Wiederholung für das Abitur im Fach Mathematik

Contents

1 Kurvendiskussion

1.1 Übersicht

1. Definitionsbereich:
2. Symetrie:
   (a) Achsensymetrie: $f(x) = f(-x)$
   (b) Punktsymetrie: $f(-x) = -f(x)$
3. Achsenschnittpunkt:
   (a) y-Achse: $f(0)$
   (b) x-Achse/Nullstellen: $f(x) = 0$
4. Extrempunkte:
   (a) Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$
   (b) Hinreichende Bedingung: $f'(x) = 0 \ \& f''(x) \neq 0$
   (c) Hochpunkt: $f''(x) < 0$
   (d) Tiefpunkt: $f''(x) > 0$
5. Wendepunkte:
   (a) Notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$
   (b) Hinreichende Bedingung: $f''(x) = 0 \ \& f'''(x) \neq 0$
   (c) Links-Rechts-Wendepunkt: $f'''(x) < 0$
   (d) Rechts-Links-Wendepunkt: $f'''(x) > 0$
6. Sattelpunkt:
   (a) Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$
   (b) Hinreichende Bedingung: $f''(x) = 0$

1.2 Nullstellen

1.2.1 PQ-Formel

$$x_{1,2} = -\frac{P}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - 4}$$

1.2.2 Quadratische Ergänzung

binomische Formeln:

1. $(a+b)^2 = 2a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a-b)^2 = 2a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a+b)^2 * (a-b)^2 = a^2 - b^2$

1.2.3 Wendepunkte

1. Notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$
2. Hinreichende Bedingung: $f'''(x) = + \neq 0 \to rechts{-}links{-}Wendepunkt$
3. Einsetzen in f(x): $f(x) = a$

2 e-Funktionen

Das gegenteil der e-Funktion ist die ln-Funktion

2.1 Produktregel

Mithilfe der Produktregel kann man e-Funktionen händisch ableiten. Dazu teilt man die Formel an den Malpunkten, sodass es immer nur zwei Teile gibt. Diese zwei Teile leitet man nun unabhängig voneinander ab und multipliziert die Ableitung von Teil 1 mit der nicht-Ableitung von Teil zwei welchen mit der Ableitung von Teil 2 und der nicht-Ableitung von Teil 1 addiert wird.

Allgemein: $f'(x) = A \cdot B = A' \cdot B + B' \cdot A$

Beispiel:
$f(x) = x^2 \cdot (x-1)$
Teil 1: $x^2 \to 2x(Ableitung)$
Teil 2: $(x-1) \to 1(Ableitung)$
$f'(x) = 2x \cdot (x-1) + 1 \cdot x^2$
$= 2x^2 - 2x + x^2$
$= 3x^2 - 2x$

3 Vektoren

3.1 Skalarprodukt

Mithilfe des Skalarprodukts kann man überprüfen ob zwei Vektoren orthogonal (d.h. in einem 90° Winkel) zueinander sind. Die allgemeine Formel lautet:

$$\vec{AB} * \vec{AC} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3$$

Wenn das Skalarprodukt:

- $= 0$ ist $\rightarrow$ Die Vektoren liegen **orthogonal** zueinander/90°
- $\neq 0$ist $\rightarrow$ Die Vektoren liegen **nicht** orthogonal zueinander

3.2 Lage zweier Geraden zueinander bestimmen

3.3 Mittelpunkt einer Geraden bestimmen

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix} \right)$$

3.4 Längenformel eines Vektors

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Beispiel:

$$\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{4 + 4 + 1} = \sqrt{9} = 3$$

3.5 Punktprobe

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} a_1 + b_1 \cdot k = c_1 \\ a_2 + b_1 \cdot k = c_2 \\ a_3 + b_1 \cdot k = c_3 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} k = x \\ k = y \\ k = z \end{vmatrix}$$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 23 \\ -34 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} -2 + 2 \cdot k = -12 \\ 3 - 5 \cdot k = 23 \\ 1 + 7 \cdot k = -34 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} k = -5 \\ k = -4 \\ k = -5 \end{vmatrix}$$

4 Stochastik

4.1 Zufallsexperimente

Ein Zufallsexperiment ist ein Experiment bei dem das Ergebnis nicht eindeutig vorhergesagt werden kann.

4.1.1 Bernoulli-Experiment

Ein Bernoulli-Experiment ist ein Zufallsexperiment bei dem es nur zwei mögliche Ergebnisse gibt. Ein Beispiel für ein Bernoulli-Experiment ist der Wurf eines Würfels wo die "1" als Treffer gezählt wird und alle anderen Zahlen als Nieten. Somit sind die zwei Ergen entweder Treffer oder Niete.

4.1.2 Laplace-Experiment

Bei einem Laplace-Experiment haben alle möglichen Ergebnisse die gleiche Wahrscheinlichkeit. Somit ist ein idealer Würfel ein Laplace-Experiment, da alle Zahlen die gleiche Wahrscheinlichkeit haben gewürfelt zu werden.

4.2 Empirische Standardabweichung

$$\overline{s} = \sqrt{p_1 \cdot (x_1 - \overline{x})^2 + p_2 \cdot (x_2 - \overline{x})^2 + p_3 \cdot (x - \overline{x})^3 + ...}$$

4.3 Erwartungswert

$$E(x) = 1 \cdot P(X = 1) + 2 \cdot P(X = 2) + 3 \cdot P(X = 3) + ...$$

4.4 Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$\text{binomPDF: } P(X = Y) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

$$\text{binomCDF: } P(X \leq Y) = p(x = y) + p(x = y - 1) + ... + p(x = y - y)$$

4.5 Vier-Felder-Tafel

	B	$\overline{B}$	
A	Wahrscheinlichkeit AB	Wahrscheinlichkeit $A\overline{B}$	Wahrscheinlichkeit A
$\overline{A}$	Wahrscheinlichkeit $\overline{A}B$	Wahrscheinlichkeit $\overline{AB}$	Wahrscheinlichkeit $\overline{A}$
	Wahrscheinlichkeit B	Wahrscheinlichkeit $\overline{B}$	1

Beispiel:

	B	$\overline{B}$	
A	0.21	0.49	0.7
$\overline{A}$	0.06	0.24	0.3
	0.27	0.73	1

4.6 Sigma-Regeln

4.6.1 Intervalle abschätzen für sigma

$$90\% \rightarrow 1.64 \cdot \sigma$$
$$95\% \rightarrow 1.96 \cdot \sigma$$
$$99\% \rightarrow 2.58 \cdot \sigma$$

4.7 Erwartungswert

$$\mu = n \cdot p$$

4.8 Standardabweichung

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$$

4.9 Sigma-Regeln andwenden für

1. Gegeben: n, p
2. $\mu = n \cdot p$
3. $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} \rightarrow$ Wenn $\sigma > 3$ ist:
   (a) $1.64 \cdot \sigma = d$
   (b) $\mu - d \leq X \leq \mu + d$
   (c) $P(\mu + d(aufrunden) < X < \mu + d(abrunden))$

(d) $P(\mu + d(abrunden) < X < \mu + d(aufrunden))$

(e) Hinweis: Dies kann mit dem binomCDF befehl des CAS berechnet berechnet werden.

(f) Das Ergebnis welches am nächsten über 0.9 liegt ist das bessere Ergebnis

Beispiel:

1. Gegeben: $n = 920$, $p = 58$

2. $\mu = 920 \cdot 0.58 = 533.6$

3. $\sigma = \sqrt{920 \cdot 0.58 \cdot (0.42)} = 14.9703 \rightarrow$ Wenn σ ¿ 3 ist:

   (a) $1.64 \cdot 14.9703 = 24.5513$

   (b) $533.6 - 24.5513 \leq X \leq 533.5 + 24.5513 \rightarrow 509.0487 \leq X \leq 558.1513$

   (c) $P(510 < X < 558) = 0.8982$

   (d) $P(509 < X < 559) = 0.9114$

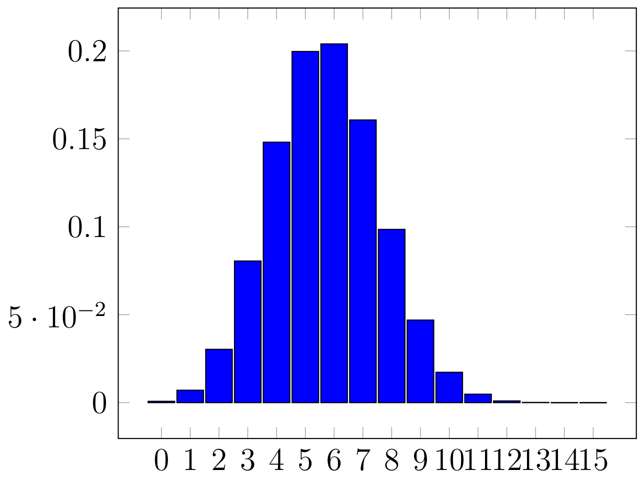
   (e) $\rightarrow$ Das richtige Ergebnis ist $P(509 \leq X \leq 559)$

4.10 Histogramme

Histogramme stellen die Wahrscheinlichkeit einer Anzahl von Treffern graphisch dar. Sie sehen Glockenförmig aus wobei die Spitze den Erwartungswert darstellt, welcher die größte Wahrscheinlichkeit besitzt. Die y-Achse gibt die Wahrscheinlichkeit an, während die x-Achse die Anzahl der Ereignisse bzw. Treffer angibt.

4.10.1 Beispiel eines Histogramms

- n = 15
- p = 0.38



4.10.2 Wahrscheinlichkeiten - y-Achse

Die y-Achse gibt die Wahrscheinlichkeit für das eintreten des Ereignisses der x-Achse an.

4.10.3 Ereignisse/Treffer - x-Achse

Die x-Achse gibt die Ereignisse bzw. die Anzahl der Treffer an.

4.10.4 Erwartungswert im Histogramm

Der Erwartungswert im Histogramm wird dadurch gekennzeichnet, dass er die höchste Säule besitzt. Er ist das Produkt aus der Wahrscheinlichkeit und n, also die Anzahl der Möglichkeiten.

4.10.5 Histogramme in Klausuren

Im Prüfungsteil A der Klausuren können Aufgaben drankommen wo man verschiedene Histogramme vor dem Hintergrund gegebener Kriterien bewerten soll. Bei solchen Aufgaben muss man meistens auf die 3 oben genannten Merkmale eines Histogramms achten. Entweder es gibt Wahrscheinlichkeiten für x-Werte die außerhalb des in der Aufgabenstellung definierten Bereiches liegen. **ODER** Die Summe aller Wahrscheinlichkeiten im Histogramm sind über 1. Dies ist bei korrekten Histogrammen keine Möglichkeit weshalb das Histogramm falsch ist und den in der Aufgabenstellung beschriebenen Kontext nicht darstellen. **ODER** Der Erwartungswert liegt nicht an der richtigen Stelle. **ODER** Eine Kombination von diesen drei Faktoren ist der Fall bzw. in verschiedenen Histogrammen vorhanden. Dies ist keine ausführliche Liste von Merkmalen die man bei Histogrammen analysieren kann, aber diese sind meistens die wichtigsten bei den Aufgaben in Klausuren.

Bearbeitung einer Textaufgabe in der Klausur

1. $f(x)$ $f'(x)$ $f''(x)$ $f'''(x)$ hinschreiben und im CAS definieren
2. Worfür steht x bzw. t, Wofür steht $f(x)$ bzw. $A(t)$ $\rightarrow$ Was bedeutet $f'(x)$ bzw. $A'(x)$
3. Teilaufgaben genau lesen: Ist x **gegeben** oder **gesucht**? Ist f(x) **gegeben** oder **gesucht**?