Hausarbeit im Rahmen des Studiums

Data Science - Master of Science (M.Sc.)

Ermittlung des Volumens eines Rotationsellipsoids mittels numerischer Integration

Alwine Schultze

6. Mai 2022

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

1 Einleitung

1.1 Fragestellung

Der Bereich der numerischen Integration gehört laut Thuselt und Gennrich (2013) zu den mathematischen Techniken, die zu beherrschen unumgänglich ist. Ein Integral wird mathematisch wie folgt dargestellt:

$$\int f(x)\Delta x \tag{1}$$

Bei der Berechnung eines Integrals wird die Fläche zwischen der Funktionskurve $f(x)$ und der x-Achse zwischen den Stützstellen a und b ermittelt (vgl. Thuselt und Gennrich 2013, S. 323). Im Laufe der Zeit wurden bereits Methoden zur Lösung von Integrationsproblemen erarbeitet und in der Literatur beschrieben. Die Aufgabe, die es in der zugrunde liegenden Arbeit zu lösen gilt, stellt die Bestimmung des Volumens eines gegebenen Rotationsellipsoids unter Verwendung zweier Methoden der numerischen Integration dar. In Abbildung 1 wird das Ellipsoid, zu dem das Volumen berechnet werden soll, mit den vorgegebenen Werten für $a = 3$ und $b = 5$ dargestellt.

```
ellipsoid(0,0,0,3,5,5)
```

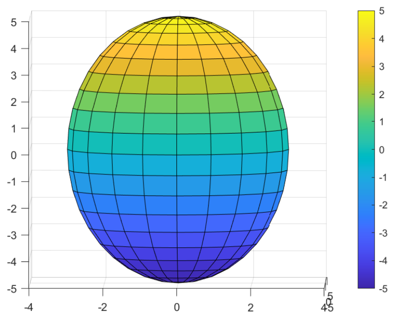

Abbildung 1: Darstellung des gegebenen Ellipsoids

Zudem soll die Volumenbestimmung ebenso für ein unvollendetes Ellipsoid durchgeführt werden, z.B. wenn das Elliposid auf Höhe $h = 3$ abgeschnitten wird.

1.2 Methodik und Zielhierarchie

Zur näherungsweisen Bestimmung von Flächeninhalten zwischen Funktionskurve und Achse werden zwei Methoden der numerischen Integration für die Berechnung herangezogen. Zum einen die *Trapezregel* und zum anderen die *Simpson'sche Regel*. Zunächst wird auf die Grundlagen der gewählten Methoden näher eingegangen. Zur besseren Verständlichkeit der verwendeten mathematischen Formeln zur Berechnung der Flächeninhalte bzw. des Volumens wird zudem einzeln auf die verwendeten mathematischen Kenngrößen eingegangen. Im Hauptteil wird die eigentliche Problembearbeitung durchgeführt. Anschließend erfolgt eine Gegenüberstellung der Ergebnisse und der Berechnungsfehler der beiden angewandten Methoden, abhängig von den zugrunde gelegten Parameter für die Berechnung. Ziel der hier vorliegenden Ausarbeitung ist es, ein grundlegendes Verständnis der zwei Integrationsverfahren zu erhalten und unter Zuhilfenahme dieser das Volumen eines Rotationsellipsoids zu bestimmen.

2 Grundlagen

2.1 Mathematische Kenngrößen

Bevor ausführlicher auf die *Trapezregel* und die *Simpson'schen Regel* eingegangen wird, werden im Folgenden vorab diverse Begrifflichkeiten, die im Rahmen dieser Ausarbeitung Verwendung finden, erläutert.

- $\int$ ist das mathematische Symbol für Integral.
- V stellt den metrischen Wert für das Volumen dar. $V(h)$ beschreibt das Volumen in Abhängigkeit von h.
- π ist die mathematische Konstante, die das Verhältnis zwischen Umfang und Durchmesser eines Kreises beschreibt.
- $f(x)$ bzw. $\bar{f}(y)$ stellt den Funktionswert für einen bestimmten x bzw. y Wert dar.
- Δx bzw. Δy geben die Differenz zweier x bzw. y Werte an. Diese werden in Formeln auch als dx bzw. dy bezeichnet.
- a und b sind Stützstellen, zwischen diesen wird mittels Integration der Flächenwert unter der Kurve berechnet.
- n gibt die Anzahl der Flächen, in die die zu integrierende Fläche zwischen den Stützstellen unterteilen wird, an.
- $n+1$ gibt die Anzahl der Stützstellen an.

2.2 Trapezregel

Nach Şanal (2020) ist die *Trapezregel* eine einfache Methode der numerischen Integration. Dabei wird die Fläche zwischen dem Funktionswert und der x- bzw. y-Ache näherungsweise berechnet, in dem die relevante Fläche mittels eines Trapezes näherungsweise abgebildet wird. Zur genaueren Berechnung kann der Integrationsbereich in n Teilintervalle aufteilt werden, daraus ergeben sich für die Berechnung $n+1$ Stützstellen (vgl. Şanal 2020, S. 179). Je feiner die Aufteilung der Fläche in Trapeze ist, desto geringer ist der Berechnungsfehler im Ergebnis. Abbildung 2 stellt die Anpassung der Fläche an die Kurve mittels der *Trapezregel* dar.

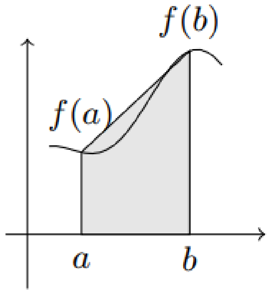

Abbildung 2: Trapezregel (vgl. Teschl und Teschl 2014, S. 128)

Die Approximation für das Integral unter der Kurve $f(x)$ wird mit der Formel (2) beschrieben (vgl. Thuselt und Gennrich 2013, S. 328).

$$\int_a^b f(x)\Delta x = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{2}$$

Für die Kurvenanpassung wurde beim Trapez eine Gerade gezogen, es handelt sich somit um ein Polynom erster Ordnung (vgl. Thuselt und Gennrich 2013, S. 329). Mit dieser Vorgehensweise werden Polynome bis zum Grad 1 exakt approximiert, der Exaktheitsgrad der *Trapezregel* liegt bei 1 (Munz und Westermann 2019, S. 28). Eine etwas andere Annäherung an die Kurve wird bei der *Simpson'schen Regel* vorgenommen, wie wird im nächsten Kapitel erläutert.

2.3 Simpson'sche Regel

Bei der *Simpson'schen Regel*, auch *Kepler'sche Fassregel* genannt erfolgt die Anpassung der Fläche unter der Kurve mit einem Polynom zweiter Ordnung (vgl. Thuselt und Gennrich 2013, S. 330). Polynome werden bis zum Grad 3 exakt integriert, der Exaktheitsgrad liegt somit bei 3 (Munz und Westermann 2019, S. 27). Bei dieser Regel wird mit einer weiteren Stützstelle gerechnet, diese liegt in der Mitte zwischen den Stützstellen a und b und wird mittels der Formel $\frac{a+b}{2}$ ermittelt. Abbildung 3 veranschaulicht die näherungsweise Anpassung an die Funktionskurve mittels der *Simpson'schen Regel*.

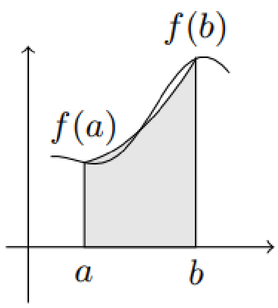

Abbildung 3: Simpson'sche Regel (vgl. Teschl und Teschl 2014, S. 128)

Der Stützstelle zwischen a und b wird mehr Gewicht zugesprochen, da diese mehr über den Kurvenverlauf aussagt als die anderen beiden Stützstellen (vgl. Thuselt und Gennrich 2013, S. 330). Die Formel (3) für die Berechnung des Integrals nach der *Simpson'schen Regel* lautet wie folgt:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{(b-a)}{6}[f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)] \tag{3}$$

Vergleicht man die Abbildungen der beiden dargestellten Lösungsansätze der Integralrechnung, so erkennt man, dass die *Simpson'sche Regel* schneller konvergiert und somit schneller genauere Ergebnisse vorweist als die *Trapezregel*.
In diesem Kapitel wurden die Grundlagen der beiden Integrationsregeln und deren mathematischer Kenngrößen erläutert. Die Basis für die Lösung der Kernfrage dieser Arbeit wurde dadurch geschaffen. Im nächsten Kapitel liegt der Fokus auf der eigentlichen Berechnung des Volumens eines Rotationsellipsoids unter Zuhilfenahme der vorgestellten Regeln.

3 Problembearbeitung

3.1 Ermittlung des Funktionsterms

Zur Berechnung des Volumens eines Rotationsellipsoids wird zunächst die Ellipsengleichung benötigt, mit dieser dann die Fläche, also der Querschnitt einer Ellipse, berechnet werden kann. Der halbierte Querschnitt der Ellipse stellt die Funktionskurve dar, die bei der Rotation um die y-Achse den Körper des Ellipsoids bildet und dessen Volumen es zu berechnen gilt. Die Formel (4) für die Ellipsengleichung findet sich in zahlreicher Literatur wieder (vgl. Şanal 2020, S. 68).

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{4}$$

Nachdem der Körper auf der y-Achse rotiert, muss die Fläche zwischen den Grenzen zweier y-Werte berechnet werden, die Gleichung muss also nach x aufgelöst werden, sie lautet:

$$\bar{f}(y) = +-\sqrt{-\frac{9y^2}{25} + 9} \tag{5}$$

Abbildung 4 stellt den Funktionsterm grafisch dar, aus dieser können vier Wertepaare für x- und y-Werte abgeleitet werden: $y = [5, 0, -5, 0]$ und $x = [0, 3, 0, -3]$. Zur Kontrolle der Gleichung können die y-Werte eingesetzt und damit die korrespondierenden x-Werte ermittelt werden. Grafisch lässt sich das in MATLAB mit folgenden Aufrufen darstellen:

```
y = [-5:0.1:5];
x_plus = sqrt((-9*y.^2)/25+9);
```

```
x_minus = -sqrt((-9*y.^2)/25+9);
grid on
plot(x_plus,y)
hold on
plot(x_minus,y)
```

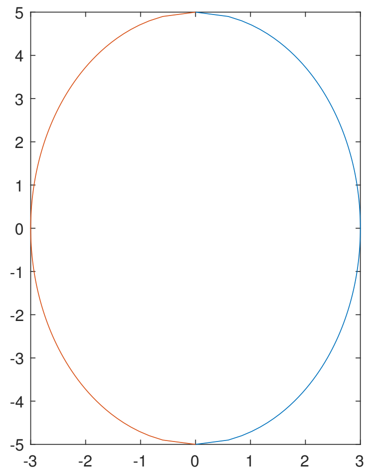

Abbildung 4: Ellipsengleichung

Berechnet werden soll das Volumen des durch die Rotation um die y-Achse entstehenden Körpers. Die Formel (6) gibt die Berechnung des Volumens mittels der numerischen Integration für einen Funktionsterm in Abhängigkeit von y an.

$$V = \pi \int (\bar{f}(y))^2 \Delta y \tag{6}$$

In den nächsten Abschnitten wird die Berechnung der Volumina mit den Integrationsverfahren *Trapezregel* und *Simpson'sche Regel* durchgeführt. Zur besseren Vergleichbarkeit, auch im Hinblick auf die Bewertung der beiden Verfahren anhand des relativen Fehlers, wird vorab das exakte Volumen berechnet.

3.2 Berechnung nach der Volumenformel

Die allgemeine Berechnungsformel für das Volumen eines Rotationsellipsoids wird in Formel (7) beschrieben (vgl. Şanal 2020, S. 238).

$$V = \frac{4\pi}{3} a^2 b \tag{7}$$

Setzt man die vorgegebenen Werte für $a = 3$ und $b = 5$ ein, so ergibt sich ein Volumen von 188,4955 für den Rotationskörper. Der exakte Volumenwert wird nachkommend als Vergleichswert für die Berechnung des relativen Fehlers (siehe f in Formel (8)) herangezogen.

3.3 Berechnung nach der *Trapezregel*

Die Funktion zur Berechnung des Volumens des Rotationsellipsoids, unter Verwendung der *Trapezregel*, kann zum Beispiel mit der Funktion *v_trapezregel* (vgl. A.1 im Anhang) in MATLAB implementiert werden. Die Berechnung erfolgt in Abhängigkeit zur Funktionsgleichung, der äußeren Stützstellen und der Gesamtanzahl der Stützstellen. Nach Festlegung der Funktionsgleichung f (siehe Formel(5)) wird die Funktion *v_trapezregel* mit den entsprechenden Parametern *Funktion, untere Stützstelle, obere Stützstelle* und *Anzahl Stützstellen* aufgerufen, das Ergebnis für insgesamt zehn Stützstellen ist 179,0804.

```
f = @(y) sqrt((-9*y.^2)/25+9);
v_trapezregel(f,-5,5,10)
ans =
  179.0804
```

In Tabelle 1 werden weitere berechnete Volumina des Rotationsellipsoids, unter Verwendung der Funktion *v_trapezregel*, dargestellt. Die Berechnung erfolgt jeweils mit einer variierenden Anzahl an Stützstellen $n+1$.

Tabelle 1: Ergebnisse nach der *Trapezregel*

Stützstellen $n+1$	untere Stützstelle a	obere Stützstelle b	Volumen V	relativer Fehler E_{rel}
2	-5	5	0	100%
10	-5	5	179,0804	4,9949%
50	-5	5	188,0720	0,2247%
100	-5	5	188,3815	0,0605%
1000	-5	5	188,4941	0,0007%

Je mehr Stützstellen gewählt werden, desto näher liegt das Ergebnis an dem exakten Volumenwert (siehe Kapitel 3.2), desto geringer ist auch der relative Fehler, der mit der Formel (8) ermittelt werden kann (vgl. Şanal 2020, S. 152).

$$E_{rel} = \left|\frac{f - f_n}{f}\right| \tag{8}$$

3.4 Berechnung nach der *Simpson'schen Regel*

Die Funktion zur Berechnung des Volumens des Ellipsoids, unter Verwendung der *Simpson'schen Regel*, kann in MATLAB zum Beispiel mit der Funktion *v_simpsonsche.m* (vgl. A.2 im Anhang) implementiert werden. Die Berechnung erfolgt nach dem gleichen Prinzip wie bereits im vorhergehenden Kapitel beschrieben, in Abhängigkeit zur Funktionsgleichung, der äußeren Stützstellen und der Gesamtanzahl der Stützstellen. Die Funktion *v_simpsonsche* kann genauso verwendet werden, wie die Funktion *v_trapezregel*, lediglich der Name der Funktion unterscheidet sich. In Tabelle 2 werden für die bessere Vergleichbarkeit der beiden Methoden ebenfalls die gleichen Parameter für die Volumenberechnung angenommen.

Tabelle 2: Ergebnisse nach der *Simpson'schen Regel*

Stützstellen $n+1$	untere Stützstelle a	obere Stützstelle b	Volumen V	relativer Fehler E_{rel}
2	-5	5	125,6637	33.3333%
10	-5	5	185,8387	1,4095%
50	-5	5	188,3713	0,0659%
100	-5	5	188,4617	0,0179%
1000	-5	5	188,4951	0,0002%

Auch bei der Verwendung der *Simpson'schen Regel* sieht man sehr deutlich, dass mit der Zunahme an Stützstellen das Ergebnis genauer wird und der relative Fehler immer kleiner wird. Vergleicht man die beiden verwendeten Verfahren miteinander, so stellt man schnell fest, dass die *Simpson'sche Regel* deutlich schneller bessere Ergebnisse erzielt. Betrachtet man das Ergebnis bei $n+1 = 100$ so sieht man, dass das Ergebnis um mehr als das dreifache genauer ist als das der *Trapezregel*.
Im nächsten Kapitel werden die gewählten Methoden für eine Volumenberechnung in Abhängigkeit zur Höhe h des Volumenkörpers herangezogen und bewertet.

3.5 Volumenberechnung in Abhängigkeit von h

Das Volumen kann mit den MATLAB Funktionen auch für ein unvollendetes Ellipsoid berechnet werden. Abbildung 5 zeigt ein Beispiel für den Bereich der Funktion, der auf Höhe $h = 3$ abgeschnitten wurde und damit unvollständig um die Y-Ache rotieren soll.

```
y = [-5:0.1:5];
x_plus = sqrt((-9*y.^2)/25+9);
x_minus = -sqrt((-9*y.^2)/25+9);
grid on
plot(x_plus,y)
hold on
plot(x_minus,y)
plot([-3 3], [3 3])
```

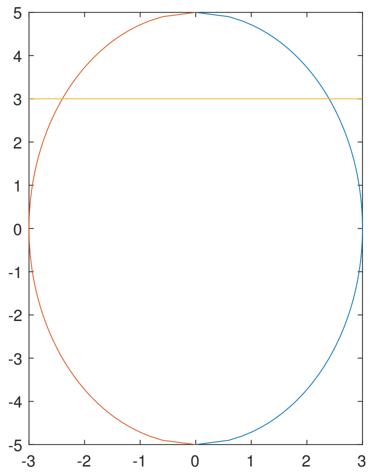

Abbildung 5: Ellipse in Abhängigkeit von h

Der Bereich oberhalb von $y = 3$ wird somit nicht mehr bei der Volumenberechnung berücksichtigt. Die Tabelle 3 führt die Ergebnisse die Volumenberechnung mittels *Trapezregel*, *Simpson'schen Regel* und unter Verwendung der Standardfunktionalität *integral* von MATLAB (Mathworks 2022) in Abhängigkeit zum h auf.

Tabelle 3: Volumenberechnung in Abhängigkeit von der Höhe h

			integral	*Trapezregel*		*Simpsonsche Regel*	
$n+1$	a	h	$V(h)$	$V(h)$	E_{rel}	$V(h)$	E_{rel}
100	-5	5	188,4704	188,3814	0,0472%	188,4617	0,0046%
100	-5	4	183,2061	183,1611	0,0245%	183,2026	0,0019%
100	-5	3	168,8833	168,8499	0,0198%	168,8806	0,0016%
100	-5	2	147,7739	147,7492	0,0167%	147,7717	0,0014%
100	-5	1	122,1401	122,1225	0,0144%	122,1386	0,0013%
100	-5	0	94,2442	94,2322	0,0127%	94,2431	0,0011%
100	-5	-1	66,3481	66,3406	0,0113%	66,3474	0,0010%
100	-5	-2	40,7137	40,7095	0,0102%	40,7132	0,0010%
100	-5	-3	19,6029	19,6011	0,0093%	19,6027	0,0009%
100	-5	-4	5,2777	5,2773	0,0085%	5,2777	0,0008%

Für die Ermittlung des relativen Fehlers wurde angenommen, dass die Berechnung mit der MATLAB-Funktion *integral* einen annähernd realen Wert liefert. Tatsächlich liegt der relative Fehler bei Verwendung der Funktion *v_integral* bei rund 0.0001%, dies ist auf etwaige Rundungsfehler bei der Berechnung des Volumens mittels der Formel $r^2 * \pi$ zurück zu führen. Eine beispielhafte Implementierung für die Funktion *v_integral* für kann dem Anhang A.3 entnommen werden.

Für die Anzahl der Stützstellen wurde der Wert 100 festgelegt, dieser hat noch eine gute Aussagekraft in Bezug auf die Genauigkeit der Berechnung des Volumens mit den beiden Integrationsmethoden (vgl. Tabellen 1 und 2). Die untere Stützstelle a bleibt unverändert, lediglich die obere Stützstelle b wird in Abhängigkeit von Höhe h neu gesetzt. Aus der Tabelle lässt sich erkennen, dass das Ergebnis der Berechnungen von den beiden Integrationsmethoden mit geringerer Höhe genauer wird, d.h. der relative Fehler wird kleiner. Das ist darauf zurück zu führen, dass die Fläche, die es in jedem Iterationsschritt zu integrieren gilt, immer kleiner wird.

4 Zusammenfassung

Ziel der vorliegenden Arbeit war es, das Volumen eines Rotationsellipsoids mittels der numerischen Integration zu berechnen. Hierfür wurden zwei Integrationsmethoden gegenüberstellt, die *Trapezregel* und die *Simposon'sche Regel*. Dabei stellte sich heraus, dass die *Simposon'sche Regel* schneller bessere Ergebnisse erzielt als die *Trapezregel*. Denn die Verwendung einer dritten Stützstelle mit einer höheren Gewichtung in der Berechnung des Integrals erreicht eine bessere Annäherung an die Funktionskurve. Dadurch gelangt dieses Integrationsverfahren bereits mit lediglich zwei Stützstellen zu einem auswertbaren Ergebnis, ganz im Gegensatz zu der *Trapezregel*. Mit der Zunahme an Stützstellen bzw. kleinerer werdender Integrationsflächen kann zudem beobachtet werden, dass die Ergebnisse, die mit der *Simpson'schen Regel* ermittelt wurden, bis zu zwölffach genauer sind als die der *Trapezregel*. Abschließend kann festgestellt werden, dass beide Integrationsverfahren mit nur ausreichend vielen Iterationsstufen annähernd an das reale Ergebnis kommen.

A Anhang

A.1 MATLAB Funktion *v_trapezregel.m*

```
function vol = v_trapezregel(f,a,b,n_1)
%***************************************************************
% Funktion v_trapezregel.m
% Volumenbestimmung mittels der Trapezregel zur Integration
% Input:
% f - Funktion, die integriert werden soll
% a - untere Grenze des Integrals
% b - obere v
% n_1 - Anzahl der Stützstellen
% Output:
% vol - Volumen der integrierten Rotationsfläche
%***************************************************************
    n = n_1-1; % Anzahl Flächen
    h = (b-a)/n; % Setze Intervallbreite jeder Integrationsfläche
    flaeche = 0; % Setze Fläche zu Beginn auf 0
    for k = 1:n % Für jede Fläche...
        b = a + h; % ... wird die Stützstelle b ermittelt,
        flaeche = flaeche + ((feval(f,a) + feval(f,b))/2)^2;
            % ... die Trapezregel angewandt, die Fläche quadriert
        a = b; % ... und für den nächsten Iterationsschritt a=b gesetzt.
    end
    vol = flaeche * h * pi; % Berechne Volumen setze den Rückgabewert.
end
```

A.2 MATLAB Funktion *simpsonsche.m*

```
ffunction vol = v_simpsonsche(f,a,b,n_1)
%*****************************************************************
% Funktion v_simpsonsche.m
% Volumenbestimmung mittels der Simpson'schen Regel zur Integration
% Input:
% f - Funktion, die integriert werden soll
% a - untere Grenze des Integrals
% b - obere Grenze des Integrals
% n_1 - Anzahl der Stützstellen
% Output:
% vol - Volumen der integrierten Rotationsfläche
%*****************************************************************
    n = n_1-1; % Anzahl Flächen
    h = (b-a)/n; % Setze Intervallbreite jeder Integrationsfläche
    flaeche = 0; % Setze Fläche zu Beginn auf 0
    for k = 1:n % Für jede Fläche...
        b = a + h; % ... wird die Stützstellen b
        d = (a+b)/2; % ... und d ermittelt,
        flaeche = flaeche + (1/6 * (feval(f,a) + 4*feval(f,d) + feval(f,b)))^2;
            % ... die Simpson'sche Regel angewandt, die Fläche quadriert.
        a = b; % ... und den nächsten Iterationsschritt a=b gesetzt.
    end
    vol = flaeche * h * pi; % Berechne Volumen setze den Rückgabewert.
end
```

A.3 MATLAB Funktion *v_integral.m*

```
function vol = v_integral(f,a,b,n_1)
%******************************************************************
% Funktion v_simpsonsche.m
% Volumenbestimmung mittels der Integrationsregel in MATLAB
% Input:
% f - Funktion, die integriert werden soll
% a - untere Grenze des Integrals
% b - obere Grenze des Integrals
% n_1 - Anzahl der Stützstellen
% Output:
% vol - Volumen der integrierten Rotationsfläche
%******************************************************************
    n = n_1-1; % Anzahl Flächen
    h = (b-a)/n; % Setze Intervallbreite jeder Integrationsfläche
    flaeche = 0; % Setze Fläche zu Beginn auf 0
    for k = 1:n % Für jede Fläche...
        b = a + h; % ... wird die Stützstelle b ermittelt
        flaeche = flaeche + (integral(f,a,b)/h)^2;
            % ... die Integralfunktion angewandt, die Fläche quadriert
        a = b; % ... und für den nächsten Iterationsschritt a=b gesetzt.
    end
    vol = flaeche * h * pi; % Berechne Volumen setze den Rückgabewert.
end
```

Literaturverzeichnis

Şanal, Ziya (2020). *Mathematik für Ingenieure*. 4., überarbeitete und aktualisierte Aufage. Springer Vieweg. ISBN: 978-3-658-31732-4.

Mathworks (2022). *integral - Numerical integration*. EN. MATLAB. URL: `https://de.mathworks.com/help/matlab/ref/integral.html`.

Munz, Claus-Dieter und Thomas Westermann (2019). *Numerische Behandlunggewöhnlicher und partiellerDifferenzialgleichungen*. 4., verbesserte und überarbeitete Auflage. Springer Vieweg. ISBN: 978-3-662-55885-0.

Teschl, Gerald und Susanne Teschl (2014). *Mathematik für Informatiker*. 3., überarbeitete Auflage. Springer Vieweg. ISBN: 978-3-642-54273-2.

Thuselt, Frank und Felix Paul Gennrich (2013). *Praktische Mathematik mit MATLAB, Scilab und Octave*. Springer Spektrum. ISBN: 978-3-642-25824-4.