Fibration と Pseudofunctor との 2-同値

あるふぁ

2020 年 12 月 18 日

概要

圏の fibration と pseudofunctor の間の対応についての記述をこの文書の主目的としています。すなわち、1-圏 $\mathcal{B}$ について、$\mathcal{B}^{op}$ から Cat への pseudofunctor のなす 2-圏と $\mathcal{B}$ 上の fibration のなす 2-圏とが 2-同値であることを示します。一般の bicategory の間の pseudofunctor などの概念については導入せず、1-圏から Cat へのもののみを取り扱います。

目次

1 Fibration

定義 1.1
函手 $F\colon \mathcal{X} \to \mathcal{B}$ と射 $f\colon X \to Y \in \mathcal{X}$ について、

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{X}}(W, X) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{X}}(W, Y) \times_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(FW, FY)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(FW, FX)$$

なる集合の写像を構成することができる。これが全単射であるような f を F に対して *cartesian* であるという。

定義 1.2
函手 $F\colon \mathcal{X} \to \mathcal{B}$ と射 $f \in \mathcal{X}$ について、f が F に対して *vertical* であるとは、Ff が $\mathcal{B}$ の恒等射となることをいう。

定義 1.3
函手 $F\colon \mathcal{X} \to \mathcal{B}$ が *fibration* であるとは、任意の $Y \in \mathcal{X}$ と $u\colon I \to FY \in \mathcal{B}$ について、$F\varphi = u$ なる $\varphi \in \mathcal{X}$ であって *cartesian* なものが存在することをいう。

定義 1.4
fibration $F\colon \mathcal{X} \to \mathcal{B}$, $G\colon \mathcal{Y} \to \mathcal{B}$ に対して、F から G への *fibration* の 1-射とは、函手 $Q\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ であっ

て、以下の条件を充たすもののことをいう。

- $F = G \circ Q$
- $\varphi \in \mathcal{X}$ が *cartesian* ならば $F\varphi$ は *cartesian*

定義 1.5

fibration $F\colon \mathcal{X} \to \mathcal{B}$, $G\colon \mathcal{Y} \to \mathcal{B}$ と F から G への *fibration* の 1-射 Q, R について、Q から R への *fibration* の 2-射とは、Q から R への自然変換 τ であって、任意の $x \in \mathcal{X}$ について τ_x が $\mathcal{Y}$ の G に対する *vertical* な射であるもののことをいう。

2 Pseudofunctor, Pseudotransformation, Modification

一般に (strict) 2-圏について、1-射の合成について、$\circ$ 記号を用いる。2-射の垂直合成について、$*$ 記号を用いる。また水平合成について $\bullet$ 記号を用いる。

定義 2.1

1-圏 $\mathcal{B}$ について、*pseudofunctor* $F\colon \mathcal{B} \to \mathsf{Cat}$ とは、以下のデータの組

- $x \in \mathcal{B}$ について圏 $Fx \in \mathsf{Cat}$
- $f\colon x \to y \in \mathcal{B}$ について函手 $Ff\colon Fx \to Fy \in \mathsf{Cat}$
- $x \in \mathcal{B}$ について可逆な自然変換 *(*自然同型*)* $F_{\mathrm{id},x}\colon \mathrm{id}_{Fx} \Rightarrow F(\mathrm{id}_x)$
- 合成可能対 $f, g \in \mathcal{B}$ について可逆な自然変換 *(*自然同型*)* $F_{\mathrm{comp},g,f}\colon F(g)F(f) \Rightarrow F(g \circ f)$

であって、以下の条件

- 任意の射 $f\colon x \to y \in \mathcal{B}$ について

$$\begin{tikzcd} & F(\mathrm{id}_y) \circ F(f) \arrow[dr, "F_{\mathrm{comp},\mathrm{id}_y,f}"] & \\ \mathrm{id}_{Fy} \circ F(f) \arrow[ur, "F_{\mathrm{id},y} \bullet \mathrm{id}_{\mathrm{Ff}}"] \arrow[rr, "\cong"] & & F(f) \end{tikzcd}$$

  が可換
- 任意の射 $f\colon x \to y \in \mathcal{B}$ について

$$\begin{tikzcd} & F(f) \circ F(\mathrm{id}_x) \arrow[dr, "F_{\mathrm{comp},f,\mathrm{id}_x}"] & \\ F(f) \circ \mathrm{id}_{Fx} \arrow[ur, "\mathrm{id}_{\mathrm{Ff}} \bullet F_{\mathrm{id},x}"] \arrow[rr, "\cong"] & & F(f) \end{tikzcd}$$

  が可換

- 任意の合成可能な $f, g, h \in \mathcal{B}$ について

$$
\begin{tikzcd}
 & F(h)\circ F(g)\circ F(f) \arrow[dl, "\mathrm{id}_{F(h)}\bullet F_{\mathrm{comp},g,f}"'] \arrow[dr, "F_{\mathrm{comp},h,g}\bullet \mathrm{id}_{F(f)}"] & \\
F(h)\circ F(g\circ f) \arrow[dr, "F_{\mathrm{comp},h,g\circ f}"'] & & F(h\circ g)\circ F(f) \arrow[dl, "F_{\mathrm{comp},h\circ g,f}"] \\
 & F(h\circ g\circ f) &
\end{tikzcd}
$$

  が可換

を充たすものである。

定義 2.2
1-圏 $\mathcal{B}$ と *pseudofunctor* $F, G\colon \mathcal{B} \to \mathsf{Cat}$ について、F から G への *pseudotransformation* $\phi\colon F \Rightarrow G$ とは、以下のデータの組

- $x \in \mathcal{B}$ について函手 $\phi_x\colon Fx \to Gx$
- $f\colon x \to y$ について可逆な自然変換 *(*自然同型*)* $\phi_f\colon \phi_y \circ F(f) \Rightarrow G(f) \circ \phi_x$

であって、以下の条件

- 任意の合成可能な $f\colon a \to b,\ g\colon b \to c \in \mathcal{B}$ について

$$
\begin{tikzcd}
 & F(b) \arrow[dr, "F(g)"] \arrow[d, "\phi_b"] & \\
F(a) \arrow[ur, "F(f)"] \arrow[d, "\phi_a"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\phi_f"] & G(b) \arrow[dr, "G(g)"] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\phi_g"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow G_{\mathrm{comp},f,g}"] & F(c) \arrow[d, "\phi_c"] \\
G(a) \arrow[ur, "G(f)"] \arrow[rr, "G(g\circ f)"'] & & G(c)
\end{tikzcd}
$$

  の合成によって得られる自然変換 $\phi_c \circ F(g) \circ F(f) \Rightarrow G(g \circ f) \circ \phi_a$ と

$$
\begin{tikzcd}
 & F(b) \arrow[dr, "F(g)"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow F_{\mathrm{comp},g,f}"] & \\
F(a) \arrow[ur, "F(f)"] \arrow[rr, "F(g\circ f)"'] \arrow[d, "\phi_a"'] \arrow[drr, phantom, "\Downarrow\phi_{g\circ f}"] & {} & F(c) \arrow[d, "\phi_c"] \\
G(a) \arrow[rr, "G(g\circ f)"'] & & G(c)
\end{tikzcd}
$$

  の合成によって得られる自然変換は一致する

- 任意の $a \in \mathcal{B}$ について

$$\begin{tikzcd} F(a) \arrow[r, bend left, "\mathrm{id}_{F(a)}"] \arrow[r, "F(\mathrm{id}_a)"'] \arrow[d, "\phi_a"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow F_a"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\phi_{\mathrm{id}_a}"] & F(a) \arrow[d, "\phi_a"] \\ G(a) \arrow[r, "G(\mathrm{id}_a)"'] & G(a) \end{tikzcd}$$

の合成によって得られる自然変換 $\phi_a \to G(\mathrm{id}_a) \circ \phi_a$ と

$$\begin{tikzcd} F(a) \arrow[r, bend left, "\mathrm{id}_{F(a)}"] \arrow[d, "\phi_a"'] \arrow[dr, phantom, "="] & F(a) \arrow[d, "\phi_a"] \\ G(a) \arrow[r, bend left, "\mathrm{id}_{G(a)}"] \arrow[r, "G(\mathrm{id}_a)"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow F_a"] & G(a) \end{tikzcd}$$

の合成によって得られる自然変換は一致する

-

を充たすものである。

定義 2.3
1-圏 $\mathcal{B}$ と *pseudofunctor* $F, G \colon \mathcal{B} \to \mathsf{Cat}$ と F から G への *pseudotransformation* ϕ, ψ について ϕ から ψ への *modification* Γ とは、以下のデータ

-

であって、以下の条件

-

を充たすものである。

3 2-category

定義 3.1
strict 2*-category* $\mathcal{C}$ とは，以下のデータの組

- 対象のクラス $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$
- $a, b \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ について圏 $\mathrm{Hom}(a, b)$
- $a, b, c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ について函手 $M_{a,b,c} \colon \mathrm{Hom}(b, c) \times \mathrm{Hom}(a, b) \to \mathrm{Hom}(a, c)$
- $a \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ について函手 $u_a \colon \mathbf{1} \to \mathrm{Hom}(a, a)$

であって、以下の条件

- $a, b, c, d \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ について $M_{a,b,d} \circ (\mathrm{id} \times M_{b,c,d}) = M_{a,c,d} \circ (M_{a,b,c} \times \mathrm{id})$

- $a, b \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ について $M_{a,b,b} \circ (u_b \times \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}(a,b)}) = \mathrm{pr}_{\mathrm{Hom}(a,b)} \colon \mathbf{1} \times \mathrm{Hom}(a,b) \to \mathrm{Hom}(a,b)$
- $a, b \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ について $M_{a,a,b} \circ (\mathrm{id}_{\mathrm{Hom}(a,b)}) \times u_a = \mathrm{pr}_{\mathrm{Hom}(a,b)} \colon \mathrm{Hom}(a,b) \times \mathbf{1} \to \mathrm{Hom}(a,b)$

を充たすものである。

命題 3.2
1-*category* $\mathcal{B}$ について、$\mathcal{B}$ 上の *fibration* を対象とし、*firation* の 1-射を 1-射とし、*fibration* の 2-射を 2-射とする 2-圏は存在する。

Proof. □

定義 3.3
1-*category* $\mathcal{B}$ について、$\mathcal{B}$ 上の *fibration* を対象とし、*fibration* の 1-射を 1-射とし、*fibration* の 2-射を 2-射とする 2-圏を $\mathrm{Fib}(\mathcal{B})$ と表す。

命題 3.4
1-*category* $\mathcal{B}$ について、$\mathcal{B}^{op}$ から Cat への *pseudofunctor* を対象、*pseudonatural transformation* を 1-射、*modification* を 2-射とする 2-圏は存在する。

Proof. □

定義 3.5
1-*category* $\mathcal{B}$ について、$\mathcal{B}^{op}$ から Cat への *pseudofunctor* を対象、*pseudonatural transformation* を 1-射、*modification* を 2-射とする 2-圏を $[\mathcal{B}, \mathsf{Cat}]$ と表記する。

4 strict 2-equivalence

定義 4.1
2-圏 $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ について、$\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ が 2-圏同値であるとは、以下の対応

- $x \in \mathcal{C}$ について $Fx \in \mathcal{D}$
- $x, y \in \mathcal{C}$ について函手 $F_{x,y} \colon \mathrm{Hom}(x,y) \to \mathrm{Hom}(Fx, Fy)$

であって以下の条件

- 任意の $a, b, c \in \mathcal{C}$ について

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(b,c) \times \mathrm{Hom}(a,b) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(a,c) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}(Fb,Fc) \times \mathrm{Hom}(Fa,Fb) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(Fa,Fc)
\end{tikzcd}$$

  が可換

- 任意の $a \in \mathcal{C}$ について

$$\begin{array}{ccc} 1 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(a,a) \\ \downarrow & & \downarrow \\ 1 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(Fa,Fa) \end{array}$$

  が可換
- 任意の $x, y \in \mathcal{C}$ について $F_{x,y}$ は圏同型
- 任意の $d \in \mathcal{D}$ について $\mathcal{C}$ の対象 c と 1-射 $f\colon Fc \to d$, $g\colon d \to Fc$ が存在して、$g \circ f$, $f \circ g$ ともに恒等射となる

を充たすものが存在することをいう。

定理 4.2

1-圏 $\mathcal{B}$ について、$\mathrm{Fib}(\mathcal{B})$ と $[\mathcal{B}, \mathsf{Cat}]$ は 2-圏同値である。

Proof. □