

ALJABAR BOOLEAN

(Bagian II)

9.1. Bentuk Normal Disjungtif (*Disjunctive Normal Form*)

Suatu variabel Boolean (atau komplementnya) disebut sebagai **literal**. Contoh literal adalah x , x' , y' , z , dan sebagainya.

Suatu **minterm** atau **perkalian dasar** adalah hasil kali dari n literal dengan satu literal mewakili satu variabel (n bilangan asli). Contoh minterm adalah x' , xy , $x'y$, xyz' , $y'z$, dan sebagainya. Contoh yang *bukan* minterm antara lain xx' , $xyx'z$, $xyxy$, dan sebagainya.

Perhatikan contoh berikut untuk memahami perbedaan antara variabel biasa dengan literal. Diberikan ekspresi Boolean

$$E(x, y, z) = xz' + x'y$$

Ekspresi Boolean di atas memiliki 3 variabel (x, y, z), 4 literal (x, x', y, z'), dan 2 minterm (xz' , $x'y$). **[Pahami perbedaan antara variabel biasa dan literal.]**

Ekspresi Boolean disebut **bentuk normal disjungtif (dnf)** jika merupakan suatu minterm atau penjumlahan 2/lebih minterm yang masing-masing mintermnya tidak terkandung dalam minterm lainnya. Bentuk normal disjungtif pada suatu ekspresi Boolean juga sering disebut sebagai **ekspansi sum-of-products (SoP)**.

Ekspresi Boolean dnf yang setiap mintermnya mengandung semua variabel disebut **bentuk lengkap normal disjungtif (full dnf)**.

Sebagai contoh,

$E_1(x, y, z) = x + y$	\rightarrow	<i>dnf / SoP</i>
$E_2(x, y, z) = xz' + x'yz + xy'z$	\rightarrow	<i>dnf / SoP</i>
$E_3(x, y, z) = xz' + y'z + xyz'$	\rightarrow	bukan <i>dnf</i> karena xz' terkandung dalam xyz'
$E_4(x, y, z) = xyz' + x'yz + x'y'z'$	\rightarrow	<i>full dnf / SoP</i>

Contoh 1:

Nyatakanlah ekspresi Boolean $E(x, y, z) = (xy)'z$ menjadi bentuk dnf dan full dnf!

Jawab:

$$\begin{aligned} E(x, y, z) &= (xy)'z && \text{(dengan Hukum de Morgan)} \\ &= (x' + y')z && \text{(dengan Hukum Distributif)} \\ &= x'z + y'z && \rightarrow \text{dnf} \quad \text{(dilanjutkan dengan Hukum Identitas)} \end{aligned}$$

[Perhatikan minterm $x'z$ belum ada variabel y , dan minterm $y'z$ belum ada variabel x .]

$$\begin{aligned} &= x' \cdot 1 \cdot z + 1 \cdot y' \cdot z && \text{(dengan Hukum Komplemen)} \\ &= x' \cdot (y + y') \cdot z + (x + x') \cdot y' \cdot z && \text{(dengan Hukum Distributif)} \\ &= x'yz + x'y'z + xy'z + x'y'z && \text{(karena ada minterm yang sama, gunakan Hukum Idempoten)} \\ &= x'yz + x'y'z + xy'z && \rightarrow \text{full dnf} \end{aligned}$$

Perlu diperhatikan bahwa semua ekspresi Boolean yang full dnf, pasti dnf. Namun, ekspresi Boolean yang dnf belum tentu full dnf.

Apabila ekspresi Boolean sudah diketahui dalam bentuk normal disjungtif, maka bentuk dualnya akan disebut sebagai **bentuk normal konjungtif** (*conjunctive normal form – cnf*), atau sering juga disebut **ekspansi product-of-sums** (PoS).

Contoh 2:

Nyatakanlah ekspresi Boolean $E(x, y, z) = (xy)'z$ menjadi bentuk cnf!

Jawab:

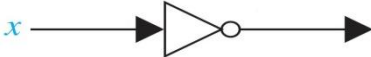
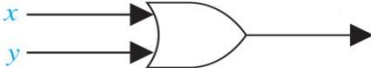
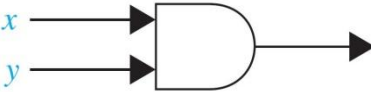



$$\begin{aligned}
 E(x, y, z) &= (xy)'z && \text{(dengan Hukum de Morgan)} \\
 &= (x' + y')z && \text{(dengan Hukum Distributif)} \\
 &= x'z + y'z \rightarrow \text{dnf} && \text{(dengan teknik dualitas)} \\
 &= (x' + z) \cdot (y' + z) \rightarrow \text{cnf}
 \end{aligned}$$

9.2. Gerbang Logika

Gerbang logika merupakan pembentuk sistem elektronika digital yang berfungsi mengubah satu atau beberapa input menjadi suatu sinyal output logis.

Gerbang logika beroperasi berdasarkan sistem bilangan biner, yaitu hanya memiliki dua kode simbol yakni 0 dan 1.

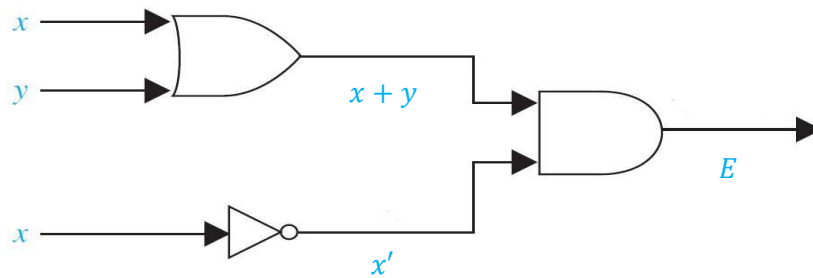
Tabel Gerbang Logika

Nama Gerbang	Gerbang	Lambang
NOT		$E = x'$
OR		$E = x + y$
AND		$E = xy$
NOR (<i>not or</i>)		$E = (x + y)'$
NAND (<i>not and</i>)		$E = (xy)'$
XOR (<i>exclusive or</i>)		$E = x \oplus y$

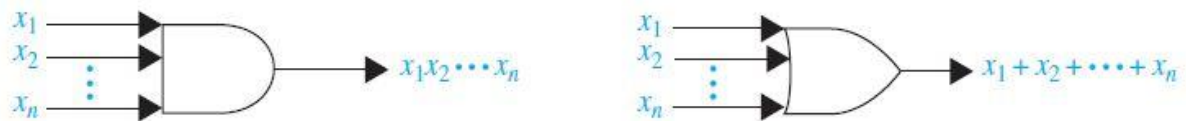
Contoh 3:

Buatlah rangkaian gerbang logika dari $E(x, y) = (x + y)x'$!

Jawab:

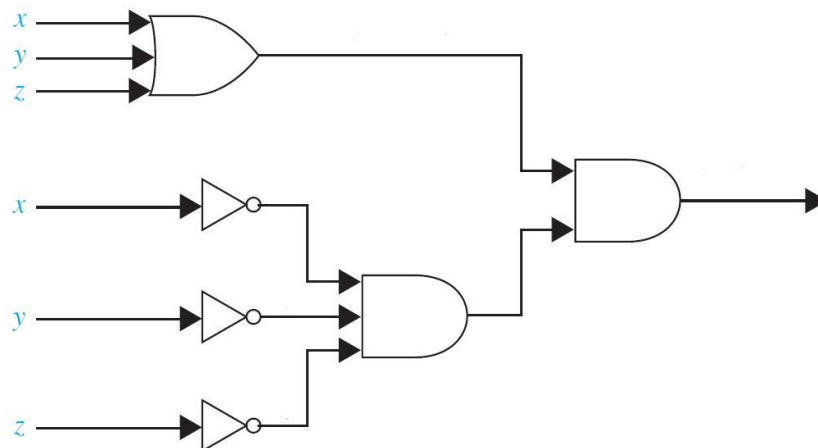


Apabila gerbang diawali dengan n input, bisa digambarkan seperti berikut ini.



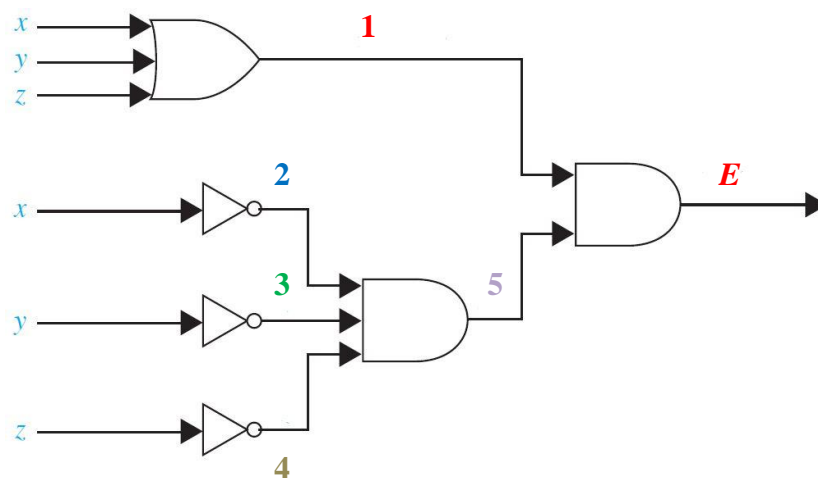
Contoh 4:

Diketahui rangkaian gerbang logika berikut:



Tentukan ekspresi Boolean dari rangkaian gerbang logika di atas!

Jawab:



1: $x + y + z$; **2:** x' ; **3:** y' ; **4:** z' ; **5:** $x'y'z'$

Jadi, ekspresi Booleannya adalah $E = (x + y + z)x'y'z'$.

9.3. Penyederhanaan Ekspresi Boolean

Ekspresi Boolean dikatakan **dnf minimal** jika ekspresi Boolean dnf tersebut tidak dapat disederhanakan lagi. Sebagai contoh,

$$\begin{aligned} E_1(x, y, z) &= xz' + y'z && \rightarrow && \text{dnf minimal} \\ E_2(x, y, z) &= xy' + x'y' && \rightarrow && \text{dnf, tapi bukan dnf minimal} \\ E_3(x, y, z) &= xyz + x'y'z' && \rightarrow && \text{full dnf, dan dnf minimal} \\ E_4(x, y, z) &= x'yz + x'y'z + x'y'z' && \rightarrow && \text{full dnf, tapi bukan dnf minimal} \end{aligned}$$

Ada dua cara yang dapat digunakan untuk menyederhanakan ekspresi Boolean menjadi dnf minimal, yaitu:

- 1) dengan metode konsensus, dan
- 2) dengan peta Karnaugh.

A. Metode Konsensus

Misalkan P_1 dan P_2 adalah suatu minterm sedemikian sehingga tepat satu variabel (misal a) muncul dengan komplemennya (misal a') pada salah satu dari P_1 atau P_2 . Maka, yang disebut **konsensus** dari P_1 dan P_2 adalah hasil kali (tanpa pengulangan) dari literal P_1 dan literal P_2 setelah a dan a' dihilangkan. Sebagai contoh,

$$\begin{aligned} xy' \text{ dan } y &\rightarrow \text{konsensusnya } x \\ xy' \text{ dan } x'y &\rightarrow \text{tidak memiliki konsensus; karena ada lebih dari satu variabel} \\ &\quad \text{yang muncul dengan komplemennya, yaitu variabel } x \text{ dan variabel } y \\ x'z \text{ dan } x'y'z &\rightarrow \text{konsensusnya } x'y' \\ x'y' \text{ dan } x'y'z &\rightarrow \text{tidak memiliki konsensus; karena tidak ada variabel yang} \\ &\quad \text{muncul dengan komplemennya} \end{aligned}$$

Contoh 5:

Tentukan dnf minimal dari $E(x, y, z) = xyz + xy'z + x'y'z + xyz' + x'yz'$ dengan metode konsensus!

Jawab:

$$\begin{aligned} E(x, y, z) &= xyz + xy'z + x'y'z + xyz' + x'yz' \\ &\quad \text{karena } xyz \text{ dan } xy'z \text{ berkonsensus } xz, \text{ lalu } xyz' \text{ dan } x'yz' \text{ berkonsensus } yz', \\ &\quad \text{maka:} \\ &= xyz + xy'z + xz + x'y'z + xyz' + x'yz' + yz' \\ &\quad \text{karena } xz \text{ terkandung dalam } xyz, \text{ maka } xz + xyz = xz(1 + y) = xz \\ &\quad \text{karena } xz \text{ terkandung dalam } xy'z, \text{ maka } xz + xy'z = xz(1 + y') = xz \\ &= xz + x'y'z + xyz' + x'yz' + yz' \\ &\quad \text{karena } yz' \text{ terkandung dalam } xyz', \text{ maka } yz' + xyz' = yz'(1 + x) = yz' \\ &\quad \text{karena } yz' \text{ terkandung dalam } x'yz', \text{ maka } yz' + x'yz' = yz'(1 + x') = yz' \\ &= xz + x'y'z + yz' \\ &\quad \text{karena } xz \text{ dan } x'y'z \text{ berkonsensus } y'z, \text{ maka:} \\ &= xz + x'y'z + y'z + yz' \\ &\quad \text{karena } y'z \text{ terkandung dalam } x'y'z, \text{ maka } y'z + x'y'z = y'z(1 + x') = y'z \\ &= xz + y'z + yz' \end{aligned}$$

Jadi, dnf minimal dari $E(x, y, z) = xyz + xy'z + x'y'z + xyz' + x'yz'$ adalah:

$$E(x, y, z) = xz + y'z + yz'$$

Jika suatu ekspresi Boolean merupakan dnf minimal, maka setiap mintermnya disebut sebagai **prime implikan**. Sebagai contoh, perhatikan kembali Contoh 4 di atas. Ekspresi Boolean

$$E(x, y, z) = xyz + xy'z + x'y'z + xyz' + x'yz'$$

memiliki dnf minimal

$$E(x, y, z) = xz + y'z + yz'$$

sehingga prime implikannya adalah xz , $y'z$, dan yz' .

B. Peta Karnaugh

Peta Karnaugh dua variabel adalah sebagai berikut.

	y	y'
x		
x'		

Peta Karnaugh tiga variabel adalah sebagai berikut.

	yz	yz'	$y'z'$	$y'z$
x				
x'				

dengan

area x mencakup sel: xyz , xyz' , $xy'z'$, dan $xy'z$;

area x' mencakup sel: $x'yz$, $x'yz'$, $x'y'z'$, dan $x'y'z$;

area y mencakup sel: xyz , xyz' , $x'yz$, dan $x'yz'$;

area y' mencakup sel: $xy'z'$, $xy'z$, $x'y'z'$, dan $x'y'z$;

area z mencakup sel: xyz , $x'yz$, $xy'z$, dan $x'y'z$;

area z' mencakup sel: xyz' , $xy'z'$, $x'yz'$, dan $x'y'z'$.

Ada beberapa aturan dalam membuat blok pada peta Karnaugh, yaitu:

- Blok yang diperbolehkan adalah secara horizontal atau vertikal, *tidak boleh secara diagonal*.
- Semua sel yang terisi “1” harus masuk dalam blok dan banyaknya blok yang dibuat harus seminim mungkin.
- Utamakan membuat blok yang bisa mencakup “1” lebih banyak.
- Jumlah “1” yang diperbolehkan dalam setiap bloknya adalah 2, 4, 8, atau 16 (jika ekspresi Booleannya memiliki empat variabel).

Perlu diperhatikan bahwa jika semua sel pada peta Karnaugh terisi “1”, maka $E = 1$. Dalam bab ini, penggunaan peta Karnaugh hanya dibatasi untuk 2 dan 3 variabel.

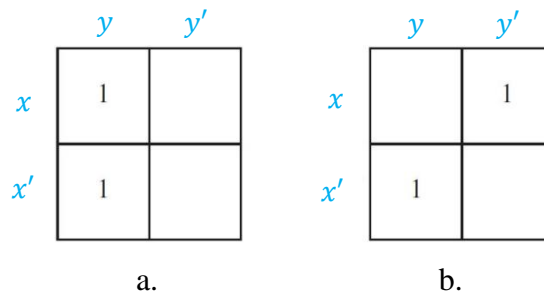
Contoh 6:

Tentukan peta Karnaugh dari:

a. $E(x, y) = xy + x'y$

b. $E(x, y) = xy' + x'y$

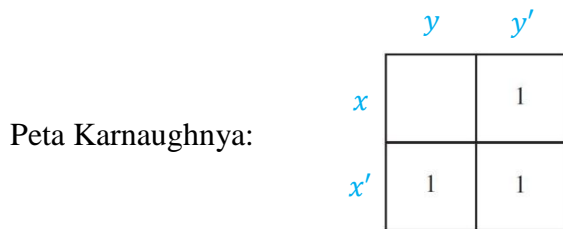
Jawab:



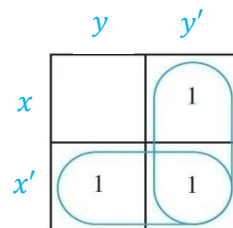
Contoh 7:

Tentukan dnf minimal dari $E(x, y) = xy' + x'y + x'y'$ dengan menggunakan peta Karnaugh!

Jawab:



Dengan memperhatikan aturan dalam membuat blok, maka blok yang bisa dilakukan adalah sebagai berikut:



Blok vertikal: berada dalam area $x x' y'$, sehingga didapatkanlah y' .

Blok horizontal: berada dalam area $x' y y'$, sehingga didapatkanlah x' .

Maka, dnf minimal dari $E(x, y) = xy' + x'y + x'y'$ adalah:

$$E(x, y) = x' + y'$$

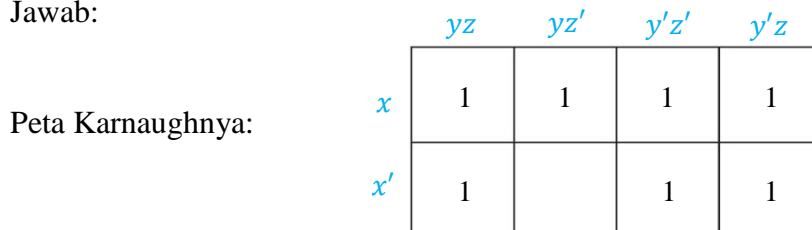
Contoh 8:

Tentukan dnf minimal dari

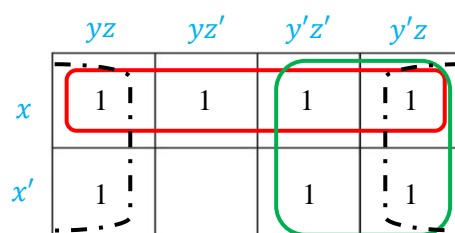
$$E(x, y) = xyz + xyz' + xy'z + xy'z' + x'yz + x'y'z + x'y'z'$$

dengan menggunakan peta Karnaugh!

Jawab:



Dengan memperhatikan aturan dalam membuat blok, maka blok yang bisa dilakukan adalah sebagai berikut:



Blok merah : berada dalam area $x y' z z'$, sehingga didapatkan x .
 Blok hijau : berada dalam area $x x' y' z z'$, sehingga didapatkan y' .
 Blok hitam
 putus-putus : berada dalam area $x x' y y' z$, sehingga didapatkan z .
 Maka, dnf minimal dari $E(x, y, z) = xyz + xyz' + xy'z + xy'z' + x'yz + x'y'z + x'y'z'$
 adalah:

$$E(x, y, z) = x + y' + z$$

LATIHAN SOAL

1. Diketahui ekspresi-ekspresi Boolean sebagai berikut:

a. $E(x, y, z) = (x + y)z'$

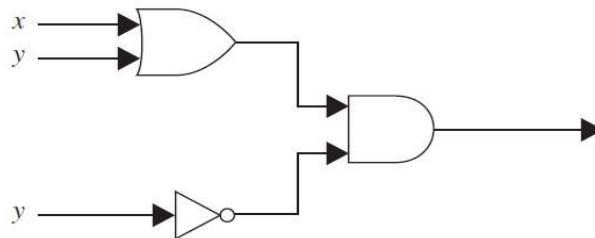
b. $E(x, y, z) = (x' + y)'z + y'$

c. $E(x, y, z) = (xy)'(x' + z')$

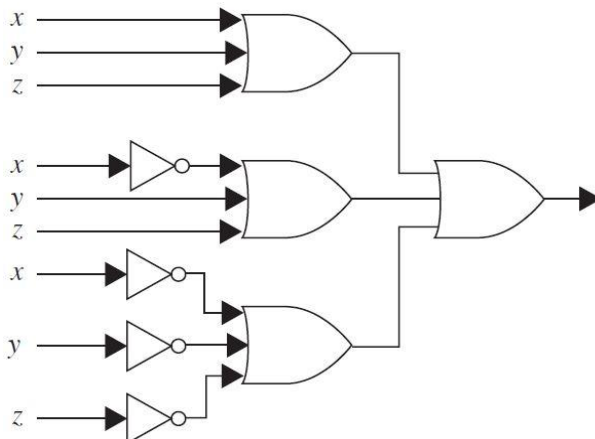
Tentukanlah: (i) gambar rangkaian gerbang logikanya!
(ii) dnf dan full dnf-nya!

2. Tuliskanlah ekspresi Boolean dari masing-masing rangkaian gerbang logika berikut:

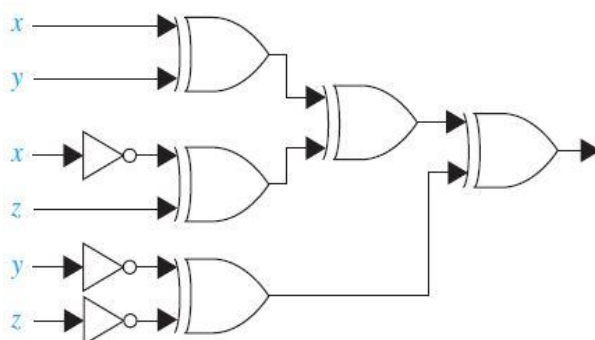
a.



b.



c.



3. Tentukan dnf minimal dari ekspresi Boolean berikut dengan konsensus dan Karnaugh:

a. $E(x, y, z) = x'yz + x'y'z$

b. $E(x, y, z) = xyz + xyz' + x'yz + x'y'z'$

c. $E(x, y, z) = xyz' + xy'z + xy'z' + x'yz + x'y'z$