Wiederholung für das Abitur im Fach Mathematik

Contents

1 Kurvendiskussion

1.1 Übersicht

1. Definitionsbereich:
2. Symetrie:
   (a) Achsensymetrie: $f(x) = f(-x)$
   (b) Punktsymetrie: $f(-x) = -f(x)$
3. Achsenschnittpunkt:
   (a) y-Achse: $f(0)$
   (b) x-Achse/Nullstellen: $f(x) = 0$
4. Extrempunkte:
   (a) Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$
   (b) Hinreichende Bedingung: $f'(x) = 0 \;\& f''(x) \neq 0$
   (c) Hochpunkt: $f''(x) < 0$
   (d) Tiefpunkt: $f''(x) > 0$
5. Wendepunkte:
   (a) Notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$
   (b) Hinreichende Bedingung: $f''(x) = 0 \;\& f'''(x) \neq 0$
   (c) Links-Rechts-Wendepunkt: $f'''(x) < 0$
   (d) Rechts-Links-Wendepunkt: $f'''(x) > 0$
6. Sattelpunkt:
   (a) Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$
   (b) Hinreichende Bedingung: $f''(x) = 0$

1.2 Nullstellen

1.2.1 PQ-Formel

$$x_{1,2} = -\frac{P}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - 4}$$

1.2.2 Quadratische Ergänzung

binomische Formeln:

1. $(a+b)^2 = 2a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a-b)^2 = 2a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a+b)^2 * (a-b)^2 = a^2 - b^2$

1.2.3 Wendepunkte

1. Notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$
2. Hinreichende Bedingung: $f'''(x) = + \neq 0 \rightarrow rechts{-}links{-}Wendepunkt$
3. Einsetzen in f(x): $f(x) = a$

2 Vektoren

2.1 Skalarprodukt

Mithilfe des Skalarprodukts kann man überprüfen ob zwei Vektoren orthogonal (d.h. in einem 90° Winkel) zueinander sind. Die allgemeine Formel lautet:

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3$$

Wenn das Skalarprodukt:

- $= 0$ ist $\rightarrow$ Die Vektoren liegen **orthogonal** zueinander/90°
- $\neq 0$ist $\rightarrow$ Die Vektoren liegen **nicht** orthogonal zueinander

2.2 Lage zweier Geraden zueinander bestimmen

2.3 Mittelpunkt einer Geraden bestimmen

$$\vec{m} = \frac{1}{2} * (\vec{b} + \vec{c}) = \frac{1}{2} * \left(\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix} \right)$$

2.4 Längenformel eines Vektors

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Beispiel:

$$\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3$$

2.5 Punktprobe

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + k * \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} a_1 + b_1 * k = c_1 \\ a_2 + b_1 * k = c_2 \\ a_3 + b_1 * k = c_3 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} k = x \\ k = y \\ k = z \end{vmatrix}$$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + k * \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 23 \\ -34 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} -2 + 2 * k = -12 \\ 3 - 5 * k = 23 \\ 1 + 7 * k = -34 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} k = -5 \\ k = -4 \\ k = -5 \end{vmatrix}$$

3 Stochastik

3.1 Empirische Standardabweichung

$$\overline{s} = \sqrt{p_1 \cdot (x_1 - \overline{x})^2 + p_2 \cdot (x_2 - \overline{x})^2 + p_3 \cdot (x - \overline{x})^3 + ...}$$

3.2 Erwartungswert

$$E(x) = 1 \cdot P(X = 1) + 2 \cdot P(X = 2) + 3 \cdot P(X = 3) + ...$$

3.3 Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$\text{binomPDF: } P(X = Y) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

$$\text{binomCDF: } P(X \leq Y) = p(x = y) + p(x = y - 1) + ... + p(x = y - y)$$

3.4 Vier-Felder-Tafel

	B	$\overline{B}$	
A	Wahrscheinlichkeit AB	Wahrscheinlichkeit $A\overline{B}$	Wahrscheinlichkeit A
$\overline{A}$	Wahrscheinlichkeit $\overline{A}B$	Wahrscheinlichkeit $\overline{AB}$	Wahrscheinlichkeit $\overline{A}$
	Wahrscheinlichkeit B	Wahrscheinlichkeit $\overline{B}$	1

Beispiel:

	B	$\overline{B}$	
A	0.21	0.49	0.7
$\overline{A}$	0.06	0.24	0.3
	0.27	0.73	1

3.5 Sigma-Regeln

3.5.1 Intervalle abschätzen für sigma

$$90\% \rightarrow 1.64 \cdot \sigma$$
$$95\% \rightarrow 1.96 \cdot \sigma$$
$$99\% \rightarrow 2.58 \cdot \sigma$$

3.6 Erwartungswert

$$\mu = n \cdot p$$

3.7 Standardabweichung

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$$

3.8 Sigma-Regeln andwenden für

1. Gegeben: n, p
2. $\mu = n \cdot p$
3. $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} \rightarrow$ Wenn $\sigma > 3$ ist:
   (a) $1.64 \cdot \sigma = d$
   (b) $\mu - d \leq X \leq \mu + d$
   (c) $P(\mu + d(aufrunden) < X < \mu + d(abrunden))$

(d) $P(\mu + d(abrunden) < X < \mu + d(aufrunden))$

(e) Hinweis: Dies kann mit dem binomCDF befehl des CAS berechnet berechnet werden.

(f) Das Ergebnis welches am nächsten über 0.9 liegt ist das bessere Ergebnis

Beispiel:

1. Gegeben: $n = 920$, $p = 58$
2. $\mu = 920 \cdot 0.58 = 533.6$
3. $\sigma = \sqrt{920 \cdot 0.58 \cdot (0.42)} = 14.9703 \rightarrow$ Wenn σ ¿ 3 ist:
   (a) $1.64 \cdot 14.9703 = 24.5513$
   (b) $533.6 - 24.5513 \leq X \leq 533.5 + 24.5513 \rightarrow 509.0487 \leq X \leq 558.1513$
   (c) $P(510 < X < 558) = 0.8982$
   (d) $P(509 < X < 559) = 0.9114$
   (e) $\rightarrow$ Das richtige Ergebnis ist $P(509 \leq X \leq 559)$

Bearbeitung einer Textaufgabe in der Klausur

1. $f(x)$ $f'(x)$ $f''(x)$ $f'''(x)$ hinschreiben und im CAS definieren
2. Worfür steht x bzw. t, Wofür steht $f(x)$ bzw. $A(t) \rightarrow$ Was bedeutet $f'(x)$ bzw. $A'(x)$
3. Teilaufgaben genau lesen: Ist x **gegeben** oder **gesucht**? Ist f(x) **gegeben** oder **gesucht**?