Materi Tambahan terkait Struktur Aljabar.

Ingat kembali bahwa:

- Struktur aljabar (*G*, *) dikatakan ***semigrup*** jika:
  1. *G* merupakan himpunan tak kosong,
  2. *G* tertutup terhadap operasi biner *, dan
  3. operasi biner * bersifat asosiatif.

- Struktur aljabar (*G*, *) dikatakan ***monoid*** jika:
  1. (*G*, *) merupakan suatu semigrup, dan
  2. *G* memiliki elemen identitas.

- Struktur aljabar (*G*, *) dikatakan ***grup*** jika:
  1. (*G*, *) merupakan suatu monoid, dan
  2. setiap anggota di *G* memiliki invers masing-masing.

- Struktur aljabar (*G*, *) dikatakan ***grup abelian*** jika:
  1. (*G*, *) merupakan suatu grup, dan
  2. operasi biner * bersifat komutatif.

Struktur aljabar (*G*, +, $\times$) dikatakan sebagai suatu ***ring*** (***gelanggang***) jika:
1. (*G*, +) merupakan suatu grup abelian,
2. *G* tertutup terhadap operasi biner $\times$,
3. operasi biner $\times$ bersifat asosiatif,
4. operasi biner + dan $\times$ bersifat distributif (kiri dan kanan), yakni:

untuk setiap $a,b,c \in G$, berlaku
$$a\times(b+c)=(a\times b)+(a\times c) \qquad \text{[distributif kiri]}$$
$$(b+c)\times a=(b\times a)+(c\times a) \qquad \text{[distributif kanan]}$$
.

<u>Contoh 1</u>:
Tunjukkan apakah himpunan $A=\{x\,|\,x=5n,\ n\in\mathbb{Z}\}$ merupakan suatu ring terhadap penjumlahan dan perkalian pada bilangan bulat! ($\mathbb{Z}$ bilangan bulat)
Jawab:

Pertama, harus ditunjukkan bahwa *A* adalah suatu himpunan tak kosong.
A adalah himpunan dengan $A=\{x\,|\,x=5n,\ n\in\mathbb{Z}\}$. Jika kita ambil *n* = 1, maka *x* = 5 $\in$ *A*. Ini berarti bahwa *A* merupakan himpunan tak kosong.

Kedua, harus ditunjukkan bahwa *A* tertutup terhadap operasi biner +.
Ambil sebarang x_1 dan x_2 pada *A*, katakanlah $x_1, x_2 \in A$. Ini berarti,
$$x_1 = 5a \text{ dan } x_2 = 5b, \text{ dengan } a,b\in\mathbb{Z}.$$
Akan ditunjukkan bahwa *A* tertutup terhadap operasi biner +.
Dengan kata lain, akan ditunjukkan bahwa $x_1 + x_2$ juga anggota *A*.
$$x_1 + x_2 = 5a + 5b = 5(a+b) \in A$$
Jadi, *A* tertutup terhadap +.

Ketiga, harus ditunjukkan bahwa operasi biner + bersifat asosiatif.
Ambil sebarang x_1, x_2, dan x_3 pada *A*, katakanlah $x_1, x_2, x_3 \in A$. Ini berarti,

$$x_1 = 5a,\ x_2 = 5b,\ \text{dan}\ x_3 = 5c\ \text{dengan}\ a, b, c \in \mathbb{Z}.$$

Akan ditunjukkan bahwa operasi biner + bersifat asosiatif.
Dengan kata lain, akan ditunjukkan bahwa $(x_1 + x_2) + x_3 = x_1 + (x_2 + x_3)$.

$$(x_1 + x_2) + x_3 = (5a + 5b) + 5c = 5a + 5b + 5c = 5a + (5b + 5c) = x_1 + (x_2 + x_3)$$

Sampai pada tahap ini, telah dibuktikan bahwa (*A*, +) adalah suatu semigrup.

Keempat, harus ditunjukkan bahwa himpunan *A* memiliki elemen identitas terhadap +.
Ambil sebarang x_1 pada *A*, katakanlah $x_1 \in A$. Ini berarti, $x_1 = 5a$ dengan $a \in \mathbb{Z}$.
Lalu, misalkan ada suatu elemen *e*.
Karena operasi binernya adalah +, maka *e* harus memenuhi:

$$x_1 + e = e + x_1 = x_1$$

Cari nilai *e* yang memenuhi kondisi di atas.

$$x_1 + e = x_1 \quad \rightarrow \quad e = x_1 - x_1 = 0 \quad \rightarrow \quad e = 5a - 5a = 0$$

Setelah mendapatkan nilai *e*, pastikan apakah *e* terdapat dalam himpunan *A*.
A adalah himpunan dengan $A = \{x \mid x = 5n,\ n \in \mathbb{Z}\}$. Jika kita ambil *n* = 0, maka *x* = 0 $\in$ *A*. Ini berarti bahwa *A* memiliki elemen identitas terhadap +.

Sampai pada tahap ini, telah dibuktikan bahwa (*A*, +) adalah suatu monoid.

Kelima, harus ditunjukkan bahwa setiap anggota di *A* memiliki invers masing-masing terhadap +.
Ambil sebarang x_1 pada *A*, katakanlah $x_1 \in A$. Ini berarti, $x_1 = 5a$ dengan $a \in \mathbb{Z}$.
Lalu, misalkan ada suatu elemen x_1^{-1}.
Karena operasi binernya adalah +, maka x_1^{-1} harus memenuhi:

$$x_1 + x_1^{-1} = x_1^{-1} + x_1 = 0$$

Cari nilai x_1^{-1} yang memenuhi kondisi di atas.

$$x_1 + x_1^{-1} = 0 \quad \rightarrow \quad x_1^{-1} = 0 - x_1 \quad \rightarrow \quad x_1^{-1} = 0 - 5a = -5a$$

Setelah mendapatkan nilai x_1^{-1}, pastikan apakah x_1^{-1} terdapat dalam himpunan *A*.
A adalah himpunan dengan $A = \{x \mid x = 5n,\ n \in \mathbb{Z}\}$. Maka,

$$x_1^{-1} = -5a = 5(-a) \in A$$

Ini berarti bahwa setiap anggota di *A* memiliki invers masing-masing terhadap +.

Sampai pada tahap ini, telah dibuktikan bahwa (*A*, +) adalah suatu grup.

Keenam, akan ditunjukkan bahwa operasi biner + bersifat komutatif.
Ambil sebarang x_1 dan x_2 pada *A*, katakanlah $x_1, x_2 \in A$. Ini berarti,

$$x_1 = 5a\ \text{dan}\ x_2 = 5b,\ \text{dengan}\ a, b \in \mathbb{Z}.$$

Akan ditunjukkan bahwa operasi biner + bersifat komutatif.
Dengan kata lain, akan ditunjukkan bahwa $x_1 + x_2 = x_2 + x_1$.

$$x_1 + x_2 = 5a + 5b = 5(a + b) = 5(b + a) = 5b + 5a = x_2 + x_1$$

Jadi, operasi biner + bersifat komutatif.

Sampai pada tahap ini, telah dibuktikan bahwa (A, +) adalah suatu grup abelian.

Ketujuh, harus ditunjukkan bahwa A tertutup terhadap operasi biner ×.
Ambil sebarang x_1 dan x_2 pada A, katakanlah $x_1, x_2 \in A$. Ini berarti,

$$x_1 = 5a \text{ dan } x_2 = 5b \text{, dengan } a, b \in \mathbb{Z}.$$

Akan ditunjukkan bahwa A tertutup terhadap operasi biner ×.
Dengan kata lain, akan ditunjukkan bahwa $x_1 \times x_2$ juga anggota A.

$$x_1 \times x_2 = 5a \times 5b = 5(a \times b) \in A$$

Jadi, A tertutup terhadap ×.

Kedelapan, harus ditunjukkan bahwa operasi biner × bersifat asosiatif.
Ambil sebarang x_1, x_2, dan x_3 pada A, katakanlah $x_1, x_2, x_3 \in A$. Ini berarti,

$$x_1 = 5a,\ x_2 = 5b, \text{ dan } x_3 = 5c \text{ dengan } a, b, c \in \mathbb{Z}.$$

Akan ditunjukkan bahwa operasi biner × bersifat asosiatif.
Dengan kata lain, akan ditunjukkan bahwa $(x_1 \times x_2) \times x_3 = x_1 \times (x_2 \times x_3)$.

$$(x_1 \times x_2) \times x_3 = (5a \times 5b) \times 5c = 5a \times 5b \times 5c = 5a \times (5b \times 5c) = x_1 \times (x_2 \times x_3)$$

Kesembilan, harus ditunjukkan bahwa operasi biner + dan × bersifat distributif kiri dan distributif kanan.
Ambil sebarang x_1, x_2, dan x_3 pada A, katakanlah $x_1, x_2, x_3 \in A$. Ini berarti,

$$x_1 = 5a,\ x_2 = 5b, \text{ dan } x_3 = 5c \text{ dengan } a, b, c \in \mathbb{Z}.$$

Akan ditunjukkan bahwa operasi biner + dan × bersifat distributif kiri dan distributif kanan.
Dengan kata lain akan ditunjukkan bahwa:

$$x_1 \times (x_2 + x_3) = (x_1 \times x_2) + (x_1 \times x_3) \qquad \text{[distributif kiri]}$$

$$(x_2 + x_3) \times x_1 = (x_2 \times x_1) + (x_3 \times x_1) \qquad \text{[distributif kanan]}$$

$$x_1 \times (x_2 + x_3) = 5a \times (5b + 5c) = 5a \times 5(b + c) = 5[a \times (b + c)]$$

[karena $a, b, c \in \mathbb{Z}$, maka $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$]

$$= 5[(a \times b) + (a \times c)] = 5(a \times b) + 5(a \times c)$$

$$= (x_1 \times x_2) + (x_1 \times x_3) \qquad \text{[distributif kiri]}$$

$$(x_2 + x_3) \times x_1 = (5b + 5c) \times 5a = 5(b + c) \times 5a = 5[(b + c) \times a]$$

[karena $a, b, c \in \mathbb{Z}$, maka $(b + c) \times a = (b \times a) + (c \times a)$]

$$= 5[(b \times a) + (c \times a)] = 5(b \times a) + 5(c \times a)$$

$$= (x_2 \times x_1) + (x_3 \times x_1) \qquad \text{[distributif kanan]}$$

Dengan demikian, (A, +, ×) adalah suatu ring. ■

<u>Contoh 2</u>:
Diketahui $\mathbb{Z}_2$ adalah himpunan bilangan bulat, dengan $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$. Tunjukkan bahwa $(\mathbb{Z}_2, +, \times)$ adalah ring dengan + dan × merupakan penjumlahan dan perkalian modulo 2!
Jawab:

$(\mathbb{Z}_2, +)$

Tabel Cayley

+	0	1
0	0	1
1	1	0

>> *Apakah* $\mathbb{Z}_2$ *merupakan himpunan tak kosong?*

$\mathbb{Z}_2$ jelas merupakan himpunan tak kosong.

>> *Apakah* $\mathbb{Z}_2$ *tertutup terhadap operasi biner + ?*

Karena semua hasil jumlahnya merupakan anggota dari $\mathbb{Z}_2$, maka $\mathbb{Z}_2$ tertutup terhadap operasi biner +.

>> *Apakah operasi biner + bersifat asosiatif?*

Sebagai contoh,

1 + (0 + 1) = 1 + 1 = 0

(1 + 0) + 1 = 1 + 1 = 0

Dengan memandang sifat operasi + pada bilangan bulat yang pasti bersifat asosiatif, maka operasi biner + pada $\mathbb{Z}_2$ juga bersifat asosiatif.

Sampai pada tahap ini, telah dibuktikan bahwa $(\mathbb{Z}_2, +)$ adalah suatu semigrup.

>> *Apakah* $\mathbb{Z}_2$ *memiliki elemen identitas penjumlahan?*

Perhatikan 'baris 0' dan 'kolom 0'.

+	0	1
0	0	1
1	1	0

Karena setelah proses penjumlahan, hasil yang diperoleh tidak ada yang berubah, maka 0 adalah elemen identitas dari $\mathbb{Z}_2$ terhadap operasi biner +.

Sampai pada tahap ini, telah dibuktikan bahwa $(\mathbb{Z}_2, +)$ adalah suatu monoid.

>> *Apakah setiap anggota di* $\mathbb{Z}_4$ *memiliki invers masing-masing terhadap +?*

Sekarang kita cek apakah setiap anggotanya memiliki invers masing-masing.

Karena 0 adalah elemen identitas, maka setiap baris dan setiap kolomnya haruslah mengandung '0' sebanyak tepat satu.

$$0^{-1} = 0 \quad ; \quad 1^{-1} = 1$$

Jadi, setiap anggotanya memiliki invers masing-masing terhadap operasi biner +.

Sampai pada tahap ini, telah dibuktikan bahwa $(\mathbb{Z}_2, +)$ adalah suatu grup.

>> *Apakah operasi biner + bersifat komutatif?*

Sebagai contoh,

0 + 1 = 1 = 1 + 0

Dengan memandang sifat operasi $+$ pada bilangan bulat yang pasti bersifat komuttif, maka operasi biner $+$ pada $\mathbb{Z}_2$ juga bersifat komutatif.

Sampai pada tahap ini, telah dibuktikan bahwa $(\mathbb{Z}_2, +)$ adalah suatu grup abelian.

$(\mathbb{Z}_2, \times)$

Tabel Cayley

$\times$	0	1
0	0	0
1	0	1

>> *Apakah $\mathbb{Z}_2$ tertutup terhadap operasi biner $\times$?*

Karena semua hasil kalinya merupakan anggota dari $\mathbb{Z}_2$, maka $\mathbb{Z}_2$ tertutup terhadap operasi biner $\times$.

>> *Apakah operasi biner $\times$ bersifat asosiatif?*

Sebagai contoh,

$1 \times (0 \times 1) = 1 \times 0 = 0$

$(1 \times 0) \times 1 = 0 \times 1 = 0$

Dengan memandang sifat operasi $\times$ pada bilangan bulat yang pasti bersifat asosiatif, maka operasi biner $\times$ pada $\mathbb{Z}_2$ juga bersifat asosiatif.

>> *Apakah operasi biner $+$ dan $\times$ bersifat distributif kiri dan distributif kanan?*

Sebagai contoh,

$$\left.\begin{aligned} &1 \times (0 + 1) = 1 \times 1 = 1 \\ &(1 \times 0) + (1 \times 1) = 0 + 1 = 1 \end{aligned}\right\} \; 1 \times (0 + 1) = (1 \times 0) + (1 \times 1)$$

$$\left.\begin{aligned} &(0 + 1) \times 1 = 1 \times 1 = 1 \\ &(0 \times 1) + (1 \times 1) = 0 + 1 = 1 \end{aligned}\right\} \; (0 + 1) \times 1 = (0 \times 1) + (1 \times 1)$$

Dengan memandang sifat operasi $+$ dan $\times$ pada bilangan bulat yang pasti bersifat distributif, maka operasi biner $+$ dan $\times$ pada $\mathbb{Z}_2$ juga bersifat distributif (kiri dan kanan).

Dengan demikian, $(\mathbb{Z}_2, +, \times)$ adalah suatu ring. ■