IFOSUP
Institut de Formation Supérieure
Ville de Wavre

Mathématiques

appliquées à l’informatique

G. Barmarin

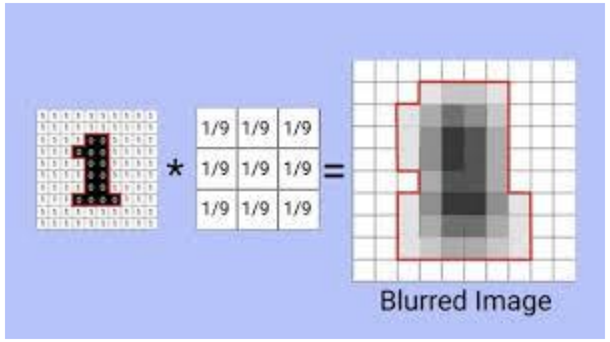
2023-2024

IFOSUP
Institut de Formation Supérieure
Ville de Wavre

MATHEMATIQUES APPLIQUEES A L'INFORMATIQUE

Calcul Matriciel Cours théorie 3

Gérard Barmarin



2023-2024

Le déterminant d’une matrice

Le déterminant d’une matrice carrée A est une valeur calculée à partir de ses éléments et que l’on va associer à cette matrice et noter det(A) ou |A|.

Déterminant d’une matrice 2x2

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

Le déterminant de A sera par définition donné par l'expression analytique:

Det (A) = a d − b c

Exemple de calcul de déterminant :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et Det (A) = 1x4 – 2x3 = 4 – 6 = -2

$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et Det (B) = 4x2 – 0x0 = 8 – 0 = 8

Le déterminant d’une matrice n’est donc pas une matrice mais un scalaire (une valeur).

Déterminant d'une matrice 3x3

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{pmatrix}$

(que l'on peut voir comme trois vecteurs colonnes correspondant aux coordonnées cartésiennes de trois vecteurs dans l'espace euclidien)
Le déterminant de cette matrice sera donné par l'expression analytique :

$$\begin{aligned} \det(X, X', X'') &= \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} x' & x'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} \\ &= x(y'z'' - y''z') - y(x'z'' - x''z') + z(x'y'' - x''y') \\ &= xy'z'' + x'y''z + x''yz' - xy''z' - x'yz'' - x''y'z. \end{aligned}$$

Ce déterminant porte encore le nom de **produit mixte en dimension 3** ;

Un procédé visuel pour retrouver cette formule est connu sous le nom de règle de Sarrus.

La règle de Sarrus consiste à écrire les trois colonnes de la matrice et à répéter, dans l'ordre, les deux premières lignes en dessous de la matrice. Il suffit alors d'effectuer les produits des coefficients de chaque diagonale comportant 3 éléments et d'en faire la somme si la diagonale est descendante ou la différence si la diagonale est ascendante.

$$\begin{array}{ccc} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \\ \hline x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{ccc} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \\ \hline x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \end{array}$$

affectés d'un signe positif   affectés d'un signe négatif

On retrouve bien :

$$\mathrm{Det}(X, X', X'') = x.y'.z'' + y.z'.x'' + z.x'.y'' - z.y'.x'' - x.z'.y'' - y.x'.z''$$

Généralisation du calcul du déterminant

Remarquons que le déterminant d'une matrice 3x3 peut également s'écrire sous la forme :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Ou encore :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{33}a_{21}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) \\ &= (-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Le déterminant 3×3 peut donc se ramener au calcul de plusieurs déterminants 2×2 combinés de façon adéquate.

Voici les neuf matrices 2 × 2 associées à une matrice 3 × 3 :

$$M_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad M_{12} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$M_{13} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}, \quad M_{21} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$M_{22} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad M_{23} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

$$M_{31} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, \quad M_{32} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$$M_{33} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Nous allons généraliser cette méthode pour une matrice n x n

Définition 1.1. *Soit* $M = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in M_n(\mathbb{R})$ *une matrice carrée de taille* $n \geqslant 1$*. On définit son* ***déterminant****, noté* $\det(M)$*, comme suit. Si* $n = 1$*, c'est-à-dire si* $M = (a_{11})$*, on pose* $\det(M) = a_{11}$ *; si* $n > 1$*, alors on pose :*

$$\begin{aligned} \det(M) &= a_{11}\det(M_{11}) - a_{12}\det(M_{12}) + \cdots + (-1)^n a_{1\,n-1}\det(M_{1\,n-1}) + (-1)^{n+1}a_{1\,n}\det(M_{1\,n}) \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j}\det(M_{1j}) \end{aligned}$$

(les matrices M_{1j} *sont carrées de taille* $(n-1)$*, d'où le caractère récursif de la définition).*

Proposition 2.2. *Soit* $M = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in M_n(\mathbb{R})$ *une matrice carrée de taille* $n \geqslant 2$. *Pour tout* $1 \leqslant i \leqslant n$, *on a :*

$$\begin{aligned} \det(M) &= (-1)^{i+1} a_{i1} \det(M_{i1}) + (-1)^{i+2} a_{i2} \det(M_{i2}) + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} \det(M_{in}) \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(M_{ij}). \end{aligned} \tag{$\heartsuit$}$$

De même, pour tout $1 \leqslant j \leqslant n$, *on a :*

$$\begin{aligned} \det(M) &= (-1)^{1+j} a_{1j} \det(M_{1j}) + (-1)^{2+j} a_{2j} \det(M_{2j}) + \cdots + (-1)^{n+j} a_{nj} \det(M_{nj}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(M_{ij}). \end{aligned} \tag{$\diamondsuit$}$$

L'opération qui consiste à décomposer le déterminant selon la première proposition s'appelle le développement du déterminant selon la i-ème ligne.

L'opération qui consiste à décomposer le déterminant comme dans la seconde s'appelle le développement du déterminant selon la j-ème colonne.

Évidemment, développer un déterminant selon une ligne ou une colonne est d'autant plus intéressant du point de vue des calculs que cette ligne ou colonne contient des coefficients nuls.

En effet, chaque coefficient nul apporte une contribution nulle à la somme, ce qui diminue le nombre de déterminants de taille inférieure à calculer.

Le cas le plus favorable est celui où tous les coefficients d'une ligne ou colonne sont nuls sauf un.

(s'ils le sont tous, le déterminant est nul et il n'y a plus aucun calcul à faire).

Note :
« Pour les déterminants, tout ce qui est vrai pour les lignes l'est aussi pour les colonnes. »

Propriétés des déterminant

1. si l'on permute deux lignes ou deux colonnes, le déterminant change de signe mais pas de valeur ;

2. si deux lignes ou deux colonnes sont identiques, le déterminant est nul ;

3. on peut ajouter à une colonne (ou une ligne) un multiple d'une autre colonne (ou d'une autre ligne) sans changer la valeur du déterminant ;

4. si l'on multiplie tous les termes d'une même ligne ou d'une même colonne par un réel k, le déterminant est multiplié par k ;

5. en conséquence, si une ligne ou une colonne est nulle, le déterminant est nul.

6. Le déterminant du produit de deux matrices est égal au produit des déterminants des deux matrices :
$\det(AB) = \det(A) \det(B)$.
(noter que le premier produit est un produit de matrices tandis que le second est un produit de scalaires)

7. Le déterminant d'une matrice est égal à celui de sa transposée :
$\det(A) = \det(A^T)$

8 Le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure ou inférieure est égal au produit de ses coefficients diagonaux uniquement

$$\det \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ A_{21} & A_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mm} \end{pmatrix} = A_{11} \cdot A_{22} \cdots A_{mm}.$$

En particulier, on a $\det(I_m) = 1$.

et

$$\det \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ 0 & A_{22} & & A_{2m} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & A_{mm} \end{pmatrix} = A_{11} \cdot A_{22} \cdots A_{mm}.$$

9 Le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs est le produit des déterminants des blocs diagonaux :

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det A \det C$$

$$A \in M_p, B \in M_{p,n-p}, C \in M_{n-p}, 0 \in M_{n-p,p}.$$

Au vu de ces propriétés, la stratégie pour calculer efficacement un déterminant est donc la suivante. On choisit une ligne (ou une colonne) ; grâce à la proposition 3, on essaye de faire apparaître le plus de zéros possibles sur cette ligne (ou colonne) en lui ajoutant une combinaison linéaire des autres lignes (ou colonnes) ; ensuite, on développe selon cette ligne (ou colonne) ; puis on recommence avec les déterminants de taille inférieure qui sont apparus dans le développement.

Exemple :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -6 \\ 7 & -6 & -12 \end{vmatrix} \qquad C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1,\ C_3 \leftarrow C_3 - 3C_1$$

$$= \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -6 & -12 \end{vmatrix} \qquad \text{développement selon la 1-ère ligne}$$

$$= \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} \qquad C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1$$

$$= 0 \qquad \text{une colonne nulle.}$$

Exercice:

Calculez le déterminant des matrices suivantes:

$$\begin{matrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 6 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Exercice:

Calculez le déterminant des matrices suivantes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 1$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} \times 1 \times (3-1) = -2$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6 \times 2 \times 1 = 12$$

Calcul du déterminant par la Méthode du pivot de Gauss-Jordan

Calculer le déterminant par la méthode précédente est compliqué, surtout à automatiser. Aussi a-t-on cherché d’autres méthodes plus faciles à programmer dont la méthode du pivot de Gauss-Jordan.

Cette méthode consiste à remplacer la matrice par une matrice triangulaire en utilisant seulement des permutations de lignes ou colonnes et des ajouts à une ligne d'un multiple d'une autre ligne de manière à faire apparaitre un maximum de zéros.

Rappelons que ceci est possible grâce à la propriété n°1, n°3 et n°7 (voir page 32) :

1: si l'on permute deux lignes ou deux colonnes, le déterminant change de signe mais pas de valeur ;

3: on peut ajouter à une colonne (ou une ligne) un multiple d'une autre colonne (ou d'une autre ligne) sans changer la valeur du déterminant ;

7: Le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure ou inférieure est égal au produit de ses coefficients diagonaux uniquement

Calcul du déterminant par la Méthode du pivot de Gauss-Jordan

Le principe est le suivant :

• on choisit dans la matrice un terme non nul , en général le premier terme en haut à gauche soit a_{11}, que l'on appelle le pivot ;

• si le terme choisi n'est pas a_{11} on peut, en permutant les lignes 1 et i et les colonnes 1 et j, le mettre à la bonne position. On obtient alors une matrice A' telle que $\det(A) = (-1)^{i+j} \det(A')$;

• on élimine tous les termes situés sous le pivot a_{11} en ajoutant à la ligne k la ligne 1 multipliée par $-ak1/a_{11}$ Cette opération ne change pas la valeur du déterminant ;

• on recommence ensuite le même processus dans la sous-matrice privée de sa première ligne et de sa première colonne ;

• on obtient alors à la dernière étape une matrice triangulaire dont le déterminant est égal, au signe près, au déterminant de la matrice de départ.

• Le déterminant de cette matrice triangulaire est simplement égal au produit des éléments de sa diagonale principale.

• On évalue le signe du déterminant de la matrice de départ en comptant le nombre de permutation de lignes et de colonnes effectuées

Exemple:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

on peut choisir –2 comme premier pivot et ajouter ainsi à la seconde ligne,
la première multipliée par –1/2 et ajouter à la troisième ligne la première ligne :

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 9/2 \\ 0 & 2 & -4 \end{vmatrix}.$$

En choisissant 2 comme second pivot et en permutant les lignes 2 et 3, ce qui conduit à multiplier par –1 le déterminant, on obtient directement une matrice triangulaire.

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^1 \begin{vmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 9/2 \end{vmatrix} = 18.$$

En effet : -1. (-2 x 2 x 9/2) = 18

Exercice:

Calculez le déterminant de la matrice suivante par la méthode du pivot:

$$\begin{matrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{matrix}$$

(le résultat devrait donner 0)

Inversion d’une matrice

Une opération importante mais compliquée : l’inversion d’une matrice

<u>Définition :</u> Une matrice carrée A de taille n est une **matrice inversible** s'il existe une matrice B telle que $A \times B = B \times A = I_n$.
La matrice B, notée A^{-1} est appelée la **matrice inverse** de A.

La définition de la matrice inverse A x A^{-1} = A^{-1}x A = I montre que seule les matrices carrées peuvent être inversées puisque le produit doit être possible dans les deux sens !

Pour les matrices non carrées, il existe la notion de pseudo-inverse sur lesquelles nous ne nous étendrons pas.

https://youtu.be/FAvptVYvfb0

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}2 \\ -0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}2 \\ -0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 0{,}2 + (-1) \times (-0{,}4) & 3 \times 0{,}2 + (-1) \times 0{,}6 \\ 2 \times 0{,}2 + 1 \times (-0{,}4) & 2 \times 0{,}2 + 1 \times 0{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les matrices A et B sont donc inverses l'une de l'autre et on peut écrire $B = A^{-1}$.

Une matrice carrée est inversible (ou régulière) si son déterminant est non nul (différent de 0).

Donc pour prouver qu'une **matrice** carrée possède un **inverse**, il faut calculer le déterminant de la **matrice**, s'il est différent de 0, alors la **matrice** est inversible.

Une matrice non inversible est dite singulière (l'inversion n'est pas possible).

La matrice inverse d'une matrice si elle existe est toujours unique.

Comment savoir si une matrice est inversible ?

Une matrice carrée est inversible si son déterminant est non nul

Mais parfois, les choses sont beaucoup plus simples. Ainsi les coefficients de la diagonale principale de certaines matrices indiquent si elles sont inversibles ou non. C’est le cas des matrices triangulaires :

- une matrice triangulaire est inversible si et seulement si tous les coefficients de la diagonale principale sont non nuls,

Si A est inversible, alors la transposée de A, soit A^T , l’est également

Une première méthode d'inversion artisanale pour une matrice 2x2

Calculer l'inverse de la matrice $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

On a : $C \times C^{-1} = I_2$ soit $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Donc : $\begin{pmatrix} 2c & 2d \\ a + 2c & b + 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Et donc : $\begin{cases} 2c = 1 \\ 2d = 0 \\ a + 2c = 0 \\ b + 2d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \dfrac{1}{2} \\ d = 0 \\ a + 2 \times \dfrac{1}{2} = 0 \\ b + 2 \times 0 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \dfrac{1}{2} \\ d = 0 \\ a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$

D'où $C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \dfrac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

$2^{ème}$ méthode d'inversion de matrice: Cofacteur et comatrice

Grâce au déterminant, on peut exprimer l'inverse d'une matrice $M \in M_n(R)$ inversible.

Pour cela, on utilise encore les matrices extraites de M ;
rappellons que Mij désigne la matrice carrée de taille (n − 1) obtenue à partir de M en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne.

Soit $M \in M_n(R)$. Pour i et j compris entre 1 et n, on appelle $(i, j)^{ème}$ **cofacteur** de la matrice M, et on note δij , le scalaire défini par :

$$\delta ij = (-1)^{i+j} \det(M_{ij}).$$

On appelle **comatrice M_f**, la matrice carrée de taille n dont les coefficients (les éléments) sont les cofacteurs de M.

Si $M \in M_n(R)$ est telle que det(M) est différent de 0, alors on a

$$M^{-1} = 1/\det(M) \,.\, M_f^T$$

Cette identité, aussi explicite soit-elle, se prête peu aux calculs car le calcul des cofacteurs est très lourd. En pratique, cette formule ne permet de calculer l'inverse d'une matrice que pour n = 2 ou 3.

En particulier, pour n = 2 et $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

si det(M) = ad − bc est différent de 0, on retrouve la classique formule de l'inverse, à savoir :

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1} = (1/(ad-bc)).\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Exemple d'inversion de matrice par la méthode de la comatrice/cofacteurs

Déterminant facile pour une 2x2

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

Sarrus 3x3 $\rightarrow$ $\det A = 32$

$$A^{-1} = \frac{1}{32}\,{}^{t}\!\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 10 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 10 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{32}\,{}^{t}\!\begin{pmatrix} -4 & -16 & 12 \\ 20 & 0 & 4 \\ -4 & 8 & -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{32}\begin{pmatrix} -4 & 20 & -4 \\ -16 & 0 & 8 \\ 12 & 4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{5}{8} & \frac{-1}{8} \\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{8} \end{pmatrix}$$

Méthode utilisant le pivot de Gauss-Jordan

L'idée est astucieuse. Concrètement, on crée un tableau avec à gauche la matrice à inverser, et à droite la matrice identité. On réalise ensuite une suite d'opérations élémentaires (Échange de deux lignes, Multiplication d'une ligne par un scalaire non nul, ajout du multiple d'une ligne à une autre ligne) sur la matrice à inverser pour la ramener à la matrice identité.
La même suite d'opérations élémentaires est effectuée en même temps sur la matrice identité d'à côté qui comme par magie donne l'inverse de la matrice de départ quand celle-ci devient matrice unité.
On commence par mettre 1 en a11 puis on descend dans la première colonne à la deuxième ligne où l'on veut un 0 et ainsi de suite)

Un exemple svp, j'ai rien compris!!!

Une vidéo peut-être?: https://www.youtube.com/watch?v=DalK5o-DHB4 (à partir de 1'55'')

https://www.youtube.com/watch?v=m1JgnjZuREc&ab_channel=EnseignementSup%C3%A9rieuretLyc%C3%A9e

Un exemple:

Ex : Inversons la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'algorithme précédent donne :

$$\left.\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} L_2 - L_1 \to L_2 \\ L_3 - 2L_1 \to L_3 \end{array} \left.\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}\right| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_3 + L_2 \to L_3 \left.\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}\right| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{-1}{4} L_3 \to L_3 \left.\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3/4 & -1/4 & -1/4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} L_1 - 2L_3 \to L_1 \\ L_2 + L_3 \to L_2 \end{array} \left.\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ 3/4 & -1/4 & -1/4 \end{pmatrix}$$

$$L_1 - L_2 \to L_1 \left.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| \begin{pmatrix} -1/4 & -1/4 & 3/4 \\ -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ 3/4 & -1/4 & -1/4 \end{pmatrix}$$

La matrice inverse est donc

$$\begin{pmatrix} -1/4 & -1/4 & 3/4 \\ -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ 3/4 & -1/4 & -1/4 \end{pmatrix}$$

Exercice

Calculez l'inverse de la matrice suivante par la méthode de la comatrice et par la méthode du pivot:

$$\begin{matrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{matrix}$$

Matrice inverse en Python

Pour inverser une matrice avec python il existe sous numpy la méthode [Linear algebra (numpy.linalg)]

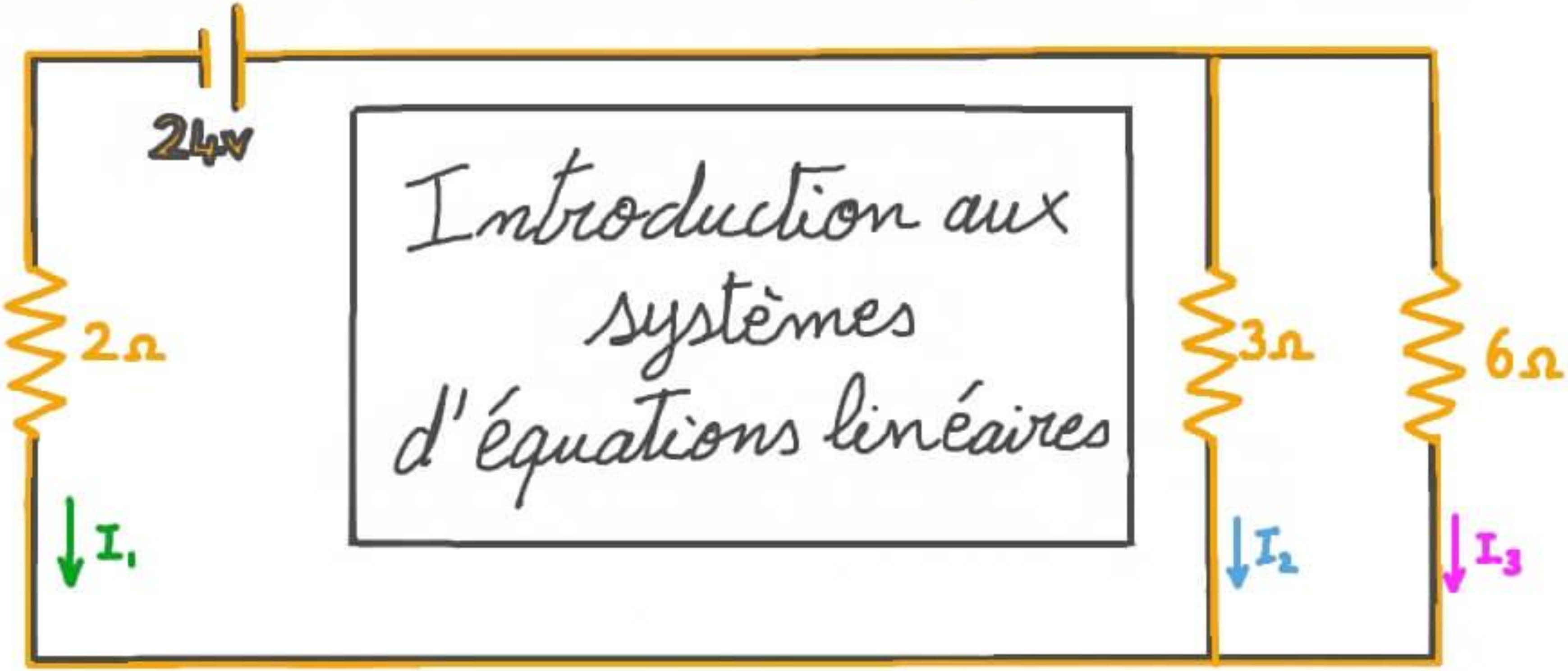
Exemple:

```
>>> import numpy as np
>>> A = np.array(([1,3,3],[1,4,3],[1,3,4]))
>>> A
array([[1, 3, 3],
       [1, 4, 3],
       [1, 3, 4]])
>>> A_inv = np.linalg.inv(A)
>>> A_inv
array([[ 7., -3., -3.],
       [-1.,  1.,  0.],
       [-1.,  0.,  1.]])
```

Accessoirement, python vous permet aussi de calculer facilement le déterminant d’une matrice:

```
>>> import numpy as np
>>> a = np.array(([-1,2],[-3,4]))
>>> np.linalg.det(a)
2.0000000000000004
```

Applications



$$
\begin{aligned}
I_1 + I_2 + I_3 &= 0 \\
-2I_1 + 3I_2 &= 24 \\
-3I_2 + 6I_3 &= 0
\end{aligned}
\quad \rightsquigarrow \quad
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 6 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ 24 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

Exemple d'utilisation des matrices : Résolution de systèmes d'équations

Nous savons qu'un système de [N] équations s'écrit symboliquement sous la forme

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + a_{13}\cdot x_3 + \ldots + a_{1N}\cdot x_N = t_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + a_{23}\cdot x_3 + \ldots + a_{2N}\cdot x_N = t_2 \\ \vdots \\ a_{N1}\cdot x_1 + a_{N2}\cdot x_2 + a_{N3}\cdot x_3 + \ldots + a_{NN}\cdot x_N = t_N \end{cases} \qquad [eq.\ 4.1]$$

dans laquelle

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_N$$

sont les [n] **inconnues**;

$$t_1,\ t_2,\ t_3,\ \ldots,\ t_N$$

sont les [n] **termes indépendants**;

$$a_{11},\ a_{12},\ a_{13},\ \ldots,\ a_{NN}$$

sont les [n×n] **coefficients** des inconnues.

Dans ce symbolisme [a_{jk}] est donc le coefficient de [x_k] dans la $j^{ème}$ équation ([1]).

Ce système d'équations peut se mettre sous la forme du produit matriciel

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_N \end{pmatrix} \qquad \text{[eq. 4.2]}$$

soit, de manière symbolique,

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{X} = \boldsymbol{T} \qquad \text{[eq. 4.3]}$$

La résolution se fait de manière tout aussi symbolique, en multipliant les deux membres de l'équation par l'inverse de $\boldsymbol{A}$. Attention : comme le produit matriciel n'est pas commutatif, seul le produit "par la gauche" est acceptable ([2])

$$\boldsymbol{A}^{-1} \times \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1} \times \boldsymbol{T} \qquad \text{[eq. 4.4]}$$

Résolution d’un système d’équations linéaires

Là aussi numpy peut nous aider:

```
X = linalg.solve(A, b)
```

```
A: matrice des coefficients
B: vecteur colonne des termes indépendants
X: vecteur contenant la valeurs des variables que l’on recherche
```

Soit à résoudre: $\begin{cases} x + 2 \cdot y = 5 \\ 3 \cdot x + 4 \cdot y = 6 \end{cases}$

```
A = np.array([[1, 2], [3, 4]])
b = np.array([[5], [6]])
X = linalg.solve(A, b)
print(X)
# [[-4. ]
# [ 4.5]]
```

Et donc x = - 4 et y = 4,5!

Utilisation des matrices en statistique

Les statistiques font un grand usage des sommes de valeurs, sommes de carrés, sommes de produits, etc.

Par exemple, la moyenne et la variance d'un ensemble de N valeurs x_k se calculent à partir des expressions :

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum x_K \qquad var = \frac{N \cdot \sum x_k^2 - \left(\sum x_k\right)^2}{N^2}$$

De même, le coefficient [a] de la droite des moindres carrés parmi un ensemble de couples de points (x_k, y_k) s'écrit :

$$a = \frac{N \cdot \sum x_k^2 - \left(\sum x_k\right)^2}{N \cdot \sum x_k \cdot y_k - \sum x_k \cdot \sum y_k}$$

Utilisation des matrices en statistique (suite)

Toutes ces sommes s'obtiennent de manière très élégante grâce à un produit matriciel. Il suffit de copier l'ensemble des données dans une matrice 3×N dans laquelle la première colonne est remplie de 1 :

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_N & y_N \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{X}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_N \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_N \end{pmatrix}$$

Le produit matriciel de la transposée $\boldsymbol{X}^T$ par la matrice initiale $\boldsymbol{X}$ fournit toutes les sommes demandées… et même plus !

$$\boldsymbol{X}^T \times \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_N \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_N \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_N & y_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N & \sum x_K & \sum y_K \\ \sum x_K & \sum x_K^2 & \sum x_K \cdot \sum y_K \\ \sum y_K & \sum x_K \cdot \sum y_K & \sum y_K^2 \end{pmatrix}$$

Notons que le résultat est une matrice symétrique.

Les matrices en théorie des graphes

Un graphe tel que celui de la fig. 4.1 peut être représenté de manière abstraite par une **matrice d'adjacence**.

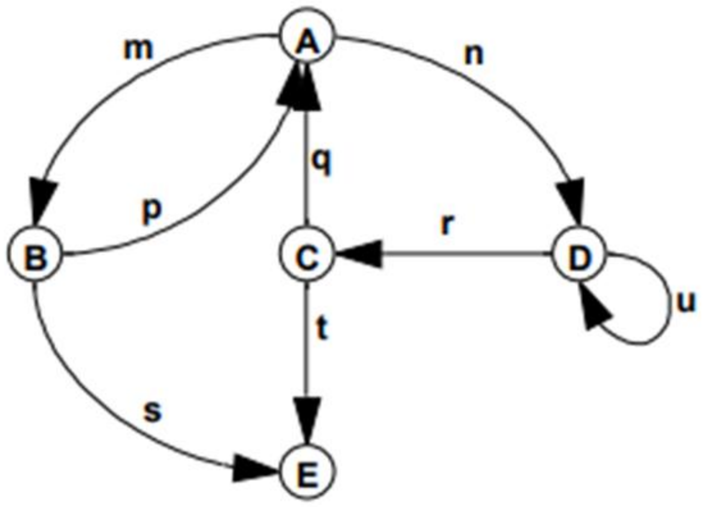


fig. 4.1 Exemple de graphe orienté

Il s'agit d'un tableau à deux dimensions dans lequel les lignes et colonnes représentent les nœuds ou sommets. Par convention, les nœuds considérés comme origine sont présentés en en-tête de colonnes; ceux considérés comme extrémités, en en-tête de ligne.

Destination \ Origine	A	B	C	D	E
A	0	1	1	0	0
B	1	0	0	0	0
C	0	0	0	1	0
D	1	0	0	1	0
E	0	1	1	0	0

tab. 4.1 Représentation matricielle du graphe de la fig. 4.1

		Origine				
		A	B	C	D	E
Destination	A	0	1	1	0	0
	B	1	0	0	0	0
	C	0	0	0	1	0
	D	1	0	0	1	0
	E	0	1	1	0	0

tab. 4.1 Représentation matricielle du graphe de la fig. 4.1

Dans ce tableau, chaque cellule représente une arête *potentielle*. Elle se trouve à l'intersection d'une colonne qui représente son nœud d'origine et une ligne qui représente son nœud d'extrémité. Cette cellule contient 1 ou 0 selon que l'arête correspondante existe ou non dans le graphe.

$$\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nous traiterons des graphes dans un chapitre ultérieur du cours.

Les matrices pour l’animation 2D/3D

Tous les problèmes d'animation des objets 3D tels que

- rotation,
- zoom,
- translation;

sont élégamment résolus à l'aide de la théorie des graphes et du calcul matriciel ([1]).

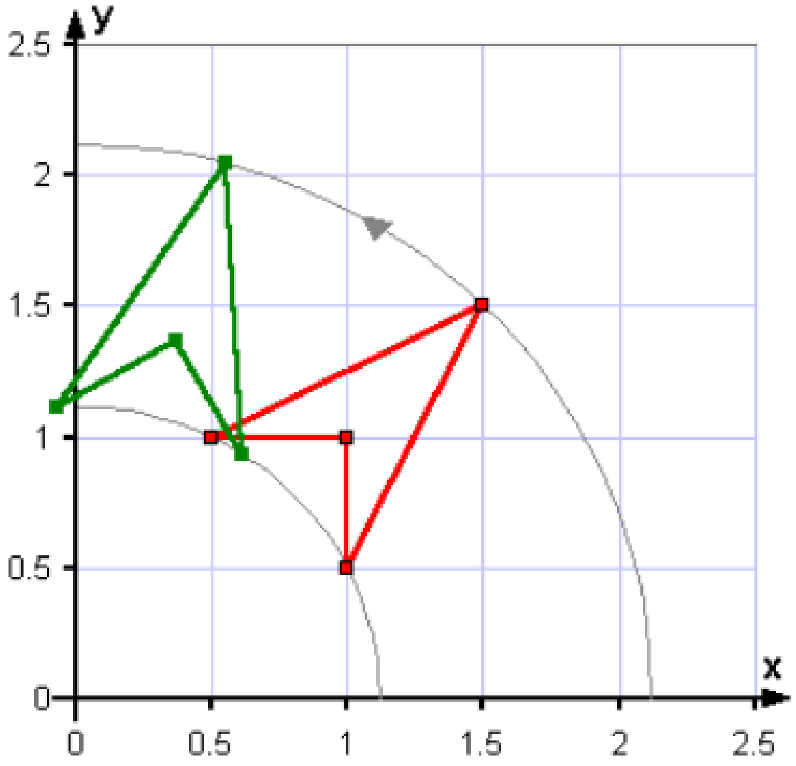


fig. 4.2 Rotation d'une figure par produit matriciel

L'ensemble des [N] points (sommets) constituant le graphique sont listés dans une matrice de N×2 ou N×3 selon que l'on travaille en 2D ou en 3D ([2]).

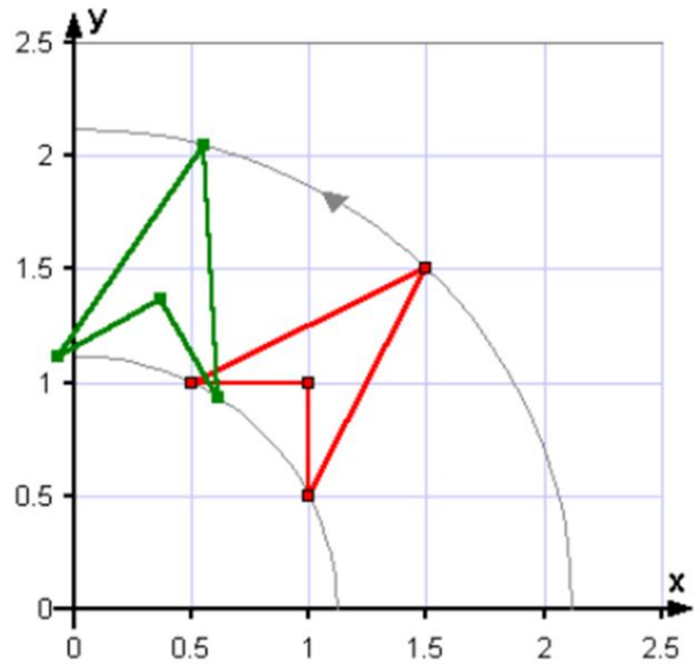
Par exemple, les sommets de la flèche rouge de la fig. 4.2 sont représentés par la matrice

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 1 & 1 \\ 0.5 & 1 \\ 1.5 & 1.5 \end{pmatrix}$$

D'un autre côté, la trigonométrie nous apprend que, si nous provoquons la rotation d'un repère orthonormé d'un angle [θ] autour de son origine (0, 0); il suffit d'appliquer une matrice de rotation $\boldsymbol{R}$ pour obtenir les nouvelles coordonnées ([3]).

Dans le cas d'une rotation de 30° dans le sens trigonométrique, la matrice devient

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & \sin 30^\circ \\ -\sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.866 & 0.500 \\ -0.500 & 0.866 \end{pmatrix} \qquad [eq.\ 4.12]$$



Il suffit d'effectuer le produit matriciel pour obtenir les nouvelles positions (flèche verte de la fig. 4.2)

$$\boldsymbol{X}_{\mathrm{R}} = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 1 & 1 \\ 0.5 & 1 \\ 1.5 & 1.5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0.866 & 0.500 \\ -0.500 & 0.866 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.616 & 0.933 \\ 0.366 & 1.366 \\ -0.067 & 1.116 \\ 0.549 & 2.049 \end{pmatrix} \qquad [eq.\ 4.13]$$

Peu importe la complexité de la figure à faire pivoter, c'est toujours la même matrice de rotation qui s'applique.

De même, pour effectuer un zoom d'un facteur [f] de la figure, centré sur l'origine, il suffit d'appliquer la matrice diagonale

$$\boldsymbol{Z} = \begin{pmatrix} \mathrm{f} & 0 \\ 0 & \mathrm{f} \end{pmatrix}$$

$$X_Z = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 1 & 1 \\ 0.5 & 1 \\ 1.5 & 1.5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1.6 & 0 \\ 0 & 1.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.6 & 0.8 \\ 1.6 & 1.6 \\ 0.8 & 1.6 \\ 2.4 & 2.4 \end{pmatrix} \qquad \text{[eq. 4.14]}$$

A nouveau, peu importe la complexité de la figure sur laquelle il faut zoomer, c'est toujours la même matrice de zoom qui s'applique.

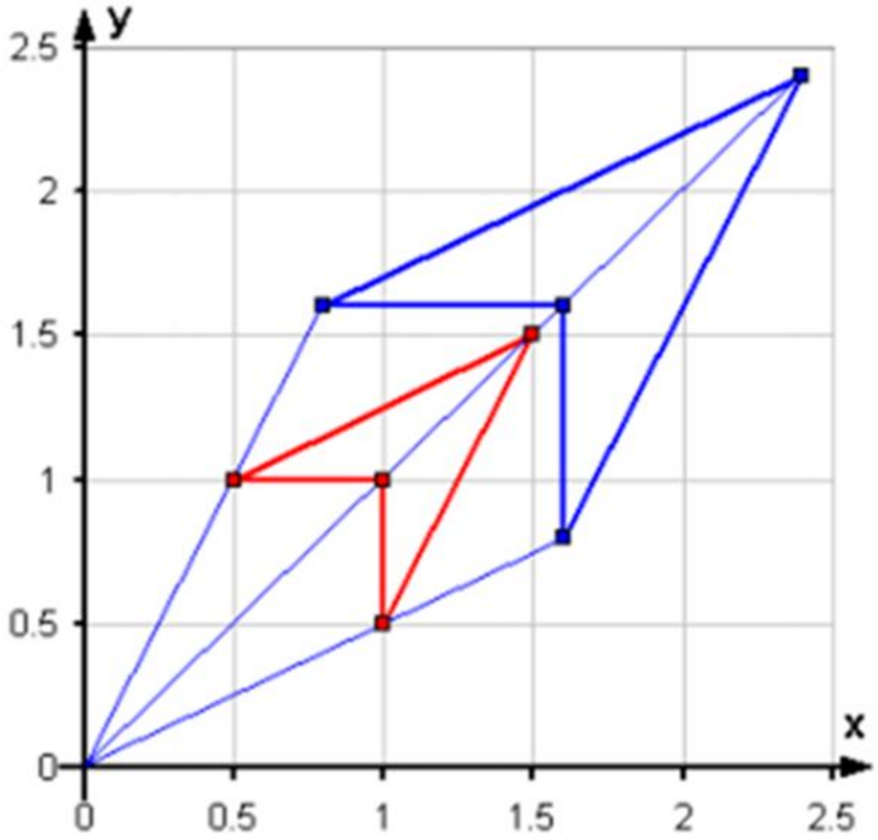


fig. 4.3 Zoom d'une figure par produit matriciel

$$X_{RZ} = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 1 & 1 \\ 0.5 & 1 \\ 1.5 & 1.5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0.866 & 0.500 \\ -0.500 & 0.866 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1.6 & 0 \\ 0 & 1.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.986 & 1.493 \\ 0.586 & 2.186 \\ -0.107 & 1.785 \\ 0.986 & 1.493 \end{pmatrix} \quad \textit{[eq. 4.15]}$$

Bien entendu, les effets peuvent être combinés. Par exemple, la chaîne de calcul ci-dessous fait pivoter la flèche rouge de 30° puis applique un zoom d'un facteur 1.6 au résultat (fig. 4.4)

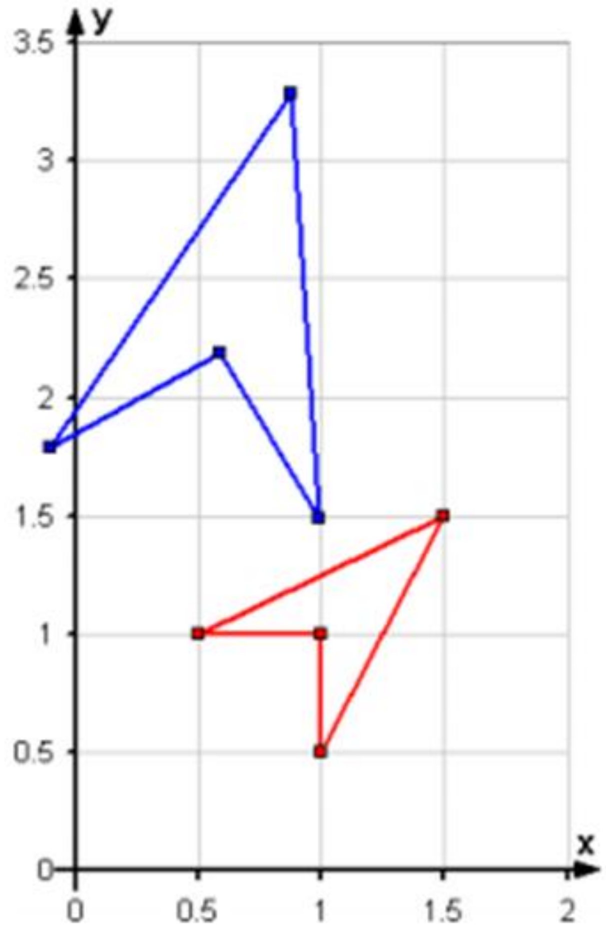


fig. 4.4 Rotation suivie d'un zoom par produit matriciel

Pour appliquer la même transformation à une autre figure, il suffit de remplacer la matrice X, les matrices de rotation et de zoom restant inchangées.

Exercices en python

Ex 2.1 Enoncé

Écrivez un programme qui inverse deux lignes d'une matrice et qui sera appelé par l'instruction nom-fonction(A,i,j) où A est le nom de la matrice et i et j le numéro des lignes à échanger

Ex 2.2 Enoncé

Écrivez un programme qui soustrait d'une ligne k un multiple d'une autre ligne d'une matrice (transvection: $L_k = L_k - alpha.L_i$) et qui sera appelé par l'instruction nom-fonction(A,k,i,alpha) où A est le nom de la matrice et k et i le numéro des lignes à soustraire et alpha le facteur de multiplication de la $i^{ème}$ ligne avant soustraction

Ex 2.3 Enoncé

Écrivez un programme qui calcule le déterminant d’une matrice par la méthode du pivot de Gauss-Jordan (vous aurez besoin des programmes des exercices 1 et 2 sous forme de fonction)

Ex 2.4 Enoncé

Ecrivez un programme qui inverse une matrice par la méthode du pivot de Gauss-Jordan (vous aurez besoin des programmes des exercices 1 et 2 sous forme de fonction)

(Vous trouverez une description complète de l'algorithme en pseudo-code sur la diapo suivante)

(On cherche le max de la première colonne comme premier pivot et si il ne se trouve pas en a_{11}, on l'y met en échangeant la ligne du max avec la première. On divise la ligne par la valeur du max pour obtenir 1, puis on s'occupe de a_{12} et ainsi de suite on descend jusqu'au bout de la colonne, puis on passe à la colonne suivante on cherche le max, on le met par échange sur la diagonale et on s'occupe des valeurs du dessous et du dessus dans la colonne 2 et on passe à la colonne suivante etc.)

Soit une matrice A de dimensions n × m ;

L'algorithme de Gauss-Jordan en Pseudo-code est le suivant:

```
r = 0                                (r est l'indice de ligne du dernier pivot trouvé)
    Pour j de 1 jusqu'à m                   (j décrit tous les indices de colonnes)
    |  Rechercher max(|A[i,j]|, r+1 ≤ i ≤ n). Noter k l'indice de ligne du maximum
    |                                  (A[k,j] est le pivot)
    |  Si A[k,j]≠0 alors                    (A[k,j] désigne la valeur de la ligne k et de la colonne j)
    |  |  r=r+1                             (r désigne l'indice de la future ligne servant de pivot)
    |  |  Diviser la ligne k par A[k,j]     (On normalise la ligne de pivot de façon que le pivot prenne la valeur 1)
    |  |  Si k≠r alors
    |  |      |  Échanger les lignes k et r  (On place la ligne du pivot en position r)
    |  |  Fin Si
    |  |  Pour i de 1 jusqu'à n             (On simplifie les autres lignes)
    |  |  |  Si i≠r alors
    |  |  |  |  Soustraire à la ligne i la ligne r multipliée par A[i,j] (de façon à annuler A[i,j])
    |  |  |  Fin Si
    |  |  Fin Pour
    |  Fin Si
    Fin Pour
  Fin Gauss-Jordan
```

Ex 2.5 Enoncé

Écrivez un programme qui calcule les solutions d’un système d’équation.
Le programme demandera combien il y a de variables et combien d'équations.
Si les deux chiffres sont différents, affichage d'un message d'erreur (lequel?) et arrêt ou bouclage du programme pour reposer la question.
Ensuite, boucle pour introduire le coefficient de chaque variable, équation par équation, mise en forme de la matrice correspondante et résolution du système (en utilisant pour l’inversion de matrice nécessaire le résultat de l’exercice précédent avec affichage du résultat

Ex 2.6 Enoncé

Une bonne pizzeria est une pizzeria qui n’est pas trop chère !

5 de vos amis ont été dans la même pizzeria.

- Le premier était accompagné de trois autres amis, ils ont commandé 1 Margherita, 2 Quatre-saisons et 1 végétarienne et en ont eu au total pour **55 €**
- Le second qui a trois enfants est allé en famille avec Madame. Ses 2 filles ont choisi 1 pizza Margherita chacune, sa femme 1 Quatre-saisons, lui 1 végétarienne et son fils oh sacrilège 1 pizza Hawaïenne. Ils ont payé **65,5 €**
- Le troisième a payé au total **80 €** pour 1 Margherita, 2 Hawaïenne, 2 végétariennes et 1 Napolitaine ;
- Le quatrième a emporté 3 Napolitaine, 1 Hawaïenne, 2 Margherita, 1 végétarienne et 2 Quatre-saisons pour **117,5 €**
- Le cinquième avec ses deux frères a mangé 2 Napolitaines, 1 Margherita et 2 Hawaïennes pour un total de **63,5 €**

Pouvez-vous en utilisant le calcul matriciel retrouver le prix des différents types de pizza?

Réponses (pour vérification):

- La pizza végétarienne ? **14.5**
- La pizza Hawaï ? **13.5**
- La pizza Quatre-saisons ? **14.5**
- La pizza Margherita ? **11.5**
- La pizza Napolitaine ? **12.5**

Matrice inverse: https://www.youtube.com/watch?v=2vBUx9Ams_0&ab_channel=Jean-YvesLabouche

Pivot Gauss: https://www.youtube.com/watch?v=q924ey023rk&ab_channel=KhanAcademyFrancophone

Transformation: https://www.youtube.com/watch?v=Dr9J1BIcVBw&ab_channel=ParaMaths