STRUKTUR ALJABAR

10.1. Operasi Biner

Operasi biner pada himpunan tak kosong *S* adalah suatu pemetaan dari $S \times S$ ke *S*. Sebagai contoh, operasi penjumlahan pada bilangan real termasuk operasi biner.

Sifat-sifat operasi biner adalah:
Misalkan * dan $\square$ adalah suatu operasi biner, dan *S* himpunan tak kosong.

1) TERTUTUP
Himpunan tak kosong *S* dikatakan ***tertutup*** terhadap operasi biner * jika:
untuk setiap $a, b \in S$, berlaku $a * b \in S$

2) KOMUTATIF
Operasi biner * bersifat ***komutatif*** jika:
untuk setiap $a, b \in S$, berlaku $a * b = b * a$

3) ASOSIATIF
Operasi biner * bersifat ***asosiatif*** jika:
untuk setiap $a, b, c \in S$, berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$

4) IDENDITAS
e dikatakan elemen ***identitas*** pada himpunan tak kosong *S* jika:
untuk setiap $a \in S$, berlaku $a * e = e * a = a$
Perlu diperhatikan bahwa elemen identitas ini bersifat tunggal. Artinya, jika suatu himpunan tak kosong memiliki elemen identitas, maka banyaknya elemen identitas itu adalah tepat satu.

5) INVERS
Setiap anggota memiliki tepat satu ***invers*** jika:
untuk setiap $a \in S$ terdapat $a^{-1} \in S$ sedemikian sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$

6) DISTRIBUTIF
Operasi biner * dan $\square$ bersifat ***distributif*** jika berlaku distributif kiri dan distributif kanan:

untuk setiap $a, b, c \in S$, berlaku
$a * (b \square c) = (a * b) \square (a * c)$ [distributif kiri]
$(b \square c) * a = (b * a) \square (c * a)$ [distributif kanan]

10.2. Definisi Struktur Aljabar

Misalkan *G* adalah himpunan tak kosong dan di dalamnya terdapat operasi biner *. Maka, (*G*, *) disebut sebagai struktur aljabar. Dengan kata lain, struktur aljabar merupakan suatu himpunan tak kosong yang di dalamnya terdapat suatu operasi biner.

Struktur aljabar yang akan dipelajari dalam bab ini dibatasi sampai grup.

10.3. Semigrup, Monoid, Grup, dan Grup Abelian

Struktur aljabar (G, *) dikatakan ***semigrup*** jika:
1. G merupakan himpunan tak kosong,
2. G tertutup terhadap operasi biner *, dan
3. operasi biner * bersifat asosiatif.

Struktur aljabar (G, *) dikatakan ***monoid*** jika:
1. (G, *) merupakan suatu semigrup, dan
2. G memiliki elemen identitas.

Struktur aljabar (G, *) dikatakan ***grup*** jika:
1. (G, *) merupakan suatu monoid, dan
2. setiap anggota di G memiliki invers masing-masing.

Dengan demikian, suatu struktur aljabar (G, *) dikatakan grup jika memenuhi kelima syarat berikut:
1. G merupakan himpunan tak kosong,
2. G tertutup terhadap operasi biner *,
3. operasi biner * bersifat asosiatif,
4. G memiliki elemen identitas, dan
5. setiap anggota di G memiliki invers masing-masing.

<u>Contoh 1</u>:
Diketahui $A = \{x \mid x = 2n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ dengan $\mathbb{Z}$ himpunan bilangan bulat.
Tunjukkan bahwa (A, +) adalah grup dengan + merupakan operasi penjumlahan bilangan!
Jawab:

Pertama, harus ditunjukkan bahwa A adalah suatu himpunan tak kosong.
A adalah himpunan dengan $A = \{x \mid x = 2n,\ n \in \mathbb{Z}\}$. Jika kita ambil n = 1, maka x = 2 $\in$ A. Ini berarti bahwa A merupakan himpunan tak kosong.

Kedua, harus ditunjukkan bahwa A tertutup terhadap operasi biner +.
Ambil sebarang x_1 dan x_2 pada A, katakanlah $x_1, x_2 \in A$. Ini berarti,

$$x_1 = 2a \text{ dan } x_2 = 2b, \text{ dengan } a, b \in \mathbb{Z}.$$

Akan ditunjukkan bahwa A tertutup terhadap operasi biner +.
Dengan kata lain, akan ditunjukkan bahwa $x_1 + x_2$ juga anggota A.

$$x_1 + x_2 = 2a + 2b = 2(a+b) \in A$$

Jadi, A tertutup terhadap +.

Ketiga, harus ditunjukkan bahwa operasi biner + bersifat asosiatif.
Ambil sebarang x_1, x_2, dan x_3 pada A, katakanlah $x_1, x_2, x_3 \in A$. Ini berarti,

$$x_1 = 2a,\ x_2 = 2b, \text{ dan } x_3 = 2c \text{ dengan } a, b, c \in \mathbb{Z}.$$

Akan ditunjukkan bahwa operasi biner + bersifat asosiatif.
Dengan kata lain, akan ditunjukkan bahwa $(x_1 + x_2) + x_3 = x_1 + (x_2 + x_3)$.

$$(x_1 + x_2) + x_3 = (2a + 2b) + 2c = 2a + 2b + 2c = 2a + (2b + 2c) = x_1 + (x_2 + x_3)$$

Sampai pada tahap ini, telah dibuktikan bahwa (A, +) adalah suatu semigrup.

Keempat, harus ditunjukkan bahwa himpunan A memiliki elemen identitas.
Ingat kembali bahwa agar e disebut elemen identitas, maka e harus memenuhi:

$$x * e = e * x = x$$

Ambil sebarang x_1 pada A, katakanlah $x_1 \in A$. Ini berarti, $x_1 = 2a$ dengan $a \in \mathbb{Z}$.
Lalu, misalkan ada suatu elemen e.
Karena operasi binernya adalah +, maka e harus memenuhi:

$$x_1 + e = e + x_1 = x_1$$

Cari nilai e yang memenuhi kondisi di atas.

$$x_1 + e = x_1 \quad \rightarrow \quad e = x_1 - x_1 = 0 \quad \rightarrow \quad e = 2a - 2a = 0$$

Setelah mendapatkan nilai e, selanjutnya pastikan apakah e terdapat dalam himpunan A.
A adalah himpunan dengan $A = \{x \mid x = 2n,\ n \in \mathbb{Z}\}$. Jika kita ambil $n = 0$, maka $x = 0 \in A$. Ini berarti bahwa A memiliki elemen identitas.

Sampai pada tahap ini, telah dibuktikan bahwa (A, +) adalah suatu monoid.

Kelima, harus ditunjukkan bahwa setiap anggota di G memiliki invers masing-masing.
Ingat kembali bahwa agar x^{-1} disebut elemen identitas, maka e harus memenuhi:

$$x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$$

Ambil sebarang x_1 pada A, katakanlah $x_1 \in A$. Ini berarti, $x_1 = 2a$ dengan $a \in \mathbb{Z}$.
Lalu, misalkan ada suatu elemen x_1^{-1}.
Karena operasi binernya adalah +, maka x_1^{-1} harus memenuhi:

$$x_1 + x_1^{-1} = x_1^{-1} + x_1 = 0$$

Cari nilai x_1^{-1} yang memenuhi kondisi di atas.

$$x_1 + x_1^{-1} = 0 \quad \rightarrow \quad x_1^{-1} = 0 - x_1 \quad \rightarrow \quad x_1^{-1} = 0 - 2a = -2a$$

Setelah mendapatkan nilai x_1^{-1}, selanjutnya pastikan apakah x_1^{-1} terdapat dalam himpunan A.
A adalah himpunan dengan $A = \{x \mid x = 2n,\ n \in \mathbb{Z}\}$. Maka,

$$x_1^{-1} = -2a = 2(-a) \in A$$

Ini berarti bahwa setiap anggota di G memiliki invers masing-masing.

Dengan demikian, (A, +) adalah suatu grup. ■

Contoh 2:
Diberikan $\mathbb{N}$ adalah himpunan bilangan asli dengan

$$a * b = a^b \quad ; \quad \forall a, b \in \mathbb{N}$$

Tunjukkan apakah $(\mathbb{N}, *)$ merupakan suatu grup!
Jawab:

Pertama, harus ditunjukkan bahwa A adalah suatu himpunan tak kosong.
$\mathbb{N}$ adalah himpunan bilangan asli, berarti $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Jadi, jelas $\mathbb{N}$ merupakan himpunan tak kosong.

Kedua, harus ditunjukkan bahwa *A* tertutup terhadap operasi biner *.
Ambil sebarang a dan b pada $\mathbb{N}$, katakanlah $a,b \in \mathbb{N}$; harus ditunjukkan bahwa $\mathbb{N}$ tertutup terhadap operasi biner *.
Karena a dan b adalah bilangan asli, maka hasil pemangkatan antar bilangan asli juga merupakan bilangan asli, sehingga $a*b = a^b \in \mathbb{N}$.
Jadi, $\mathbb{N}$ tertutup terhadap operasi biner *.

Ketiga, harus ditunjukkan bahwa operasi biner * bersifat asosiatif.
Ambil sebarang a, b, dan c pada $\mathbb{N}$, katakanlah $a,b,c \in \mathbb{N}$; harus ditunjukkan bahwa * bersifat asosiatif.

$$(a*b)*c = (a^b)*c = (a^b)^c = a^{bc}$$

$$a*(b*c) = a*(b^c) = a^{b^c}$$

Karena $(a*b)*c \neq a*(b*c)$, maka $*$ tidak bersifat asosiatif.

Dengan demikian, $(\mathbb{N},*)$ *bukan* merupakan suatu grup. ■

Grup terdiri dari dua jenis, yaitu:

1. grup tak berhingga, adalah grup yang himpunannya memiliki tak hingga banyaknya anggota.
   Sebagai contoh, kasus pada Contoh 1 merupakan contoh dari grup tak berhingga.
2. grup berhingga, adalah grup yang himpunannya memiliki berhingga banyaknya anggota.
   Untuk membuktikan suatu himpunan berhingga merupakan suatu grup, maka dapat digunakan Tabel Cayley. Perhatikan beberapa contoh berikut.

Contoh 3:
Diketahui $\mathbb{Z}_4$ adalah himpunan bilangan bulat, dengan $\mathbb{Z}_4 = \{0,1,2,3\}$. Tunjukkan apakah $(\mathbb{Z}_4, \times)$ adalah suatu grup dengan $\times$ merupakan perkalian modulo 4!
Jawab:

Sebelum menggunakan Tabel Cayley, pahami terlebih dahulu apa yang disebut sebagai "modulo 4". Modulo 4 merupakan sisa pembagian oleh 4. Perhatikan contoh berikut ini.

$3 \times 3 = 1$ (3×3 = 9; jika 9 dibagi 4, maka sisa pembagiannya 1)

Tabel Cayley untuk $(\mathbb{Z}_4, \times)$ adalah sebagai berikut.

$(\mathbb{Z}_4, \times)$
Tabel Cayley

×	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

>> *Apakah $\mathbb{Z}_4$ merupakan himpunan tak kosong?*

$\mathbb{Z}_4$ jelas merupakan himpunan tak kosong.

>> *Apakah* $\mathbb{Z}_4$ *tertutup terhadap operasi biner* $\times$ *?*

Karena semua hasil kalinya merupakan anggota dari $\mathbb{Z}_4$, maka $\mathbb{Z}_4$ tertutup terhadap operasi biner $\times$.

>> *Apakah operasi biner* $\times$ *bersifat asosiatif?*

Sebagai contoh,
$1 \times (3 \times 2) = 1 \times 2 = 2$
$(1 \times 3) \times 2 = 3 \times 2 = 2$
Dengan memandang sifat operasi $\times$ pada bilangan bulat yang pasti bersifat asosiatif, maka operasi biner $\times$ pada $\mathbb{Z}_4$ juga bersifat asosiatif.

Sampai pada tahap ini, telah dibuktikan bahwa $(\mathbb{Z}_4, \times)$ adalah suatu semigrup.

>> *Apakah* $\mathbb{Z}_4$ *memiliki elemen identitas?*

Perhatikan 'baris 1' dan 'kolom 1'.

$\times$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

Karena setelah proses perkalian, hasil yang diperoleh tidak ada yang berubah, maka 1 adalah elemen identitas dari $\mathbb{Z}_4$ terhadap operasi $\times$.

Sampai pada tahap ini, telah dibuktikan bahwa $(\mathbb{Z}_4, \times)$ adalah suatu monoid.

>> *Apakah setiap anggota di* $\mathbb{Z}_4$ *memiliki invers masing-masing?*

Sekarang kita cek apakah setiap anggotanya memiliki invers masing-masing.
Karena 1 adalah elemen identitas, maka setiap baris dan setiap kolomnya haruslah mengandung '1' sebanyak tepat satu. Namun, perhatikan 'baris 0' atau 'kolom 0' yang sama sekali tidak mengandung '1'. Ini berarti bahwa 0 tidak memiliki invers.

Dengan demikian, $(\mathbb{Z}_4, \times)$ *bukan* merupakan suatu grup, melainkan merupakan suatu monoid. ■

<u>Contoh 4</u>:
Diketahui $\mathbb{Z}_4$ adalah himpunan bilangan bulat, dengan $\mathbb{Z}_4 = \{0,1,2,3\}$. Tunjukkan apakah $(\mathbb{Z}_4, +)$ adalah suatu grup dengan $+$ merupakan penjumlahan modulo 4!
Jawab:

Sebelum menggunakan Tabel Cayley, pahami terlebih dahulu apa yang disebut sebagai "modulo 4". Modulo 4 merupakan sisa pembagian oleh 4. Perhatikan contoh berikut ini.

$7+7=2$ $\quad$ ($7+7=14$; jika 14 dibagi 4, maka sisa pembagiannya 2)

Tabel Cayley untuk $(\mathbb{Z}_4, +)$ adalah sebagai berikut.

$(\mathbb{Z}_4, +)$

Tabel Cayley

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

\>> *Apakah $\mathbb{Z}_4$ merupakan himpunan tak kosong?*

$\mathbb{Z}_4$ jelas merupakan himpunan tak kosong.

\>> *Apakah $\mathbb{Z}_4$ tertutup terhadap operasi biner + ?*

Karena semua hasil jumlahnya merupakan anggota dari $\mathbb{Z}_4$, maka $\mathbb{Z}_4$ tertutup terhadap operasi biner +.

\>> *Apakah operasi biner + bersifat asosiatif?*

Sebagai contoh,

1 + (3 + 2) = 1 + 1 = 2

(1 + 3) + 2 = 0 + 2 = 2

Dengan memandang sifat operasi + pada bilangan bulat yang pasti bersifat asosiatif, maka operasi biner + pada $\mathbb{Z}_4$ juga bersifat asosiatif.

Sampai pada tahap ini, telah dibuktikan bahwa $(\mathbb{Z}_4, +)$ adalah suatu semigrup.

\>> *Apakah $\mathbb{Z}_4$ memiliki elemen identitas?*

Perhatikan ‘baris 0’ dan ‘kolom 0’.

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Karena setelah proses penjumlahan, hasil yang diperoleh tidak ada yang berubah, maka 0 adalah elemen identitas dari $\mathbb{Z}_4$ terhadap operasi +.

Sampai pada tahap ini, telah dibuktikan bahwa $(\mathbb{Z}_4, +)$ adalah suatu monoid.

\>> *Apakah setiap anggota di $\mathbb{Z}_4$ memiliki invers masing-masing?*

Sekarang kita cek apakah setiap anggotanya memiliki invers masing-masing.

Karena 0 adalah elemen identitas, maka setiap baris dan setiap kolomnya haruslah mengandung ‘0’ sebanyak tepat satu.

$$0^{-1} = 0 \quad ; \quad 2^{-1} = 2$$
$$1^{-1} = 3 \quad ; \quad 3^{-1} = 1$$

Jadi, setiap anggotanya memiliki invers masing-masing.

Dengan demikian, $(\mathbb{Z}_4, +)$ merupakan suatu grup [$(\mathbb{Z}_4, +)$ termasuk grup berhingga]. ■

Selanjutnya adalah beberapa teorema terkait grup.

TEOREMA 1

Diketahui (G,*) merupakan suatu grup.

1. Elemen identitas pada G bersifat tunggal.
2. Untuk setiap $a \in G$, inversnya $a^{-1} \in G$ bersifat tunggal.
3. Jika $a \in G$, maka berlaku $\left(a^{-1}\right)^{-1} = a$.
4. Untuk setiap $a, b \in G$, berlaku $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.
5. Untuk setiap $a, b \in G$ serta m dan n merupakan suatu bilangan bulat, berlaku:
    a. $a^m a^n = a^{m+n}$
    b. $(a^m)^n = a^{mn}$

Struktur aljabar (G, *) dikatakan ***grup abelian*** jika:

1. (G, *) merupakan suatu grup, dan
2. operasi biner * bersifat komutatif.

Grup abelian ini sering juga disebut sebagai grup komutatif.

<u>Contoh 5</u>:
Diketahui $A = \{x \mid x = 2n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ dengan $\mathbb{Z}$ himpunan bilangan bulat.
Tunjukkan bahwa (A, +) adalah grup abelian dengan + merupakan operasi penjumlahan bilangan!
Jawab:

Pada Contoh 1, telah ditunjukkan bahwa (A, +) merupakan suatu grup.
Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa operasi biner + bersifat komutatif.

Ambil sebarang x_1 dan x_2 pada A, katakanlah $x_1, x_2 \in A$. Ini berarti,

$$x_1 = 2a \text{ dan } x_2 = 2b, \text{ dengan } a, b \in \mathbb{Z}.$$

Akan ditunjukkan bahwa operasi biner + bersifat komutatif.
Dengan kata lain, akan ditunjukkan bahwa $x_1 + x_2 = x_2 + x_1$.

$$x_1 + x_2 = 2a + 2b = 2(a+b) = 2(b+a) = 2b + 2a = x_2 + x_1$$

Jadi, operasi biner + bersifat komutatif.

Dengan demikian, (A, +) adalah suatu grup abelian. ■

10.4. Subgrup

Suatu himpunan tak kosong H dikatakan ***subgrup*** dari grup (G, *) jika:

1. $H \subseteq G$, dan
2. (H, *) merupakan suatu grup; ini berarti bahwa (H, *) harus memenuhi kelima syarat grup.

Namun, karena (G, *) sudah dipastikan adalah suatu grup, maka pembuktian suatu himpunan merupakan subgrup dapat dipermudah dengan teorema berikut.

TEOREMA 2

Diketahui (G,*) merupakan suatu grup, dan misalkan ada suatu himpunan H dengan $H \subseteq G$. H disebut subgrup dari G jika:

1. H tertutup terhadap operasi biner *, dan
2. setiap anggota di H memiliki invers masing-masing.

LATIHAN SOAL

1. Diberikan $A = \{2, 4, 6, 8, ...\}$ dengan

$$m * n = m - n \quad ; \quad \forall m, n \in A$$

Tunjukkan apakah $(A, *)$ merupakan suatu grup!

2. Diketahui $\mathbb{Z}_7$ adalah himpunan bilangan bulat dengan $\mathbb{Z}_7 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
   a. Tunjukkan apakah $(\mathbb{Z}_7, +)$ merupakan suatu grup dengan + adalah penjumlahan modulo 7!
   b. Jika $A \subseteq \mathbb{Z}_7$ dengan $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, tunjukkan apakah $(A, \times)$ merupakan suatu grup dengan $\times$ adalah perkalian modulo 7!

3. Diberikan suatu grup (G,*) dengan $G = \{a, b, c, d, e\}$ dan tabel Cayley berikut.

	a	b	c	d	e
a	c	a	e	b	d
b	a	b	c	d	e
c	e	c	d	a	b
d	b	d	a	e	c
e	d	e	b	c	a

   a. Tentukanlah identitas dari grup G !
   b. Tentukanlah invers dari masing-masing anggota pada G !