数学誌

Q-rad.heart

第 1 章

2020-12

1.1

1.2

1.3

1.4

1.5

1.6

1.7

1.8

1.9

1.10

1.11　2020-12-11

1.11.1

列型空間のノートを作っていたら、箱さんの文書置き場をみつけた。ちょっと読んでみたい。

”組合せゲーム理論入門: 不偏ゲームと Grundy 数”, https://o-ccah.github.io/docs/files/cgt-20190512.pdf を開いた。Abstract をみれば、ゲームの集合が Abel 群構造を持つとか面白そうなことが書いてある。

とりあえずゲームの定義をみてみる (記法は原文と異なる)。

定義 1.11.1.1
ゲームの集合 Game とは、以下で自然数 n に対して定まる集合 Game_n の合併集合である。

- $\mathsf{Game}_0 = \{(\emptyset, \emptyset)\}$
- $\mathsf{Game}_{n+1} = \{(G_L, G_R) | G_L, G_R \subset \mathsf{Game}_n\}$

イメージとしては、例えば $n = 3$ の場合でも考えればいいのだけど、このとき Game_3 の元ってのは、Game_2 の部分集合の組なわけで、これはそれぞれ Left Player と Right Player が、「次のゲーム設定をどうするか」を決める選択肢を持っている状態とみなすことができる。そして Left からゲームが始まるなら次は Right,Left,Right と選択をしていく。ここで選択肢が消えてしまった瞬間に負けが決定する、とこういうことだろう。

すると、ゲームが「先手必勝」「後手必勝」「左必勝」「右必勝」に分けられる。つまり、左から始めて右が勝ち、右から始めて左が勝つなら後手必勝ということ。その他についても同様。

ゲームの直和についてのイメージがほとんどつかめていないのだが、わかったこととして、直和が well-defined であるということがある。あとは再帰的に $0 + G \cong G + 0 \cong G$ が成り立つということ。

どうやら、ここでは $=$ は同値関係で、$\cong$ が strict なイコールとして扱われているらしい。

1.11.2

定理 1.7 の解説をみると、どうやらゲームの直和というのは、次のような状況を考えているらしい。

状況 1.11.2.1
ゲーム G と H の直和というのは、ゲーム盤 G と H を横に並べておいて、プレーを始めるというもの。勝敗は同じく選択肢がなくなった方が負け。

状況 1.11.2.2
ゲーム G の逆というのは、ゲーム盤を左右ひっくりかえしたもの。

わかりやすい！こういわれると 1.5 とかは自明にみえてくる。このとき、ゲームの同値類ってのは以下のように定まるらしい。

定義 1.11.2.3
ゲーム G, H について $G = H$ とは、任意のゲーム X について $G + X$ と $H + X$ の勝敗結果が一致することをいう。

さてここで、物真似戦法を取っていけば、$G + (-G)$ は後手必勝であることがわかるし、後手必勝のゲームは $=$ 同値類で割った集合において単位元であることもわかるし、そもそも $=$ 同値類で割っちゃっても $+$ ってのは well-defined であるからして、$\mathsf{Game}/=$ にはアーベル群構造が入る。これは面白い！

$\mathsf{Game}/=$ を $\mathbb{G}$ とでもおくことにしよう。

ところで $\mathbb{G}$ 上に演算と compatible な半順序が入っているが、これはどういう意味だろうか？よくわからないので次へ進む。

状況 1.11.2.4
不偏ゲームとは、左右対称なゲームのこと。よって、不偏ゲームの勝敗結果は先手必勝か後手必勝。

さて、不偏ゲーム G を表記する方法として、「次の局面としてありうるものを列挙する」というものが挙げられる。

定義 1.11.2.5
自然数 n に対して再帰的に定義されるニム $*n$ とは、$*0, \ldots, *(n-1)$ のこと。

そもそも well-defined かという問題があるが、よくよく考えれば $\mathsf{Game}_i \subset \mathsf{Game}_{i+1}$ が再帰的に示されるので、問題はない。

つまり、解釈すれば、$*n$ というのは「石が n 個ある状態」で、「必ず 1 個以上の石を取ること」が約束されている、ということになる。

$m < n$ ならば $*m \neq *n$ であることについては、これが先手必勝であることから従う。

ここで、衝撃の定理その 1 。自然数 m と n の bit ごとの排他的論理和を $m \oplus n$ とおくと、$*m + *n = *(m \oplus n)$ が成り立つ。次に衝撃の定理その 2 。任意の不偏ゲームについてニムと $=$ 同値。

そんなことあるんだー……。