berikut adalah contoh graf lengkap dengan $1 \leq n \leq 6$ simpul.



Graf lengkap K_1 memiliki ukuran 0 dengan total derajatnya adalah 0.

Graf lengkap K_2 memiliki ukuran 1 dengan total derajatnya adalah 2.

Graf lengkap K_3 memiliki ukuran 3 dengan total derajatnya adalah 6.

Graf lengkap K_4 memiliki ukuran 6 dengan total derajatnya adalah 12.

Graf lengkap K_5 memiliki ukuran 10 dengan total derajatnya adalah 20.

Graf lengkap K_6 memiliki ukuran 15 dengan total derajatnya adalah 30.

LATIHAN

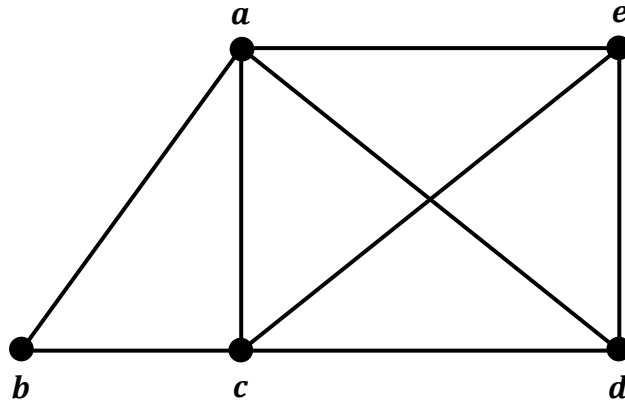
- Gambarkanlah graf lengkap K_8 , kemudian hitunglah berapa ukuran dan total derajatnya!
- Jika bentuk ini diperumum menjadi graf lengkap dengan n simpul (K_n), tentukan bagaimana cara menghitung ukurannya beserta dengan total derajatnya?

11.5. Komplemen Graf

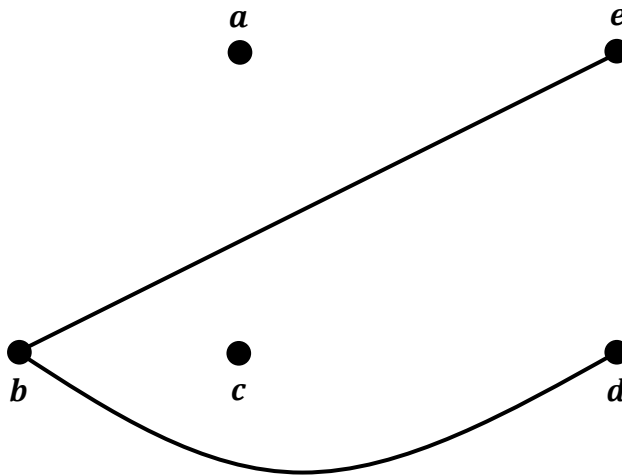
Komplemen dari graf sederhana G adalah suatu graf sederhana yang dinotasikan \bar{G} dengan:

- simpul pada \bar{G} sama dengan simpul pada G ; $V(\bar{G}) = V(G)$,
- dua simpul bertetangga di \bar{G} jika dan hanya jika simpul tersebut tidak bertetangga di G .

Sebagai contoh, jika diberikan graf G sebagai berikut:



Maka, graf komplemennya, \bar{G} , adalah:

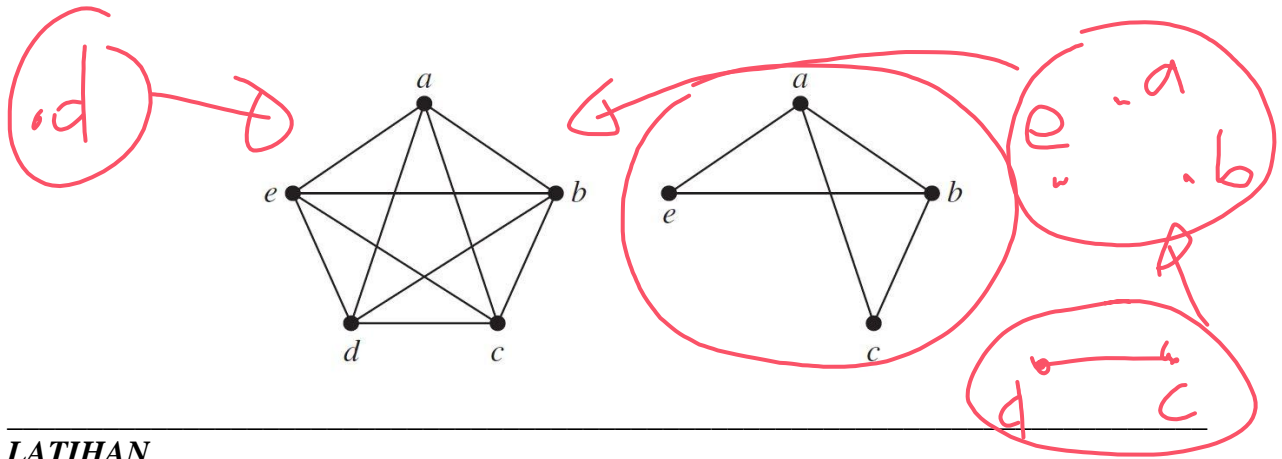


11.6. Subgraf

Misalkan G adalah suatu graf. Graf H dikatakan **subgraf** dari G jika dan hanya jika berlaku:

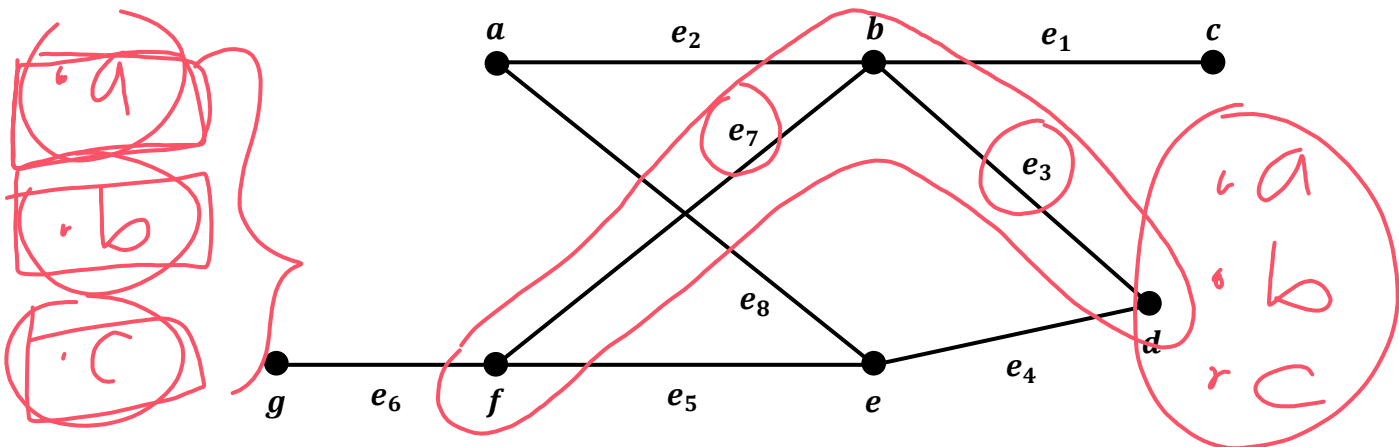
- $V(H) \subseteq V(G)$,
- $E(H) \subseteq E(G)$, dan
- setiap busur dalam H memiliki simpul ujung yang sama dengan setiap busur dalam G .

Berikut adalah graf lengkap K_5 dengan contoh subgrafnya.



LATIHAN

4. Diberikan graf G dengan himpunan simpul $V(G) = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ dan himpunan busur $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$.



Gambarkan 3 subgraf berbeda dari graf G di atas!

11.7. Lintasan dan Sirkuit

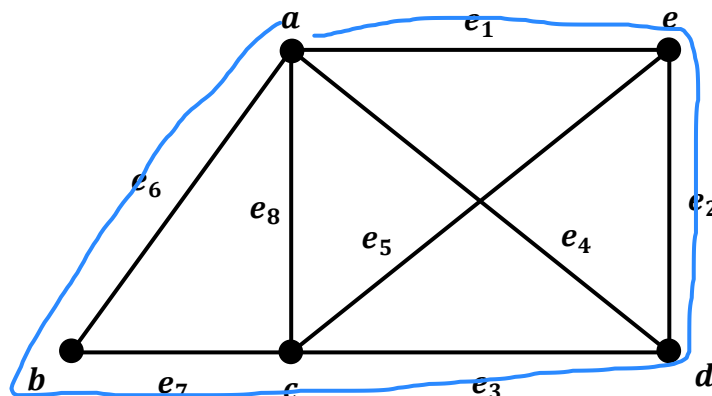
Trail antara dua simpul, $a - b$, adalah jalan dimana *setiap busur hanya dilalui satu kali saja*.
Sirkuit adalah trail yang tertutup.

Lintasan $a - b$ adalah jalan ab dimana *setiap simpulnya hanya dilalui satu kali*.

Lingkaran adalah lintasan yang tertutup

Panjang trail/lintasan/sirkuit/lingkaran adalah banyaknya busur yang terdapat pada trail/lintasan/sirkuit/lingkaran.

Sebagai contoh, jika diketahui graf G sebagai berikut.



$P_{jg} = 5$

Beberapa contoh trail $b - e$ dari graf di atas beserta panjangnya adalah:

- $b - e_6 - a - e_1 - e$; panjangnya 2
- $b - e_7 - c - e_3 - d - e_2 - e$; panjangnya 3
- $b - e_7 - c - e_8 - a - e_4 - d - e_2 - e$; panjangnya 4

Jika diperhatikan lebih lanjut, ketiga contoh trail di atas juga merupakan contoh dari lintasan $b - e$, karena setiap simpulnya hanya dilalui sekali.

Contoh sirkuit dari graf G di atas beserta panjangnya adalah:

- $a - e_8 - c - e_3 - d - e_4 - a$; panjangnya 3
- $e - e_1 - a - e_6 - b - e_7 - c - e_5 - e$; panjangnya 4
- $b - e_6 - a - e_8 - c - e_7 - b$; panjangnya 3

Jika diperhatikan lebih lanjut, ketiga contoh sirkuit di atas juga merupakan contoh lingkaran, karena setiap simpulnya hanya dilalui sekali (kecuali simpul awal dan simpul akhir).

Pertanyaannya sekarang adalah, dapatkah kalian menemukan contoh trail yang bukan lintasan dari graf di atas?

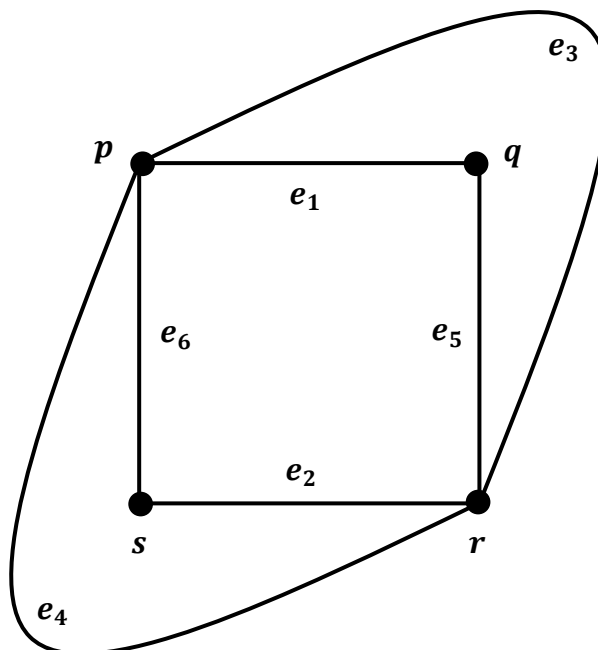
Lalu, dapatkah pula kalian menemukan contoh sirkuit yang bukan lingkaran dari graf di atas?

11.8. Sirkuit Euler dan Sirkuit Hamilton

Sirkuit Euler dalam suatu graf G adalah suatu sirkuit yang mengandung setiap busur yang ada di G .

Sirkuit Hamiltonian dalam suatu graf G adalah suatu sirkuit yang melewati setiap simpul di G tepat satu kali, kecuali simpul awal/akhir.

Perhatikan contoh berikut. Diberikan graf G sebagai berikut.



Contoh sirkuit Euler dari graf G di atas adalah:

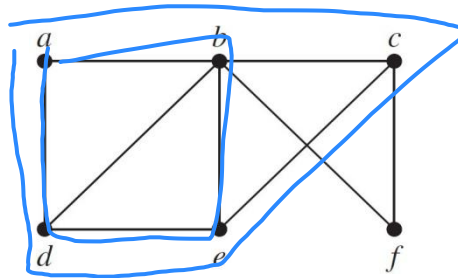
$$p - e_1 - q - e_5 - r - e_2 - s - e_6 - p - e_3 - r - e_4 - p$$

Contoh sirkuit Hamiltonian dari graf G di atas adalah:

$$p - e_1 - q - e_5 - r - e_2 - s - e_6 - p$$

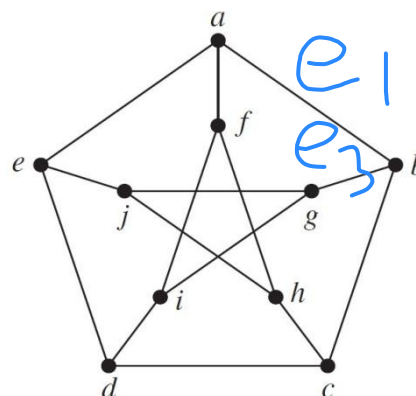
LATIHAN

5. Perhatikan graf berikut.



- Tentukanlah suatu trail dari simpul a ke simpul f dengan panjang 6!
- Tentukanlah suatu lintasan dari simpul a ke simpul f dengan syarat harus melewati simpul e !
- Tentukanlah suatu sirkuit pada graf di atas dengan panjang 7!
- Tentukanlah panjang dari lingkaran (cycle) terpanjang pada graf di atas!

6. Perhatikan graf berikut.



$$\begin{array}{l} a-b-g \\ \hline a-e_1-b- \\ e_3-g \end{array}$$

- Hitunglah jumlah seluruh derajat simpul (titik) pada graf di atas!
- Apakah graf tersebut mengandung suatu sirkuit Hamilton? Jika ya, tunjukkanlah sirkuit Hamiltonnya! Jika tidak, berikan alasannya!
- Apakah graf tersebut mengandung suatu sirkuit Euler? Jika ya, tunjukkanlah sirkuit Eulernya! Jika tidak, berikan alasannya!