Mathe-Abiturvorbereitung

Mathematik

- Kurvendiskussion
  - Nullstellen
  - Extrempunkte
  - Wendepunkte
  - Globalverlauf
  - Definitionsbereich
- Vektoren
- Integrale
- E-Funktionen
- Stochastik
  - Vier-Felder-Tafel
  - Pfadregeln
  - Erwartungswert
  - Binomialkoeffizient
  - Empirische Standardabweichung
  - Sigma-Regeln
    - Erwartungswert μ
    - Standardabweichung
- Bearbeitung einer Textaufgabe in der Klausur

Kurvendiskussion

Übersicht

1. Definitionsbereich: $x \in \mathbb{R}$
2. Symetrie:
   1. Achsensymetrie: $f(x) = f(-x)$
   2. Punktsymetrie: $f(-x) = -f(x)$
3. Achsenschnittpunkt:
   1. y-Achse: $f(0)$
   2. x-Achse/Nullstellen: $f(x) = 0$

4. Extrempunkte:
    1. Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$
    2. Hinreichende Bedingung: $f'(x) = 0 \,\& f''(x) \neq 0$
    3. Hochpunkt: $f''(x) < 0$
    4. Tiefpunkt: $f''(x) > 0$
5. Wendepunkte
    1. Notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$
    2. Hinreichende Bedingung: $f''(x) = 0 \,\& f'''(x) \neq 0$
    3. Links-Rechts-Wendepunkt: $f'''(x) < 0$
    4. Rechts-Links-Wendepunkt: $f'''(x) > 0$
6. Sattelpunkt:
    1. Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$
    2. Hinreichende Bedingung: $f''(x) = 0$

Nullstellen

PQ-Formel

$$x_{1,2} = -\frac{P}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - 4}$$

Quadratische Ergänzung

binomische Formeln

$$\begin{gathered}1.(a+b)^2 = 2a^2 + 2ab + b^2 \\ 2.(a-b)^2 = 2a^2 - 2ab + b^2 \\ 3.(a+b)^2 \cdot (a-b)^2 = a^2 - b^2\end{gathered}$$

Wendepunkte

$$\begin{gathered}\text{Notwendige Bedingung: } f''(x) = 0 \\ \text{Hinreichende Bedingung: } f'''(x) = + \neq 0 \rightarrow \text{rechts-links-Wendepunkt} \\ \text{Einsetzen in f(x): } f(x) = a\end{gathered}$$

Extrempunkte

$$\begin{gathered}\text{Notwendige Bedingung: } f'(x) = 0 \\ \text{Hinreichende Bedingung:} \\ f''(x) = - \rightarrow \textbf{ Hochpunkt}\text{, Rechstkrümmung} \\ f''(x) = + \rightarrow \textbf{ Tiefpunkt}\text{, Linkskümmung} \\ \text{Einsetzten in f(x): } f(x) = a\end{gathered}$$

Sattelpunkte

$$\text{Notwendige Bedingung: } f'(x) = 0$$

$$\text{Hinreichende Bedingung: } f''(x) = 0$$

Definitionsbereich

$$\text{z.B.: } e \in \mathbb{R}$$

Globalverlauf

$$lim\ f(x) : x \to \infty$$
$$lim\ f(x) : x \to -\infty$$

Symetrie

Achsensymetrie: $f(x) = f(-x)$
Punktsymetrie: $f(-x) = -f(x)$

Vektoren

Skalarprodukt

$$\vec{AB} * \vec{AC} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3$$

Wenn das **Skalarprodukt**:

- $= 0$ ist → Die Vektoren liegen **orthogonal** zueinander/90°
- $\neq 0$ ist → Die Vektoren liegen **nicht** orthogonal zueinander

Lage zweier Geraden zueinander bestimmen

Mittelpunkt einer Geraden bestimmen

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix} \right)$$

Längenformel eines Vektors

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Beispiel:

$$\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{4 + 4 + 1} = \sqrt{9} = 3$$

Punktprobe

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} a_1 + b_1 \cdot k = c_1 \\ a_2 + b_1 \cdot k = c_2 \\ a_3 + b_1 \cdot k = c_3 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} k = x \\ k = y \\ k = z \end{vmatrix}$$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 23 \\ -34 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} -2 + 2 \cdot k = -12 \\ 3 - 5 \cdot k = 23 \\ 1 + 7 \cdot k = -34 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} k = -5 \\ k = -4 \\ k = -5 \end{vmatrix}$$

Stochastik

Empirische Standardabweichung

$$\overline{s} = \sqrt{p_1 \cdot (x_1 - \overline{x})^2 + p_2 \cdot (x_2 - \overline{x})^2 + p_3 \cdot (x - \overline{x})^3 + \ldots}$$

Erwartungswert

$$E(x) = 1 \cdot P(X = 1) + 2 \cdot P(X = 2) + 3 \cdot P(X = 3) + \ldots$$

Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$\text{binomPDF: } P(X = Y) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

$$\text{binomCDF: } P(X \leq Y) = p(x = y) + p(x = y - 1) + \ldots + p(x = y - y)$$

Vier-Felder Tafel

	B	$\overline{B}$	
A	Wahrscheinlichkeit AB	Wahrscheinlichkeit $A\overline{B}$	Wahrscheinlichkeit A
$\overline{A}$	Wahrscheinlichkeit $\overline{A}B$	Wahrscheinlichkeit $\overline{AB}$	Wahrscheinlichkeit $\overline{A}$
	Wahrscheinlichkeit B	Wahrscheinlichkeit $\overline{B}$	1

Beispiel:

	B	$\overline{B}$	
A	0.21	0.49	0.7
$\overline{A}$	0.06	0.24	0.3
	0.27	0.73	1

Sigma-Regeln

Intervalle abschätzen für σ > 3

$$90\% \rightarrow 1.64 \cdot \sigma$$
$$95\% \rightarrow 1.96 \cdot \sigma$$
$$99\% \rightarrow 2.58 \cdot \sigma$$

Erwartungswert μ

$$\mu = n \cdot p$$

Standardabweichung

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$$

Sigma-Regeln anwenden (mit 90%)

$$\text{Gegeben: } n,\ p$$
$$\mu = n \cdot p$$
$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$$
$$\text{Wenn } \sigma{>}3 \text{ ist:}$$
$$1,64 \cdot \sigma = d$$
$$\mu - d \leq X \leq \mu + d$$
$$P(\mu - d \text{ (aufrunden)} < X \mu + d \text{ (abrunden)})$$
$$P(\mu - d \text{ (abrunden)} < X \mu + d \text{ (aufrunden)})$$
$$\text{Hinweis: Dies kann mit dem binomCDF befehl im CAS berechnet werden.}$$
$$\text{Das Ergebnis welches am nächsten über 0.9 liegt ist das bessere Ergebnis}$$

Beispiel:

$$n = 920,\ p = 58\%$$
$$\mu = 920 \cdot 0.58 = 533.6$$
$$\sigma = \sqrt{920 \cdot 0.58 \cdot 0.42} = 14.9703$$
$$1.64 \cdot 14.9703 = 24.5513$$
$$533.6 - 24.5513 \leq X \leq 533.6 + 24.5513$$
$$\rightarrow 509.0487 \leq X \leq 558.1513$$
$$P(510 \leq X \leq 558) = 0.8982$$
$$P(509 \leq X \leq 559) = 0.9114$$
$$\rightarrow P(509 \leq X \leq 559) \text{ ist das richtige Ergebnis}$$

Bearbeitung einer Textaufgabe in der Klausur

1. $f(x)$
   $f'(x)$
   $f''(x)$
   $f'''(x)$
   hinschreiben und im CAS definieren

2. Worfür steht x bzw. t
   Wofür steht f(x) bzw. A(t)
   → Was bedeutet f' bzw. $A'(x)$
3. Teilaufgaben genau lesen:
   Ist x **gegeben** oder **gesucht** ?
   Ist f(x) **gegeben** oder **gesucht** ?