

ALJABAR BOOLEAN

(Bagian I)

8.1. Definisi Aljabar Boolean

Aljabar Boolean merupakan aljabar yang berhubungan dengan variabel-variabel biner (0 atau 1) dan operasi-operasi logik. Variabel-variabel diperlihatkan dengan huruf-huruf alfabet dan tiga operasi dasar, yakni AND, OR, dan NOT (komplemen).

AND dinotasikan $x * y$ atau xy

OR dinotasikan $x + y$

NOT (komplemen) dinotasikan x' atau \bar{x}

Perhatikan tabel berikut.

Tabel AND

x	y	xy
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Tabel OR

x	y	$x + y$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Tabel NOT (Komplemen)

x	x'
1	0
0	1

Contoh 1:

Tentukan nilai dari $1 \cdot 0 + (0 + 1)'$!

Jawab:

$$1 \cdot 0 + (0 + 1)' = 0 + 1' = 0 + 0 = 0$$

Selanjutnya, lihat definisi formal mengenai aljabar Boolean berikut.

Misalkan B adalah himpunan yang didefinisikan pada dua operasi biner (+ dan *) dan sebuah operasi unar ('), serta menggunakan dua elemen 0 dan 1, maka $(B, +, *, ')$ disebut

aljabar Boolean jika memenuhi aksioma-aksioma berikut untuk setiap elemen x, y , dan z dari himpunan B .

Hukum Komutatif	$x + y = y + x$	$xy = yx$
Hukum Asosiatif	$(x + y) + z = x + (y + z)$	$(xy)z = x(yz)$
Hukum Distributif	$x + (yz) = (x + y)(x + z)$	$x(y + z) = (xy) + (xz)$
Hukum Identitas	$x + 0 = x$	$x \cdot 1 = x$
Hukum Komplemen	$x + x' = 1$	$x \cdot x' = 0$

8.2. Definisi Ekspresi Boolean

Misalkan $B = \{0, 1\}$. Maka, $B^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_i \in B \text{ untuk } 1 \leq i \leq n\}$ adalah suatu himpunan dari semua n -tupel yang mungkin atas 0 dan 1. Suatu fungsi dari B^n ke B ini disebut sebagai fungsi Boolean atau ekspresi Boolean.

Contoh 2:

Tentukan nilai dari ekspresi Boolean berikut: $E(x, y, z) = xy + z'$!

Jawab:

x	y	z	xy	z'	E
1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	1	1

Contoh 3:

Tentukan nilai dari ekspresi Boolean berikut: $E(x, y, z) = xyz' + xy'z' + xy'z + x'yz'$!

Jawab:

x	y	z	xyz'	$xy'z'$	$xy'z$	$x'yz'$	E
1	1	1	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Berikutnya akan diberikan contoh bagaimana mencari ekspresi Boolean jika diketahui nilainya.

Contoh 4:

Carilah ekspresi Boolean dari x , y , dan z yang diberikan dalam tabel berikut:

x	y	z	E
1	1	1	0
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	0

Jawab:

Untuk mengetahui ekspresi Boolean, fokus pada angka “1” dalam kolom E , yaitu baris ketiga, baris keempat, dan baris ketujuh.

Baris ke-3 : $x = 1, y = 0, z = 1 \rightarrow$ ketiganya menghasilkan $E = 1$
sehingga diperoleh $xy'z$

Baris ke-4 : $x = 1, y = 0, z = 0 \rightarrow$ ketiganya menghasilkan $E = 1$
sehingga diperoleh $xy'z'$

Baris ke-7 : $x = 0, y = 0, z = 1 \rightarrow$ ketiganya menghasilkan $E = 1$
sehingga diperoleh $x'y'z$

Dengan demikian, $E(x, y, z) = xy'z + xy'z' + x'y'z$.

8.3. Tabel Identitas Boolean

Selain kelima aksioma yang telah dipaparkan pada Subbab 6.1, aljabar Boolean juga memiliki beberapa hukum lainnya. Perhatikan Tabel Identitas Boolean berikut.

Tabel Identitas Boolean

Hukum Idempoten	$x + x = x$	$xx = x$
Hukum Dominasi	$x + 1 = 1$	$x \cdot 0 = 0$
Hukum Absorpsi	$x + xy = x$	$x(x + y) = x$
Hukum Involusi	$(x')' = x$	
Hukum De Morgan	$(x + y)' = x'y'$	$(xy)' = x' + y'$

8.4. Dualitas

Dalam aljabar Boolean, ada istilah dualitas. Untuk mencari bentuk dual dari suatu aljabar Boolean, dapat diperoleh dengan:

- “+” diubah menjadi “*”
- “*” diubah menjadi “+”
- “1” diubah menjadi “0”
- “0” diubah menjadi “1”

Jika terdapat variabel seperti x atau x' pada suatu aljabar Boolean, maka bentuk tersebut tetap dalam bentuk dualnya.

Contoh 5:

Buktikan bahwa $(x \cdot (x + (y \cdot 0)))' = x'$, dan tuliskanlah bentuk dualnya!

Jawab:

$$(x \cdot (x + (y \cdot 0)))' = (x \cdot (x + 0))' \quad (\text{Hukum Dominasi})$$

$$= (x \cdot x)' \quad (\text{Hukum Identitas})$$

$$= x' \quad (\text{Hukum Idempoten})$$

Bentuk dualnya: $(x + (x \cdot (y + 1)))' = x'$

LATIHAN SOAL

1. Gunakan tabel untuk mencari nilai dari ekspresi Boolean berikut:
 - a. $E(x, y, z) = xy' + (xyz)'$
 - b. $E(x, y, z) = y'(xz + x'z')$
2. Carilah ekspresi Boolean dari variabel x , y , dan z pada tabel berikut:

x	y	z	E
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	0

3. Buktikan bahwa $\left(x + (x \cdot (y + 1))\right)' = x'!$