# 列型空間

Q-rad.heart

2020 年 12 月 11 日

この文書は Q-rad.heart が個人的な使用を目的として作成したものであり、内容についての正確性は保証しない。また参考文献などは示されない。

記法に関する注意：

- 写像 $f\colon X \to Y$ と $A \subset X$ について、$f[A] := \{f(a) | a \in A\}$ と定める。
- 写像 $f\colon X \to Y$ と $g\colon Y \to Z$ について、その合成を $g \circ f$ もしくは $f \triangleright g$ と表記する。

# 目次

# 第 1 章

## 1.1

### 1.1.1 収束列

**定義 1.1.1.1**
全順序集合 $P = (P_{\mathrm{Set}}, \leq)$ について、$P$ 上の順序位相とは、$P_{\mathrm{Set}}$ 上に以下のように定まる位相のことである。

- $a \leq b \in P$ について $(a,b) := \{a < c < b | c \in P\}$ とおき、また $a \in P$ について $(-\infty, a) := \{c < a | c \in P\}$, $(a, \infty) := \{a < c | c \in P\}$ とおく。このとき、$(a,b)$ もしくは $(-\infty, a)$, $(a, \infty)$ の形で表される $P_{\mathrm{Set}}$ の部分集合全体を $\mathcal{B}$ とおいたとき、$\mathcal{B}$ を開基とする $P_{\mathrm{Set}}$ 上の位相がただ一つ存在する。

**注意 1.1.1.2**
以下順序数 $\alpha$ が与えられたとき、明示的に言及せずに $\alpha$ を位相空間とみなす場合は、順序位相が入れられているものとする。

**観察 1.1.1.3**
順序数 $\omega$ には離散位相が入っているため、位相空間 $X$ に対して、任意の集合としての射 $\omega \to X$ は連続写像を誘導する。しかし、$\omega + 1$ には離散位相が入っていない。従って、次のような図式

$$\begin{tikzcd} \omega \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & X \\ \omega + 1 & \end{tikzcd}$$

について、

$$\begin{tikzcd} \omega \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & X \\ \omega + 1 \arrow[ur, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

を可換にするような $\tilde{f}$ が存在するとは限らない。ここで、$i$ は $n \in \omega$ を $n \in \omega + 1$ へ移す包含写像である。

**定義 1.1.1.4**
位相空間 $X$ に対して、$X$ 上の点列とは、$\omega$ から $X$ への連続写像のことである。また、$A \subset X$ に対し、$A$ 内の点列とは、値域が $A$ に含まれるような $X$ 上の点列のことである。

**定義 1.1.1.5**

位相空間 $X$ に対して、$X$ 上の収束列とは、$\omega$ から $X$ への連続写像 $f$ であって、以下の図式

$$\begin{tikzcd} \omega \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & X \\ \omega+1 \arrow[ur, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

を可換にするような $\tilde{f}$ が存在することをいう。また、点 $x \in X$ が点列 $f$ の収束先であるとは、このような $\tilde{f}$ として $\tilde{f}(\omega) = x$ が成り立つようなものが取れることをいう。

**観察 1.1.1.6**
一般に、点列の収束先は、存在したとしても一意であるとは限らない。実際、密着位相の入った空間 $X$ においては、任意の点列 $f$ と任意の点 $x$ に対し、$x$ は $f$ の収束先となる。

**補題 1.1.1.7**
位相空間 $X$ について、$X$ 上の点列 $f$ と $x \in X$ を任意に取ったとき、以下は同値である。

1. $x$ は $f$ の収束先である
2. $x$ の任意の近傍 $U$ について、有限個の $n$ を除いて $f(n) \in U$ が成り立つ

*Proof.* $\tilde{f} \colon \omega+1 \to X$ を $f$ の延長であって $\tilde{f}(\omega) = x$ が成り立つような集合の写像とする。

1. $\Rightarrow$ 2. を示す。$n \neq \omega$ なる $n \in \omega+1$ について $\tilde{f}(n) = f(n)$ が成り立ちかつ $\tilde{f}(\omega) = x$ が成り立つような写像 $\tilde{f}$ が連続であるため、任意の $x$ の開近傍 $U$ について、$\tilde{f}^{-1}[U]$ は $\omega+1$ の開集合となる。また、$\tilde{f}^{-1}[U]$ は $\omega \in \omega+1$ を含むため、ある $\alpha \in \omega+1$ に対して $(\alpha, \infty) \subset \tilde{f}^{-1}[U]$ かつ $\omega \in (\alpha, \infty)$ が成り立つ。従って、$\alpha$ は自然数であり、したがって、$f^{-1}[U]$ に含まれない元は $\alpha$ 以下の自然数に限られるが、これは高々有限個である。

2. $\Rightarrow$ 1. を示す。$x \notin U$ なる $X$ の開集合については、$\tilde{f}^{-1}[U] \subset \omega \subset \omega+1$ であるため、これは $\omega+1$ の開集合となる。$x \in U$ なる $X$ の開集合については、$\tilde{f}^{-1}[U]$ は $\omega+1$ の補有限集合となり、したがってこれは開集合である。よって $\tilde{f}$ は連続写像である。 □

**補題 1.1.1.8**
狭義単調増加関数 $\mathrm{incr} \colon \omega \to \omega$ を任意に取る。このとき、位相空間 $X$ 上の点列 $f \colon \omega \to X$ と $f$ の収束先 $x$ が与えられたならば、$\mathrm{incr} \triangleright f$ は $x$ に収束する。

*Proof.* $x$ の近傍 $U$ を任意に取る。このとき、有限個の $n$ を除いて $f(n) \in U$ が成り立つ。従って、incr は狭義単調増加であるため、有限個の $n$ を除いて $f(\mathrm{inrc}(n)) \in U$ が成り立つ。従って $\mathrm{incr} \triangleright f$ は $x$ に収束する。 □

**定義 1.1.1.9**
位相空間 $X$ とその部分集合 $A$ について、$A$ の点列閉包とは、$A$ 内の点列の収束先全体の集合のことである。このとき、$A$ の点列閉包について $[A]_{\mathrm{seq}}$ と表記する。また、$A \in \mathcal{P}(X)$ について $[A]_{\mathrm{seq}} \in \mathcal{P}(x)$ を充てる写像 $[-]_{\mathrm{seq}}$ について、これを点列閉包作用素とよぶ。

**定義 1.1.1.10**
位相空間 $X$ とその部分集合 $A$ について、$A = [A]_{\mathrm{seq}}$ であるようなものを点列閉集合であるという。

**命題 1.1.1.11**
位相空間 $X$ とその部分集合 $A, B$ について、以下が成り立つ。

1. $A \subset B$ ならば $[A]_{\mathrm{seq}} \subset [B]_{\mathrm{seq}}$
2. $A \subset [A]_{\mathrm{seq}} \subset \overline{A}$
3. $[\emptyset]_{\mathrm{seq}} = \emptyset$
4. $[A \cup B]_{\mathrm{seq}} = [A]_{\mathrm{seq}} \cup [B]_{\mathrm{seq}}$

*Proof.* 1. を示す。任意の $A$ 内の点列は $B$ 内の点列であるため、$[A]_{\mathrm{seq}} \subset [B]_{\mathrm{seq}}$ は明らかに成り立つ。

2. を示す。任意の $a \in A$ について、$\omega \to \{a\} \subset X$ で表される $A$ 内の点列は、$a$ を収束点として持つため、$A \subset [A]_{\mathrm{seq}}$ が成り立つ。$x \in [A]_{\mathrm{seq}}$ について、$x \notin \overline{A}$ であるとし、また $x$ に収束する $A$ 内の点列 $f$ が存在すると仮定する。このとき $X - \overline{A}$ は $x$ の近傍であるため、有限個の $n$ を除いて $f(n) \in X - \overline{A}$ が成り立つ。特に、$f(n) \notin A$ なる $n$ が存在してしまうため、これは仮定に矛盾する。従って、$x \in \overline{A}$ が示される。

3. を示す。$\emptyset$ 内の点列は存在しないため、$[\emptyset]_{\mathrm{seq}} = \emptyset$ である。

4. を示す。$A \subset A \cup B$ かつ $B \subset A \cap B$ であるため、$[A]_{\mathrm{seq}} \subset [A \cup B]_{\mathrm{seq}}$ かつ $[B]_{\mathrm{seq}} \subset [A \cup B]_{\mathrm{seq}}$ が成り立つ。逆に、$x \in [A \cup B]_{\mathrm{seq}}$ なる点 $x$ を取ると、$A \cup B$ 内の点列 $f$ であって、$x$ に収束するものが取れる。ここで、$X_A = \{n \in \omega | f(n) \in A\}$ もしくは $X_B = \{n \in \omega | f(n) \in B\}$ のいずれかは無限集合である。

$X_A$ が無限集合であると仮定すると、狭義単調増加関数 $\mathrm{incr} \colon \omega \to X_A \subset \omega$ が存在する。このとき $\mathrm{incr} \triangleright f$ は $A$ 内の点列であって、$x$ に収束する。従って $x \in [A]_{\mathrm{seq}}$ である。同様に、$X_B$ は無限集合であると仮定すると、$x \in [B]_{\mathrm{seq}}$ が成り立つ。 □

**系 1.1.1.12**
位相空間 $X$ の閉集合 $A$ について、$A$ は点列閉集合である。

*Proof.* $A \subset [A]_{\mathrm{seq}} \subset \overline{A} = A$ より。 □

**系 1.1.1.13**
位相空間 $X$ について、以下が成り立つ。

1. 点列閉集合の族 $\mathcal{F} = \{F_i\}$ について、$\bigcap \mathcal{F}$ は点列閉集合である。
2. 有限個の点列閉集合 $F_1, \ldots, F_n$ について、$F_1 \cup \ldots \cup F_n$ は点列閉集合である。

*Proof.* 1. を示す。任意の $F_i \in \mathcal{F}$ について、$[\bigcap \mathcal{F}]_{\mathrm{seq}} \subset [F_i]_{\mathrm{seq}} = F_i$ であるため、$[\bigcap \mathcal{F}]_{\mathrm{seq}} = \bigcup \mathcal{F}$ が示される。

2. を示す。帰納法により、$[F_1 \cup \ldots \cup F_n]_{\mathrm{seq}} = [F_1]_{\mathrm{seq}} \cup \ldots \cup [F_n]_{\mathrm{seq}}$ が成り立つ。 □

### 1.1.2 列型空間・Fréchet–Urysohn 空間

**定義 1.1.2.1**
列型空間とは、位相空間 $X$ であって、任意の部分集合 $A \subset X$ に対し以下が成り立つようなものである。

- $A = [A]_{\mathrm{seq}}$ ならば、$A$ は閉集合

**定義 1.1.2.2**

*Fréchet–Urysohn* 空間とは、位相空間 $X$ であって、任意の部分集合 $A \subset X$ に対し以下が成り立つようなものである。

- $\overline{A} = [A]_{\mathrm{seq}}$

**例 1.1.2.3**
$\mathbb{R}$ は *Fréchet–Urysohn* 空間である。実際、$\mathbb{R}$ の各点は高々可算個の開集合 $U_1, U_2, \ldots$ からなる開近傍系を持つ。さらに $U_1 \supset U_2 \supset \ldots$ が成り立つと仮定してよい。このとき、ある $A \subset \mathbb{R}$ について $x \in \overline{A}$ が成り立つならば、$U_n \cap A$ は空でない。したがって、$x_n \in U_n \cap A$ なる点を選べる。このとき、$n \in \omega$ に対し $x_n$ を充てる写像は $x$ に収束する。

**例 1.1.2.4**
*Arens' space* は *Fréchet–Urysohn* 空間でなく列型空間であるような位相空間のなかで基本的な例である。すなわちこれは、空間 $X_1 = \omega \times (\omega + 1)$ と $X_2 = \omega + 1$ の直和空間の商であって、$(n, \omega) \in X_1$ と $n \in X_2$ を同一視したものである。詳細は *https://dantopology.wordpress.com/2010/08/18/a-note-about-the-arens-space/* を参照のこと。

**例 1.1.2.5**
最小の非可算順序数 $\omega_1$ について、$\omega_1 + 1$ は列型空間ではない。実際、$[0, \omega_1)$ は点列閉集合であるが、閉集合ではない。しかし $\omega_1 + 1$ はコンパクト *Hausdorff* 空間である。

**命題 1.1.2.6**
第一可算空間ならば *Fréchet-Urysohn* 空間である。*Fréchet-Urysohn* 空間ならば列型空間である。

*Proof.* 第一可算空間 $X$ を取る。$A \subset X$ と $x \in \overline{A}$ を任意に取る。このとき、$X$ は第一可算であるため、$x$ の可算個の開近傍からなる基本近傍系 $\{U_n | n \in \mathbb{N}\}$ を構成できる。このとき、$V_n = \bigcap_{1 \leq i \leq n} U_i$ とおくと、$\{V_n | n \in \mathbb{N}\}$ もまた $x$ の基本近傍系となり、さらに $i \leq j \in \mathbb{N}$ について $V_i \supset V_j$ が成り立つ。

このとき、任意の $n \in \mathbb{N}$ について、$V_n \cap A$ は空でない。従って、点 $x_n \in V_n \cap A$ を選ぶことができる。$n \in \omega$ に対して $x_n$ を充てるような写像 $f \colon \omega \to X$ について、これは $x$ に収束する。従って、$\overline{A} \subset [A]_{\mathrm{seq}}$ が示される。よって $[A]_{\mathrm{seq}} = \overline{A}$ が成り立つ。

Fréchet-Urysohn 空間 $Y$ を取る。$A \subset Y$ について、$A = [A]_{\mathrm{seq}}$ ならば、$[A]_{\mathrm{seq}}$ であるため、$A = \overline{A}$ が成り立つ。したがって $Y$ は列型空間である。 $\square$

# 第 2 章

# Further Information

## 2.1 文献リスト


1. "列 型 空 間 の ノ ー ト", 箱 (@o_ccah), https://o-ccah.github.io/docs/files/sequential-space-20200314.pdf
2. "Sequential Spaces, I", Dan Ma's Topology Blog, https://dantopology.wordpress.com/2010/06/21/sequential-spaces-i/
3. "Sequential Spaces, II", Dan Ma's Topology Blog, https://dantopology.wordpress.com/2010/06/23/sequential-spaces-ii/
4. "Sequential Spaces, III", Dan Ma's Topology Blog, https://dantopology.wordpress.com/2010/07/01/sequential-spaces-iii/
5. "Sequential Spaces, IV", Dan Ma's Topology Blog, https://dantopology.wordpress.com/2010/07/17/sequential-spaces-iv/
6. "Sequential Spaces, V", Dan Ma's Topology Blog, https://dantopology.wordpress.com/2010/07/21/sequential-spaces-v/
7. "k-spaces, I", Dan Ma's Topology Blog, https://dantopology.wordpress.com/2010/06/27/k-spaces-i/
8. "k-spaces, II", Dan Ma's Topology Blog, https://dantopology.wordpress.com/2010/08/03/k-spaces-ii/
9. "A note about the Arens' space"


1. は箱さん (@o_ccah) のノート。短くまとまっている。

2. から 8. は、Dan Ma's Topology Blog 上の一連の列型空間、k-space もしくは Fréchet-Urysohn 空間についての記事群である。この Blog はよく位相空間論まわりでお世話になる。

## 2.2 "Fréchet-Urysohn" の打ち方

"é" の文字は、Alt キーに 0233 を打ち込むことで出力できる。