列型空間

Q-rad.heart

2020 年 12 月 11 日

この文書は Q-rad.heart が個人的な使用を目的として作成したものであり、内容についての正確性は保証しない。また参考文献などは示されない。

記法に関する注意：

- 写像 $f\colon X \to Y$ と $A \subset X$ について、$f[A] := \{f(a) | a \in A\}$ と定める。
- 写像 $f\colon X \to Y$ と $g\colon Y \to Z$ について、その合成を $g \circ f$ もしくは $f \triangleright g$ と表記する。

目次

第 1 章

1.1

1.1.1 収束列

定義 1.1.1.1
全順序集合 $P = (P_{\mathrm{Set}}, \leq)$ について、P 上の順序位相とは、P_{Set} 上に以下のように定まる位相のことである。

- $a \leq b \in P$ について $(a,b) := \{a < c < b | c \in P\}$ とおき、また $a \in P$ について $(-\infty, a) := \{c < a | c \in P\}$, $(a, \infty) := \{a < c | c \in P\}$ とおく。このとき、(a,b) もしくは $(-\infty, a)$, (a, ∞) の形で表される P_{Set} の部分集合全体を $\mathcal{B}$ とおいたとき、$\mathcal{B}$ を開基とする P_{Set} 上の位相がただ一つ存在する。

注意 1.1.1.2
以下順序数 α が与えられたとき、明示的に言及せずに α を位相空間とみなす場合は、順序位相が入れられているものとする。

観察 1.1.1.3
順序数 ω には離散位相が入っているため、位相空間 X に対して、任意の集合としての射 $\omega \to X$ は連続写像を誘導する。しかし、$\omega + 1$ には離散位相が入っていない。従って、次のような図式

$$\begin{tikzcd} \omega \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & X \\ \omega + 1 & \end{tikzcd}$$

について、

$$\begin{tikzcd} \omega \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & X \\ \omega + 1 \arrow[ur, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

を可換にするような $\tilde{f}$ が存在するとは限らない。ここで、i は $n \in \omega$ を $n \in \omega + 1$ へ移す包含写像である。

定義 1.1.1.4
位相空間 X に対して、X 上の点列とは、ω から X への連続写像のことである。また、$A \subset X$ に対し、A 内の点列とは、値域が A に含まれるような X 上の点列のことである。

定義 1.1.1.5

位相空間 X に対して、X 上の収束列とは、ω から X への連続写像 f であって、以下の図式

$$\begin{tikzcd} \omega \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & X \\ \omega+1 \arrow[ur, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

を可換にするような $\tilde{f}$ が存在することをいう。また、点 $x \in X$ が点列 f の収束先であるとは、このような $\tilde{f}$ として $\tilde{f}(\omega) = x$ が成り立つようなものが取れることをいう。

観察 1.1.1.6
一般に、点列の収束先は、存在したとしても一意であるとは限らない。実際、密着位相の入った空間 X においては、任意の点列 f と任意の点 x に対し、x は f の収束先となる。

補題 1.1.1.7
位相空間 X について、X 上の点列 f と $x \in X$ を任意に取ったとき、以下は同値である。

1. x は f の収束先である
2. x の任意の近傍 U について、有限個の n を除いて $f(n) \in U$ が成り立つ

Proof. $\tilde{f}\colon \omega+1 \to X$ を f の延長であって $\tilde{f}(\omega) = x$ が成り立つような集合の写像とする。

1. $\Rightarrow$ 2. を示す。$n \neq \omega$ なる $n \in \omega+1$ について $\tilde{f}(n) = f(n)$ が成り立ちかつ $\tilde{f}(\omega) = x$ が成り立つような写像 $\tilde{f}$ が連続であるため、任意の x の開近傍 U について、$\tilde{f}^{-1}[U]$ は $\omega+1$ の開集合となる。また、$\tilde{f}^{-1}[U]$ は $\omega \in \omega+1$ を含むため、ある $\alpha \in \omega+1$ に対して $(\alpha, \infty) \subset \tilde{f}^{-1}[U]$ かつ $\omega \in (\alpha, \infty)$ が成り立つ。従って、α は自然数であり、したがって、$f^{-1}[U]$ に含まれない元は α 以下の自然数に限られるが、これは高々有限個である。

2. $\Rightarrow$ 1. を示す。$x \notin U$ なる X の開集合については、$\tilde{f}^{-1}[U] \subset \omega \subset \omega+1$ であるため、これは $\omega+1$ の開集合となる。$x \in U$ なる X の開集合については、$\tilde{f}^{-1}[U]$ は $\omega+1$ の補有限集合となり、したがってこれは開集合である。よって $\tilde{f}$ は連続写像である。 $\square$

補題 1.1.1.8
狭義単調増加関数 $\mathrm{incr}\colon \omega \to \omega$ を任意に取る。このとき、位相空間 X 上の点列 $f\colon \omega \to X$ と f の収束先 x が与えられたならば、$\mathrm{incr} \triangleright f$ は x に収束する。

Proof. $\square$

定義 1.1.1.9
位相空間 X とその部分集合 A について、A の点列閉包とは、A 内の点列の収束先全体の集合のことである。このとき、A の点列閉包について $[A]_{\mathrm{seq}}$ と表記する。また、$A \in \mathcal{P}(X)$ について $[A]_{\mathrm{seq}} \in \mathcal{P}(x)$ を充てる写像 $[-]_{\mathrm{seq}}$ について、これを点列閉包作用素とよぶ。

命題 1.1.1.10
位相空間 X とその部分集合 A, B について、以下が成り立つ。

1. $A \subset [A]_{\mathrm{seq}} \subset \overline{A}$
2. $[\emptyset]_{\mathrm{seq}} = \emptyset$

3. $[A \cup B]_{\mathrm{seq}} = [A]_{\mathrm{seq}} \cup [B]_{\mathrm{seq}}$

Proof. □

系 1.1.1.11
位相空間 X の閉集合 A に対して、$[A]_{\mathrm{seq}} = A$ が成り立つ。

Proof. $A \subset [A]_{\mathrm{seq}} \subset \overline{A} = A$ より。 □

1.1.2 列型空間・Fréchet–Urysohn 空間

定義 1.1.2.1
列型空間とは、位相空間 X であって、任意の部分集合 $A \subset X$ に対し以下が成り立つようなものである。

- $A = [A]_{\mathrm{seq}}$ ならば、A は閉集合

定義 1.1.2.2
Fréchet–Urysohn 空間とは、位相空間 X であって、任意の部分集合 $A \subset X$ に対し以下が成り立つようなものである。

- $\overline{A} = [A]_{\mathrm{seq}}$

例 1.1.2.3
$\mathbb{R}$ は *Fréchet–Urysohn* 空間である。実際、$\mathbb{R}$ の各点は高々可算個の開集合 $U_1, U_2, \ldots$ からなる開近傍系を持つ。さらに $U_1 \supset U_2 \supset \ldots$ が成り立つと仮定してよい。このとき、ある $A \subset \mathbb{R}$ について $x \in \overline{A}$ が成り立つならば、$U_n \cap A$ は空でない。したがって、$x_n \in U_n \cap A$ なる点を選べる。このとき、$n \in \omega$ に対し x_n を充てる写像は x に収束する。

例 1.1.2.4

例 1.1.2.5