# INDUKSI MATEMATIKA

#### 8.1. Definisi Induksi Matematika

Induksi matematika adalah cara untuk membuktikan bahwa sebuah pernyataan yang diberikan berlaku untuk setiap bilangan asli.

Misalkan S(n) adalah suatu pernyataan yang selalu bernilai benar untuk semua bilangan bulat positif n. Untuk membuktikan bahwa S(n) bernilai benar untuk setiap bilangan bulat positif n, tunjukkanlah dengan dua langkah berikut:

#### BASIC STEP:

>> buktikan bahwa saat n = 1, S(n) bernilai benar; dengan kata lain, buktikan bahwa S(1) bernilai benar

### INDUCTIVE STEP:

>> misalkan saat n = k, S(n) bernilai benar, lalu buktikan saat n = k + 1, S(n) juga bernilai benar; dengan kata lain, saat S(k) bernilai benar, buktikan S(k+1) juga bernilai benar

# 8.2. Penggunaan Induksi Matematika

Berikut akan disajikan beberapa contoh terkait penggunaan induksi matematika dalam membuktikan suatu pernyataan matematika. 75: 1=1

Contoh 1:
Buktikan bahwa  $1+2+3...+n = \frac{n(n+1)}{2}$  untuk setiap n bilangan asli!

Jawab:

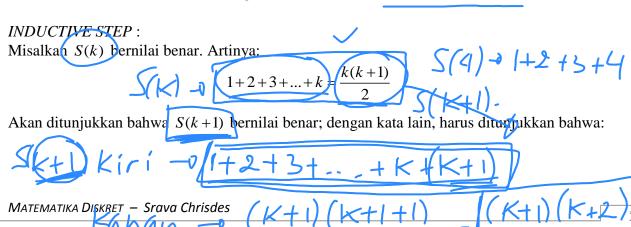
#### BASIC STEP:

Karena untuk setiap n bilangan asli, maka n dimulai dari 1, sehingga harus dibuktikan bahwa S(1) bernilai benar.

$$S(1) \rightarrow \text{ruas kiri:} \qquad 1$$

$$S(1) \rightarrow \text{ruas kanan:} \qquad \frac{1(1+1)}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$$

Perhatikan bahwa ruas kiri sama dengan ruas kanan. Jadi, S(1) bernilai benar.



$$1+2+5+...+k = \frac{|k(1k+1)|}{2}$$

$$1+2+3+...+k+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\frac{k(k+1)}{2}$$

didapat dari: ganti k dengan k+1, menjadi

$$\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Bukti:

Karena 
$$1+2+3+...+k = \frac{k(k+1)}{2}$$
, maka
$$1+2+3+...+k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

$$= \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2}$$

$$= \frac{k(k+1)}{2} + 2(k+1)$$

$$=$$

Dengan demikian, terbukti bahwa  $1+2+3...+n=\frac{n(n+1)}{2}$  untuk setiap *n* bilangan asli.

Contoh 2:

Buktikan bahwa  $2^0 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^n = 2^{n-1} - 1$  untuk setiap bilangan bulat  $n \ge 0$ ! Jawab: S(0)  $S(1) = 2^{0} + 2^{1}$ 

BASIC STEP:

Karena untuk setiap bilangan bulat  $n \ge 0$ , maka n dimulai dari 0, sehingga harus dibuktikan bahwa S(0) bernilai benar. S(2) = 2 + 2 + 2 + 7

$$S(0) \rightarrow \text{ruas kiri:} \qquad 2^0 = 1$$

$$S(0) \to \text{ruas kanan:} \quad 2^{0-1} - 1 = 2 - 1 = 1$$

Perhatikan bahwa ruas kiri sama dengan ruas kanan. Jadi, S(0) bernilai benar.

# **INDUCTIVE STEP:**

Misalkan S(k) bernilai benar. Artinya:

$$\int_{0}^{\infty} 2^{0} + 2^{1} + 2^{2} + \dots + 2^{k} = 2^{k+1} - 1$$

Akan ditunjukkan bahwa S(k+1) bernilai benar; dengan kata lain, harus ditunjukkan bahwa:

2

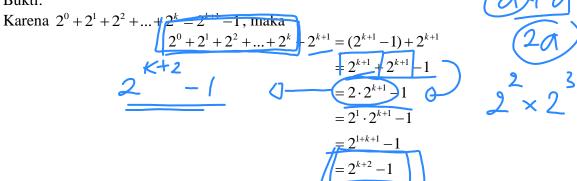
$$2^{0} + 2^{1} + 2^{2} + \dots + 2^{k} + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$$

$$2^{k+1} - 1$$

didapat dari: ganti k dengan k+1, menjadi

$$2^{(k+1)+1} - 1 = 2^{k+2} - 1$$

Bukti:



Dengan demikian, terbukti bahwa  $2^0 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 1$  untuk setiap bilangan bulat  $n \ge 0$ .

Buktikan bahwa  $5^n > n^2$  untuk setiap n bilangan bulat positif! Jawab:

### BASIC STEP:

Karena untuk setiap n bilangan bulat positif, maka n dimulai dari 1, sehingga harus dibuktikan bahwa S(1) bernilai benar.

 $5^1 > 1^2 \rightarrow$  $S(1) \rightarrow$ pernyataan ini bernilai benar Jadi, S(1) bernilai benar.

**INDUCTIVE STEP:** 

Misalkan S(k) bernilai benar. Artinya diketahui:

Akan ditunjukkan bahwa S(k+1) bernilai benar: dengan kata lain, harus ditunjukkan bahwa:

Bukti:

$$5^{(k+1)^{2}} = 5^{k} \cdot 5$$

$$= 5 \cdot 5^{k}$$

$$= k^{2} + 2k^{2} + 2k^{2} \quad \text{(karena } 5^{k} > k^{2}\text{)}$$

$$= k^{2} + 2k + 1 \quad \text{(karena } k \ge k^{2} = k^{2} + 2k^{2} + 2k^{2}\text{)}$$

$$= (k+1)^{2}$$

Dengan demikian, terbukti bahwa  $5^n > n^2$  untuk setiap n bilangan bulat positif.

# Contoh 4:

Buktikan bahwa  $n+1 \le n^2$  untuk setiap bilangan asli  $n \ge 2$ ! Jawab:

## 3 < 4 BASIC STEP:

Karena untuk setiap bilangan asli  $n \ge 2$ , maka n dimulai dari 2, sehingga harus dibuktikan bahwa S(2) bernilai benar.

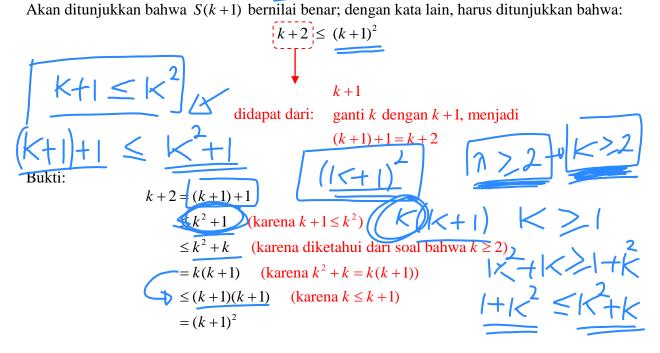
$$S(2) \rightarrow 2+1 \le 2^2 \rightarrow$$
 pernyataan ini bernilai benar

Jadi, S(2) bernilai benar.

**INDUCTIVE STEP:** 

# Misalkan S(k) bernilai benar. Artinya diketahui:

 $k+1 \le k^2$ 



Dengan demikian, terbukti bahwa  $n+1 \le n^2$  untuk setiap bilangan asli  $n \ge 2$ .

# LATIHAN SOAL

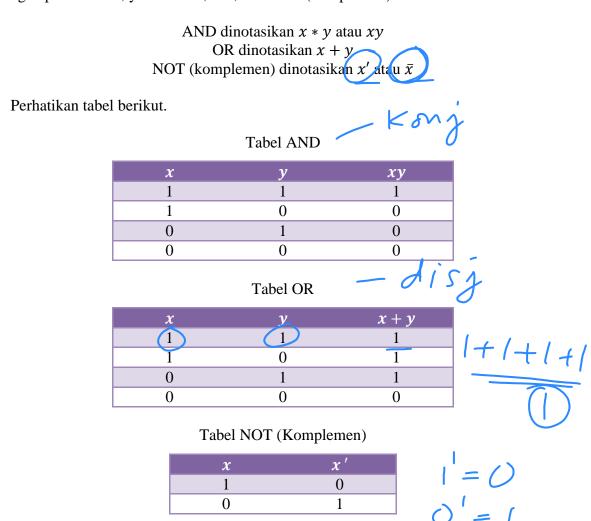
- 1. Tunjukkan bahwa  $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$  untuk setiap *n* bilangan bulat positif!
- 2. Tunjukkan bahwa  $2+5+8+...+(3n-1)=\frac{n(3n+1)}{2}$  untuk setiap n bilangan bulat positif!
- 3. Tunjukkan bahwa  $2^n > 2n+3$  untuk semua bilangan bulat  $n \ge 4$ !
- 4. Tunjukkan bahwa  $n! \le n^n$  untuk semua n bilangan asli!

# **ALJABAR BOOLEAN**

(Bagian I)

# 8.1. Definisi Aljabar Boolean

Aljabar Boolean merupakan aljabar yang berhubungan dengan variabel-variabel biner (0 atau 1) dan operasi-operasi logik. Variabel-variabel diperlihatkan dengan huruf-huruf alfabet dan tiga operasi dasar, yakni AND, OR, dan NOT (komplemen).



#### Contoh 1:

Tentukan nilai dari  $1 \cdot 0 + (0+1)'$ ! O + (1)' = O + O = OJawab:  $1 \cdot 0 + (0+1)' = 0 + 1' = 0 + 0 = 0$ 

Selanjutnya, lihat definisi formal mengenai aljabar Boolean berikut.

Misalkan B adalah-himpunan yang didefinisikan pada dua operasi biner (+ dan \*) dan sebuah operasi unar (') serta menggunakan dua elemen 0 dan 1, maka (B, +, \*, ') disebut

aljabar Boolean jika memenuhi aksioma-aksioma berikut untuk setiap elemen x, y, dan z dari himpunan B.

Hukum Komutatif	x + y = y + x	xy = yx
Hukum Asosiatif	(x+y) + z = x + (y+z)	(xy)z = x(yz)
Hukum Distributif	x + (yz) = (x + y)(x + z)	x(y+z) = (xy) + (xz)
Hukum Identitas	x + 0 = x	$x \cdot 1 = x$
Hukum Komplemen	x + x' = 1	$x \cdot x' = 0$

# 8.2. Definisi Ekspresi Boolean



Misalkan  $B = \{0, 1\}$  Maka,  $B^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) | x_i \in B \text{ untuk } 1 \le i \le n\}$  adalah suatu himpunan dari semua n-tupel yang mungkin atas 0 dan 1. Suatu fungsi dari  $B^n$  ke B ini disebut sebagai fungsi Boolean atau ekspresi Boolean.

# Contoh 2:

Tentukan nilai dari ekspresi Boolean berikut: F(x, y, z) = xy + z'! Jawab:

x	y	Z	xy	$oldsymbol{z}'$	E
1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	1	1

### Contoh 3:

Tentukan nilai dari ekspresi Boolean berikut: E(x, y, z) = xyz' + xy'z' + xy'z + x'yz'! Jawab:

х	у	Z	xyz'	xy'z'	xy'z	x'yz'	E
1	1	1	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Berikutnya akan diberikan contoh bagaimana mencari ekspresi Boolean jika diketahui nilainya.

#### Contoh 4:

Carilah ekspresi Boolean dari x, y, dan z yang diberikan dalam tabel berikut:

$\boldsymbol{x}$	y	Z	E	
1	1	1	0	
1	1	0	0	. 0 . 1 7
	0	(1)	1	-0 WYZ
1	0	0	1 -/	
0	1	1	0	-0 U Y 'Z'
0	1	0	0	
0	0	1	1 🗸	-DU'Y'Z+
0	0	0	0	

#### Jawab:

Untuk mengetahui ekspresi Boolean, fokus pada angka "1" dalam kolom E, yaitu baris ketiga, baris keempat, dan baris ketujuh.

Baris ke-3 :  $x = 1, y = 0, z = 1 \rightarrow \text{ketiganya menghasilkan } E = 1$ 

sehingga diperoleh xy'z

Baris ke-4 :  $x = 1, y = 0, z = 0 \rightarrow \text{ketiganya menghasilkan } E = 1$ 

sehingga diperoleh xy'z'

Baris ke-7 :  $x = 0, y = 0, z = 1 \rightarrow \text{ketiganya menghasilkan } E = 1$ 

sehingga diperoleh x'y'z

Dengan demikian, E(x, y, z) = xy'z + xy'z' + x'y'z.

#### 8.3. Tabel Identitas Boolean

Selain kelima aksioma yang telah dipaparkan pada Subbab 6.1, aljabar Boolean juga memiliki beberapa hukum lainnya. Perhatikan Tabel Identitas Boolean berikut.

Tabel Identitas Boolean

Hukum Idempoten	x + x = x	xx = x	
Hukum Dominasi	$x+1=1   x\cdot 0=0$		
Hukum Absorpsi	$x + xy = x \qquad \qquad x(x+y) = x$		
Hukum Involusi	(x')'	=x	
Hukum De Morgan	(x+y)' = x'y'	(xy)' = x' + y'	

### 8.4. Dualitas

Dalam aljabar Boolean, ada istilah dualitas. Untuk mencari bentuk dual dari suatu aljabar

Boolean, dapat diperoleh dengan:

"+" diubah menjadi "\*"
"\*" diubah menjadi "+"
"1" diubah menjadi "0"
"0" diubah menjadi "1"

y - 0 W

3

Jika terdapat variabel seperti x atau x' pada suatu aljabar Boolean, maka bentuk tersebut tetap dalam bentuk dualnya.

Contoh 5:

Buktikan bahwa  $(x \cdot (x + (y \cdot 0)))' = x'$ , dan tuliskanlah bentuk dualnya!

Jawab:

$$(x \cdot (x + (y \cdot 0)))' = (x \cdot (x + 0))'$$
 (Hukum Dominasi)
$$= (x \cdot \underline{x})'$$
 (Hukum Identitas)
$$= x'$$
 (Hukum Idempotent

(Hukum Dominasi)

$$=(x\cdot\underline{x})'$$

$$=x'$$

Bentuk dualnya:

# LATIHAN SOAL

1. Gunakan tabel untuk mencari nilai dari ekspresi Boolean berikut:

a. 
$$E(x, y, z) = xy' + (xyz)'$$

b. 
$$E(x, y, z) = y'(xz + x'z')$$

2. Carilah ekspresi Boolean dari variabel x, y, dan z pada tabel berikut:

x	y	Z	E	
1	1	1	1	
1	1	0	0	
1	0	1	1	CAP
1	0	0	0	( ) 0
0	1	1	1	
0	1	0	0	
0	0	1	1	
0	0	0	0	

3. Buktikan bahwa  $(x+(x\cdot(y+1)))'=x'!$