Wiederholung für das Abitur im Fach Mathematik

Contents

1 Kurvendiskussion

1.1 Übersicht

1. Definitionsbereich:
2. Symetrie:
   (a) Achsensymetrie: $f(x) = f(-x)$
   (b) Punktsymetrie: $f(-x) = -f(x)$
3. Achsenschnittpunkt:
   (a) y-Achse: $f(0)$
   (b) x-Achse/Nullstellen: $f(x) = 0$
4. Extrempunkte:
   (a) Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$
   (b) Hinreichende Bedingung: $f'(x) = 0 \& f''(x) \neq 0$
   (c) Hochpunkt: $f''(x) < 0$
   (d) Tiefpunkt: $f''(x) > 0$
5. Wendepunkte:
   (a) Notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$
   (b) Hinreichende Bedingung: $f''(x) = 0 \& f'''(x) \neq 0$
   (c) Links-Rechts-Wendepunkt: $f'''(x) < 0$
   (d) Rechts-Links-Wendepunkt: $f'''(x) > 0$
6. Sattelpunkt:
   (a) Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$
   (b) Hinreichende Bedingung: $f''(x) = 0$

1.2 Nullstellen

1.2.1 PQ-Formel

$$x_{1,2} = -\frac{P}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - 4}$$

1.2.2 Quadratische Ergänzung

binomische Formeln:

1. $(a+b)^2 = 2a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a-b)^2 = 2a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a+b)^2 * (a-b)^2 = a^2 - b^2$

1.2.3 Wendepunkte

1. Notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$
2. Hinreichende Bedingung: $f'''(x) = + \neq 0 \rightarrow rechts-links-Wendepunkt$
3. Einsetzen in f(x): $f(x) = a$

2 e-Funktionen

Das gegenteil der e-Funktion ist die ln-Funktion

2.1 Produktregel

Mithilfe der Produktregel kann man e-Funktionen händisch ableiten. Dazu teilt man die Formel an den Malpunkten, sodass es immer nur zwei Teile gibt. Diese zwei Teile leitet man nun unabhängig voneinander ab und multipliziert die Ableitung von Teil 1 mit der nicht-Ableitung von Teil zwei welchen mit der Ableitung von Teil 2 und der nicht-Ableitung von Teil 1 addiert wird.

Allgemein: $f'(x) = A \cdot B = A' \cdot B + B' \cdot A$

Beispiel:
$f(x) = x^2 \cdot (x-1)$
Teil 1: $x^2 \rightarrow 2x(Ableitung)$
Teil 2: $(x-1) \rightarrow 1(Ableitung)$
$f'(x) = 2x \cdot (x-1) + 1 \cdot x^2$
$= 2x^2 - 2x + x^2$
$= 3x^2 - 2x$

3 Vektoren

3.1 Skalarprodukt

Mithilfe des Skalarprodukts kann man überprüfen ob zwei Vektoren orthogonal (d.h. in einem 90° Winkel) zueinander sind. Die allgemeine Formel lautet:

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3$$

Wenn das Skalarprodukt:

- $= 0$ ist $\rightarrow$ Die Vektoren liegen **orthogonal** zueinander/90°
- $\neq 0$ist $\rightarrow$ Die Vektoren liegen **nicht** orthogonal zueinander

3.2 Lage zweier Geraden zueinander bestimmen

3.3 Mittelpunkt einer Geraden bestimmen

$$\vec{m} = \frac{1}{2} * (\vec{b} + \vec{c}) = \frac{1}{2} * \left(\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix} \right)$$

3.4 Längenformel eines Vektors

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Beispiel:

$$\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{4 + 4 + 1} = \sqrt{9} = 3$$

3.5 Punktprobe

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + k * \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} a_1 + b_1 * k = c_1 \\ a_2 + b_1 * k = c_2 \\ a_3 + b_1 * k = c_3 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} k = x \\ k = y \\ k = z \end{vmatrix}$$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + k * \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 23 \\ -34 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} -2 + 2 * k = -12 \\ 3 - 5 * k = 23 \\ 1 + 7 * k = -34 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} k = -5 \\ k = -4 \\ k = -5 \end{vmatrix}$$

4 Stochastik

4.1 Empirische Standardabweichung

$$\overline{s} = \sqrt{p_1 \cdot (x_1 - \overline{x})^2 + p_2 \cdot (x_2 - \overline{x})^2 + p_3 \cdot (x - \overline{x})^3 + ...}$$

4.2 Erwartungswert

$$E(x) = 1 \cdot P(X = 1) + 2 \cdot P(X = 2) + 3 \cdot P(X = 3) + ...$$

4.3 Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$\text{binomPDF: } P(X = Y) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

$$\text{binomCDF: } P(X \leq Y) = p(x = y) + p(x = y - 1) + ... + p(x = y - y)$$

4.4 Vier-Felder-Tafel

	B	$\overline{B}$	
A	Wahrscheinlichkeit AB	Wahrscheinlichkeit $A\overline{B}$	Wahrscheinlichkeit A
$\overline{A}$	Wahrscheinlichkeit $\overline{A}B$	Wahrscheinlichkeit $\overline{AB}$	Wahrscheinlichkeit $\overline{A}$
	Wahrscheinlichkeit B	Wahrscheinlichkeit $\overline{B}$	1

Beispiel:

	B	$\overline{B}$	
A	0.21	0.49	0.7
$\overline{A}$	0.06	0.24	0.3
	0.27	0.73	1

4.5 Sigma-Regeln

4.5.1 Intervalle abschätzen für sigma

$$90\% \rightarrow 1.64 \cdot \sigma$$
$$95\% \rightarrow 1.96 \cdot \sigma$$
$$99\% \rightarrow 2.58 \cdot \sigma$$

4.6 Erwartungswert

$$\mu = n \cdot p$$

4.7 Standardabweichung

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$$

4.8 Sigma-Regeln andwenden für

1. Gegeben: n, p
2. $\mu = n \cdot p$
3. $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} \rightarrow$ Wenn $\sigma > 3$ ist:
   (a) $1.64 \cdot \sigma = d$
   (b) $\mu - d \leq X \leq \mu + d$
   (c) $P(\mu + d(aufrunden) < X < \mu + d(abrunden))$
   (d) $P(\mu + d(abrunden) < X < \mu + d(aufrunden))$
   (e) Hinweis: Dies kann mit dem binomCDF befehl des CAS berechnet berechnet werden.
   (f) Das Ergebnis welches am nächsten über 0.9 liegt ist das bessere Ergebnis

Beispiel:

1. Gegeben: $n = 920$, $p = 58$
2. $\mu = 920 \cdot 0.58 = 533.6$
3. $\sigma = \sqrt{920 \cdot 0.58 \cdot (0.42)} = 14.9703 \rightarrow$ Wenn σ ¿ 3 ist:
   (a) $1.64 \cdot 14.9703 = 24.5513$
   (b) $533.6 - 24.5513 \leq X \leq 533.5 + 24.5513 \rightarrow 509.0487 \leq X \leq 558.1513$
   (c) $P(510 < X < 558) = 0.8982$
   (d) $P(509 < X < 559) = 0.9114$
   (e) $\rightarrow$ Das richtige Ergebnis ist $P(509 \leq X \leq 559)$

Bearbeitung einer Textaufgabe in der Klausur

1. $f(x)$ $f'(x)$ $f''(x)$ $f'''(x)$ hinschreiben und im CAS definieren
2. Worfür steht x bzw. t, Wofür steht $f(x)$ bzw. $A(t)$ $\rightarrow$ Was bedeutet $f'(x)$ bzw. $A'(x)$
3. Teilaufgaben genau lesen: Ist x **gegeben** oder **gesucht**? Ist f(x) **gegeben** oder **gesucht**?