1. Expérience aléatoire, événements, loi de probabilité (Rappels de première et compléments)

1.1. Choix d'un modèle

Lors de la réalisation d'une expérience aléatoire, on est amené à choisir successivement :

a. **Un univers Ω**

Il représente l'ensemble toutes les issues **envisagées** de l'expérience. Il est donc fonction de l'idée de modélisation ***a priori*** que l'on se fait de l'expérience. Si lors du lancer d'une pièce de monnaie on considère usuellement qu'il y a deux issues "PILE" et "FACE", rien n'empêche d'en rajouter une troisième, par exemple "TRANCHE". C'est à chacun (ou à chaque énoncé) de le définir. À défaut, on considère tacitement, qu'il s'agit de l'univers usuellement utilisé dans telle ou telle situation.

Exemples :

> L'issue "obtenir la face portant le numéro 1" est notée abusivement 1. Idem pour les autres.

- On lance un dé et on regarde le numéro de la face obtenue :

$$\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$$

- On lance un dé et on regarde si le numéro de la face obtenue est pair ou impair :

$$\Omega = \{P ; I\}$$

- On lance une pièce de monnaie : $\Omega = \{P ; F\}$
- On lance deux pièces de monnaie : $\Omega = \{PP ; PF ; FP ; FF\}$
- On lance deux dés : $\Omega = \{(i, j) \text{ où } 1 \leqslant i \leqslant 6 \text{ et } 1 \leqslant j \leqslant 6\}$

Remarquons que l'univers dépend de l'observation qui est faite : par exemple, si on lance deux dés et qu'on fait le produit P ou la somme S des deux numéros obtenus, on obtient respectivement :

$$\Omega_P = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 8 ; 9 ; 10 ; 12 ; 15 ; 16 ; 18 ; 20 ; 24 ; 25 ; 30 ; 36\}$$

$$\Omega_S = \{2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12\}$$

Notons aussi qu'il existe des expériences aléatoires qui comportent une infinité d'issues :

- On choisit un entier naturel au hasard : $\Omega = \mathbb{N}$ (Ce type d'ensemble infini est dit "dénombrable")
- On choisit un réel au hasard entre 0 et 1 : $\Omega = [0, 1]$ (Ce type d'ensemble infini n'est pas dénombrable)
- On choisit un rationnel au hasard entre 0 et 1: $\Omega = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$
- On choisit un nombre premier au hasard : $\Omega = \{\text{nombres premiers}\}$

On verra aussi (au point c.) que, dans certaines situations, l'expression "choisir au hasard" peut déboucher sur des univers différents suivant le protocole de choix utilisé.

b. **Une famille de parties de Ω appelées "événements"**

Il s'agit des issues **discernables ou mesurables** par l'observateur. Lorsque l'univers Ω est fini ou dénombrable (c'est-à-dire en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$), chaque partie de l'univers peut être considérée comme un événement.[1]

---

[1] Cependant, si Ω a la puissance du continu (par exemple $\Omega = [0, 1]$), on ne peut plus considérer chaque partie de Ω comme un événement (car certaines parties de Ω se révèlent si complexes qu'on est incapable de dire si elles sont réalisées ou non). On fait donc le choix d'une partie stricte $\mathcal{T}$ de $\wp(\Omega)$ (appelée tribu) vérifiant un minimum structurel afin de pouvoir calculer de manière commode des probabilités :

- $\varnothing \in \mathcal{T}$ et $\Omega \in \mathcal{T}$ ($\mathcal{T}$ contient la "partie vide" et la "partie pleine")
- $A \in \mathcal{T} \Rightarrow \Omega \setminus A \in \mathcal{T}$ ($\mathcal{T}$ est stable par passage au complémentaire)
- $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ famille d'éléments de $\mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$ ($\mathcal{T}$ est stable par union au plus dénombrable)

Exemples :

- On lance deux dés et on regarde la somme des résultats obtenus. (Voir l'univers Ω_S ci-dessus).

  La partie $E = \{2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10 ; 12\}$ est un événement qui peut se décrire par la phrase "la somme obtenue est un nombre pair".
- On choisit 6 numéros au hasard entre 1 et 49. Les événements sont toutes les combinaisons de 6 numéros choisis parmi 49. (On montrera qu'il y en a $\dfrac{49\times48\times47\times46\times45\times44}{6\times5\times4\times3\times2}$, voir la leçon sur le dénombrement...)

Rappelons que les éléments de Ω sont appelés des événements élémentaires. Un événement élémentaire est donc une partie de Ω réduite à un seul élément (singleton).

c. **Une loi de probabilité (c'est-à-dire une application *P* à valeurs dans [0, 1])**

On demande à cette application P de vérifier les deux conditions :

- $P(\Omega) = 1$
- Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille d'événements deux à deux disjoints, alors :

$$P\left(\coprod_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n) \quad \text{(Propriété de } \sigma\text{-additivité}^{(1)}\text{)}$$

Le symbole $\coprod$ désigne une union. Il est juste utilisé à la place de $\cup$ pour préciser que l'union est disjointe.

En particulier, si A et B sont deux événements incompatibles (i.e. disjoints), alors :

$$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$

En conséquence, on a : $1 = P(\Omega) = P(\Omega \cup \varnothing) = P(\Omega) + P(\varnothing)$

Donc : $P(\varnothing) = 0$

Une telle application P s'appelle probabilité ou loi de probabilité.

Grâce à la propriété d'additivité, on en déduit la propriété suivante indispensable pour calculer des probabilités de manière conforme à notre intuition :

la probabilité *P*(*E*) d'un événement *E* est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.

Remarque : le triplet $(\Omega, \wp(\Omega), P)$ (ou $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ si Ω n'est pas dénombrable) s'appelle un espace probabilisé.
Modéliser une expérience aléatoire, c'est choisir un tel triplet.

Un choix particulier de *P* :

Lorsque Ω est de cardinal fini et que l'on affecte la même probabilité à chaque événement élémentaire, on dit que l'on choisit une probabilité P équirépartie. On a alors :

- pour tout événement élémentaire ω de Ω : $P(\omega) = \dfrac{1}{\text{Card}(\Omega)}$
- pour tout événement E : $P(E) = \dfrac{\text{Card}(E)}{\text{Card}(\Omega)}$

On dit aussi, dans une telle situation, qu'il y a équiprobabilité.

(1) Notons que la somme peut contenir une infinité de termes non nuls mais qu'elle est nécessairement finie car majorée par 1.

Et pour finir, notons bien que, dans certaines situations, l'expression "choisir au hasard" mérite d'être expliquée. En effet, sans protocole de choix, certaines expériences peuvent aboutir à des univers différents et générer des calculs qui paraissent alors contradictoires. Imaginons, pour illustrer, l'expérience suivante : on dispose de deux bancs de deux places (les places sont numérotées a_1, a_2, a_3 et a_4 comme ci-dessous). On suppose que toutes les places sont vides sauf la place a_4 qui est occupée. Arrive une deuxième personne à qui on demande de s'asseoir "au hasard". Quelle est la probabilité que les deux personnes soient assises sur le même banc ?

banc 1

a_1	a_2

banc 2

a_3	a_4

<u>Protocole 1</u> : *choix d'un banc*

La seconde personne choisit l'un des deux bancs, de manière équiprobable.

L'univers est donc $\Omega = \{\text{banc } 1 \text{ ; banc } 2\}$.

La loi de probabilité est donnée ici par :

Événement élémentaire	banc 1	banc 2
Probabilité	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

La probabilité que les deux personnes soient assises sur le même banc est donc :

$$p_1 = \frac{1}{2}$$

<u>Protocole 2</u> : *choix d'une place*

La seconde personne choisit l'une des trois places restantes, de manière équiprobable.

L'univers est donc $\Omega = \{a_1 \text{ ; } a_2 \text{ ; } a_3\}$.

La loi de probabilité est donnée ici par :

Événement élémentaire	place a_1	place a_2	place a_3
Probabilité	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

La probabilité que les deux personnes soient assises sur le même banc est donc :

$$p_2 = \frac{1}{3}$$

Et vous ? Choisissez-vous d'abord le banc puis la place ou directement la place ?

Moralité : il y a parfois des règles à préciser lorsqu'on fait un choix "au hasard"...

Une autre situation de ce type est le "paradoxe de Bertrand". (Voir exercices sur les probabilités continues)

1.2. Rappel de quelques propriétés des probabilités

Propriété 1 : la probabilité de la réunion de deux événements est donnée par :

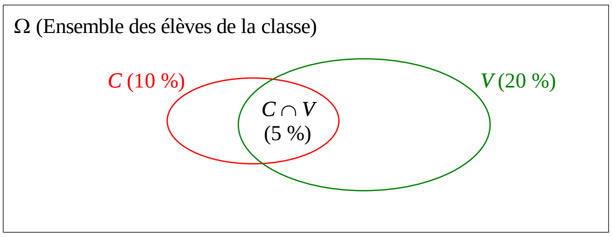
$$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Exemple : dans une classe, 10% des élèves jouent d'un instrument à corde, 20% des élèves jouent d'un instrument à vent et 5% des élèves jouent d'un instrument à corde et d'un instrument à vent. On choisit un élève au hasard. Quelle est la probabilité qu'il joue d'un instrument à corde ou à vent ?

Notons C l'événement : "l'élève joue d'un instrument à corde" et V : "l'élève joue d'un instrument à vent"

D'après les données, on a : $P(C) = 0{,}1$; $P(V) = 0{,}2$ et $P(C \cap V) = 0{,}05$

D'après la propriété 1, on obtient : $P(C \cup V) = P(C) + P(V) - P(C \cap V) = 0{,}25$



Exercice : démontrer que si C, D et E sont trois événements alors,

$$P(C \cup D \cup E) = P(C) + P(D) + P(E) - P(C \cap D) - P(D \cap E) - P(E \cap C) + P(C \cap D \cap E)$$

En effet : $$P(C \cup D \cup E) = P(C \cup (D \cup E)) = P(C) + P(D \cup E) - P(C \cap (D \cup E))$$

$$P(C \cup D \cup E) = P(C) + P(D) + P(E) - P(D \cap E) - P((C \cap D) \cup (C \cap E))$$

$$P(C \cup D \cup E) = P(C) + P(D) + P(E) - P(D \cap E) - P(C \cap D) - P(C \cap E) + P(C \cap D \cap E)$$

En généralisant cette formule à une union de n événements, on obtient la fomule du "crible" :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leqslant n} P\left(\bigcap_{1 \leqslant k \leqslant p} A_{i_k}\right)$$

(Les courageux peuvent tenter une démonstration par récurrence)

Remarque : la probabilité d'une union d'événements est toujours inférieure à la somme des probabilités de ces événements :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Et en particulier : $$P(A \cup B) \leqslant P(A) + P(B)$$

Propriété 2 :

- **la probabilité de l'événement contraire $\overline{A}$ de A est $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$. En particulier, La probabilité d'un événement impossible (par exemple : "obtenir 7 en lançant un dé") est nulle : $P(\varnothing) = 0$.**[(1)]
- **Si $A \subset B$ alors $P(A) \leqslant P(B)$ ("croissance" de la probabilité)**
- **$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$**

$A \setminus B$ désigne l'ensemble des éléments qui sont dans A et pas dans B :

$$A \setminus B = A \cap \overline{B}$$

[(1)] Réciproquement, si un événement E est tel que $P(E) = 0$. E est-il un événement impossible (c'est-à-dire : a-t-on nécessairement $E = \varnothing$) ? Réponse : non, en général ! En effet, considérons l'expérience suivante : on choisit un nombre réel compris entre 0 et 4 au hasard (en cochant par exemple un point au hasard sur le segment). L'univers est $\Omega = [0 ; 4]$ qui est un ensemble infini non dénombrable. Soit E l'événement : "le nombre choisi est π". E n'est pas impossible car $\pi \in [0 ; 4]$ et pourtant $P(E) = 0$. Cependant, si Ω est fini, on a l'équivalence entre E impossible et $P(E) = 0$. Par contre, si Ω est infini, on est amené à définir : "E est dit impossible lorsque $E = \varnothing$" et "E est dit P-quasi-impossible lorsque $P(E) = 0$".

Démonstrations :

Prouvons déjà la propriété 2 :

- Par définition, A et $\overline{A}$ sont incompatibles et $A \cup \overline{A} = \Omega$.

  D'après la définition d'une probabilité , on a donc :

  $$P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$$

  Et comme $P(A \cup \overline{A}) = P(\Omega) = 1$, il vient : $P(A) + P(\overline{A}) = 1$

- Si $A \subset B$ alors B est l'union disjointe de A et de $(B \setminus A)$ donc :

  $$P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$$

  Et comme $P(B \setminus A) \geqslant 0$, on obtient bien : $P(A) \leqslant P(B)$

> Le principe de ces démonstrations est de se ramener à des événements incompatibles afin d'avoir des unions disjointes et d'utiliser la relation
>
> $$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

- Ensuite, il est clair que les événements $A \setminus B$ et $A \cap B$ sont incompatibles et que $(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A$

  (voir figure ci-dessous)

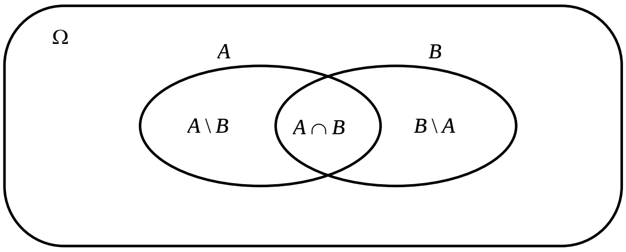
  D'après la définition d'une probabilité, on a donc :

  $$P(A) = P(A \setminus B) \cup (A \cap B)) = P(A \setminus B) + P(A \cap B)$$

  D'où le résultat.

Prouvons maintenant la propriété 1 :

Il suffit d'écrire que : $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$



Comme les événements $A \setminus B$ et B sont incompatibles, on a :

$$P((A \setminus B) \cup B) = P(A \setminus B) + P(B)$$

Et d'après la propriété 2 : $P(A \cup B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B)$

D'où le résultat.

2. Variables aléatoires (Rappels de première et compléments)

Dans ce paragraphe, on ne considère que des univers Ω finis ou infinis dénombrables.

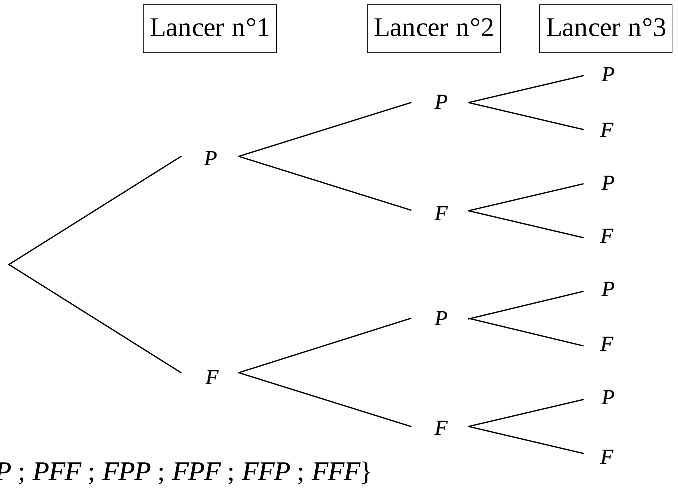
2.1. Définition *Variable aléatoire*

Lorsqu'à chaque événement élémentaire ω d'un univers Ω on associe un nombre réel, on dit que l'on définit une variable aléatoire (réelle). Une variable aléatoire est donc une application $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.[1]

[1] Cette définition reste encore valable si Ω est infini dénombrable et si l'on a choisi $\wp(\Omega)$ comme tribu. Par contre, si Ω a la puissance du continu, il faut rajouter dans la définition la condition suivante : "pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, l'ensemble $X^{-1}(I)$ est un événement" sinon le calcul des probabilités risque fort d'être très limité.

<u>Exemple</u> :

On lance une pièce de monnaie trois fois de suite.



L'arbre ci-contre permet de déteminer l'univers Ω associé à cette expérience aléatoire. Il est constitué de 8 événements élémentaires (nombre de listes de 3 éléments de l'ensemble $\{P\ ;\ F\}$) :

$$\Omega = \{PPP\ ;\ PPF\ ;\ PFP\ ;\ PFF\ ;\ FPP\ ;\ FPF\ ;\ FFP\ ;\ FFF\}$$

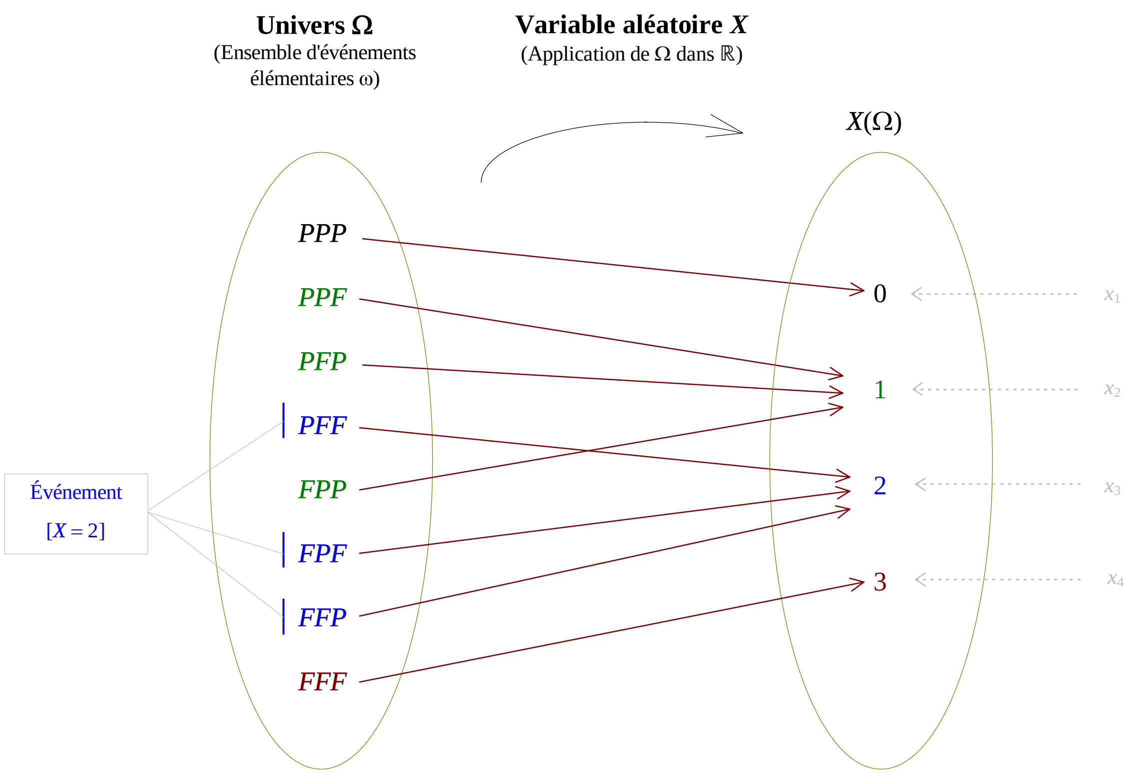
Si on suppose la pièce bien équilibrée, on peut considérer que ces huit issues sont équiprobables.

Notons X le nombre de côtés "face" obtenus. X est une variable aléatoire qui prend les valeurs 0 ; 1 ; 2 ou 3. Plus précisément, on a $X(\Omega) = \{0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\}$. On notera, par exemple "$X = 2$" ou $(X = 2)$ ou encore $[X = 2]$ l'événement "face est sorti exactement deux fois". Plus précisément :

$$"X = k" = \{\omega \in \Omega \text{ tels que } X(\omega) = k\} = X^{-1}(k)$$

Ce que l'on a noté $X^{-1}(k)$ est l'ensemble des antécédents de k par X.

<u>Remarque</u> : on n'a pas besoin de probabilité pour définir une variable aléatoire.



*La variable aléatoire X permet de définir un nouvel univers **numérique X(Ω)**. Si l'univers inital Ω est muni d'une probabilité P, la variable aléatoire X induit également une nouvelle probabilité P_X sur cet univers X(Ω).*

2.2. Définition *Loi de probabilité P_X associée à une variable aléatoire*

Soit P une probabilité sur un univers Ω.

Soit X une variable aléatoire définie sur Ω telle que $X(\Omega)$ soit fini de cardinal n.

Lorsqu'à chaque valeur x_i ($1 \leqslant i \leqslant n$) de X on associe les probabilités p_i de l'événement "$X = x_i$", on dit que l'on définit la loi de probabilité P_X de la variable aléatoire X.

Pour illustrer, sur l'exemple précédent, à la valeur $x_3 = 2$, nous pouvons associer la probabilité $p_3 = \frac{3}{8}$ puisque nous avons 3 chance sur 8 d'obtenir exactement deux fois le côté "face". Ainsi :

$$P_X(2) = P(X = 2)$$

Remarque (hors programme) : on peut montrer que l'application P_X vue comme application de

$$\begin{aligned} \wp(X(\Omega)) &\to [0\,;\,1] \\ A &\mapsto \sum_{x \in A} P(X^{-1}(x)) \end{aligned}$$

est une probabilité sur $X(\Omega)$. En effet :

$$P_X(X(\Omega)) = \sum_{x \in X(\Omega)} P\left(X^{-1}(x)\right) = P\left(\coprod_{x \in X(\Omega)} X^{-1}(x)\right) = P(\Omega) = 1 \text{ (car } P \text{ est une probabilité sur } \Omega)$$

Soient A_1, A_2, ... A_n des événements (éléments $\wp(X(\Omega))$) deux à deux disjoints, on a :

$$P_X\left(\coprod_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{x \in \coprod_{i=1}^{n} A_i} P(X^{-1}(x)) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{x \in A_i} P(X^{-1}(x)) = \sum_{i=1}^{n} P_X(A_i)$$

On a donc bien montré que P_X est une probabilité sur $X(\Omega)$.

En pratique, la loi de probabilité P_X de X est présentée sous forme de tableau.

Avec l'exemple de la pièce de monnaie lancée trois fois et X = nombre de face obtenus, cela donne :

Valeur x_i de la variable aléatoire X	$x_1 = 0$	$x_2 = 1$	$x_3 = 2$	$x_4 = 3$
Probabilité p_i de l'événement "$X = x_i$"	$p_1 = \frac{1}{8}$	$p_2 = \frac{3}{8}$	$p_3 = \frac{3}{8}$	$p_4 = \frac{1}{8}$

On remarquera que l'on a bien $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Autre exemple : toujours avec le lancer d'une pièce 3 fois de suite.

Posons cette fois : $Y = \begin{cases} 1 \text{ si deux faces identiques apparaissent successivement} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

On a :

Valeurs k de Y	0	1
$P(Y = k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

2.3. Définition *Espérance, variance et écart type d'une variable aléatoire*

Soit Ω l'univers correspondant à une expérience aléatoire.

Soit P une probabilité sur Ω.

Soit X une variable aléatoire définie sur Ω telle que $X(\Omega)$ soit fini[(1)] de cardinal n.

Notons $\{x_1 ; x_2 ; ... ; x_n\}$ l'ensemble $X(\Omega)$, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs prises par X.

L'espérance mathématique de la variable aléatoire X est le nombre, noté $E(X)$, défini par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n \qquad \boxed{p_i = P(X = x_i)}$$

l'espérance est la moyenne des valeurs x_i pondérées par les probabilités p_i

La variance de la variable aléatoire X est le nombre, noté $V(X)$, défini par :

$$V(X) = E((X - E(X))^2) = \sum_{i=1}^{n} p_i\left(x_i - E(X)\right)^2 = p_1(x_1 - E(X))^2 + p_2(x_2 - E(X))^2 + ... + p_n(x_n - E(X))^2$$

la variance est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne

L'écart type de la variable aléatoire X est le nombre, noté $\sigma(X)$, défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Remarque : la variance est une quantité positive, donc l'écart type est bien défini.

Exemples :

Reprenons l'exemple de la pièce de monnaie lancée trois fois de suite et les variables aléatoires X et Y :

$$E(X) = \frac{1}{8}\times 0 + \frac{3}{8}\times 1 + \frac{3}{8}\times 2 + \frac{1}{8}\times 3 = \frac{3}{2}$$

$$V(X) = \frac{1}{8}\left(0-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(1-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(2-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{8}\left(3-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

D'où : $$\sigma(X) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

De même avec Y : $$E(Y) = \frac{1}{4}\times 0 + \frac{3}{4}\times 1 = \frac{3}{4}$$

$$V(Y) = \frac{1}{4}\left(0-\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(1-\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{16} \quad \text{et} \quad \sigma(Y) = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Interprétation : lorsque X représente le gain du joueur à un jeu de hasard, $E(X)$ représente l'espoir de gain moyen par partie, lorsqu'on joue un grand nombre de fois. Si $E(X) > 0$ (resp. $E(X) < 0$) alors le jeu est avantageux (resp. désavantageux) pour le joueur. Si $E(X) = 0$ alors le jeu est dit équitable.

L'écart-type est une caractéristique de la dispersion des valeurs de X.

Remarque : on pourrait aussi calculer l'espérance $E(X)$ en revenant aux événements élémentaires de l'univers Ω au lieu d'utiliser les valeurs x_i de la variable aléatoire X :

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega)X(\omega)$$

Sur l'exemple précédent, comme $P(\omega) = \frac{1}{8}$ cela donnerait :

$$E(X) = \frac{1}{8}\sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) = \frac{1}{8}(X(PPP) + X(PPF) + X(PFP) + X(PFF) + X(FPP) + X(FPF) + X(FFP) + X(FFF))$$

(1) Si $X(\Omega)$ est infini dénombrable, l'espérance existe encore sous réserve de la convergence (absolue) de la série de terme général x_np_n.
Si $X(\Omega)$ a la puissance du continu, l'espérance est donnée par une intégrale.