列型空間

Q-rad.heart

2020 年 12 月 17 日

この文書は Q-rad.heart が個人的な使用を目的として作成したものであり、内容についての正確性は保証しない。また参考文献などは示されない。

第 1 章にて列型空間に関する基本的な事項についての解説を行い、第 2 章以降は列型空間についての論文等の記述についての解説を行っており、基本的には独立している。

記法に関する注意：

- 写像 $f\colon X \to Y$ と $A \subset X$ について、$f[A] := \{f(a) | a \in A\}$ と定める。
- 写像 $f\colon X \to Y$ と $g\colon Y \to Z$ について、その合成を $g \circ f$ もしくは $f \triangleright g$ と表記する。
- 位相空間 X の部分集合 A について、A の X における閉包を $\overline{A}$ もしくは $\mathrm{Cl}_X(A)$ と表記する。
- "é" の文字は、Alt キーに 0233 を打ち込むことで出力できる。
- "ö" の文字は、Alt キーに 0246 を打ち込むことで出力できる。

目次

第 1 章

基本事項

1.1　導入

1.1.1　収束列

定義 1.1.1.1
全順序集合 $P = (P_{\mathrm{Set}}, \leq)$ について、P 上の順序位相とは、P_{Set} 上に以下のように定まる位相のことである。

- $a \leq b \in P$ について $(a,b) := \{a < c < b | c \in P\}$ とおき、また $a \in P$ について $(-\infty, a) := \{c < a | c \in P\}$, $(a, \infty) := \{a < c | c \in P\}$ とおく。このとき、(a,b) もしくは $(-\infty, a)$, (a, ∞) の形で表される P_{Set} の部分集合全体を $\mathcal{B}$ とおいたとき、$\mathcal{B}$ を開基とする P_{Set} 上の位相がただ一つ存在する。

注意 1.1.1.2
以下順序数 α が与えられたとき、明示的に言及せずに α を位相空間とみなす場合は、順序位相が入れられているものとする。

観察 1.1.1.3
順序数 ω には離散位相が入っているため、位相空間 X に対して、任意の集合としての射 $\omega \to X$ は連続写像を誘導する。しかし、$\omega + 1$ には離散位相が入っていない。従って、次のような図式

$$\begin{tikzcd} \omega \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & X \\ \omega + 1 & \end{tikzcd}$$

について、

$$\begin{tikzcd} \omega \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & X \\ \omega + 1 \arrow[ur, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

を可換にするような $\tilde{f}$ が存在するとは限らない。ここで、i は $n \in \omega$ を $n \in \omega + 1$ へ移す包含写像である。

定義 1.1.1.4
位相空間 X に対して、X 上の点列とは、ω から X への連続写像のことである。また、$A \subset X$ に対し、A 内の点列とは、値域が A に含まれるような X 上の点列のことである。

定義 1.1.1.5
位相空間 X に対して、X 上の収束列とは、ω から X への連続写像 f であって、以下の図式

$$\begin{tikzcd}
\omega \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & X \\
\omega+1 \arrow[ur, "\tilde{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

を可換にするような $\tilde{f}$ が存在することをいう。また、点 $x \in X$ が点列 f の収束先であるとは、このような $\tilde{f}$ として $\tilde{f}(\omega) = x$ が成り立つようなものが取れることをいう。

観察 1.1.1.6
一般に、点列の収束先は、存在したとしても一意であるとは限らない。実際、密着位相の入った空間 X においては、任意の点列 f と任意の点 x に対し、x は f の収束先となる。

補題 1.1.1.7
位相空間 X について、X 上の点列 f と $x \in X$ を任意に取ったとき、以下は同値である。

1. x は f の収束先である
2. x の任意の近傍 U について、有限個の n を除いて $f(n) \in U$ が成り立つ

Proof. $\tilde{f}\colon \omega+1 \to X$ を f の延長であって $\tilde{f}(\omega) = x$ が成り立つような集合の写像とする。

1. $\Rightarrow$ 2. を示す。$n \neq \omega$ なる $n \in \omega+1$ について $\tilde{f}(n) = f(n)$ が成り立ちかつ $\tilde{f}(\omega) = x$ が成り立つような写像 $\tilde{f}$ が連続であるため、任意の x の開近傍 U について、$\tilde{f}^{-1}[U]$ は $\omega+1$ の開集合となる。また、$\tilde{f}^{-1}[U]$ は $\omega \in \omega+1$ を含むため、ある $\alpha \in \omega+1$ に対して $(\alpha, \infty) \subset \tilde{f}^{-1}[U]$ かつ $\omega \in (\alpha, \infty)$ が成り立つ。従って、α は自然数であり、したがって、$f^{-1}[U]$ に含まれない元は α 以下の自然数に限られるが、これは高々有限個である。

2. $\Rightarrow$ 1. を示す。$x \notin U$ なる X の開集合については、$\tilde{f}^{-1}[U] \subset \omega \subset \omega+1$ であるため、これは $\omega+1$ の開集合となる。$x \in U$ なる X の開集合については、$\tilde{f}^{-1}[U]$ は $\omega+1$ の補有限集合となり、したがってこれは開集合である。よって $\tilde{f}$ は連続写像である。 □

補題 1.1.1.8
狭義単調増加関数 $\mathrm{incr}\colon \omega \to \omega$ を任意に取る。このとき、位相空間 X 上の点列 $f\colon \omega \to X$ と f の収束先 x が与えられたならば、$\mathrm{incr} \triangleright f$ は x に収束する。

Proof. x の近傍 U を任意に取る。このとき、有限個の n を除いて $f(n) \in U$ が成り立つ。従って、incr は狭義単調増加であるため、有限個の n を除いて $f(\mathrm{inrc}(n)) \in U$ が成り立つ。従って $\mathrm{incr} \triangleright f$ は x に収束する。 □

定義 1.1.1.9
位相空間 X とその部分集合 A について、A の点列閉包とは、A 内の点列の収束先全体の集合のことである。このとき、A の点列閉包について $[A]_{\mathrm{seq}}$ と表記する。また、$A \in \mathcal{P}(X)$ について $[A]_{\mathrm{seq}} \in \mathcal{P}(x)$ を充てる写像 $[-]_{\mathrm{seq}}$ について、これを点列閉包作用素とよぶ。

定義 1.1.1.10

位相空間 X とその部分集合 A について、$A = [A]_{\mathrm{seq}}$ であるようなものを点列閉集合であるという。

命題 1.1.1.11
位相空間 X とその部分集合 A, B について、以下が成り立つ。

1. $A \subset B$ ならば $[A]_{\mathrm{seq}} \subset [B]_{\mathrm{seq}}$
2. $A \subset [A]_{\mathrm{seq}} \subset \overline{A}$
3. $[\emptyset]_{\mathrm{seq}} = \emptyset$
4. $[A \cup B]_{\mathrm{seq}} = [A]_{\mathrm{seq}} \cup [B]_{\mathrm{seq}}$

Proof. 1. を示す。任意の A 内の点列は B 内の点列であるため、$[A]_{\mathrm{seq}} \subset [B]_{\mathrm{seq}}$ は明らかに成り立つ。

2. を示す。任意の $a \in A$ について、$\omega \to \{a\} \subset X$ で表される A 内の点列は、a を収束点として持つため、$A \subset [A]_{\mathrm{seq}}$ が成り立つ。$x \in [A]_{\mathrm{seq}}$ について、$x \notin \overline{A}$ であるとし、また x に収束する A 内の点列 f が存在すると仮定する。このとき $X - \overline{A}$ は x の近傍であるため、有限個の n を除いて $f(n) \in X - \overline{A}$ が成り立つ。特に、$f(n) \notin A$ なる n が存在してしまうため、これは仮定に矛盾する。従って、$x \in \overline{A}$ が示される。

3. を示す。$\emptyset$ 内の点列は存在しないため、$[\emptyset]_{\mathrm{seq}} = \emptyset$ である。

4. を示す。$A \subset A \cup B$ かつ $B \subset A \cap B$ であるため、$[A]_{\mathrm{seq}} \subset [A \cup B]_{\mathrm{seq}}$ かつ $[B]_{\mathrm{seq}} \subset [A \cup B]_{\mathrm{seq}}$ が成り立つ。逆に、$x \in [A \cup B]_{\mathrm{seq}}$ なる点 x を取ると、$A \cup B$ 内の点列 f であって、x に収束するものが取れる。ここで、$X_A = \{n \in \omega | f(n) \in A\}$ もしくは $X_B = \{n \in \omega | f(n) \in B\}$ のいずれかは無限集合である。

X_A が無限集合であると仮定すると、狭義単調増加関数 $\mathrm{incr} \colon \omega \to X_A \subset \omega$ が存在する。このとき $\mathrm{incr} \triangleright f$ は A 内の点列であって、x に収束する。従って $x \in [A]_{\mathrm{seq}}$ である。同様に、X_B は無限集合であると仮定すると、$x \in [B]_{\mathrm{seq}}$ が成り立つ。 □

系 1.1.1.12
位相空間 X の閉集合 A について、A は点列閉集合である。

Proof. $A \subset [A]_{\mathrm{seq}} \subset \overline{A} = A$ より。 □

系 1.1.1.13
位相空間 X について、以下が成り立つ。

1. 点列閉集合の族 $\mathcal{F} = \{F_i\}$ について、$\bigcap \mathcal{F}$ は点列閉集合である。
2. 有限個の点列閉集合 $F_1, \ldots, F_n$ について、$F_1 \cup \ldots \cup F_n$ は点列閉集合である。

Proof. 1. を示す。任意の $F_i \in \mathcal{F}$ について、$[\bigcap \mathcal{F}]_{\mathrm{seq}} \subset [F_i]_{\mathrm{seq}} = F_i$ であるため、$[\bigcap \mathcal{F}]_{\mathrm{seq}} = \bigcap \mathcal{F}$ が示される。

2. を示す。帰納法により、$[F_1 \cup \ldots \cup F_n]_{\mathrm{seq}} = [F_1]_{\mathrm{seq}} \cup \ldots \cup [F_n]_{\mathrm{seq}}$ が成り立つ。 □

1.1.2 列型空間・Fréchet–Urysohn 空間

定義 1.1.2.1
列型空間とは、位相空間 X であって、任意の部分集合 $A \subset X$ に対し以下が成り立つようなものである。

- $A = [A]_{\mathrm{seq}}$ ならば、A は閉集合

定義 1.1.2.2
Fréchet–Urysohn 空間とは、位相空間 X であって、任意の部分集合 $A \subset X$ に対し以下が成り立つようなものである。

- $\overline{A} = [A]_{\mathrm{seq}}$

例 1.1.2.3
$\mathbb{R}$ は *Fréchet–Urysohn* 空間である。実際、$\mathbb{R}$ の各点は高々可算個の開集合 $U_1, U_2, \ldots$ からなる開近傍系を持つ。さらに $U_1 \supset U_2 \supset \ldots$ が成り立つと仮定してよい。このとき、ある $A \subset \mathbb{R}$ について $x \in \overline{A}$ が成り立つならば、$U_n \cap A$ は空でない。したがって、$x_n \in U_n \cap A$ なる点を選べる。このとき、$n \in \omega$ に対し x_n を充てる写像は x に収束する。

例 1.1.2.4
Arens' space は *Fréchet–Urysohn* 空間でなく列型空間であるような位相空間のなかで基本的な例である。すなわちこれは、空間 $X_1 = \omega \times (\omega + 1)$ と $X_2 = \omega + 1$ の直和空間の商であって、$(n, \omega) \in X_1$ と $n \in X_2$ を同一視したものである。詳細は *https://dantopology.wordpress.com/2010/08/18/a-note-about-the-arens-space/* を参照のこと。

例 1.1.2.5
最小の非可算順序数 ω_1 について、$\omega_1 + 1$ は列型空間ではない。実際、$[0, \omega_1)$ は点列閉集合であるが、閉集合ではない。しかし $\omega_1 + 1$ はコンパクト *Hausdorff* 空間である。

命題 1.1.2.6
第一可算空間ならば *Fréchet-Urysohn* 空間である。*Fréchet-Urysohn* 空間ならば列型空間である。

Proof. 第一可算空間 X を取る。$A \subset X$ と $x \in \overline{A}$ を任意に取る。このとき、X は第一可算であるため、x の可算個の開近傍からなる基本近傍系 $\{U_n | n \in \mathbb{N}\}$ を構成できる。このとき、$V_n = \bigcap_{1 \leq i \leq n} U_i$ とおくと、$\{V_n | n \in \mathbb{N}\}$ もまた x の基本近傍系となり、さらに $i \leq j \in \mathbb{N}$ について $V_i \supset V_j$ が成り立つ。

このとき、任意の $n \in \mathbb{N}$ について、$V_n \cap A$ は空でない。従って、点 $x_n \in V_n \cap A$ を選ぶことができる。$n \in \omega$ に対して x_n を充てるような写像 $f\colon \omega \to X$ について、これは x に収束する。従って、$\overline{A} \subset [A]_{\mathrm{seq}}$ が示される。よって $[A]_{\mathrm{seq}} = \overline{A}$ が成り立つ。

Fréchet-Urysohn 空間 Y を取る。$A \subset Y$ について、$A = [A]_{\mathrm{seq}}$ ならば、$[A]_{\mathrm{seq}}$ であるため、$A = \overline{A}$ が成り立つ。したがって Y は列型空間である。 □

系 1.1.2.7
距離空間は列型空間である。

Proof. 距離空間は第一可算空間であるため、列型空間である。 □

命題 1.1.2.8
位相空間 X について、以下は同値である。

1. X は *Fréchet-Urysohn* 空間
2. X の任意の部分空間は列型空間

Proof. 1. $\Rightarrow$ 2. を示す。Y を X の部分空間とする。Y における点列閉包作用素を $[-]_{\mathrm{seq},Y}$ と表記する。このとき、$A \subset Y$ について、$y \in [A]_{\mathrm{seq}} \cap Y$ を任意に取ると、y に X 上で収束する A 内の点列 f が存在するが、明らかに Y 上においても y に収束するため、$y \in [A]_{\mathrm{seq},y}$ が成り立つ。

逆に $y \in [A]_{\mathrm{seq},Y} \subset [A]_{\mathrm{seq}} \cap Y$ は明らかであるため、$[A]_{\mathrm{seq},Y} = [A]_{\mathrm{seq}} \cap Y = \mathrm{Cl}_X(A) \cap Y = \mathrm{Cl}_Y(A)$ が成り立つ。従って Y は Fréchet-Urysohn 空間であり、特に列型空間である。

2. $\Rightarrow$ 1. を示す。X が Fréchet-Urysohn 空間でないとすると、$A \subset X$ であって、$[A]_{\mathrm{seq}} \neq \overline{A}$ なるものが取れる。このとき、$x \in \overline{A} \setminus [A]_{\mathrm{seq}}$ を任意に取ると、$A \cup \{x\}$ は列型空間でない。実際、$A \subset A \cup \{x\}$ は点列閉であるが、閉集合ではない。 □

1.2 Seq

1.2.1 位相的構成

定義 1.2.1.1
Seq とは、列型空間のクラスのことである。もしくは文脈により明らかな場合、列型空間のなす Top の充満部分圏のことを指す場合がある。

命題 1.2.1.2
列型空間の族 $\mathcal{X} = \{X_i\}$ が与えられたとき、$\coprod \mathcal{X}$ は列型空間である。

Proof. $A \subset \coprod \mathcal{X}$ について、$x \in [A]_{\mathrm{seq}}$ ならば、ある A 内の点列 f であって x に収束するものが取れる。このとき、$x \in X_i \in \mathcal{X}$ であるとすると、X_i は x の近傍であるため、有限個の n を除いて $f(n) \in X_i$ が成り立つ。従って、f を部分列に取り換えることで、$f[\omega] \subset A \cap X_i$ が成り立つようにできる。以上の議論より、$[A]_{\mathrm{seq}} = \coprod [A \cap X_i]_{\mathrm{seq}}$ が成り立つ。

ここで、$A = [A]_{\mathrm{seq}}$ ならば、$\coprod A \cap X_i = \coprod [A \cap X_i]_{\mathrm{seq}}$ より、$A \cap X_i$ は X_i において点列閉であることが従い、よって $A \cap X_i$ は X_i の閉集合となり、従って A は X の閉集合である。 □

命題 1.2.1.3
列型空間の商空間は列型空間である。

Proof. 列型空間 X と商写像 $\pi\colon X \to Y$ が与えられたとする。このとき、Y の点列閉集合 B を任意に取れば、$\pi^{-1}[B]$ は点列閉集合である。実際、$\pi^{-1}[B]$ 内の収束列 f を取ったとき、収束先を x とおくと、$\pi(x)$ は $\pi(f)$ の収束先であるため、$\pi(x) \in B$ が成り立つ。従って、$x \in \pi^{-1}[B]$ が成り立つため、$\pi^{-1}[B]$ は点列閉集合である。X は列型空間であったため、$\pi^{-1}[B]$ は閉集合である。π は商写像であるため、B は閉集合である。 □

命題 1.2.1.4
列型空間は Top における余極限構成において閉じている。

Proof. Seq のコイコライザ図式・直和図式の余極限は Seq に値を持つため、余極限についても閉じている。 □

命題 1.2.1.5

列型空間の開部分空間は列型空間である。

Proof. 列型空間 X の開部分空間 U をとり、U の点列閉集合 A を任意に取る。$B=(X\setminus U)\cup A$ とおくと、B は点列閉集合である。実際、B 内の収束列 f であって、収束先 x であって U に属するものが存在すれば、U は x の近傍であるため、有限個の n を除いて $f(n)\in U$ が成り立つ。

このとき、f を部分列に取り換えると、$f[\omega]\subset B\cap U=A$ が成り立つとしてよい。よって、x は A 内の点列の収束先であるが、A は点列閉集合であるため、$x\in A$ が成り立つ。したがって B は点列閉集合であり、B は X の閉集合である。よって A は Y の閉集合であることが示される。 □

命題 1.2.1.6
列型空間の閉部分空間は列型空間である。

Proof. 列型空間 X の閉部分空間 Y をとり、Y の点列閉集合 A を任意に取る。このとき、$[A]_{\mathrm{seq},X}\subset \mathrm{Cl}_Y(A)\subset Y$ より、$[A]_{\mathrm{seq},X}=[A]_{\mathrm{seq},Y}$ が成り立つ。よって、A は X において点列閉集合であり、従って閉集合である。よって Y の列型性が示される。 □

命題 1.2.1.7
列型空間の開写像による連続像は列型空間である。

Proof. 列型空間 X と全射な連続開写像 $f\colon X\to Y$ を任意に取る。このとき、Y の点列閉集合 A を任意に取ると、$f^{-1}[A]$ は点列閉集合である。よって、$f^{-1}[A]$ は閉集合であり、$X\setminus f^{-1}[A]=f^{-1}[Y\setminus A]$ であるため、A は閉集合である。 □

命題 1.2.1.8
列型空間の閉写像による連続像は列型空間である。

Proof. 列型空間 X と全射な連続開写像 $f\colon X\to Y$ を任意に取る。このとき、Y の点列閉集合 A を任意に取ると、$f^{-1}[A]$ は点列閉集合である。よって、A は閉集合である。 □

観察 1.2.1.9
Seq は連続像については閉じていない。このことは、列型空間でない空間 X に対して、X の台集合に離散位相を入れた空間 X_{discrte} から X への連続像が X であることからわかる。

観察 1.2.1.10
Seq は積については閉じていない。このことは、$[0,1]^{\omega_1}$ が列型空間でないことからわかる。実際、$[0,1]^{\omega_1}$ の部分集合であって、可算個の成分を除いて 0 であるようなもののなす集合 A を取ると、A は明らかに点列閉集合であるが、閉集合ではない。

1.2.2 列型空間の特徴付け

命題 1.2.2.1
位相空間 X について以下は同値である。

1. X は列型空間

2. X は第一可算空間の商

3. X は距離化可能空間の商

Proof. 3. $\Rightarrow$ 2. $\Rightarrow$ 1. は明らかである。

1. $\Rightarrow$ 3. を示す。列型空間 X の点 x と x に収束する点列 f の組全体の集合 $\mathcal{S}$ について、$M = \coprod_{\mathcal{S}} \omega + 1$ は距離化可能空間である。このとき、$(x, f) \in \mathcal{S}$ について、f の拡張 $\tilde{f} \colon \omega + 1 \to X$ であって $\tilde{f}(\omega) = x$ なるものが取れる。これらの連続写像により全射 $q \colon M \to X$ を構成することができる。

このとき、X が列型空間であるため、q の商写像性は明らかである。 $\square$

第 2 章

濃度

2.1 On cardinality bounds involving the weak Lindelöf degree (arXiv:1610.08996v1)

この論文の列型空間に関する部分は Theorem 2.12, Theorem 2.13 である。
(Link: https://arxiv.org/pdf/1610.08996.pdf)

2.1.1 基本的な用語

定義 2.1.1.1
位相空間 X について、X の *weak Lindelöf degree* $wL(X)$ とは、基数 κ であって以下の性質を充たす最小のものである。

- 任意の X の開被覆 $\mathcal{U}$ について、$\mathcal{V} \in [\mathcal{U}]^{\leq\kappa}$ であって $X = \mathrm{Cl}_X(\bigcup\mathcal{V})$ が成り立つようなものが存在する。

定義 2.1.1.2
位相空間 X について、X の *character* $\chi(X)$ とは、基数 κ であって以下の性質を充たす最小のものである。

- X の任意の点 x について、x の基本近傍系として濃度 κ 以下のものが存在する

2.1.2 モチベーション

1978 年に Bell, Ginsburg, Woods が示したこととして、以下の主張がある。

1. X が正規空間ならば、$|X| \leq 2^{wL(X)\chi(X)}$
2. 一般の位相空間 X においては、$2^{wL(X)\chi(X)} < X$ なるものが存在する

すると、位相空間のクラスであって、式 $|X| \leq 2^{wL(X)\chi(X)}$ を充たすものにはどのようなものがあるかという自然な問いが生まれる。このとき、既に知られているこのようなクラスとしては、以下のようなものがある。

- Lindelöf 空間
- c.c.c. 空間

- 正規空間
- H-閉空間
- 正規 G_δ 対角的空間

論文においてはこのようなクラスについて新しいものを与えている。

2.1.3 Theorem 2.12

定理 2.1.3.1
X が弱 *Lindelöf* かつ正規な列型空間であって、$\chi(X) \leq 2^{\aleph_0}$ ならば $|X| \leq 2^{\aleph_0}$ が成り立つ。

Proof. Pol-Šapirovskii の方法を用いる。

まず基本近傍系を用意する。$x \in X$ 毎に x の基本近傍系 $\mathcal{U}_x$ であって大きさが $2^{\aleph_0}$ 以下であるものを取っておく。

構成するオブジェクトは、閉集合の昇鎖 ω_1-列 $\{F_\alpha\}_{0 \leq \alpha < \omega_1}$ である。その方法は以下の通りである。

- F_0 は適当な一点 $\{y\} \subset X$
- 極限順序数 $\beta < \alpha$ について $F_\beta = \overline{\bigcup_{\gamma < \beta} F_\gamma}$
- 後続順序数 $\beta + 1$ について、以下の性質を成り立たせるような任意の A について $F_{\beta+1} = A$ とする
  - 可算集合 $\mathcal{V} \subset \bigcup_{x \in F_\beta} \mathcal{U}_x$ について $X - \overline{\bigcup \mathcal{V}} \neq \emptyset$ ならば $A - \overline{\bigcup \mathcal{V}} \neq \emptyset$ が成り立つ

このような構成によって得られる $\{F_\alpha\}_{0 \leq \alpha < \omega_1}$ であって、任意の $0 \leq \alpha < \omega_1$ について $|F_\alpha| \leq 2^{\aleph_0}$ なるものが存在することを示す。

X は Hausdorff な列型空間であるため、任意の部分集合 A について、$\overline{A}$ の濃度は $\aleph_1 \cdot |A|^{\aleph_0}$ であることに注意すると (論文中において列型空間と Fréchet-Urysohn 空間とを混同している可能性があるが、どっちでも結局正しい)、$|A| \leq 2^{\aleph_0}$ ならば $\overline{A}$ は濃度 $2^{\aleph_0}$ 以下である。よって、超限帰納的に構成を進めることができる。

ここで、$F = \bigcup_{0 \leq \alpha < \omega_1} F_\alpha$ とおく。X は列型空間であるため、F は閉集合である (実際、点列閉集合であることは明らか)。$X \neq F$ であるとして矛盾を導く。

このとき、点 $x \in X \setminus F$ を取ると、X は正規であるため、$x \in W \subset \overline{W} \subset X \setminus F$ なる開集合 W が存在する。従って、点 $z \in F$ 毎に、$\overline{W}$ と非交な $\mathcal{U}_z$ の要素 U_z を選ぶことができる。このとき、$\{U_z\}_{z \in F}$ は F の開被覆であり、かつ F は弱 Lindelöf 空間の閉集合であるため、F は弱 Lindelöf である (https://mathoverflow.net/questions/94757/closed-subset-of-weakly-lindelof)。よって可算個の U_z を選んで、合併の閉包が F を含むようにできるが、これは F の取り方に反する。よって $X = F$ より、X の濃度は $2^{\aleph_0}$ 以下。 □

参考文献

[1] ”列型空間のノート”, 箱 (@o_ccah), https://o-ccah.github.io/docs/files/sequential-space-20200314.pdf

[2] ”Sequential Spaces, I”, Dan Ma’s Topology Blog, https://dantopology.wordpress.com/2010/06/21/sequential-spaces-i/

[3] ”Sequential Spaces, II”, Dan Ma’s Topology Blog, https://dantopology.wordpress.com/2010/06/23/sequential-spaces-ii/

[4] ”Sequential Spaces, III”, Dan Ma’s Topology Blog, https://dantopology.wordpress.com/2010/07/01/sequential-spaces-iii/

[5] ”Sequential Spaces, IV”, Dan Ma’s Topology Blog, https://dantopology.wordpress.com/2010/07/17/sequential-spaces-iv/

[6] ”Sequential Spaces, V”, Dan Ma’s Topology Blog, https://dantopology.wordpress.com/2010/07/21/sequential-spaces-v/

[7] ”k-spaces, I”, Dan Ma’s Topology Blog, https://dantopology.wordpress.com/2010/06/27/k-spaces-i/

[8] ”k-spaces, II”, Dan Ma’s Topology Blog, https://dantopology.wordpress.com/2010/08/03/k-spaces-ii/

[9] ”A note about the Arens’ space”, Dan Ma’s Topology Blog, https://dantopology.wordpress.com/2010/08/18/a-note-about-the-arens-space/

[1] は箱さん (@o_ccah) のノート。短くまとまっている。

[2] から [8] は、Dan Ma’s Topology Blog 上の一連の列型空間、k-space もしくは Fréchet-Urysohn 空間についての記事群である。この Blog はよく位相空間論まわりでお世話になる。