

## MAKİNA DİNAMİĞİ

### 1. GİRİŞ

#### 1.1. Konunun Amaç ve Kapsamı

Makina Dinamiği, uygulamalı mekaniğin bir bölümünü meydana getirir. Burada makina parçalarının hareket kanunları, makinanın çalışması esnasında meydana gelen kuvvetler ve bu kuvvetlerin makinanın kendisine ve makinaya bağlı olan diğer cisimlere veya makinalara olan etkilerinin incelenmesi söz konusudur. Bu inceleme, konunun alanının genişliği nedeniyle “**Makina Kinematiki**” ve “**Makina Dinamiği**” başlıkları altında bölünerek yapılır.

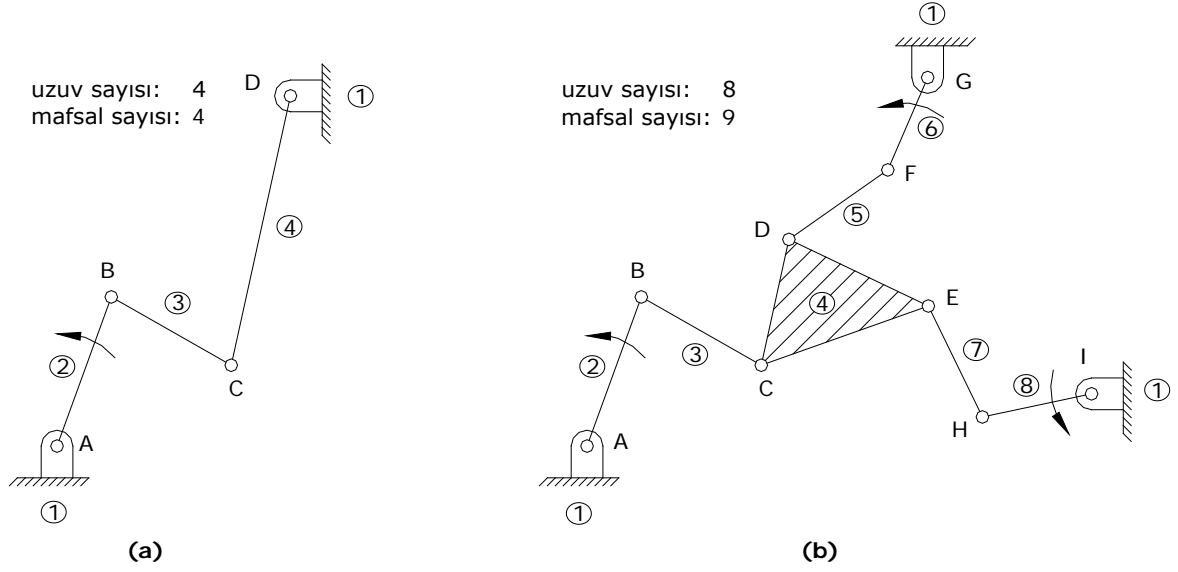
Makina Kinematikiinde makinaı meydana getiren parçaların veya bileşenlerinin hareketleri incelenir. Yani hareketli parçaların, yer değıştirmesi, hız ve ivmesi araştırma konusudur. Makina Dinamiğinde ise makina parçalarına etki eden kuvvetlerle birlikte ilgili hareket bağıntıları araştırılır. Burada problem ya verilmiş kuvvetlerin sebep olacağı hareketi bulmak, ya da verilmiş veya istenilen bir hareketi meydana getirmek için gerekli olan kuvveti bulmaktır. Bir makina tasarımı yapılırken öncelikle yukarıda belirtilen dinamik incelemenin yapılması gerekir. Bütün hareket ve kuvvet durumları tespit edildikten sonra ancak gerekli olan malzeme seçimi, mukavemet hesapları ve boyutlandırma yapılabilir.

#### 1.2. Temel Kavramlar

**Makina:** Belirli bir görevi (hareket ve/veya enerji iletme, dönüştürme, iş yapma gibi) yerine getirmek amacıyla tasarlanmış olan bir mekanizma veya mekanizmalar grubudur. Bir makinada bir den çok sayıda mekanizma bulunabilir. Makina ile mekanizma arasında yakın bir ilişki vardır. Bu ilişki aşağıdaki tanımlamalarla açıklanacaktır.

**Mekanizma:** Hareket ve kuvvet iletme ve/veya dönüştürme amacıyla birbirine bağlanmış katı cisim elemanlarının bir düzenlenmesi veya topluluğudur. Makina tanımıyla karşılaştırılacak olursa mekanizma kavramı daha genel bir anlam taşır. Yani mekanizmanın görevi daha genel olmaktadır. Makinalarda çalışma amacına uygun olarak, değışik tip ve şekillerde mekanizmalar bulunmaktadır. Kol mekanizmaları, Dişli çark mekanizmaları, Kam mekanizmaları, Kayış-kasnak mekanizmaları gibi...

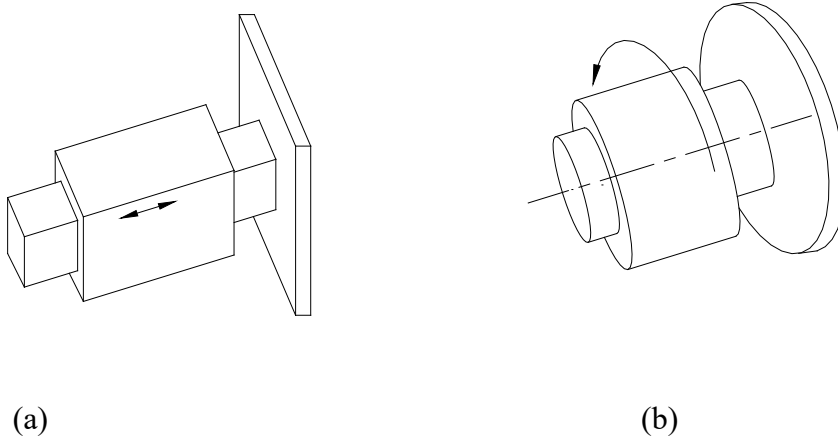
**Mekanizma uzvu (uzuv):** Mekanizma hareket ve enerji ileten (veya nakleden) bir tertibat (düzenek) olduğundan bir takım parçalarından meydana gelir. Katı cisim olarak göz önüne alınan bu mekanizma parçalarına “uzuv” adı verilir. Mekanizmaların bazı uzuvları (Şekil 1.1 b deki 4 nolu uzuv gibi) bir den çok bağlantıya sahip olabilir. Buna göre uzuv iki bağlantıya sahipse ikili uzuv, üç bağlantıya sahipse üçlü uzuv, ..., olarak adlandırılır. Mekanizma uzuvları birbirlerine göre bağıl hareket yapabilme özelliğine sahip olup dolayısıyla hareketli bağlantılara sahiptirler.



**Şekil 1.1. (a)** 1 serbestlik derecesine sahip mekanizma (aynı anda bir tek uzuvdan tahrik edilebilir)  
**(b)** 3 serbestlik derecesine sahip mekanizma (aynı anda üç ayrı uzuvdan tahrik edilebilir)

**Kinematik çift (eleman çifti, mafsal):** Bir mekanizmanın komşu olan uzuvlarını uygun biçimde birbirine bağlayan ve yine bu uzuvların birer parçası olan temas veya bağlantı yerlerine kinematik çift veya kısa adıyla mafsal adı verilir. Kinematik çiftler ikiye ayrılır.

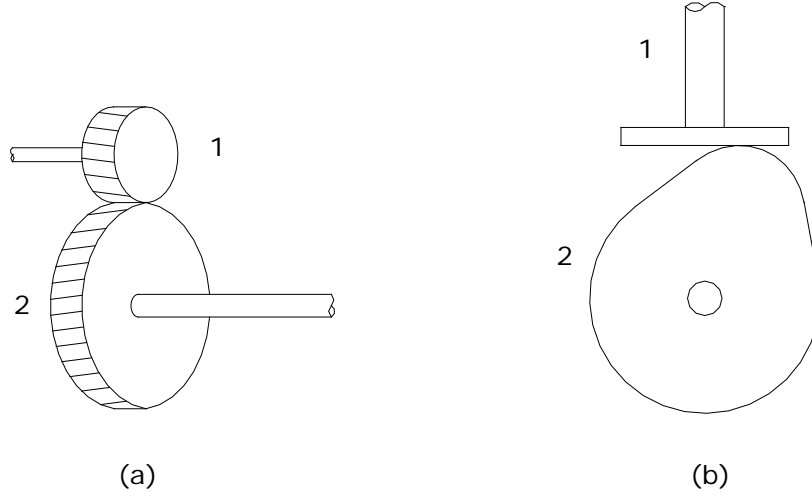
**a) Adi kinematik çift:** Aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi kinematik elemanlar arasında yüzeysel temas vardır. Adi eleman çiftlerinde öteleme ve dönme hareketleri aynı anda birlikte olamaz, ayrı ayrı olurlar. Yani, adi eleman çiftleri bir tek harekete izin verdiklerinden bir serbestlik derecesine ( $f=1$ ) sahiptirler.



**Şekil 1.2. Adi kinematik çift (a) Kayar çift (b) Döner çift**

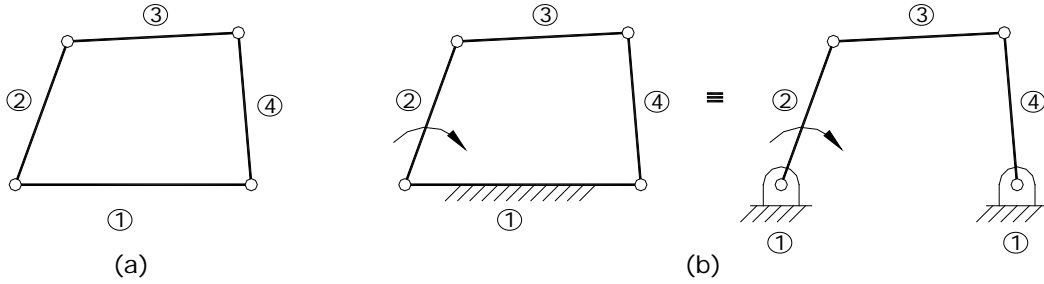
**b) Yüksek kinematik çift:** Kinematik çifti oluşturan elemanlar ya bir nokta yada bir çizgi boyunca temas halindedirler. Yüksek eleman çiftlerinde öteleme ve dönme

(kayma ve yuvarlanma) hareketleri aynı anda birlikte olabilirler. Yani, yüksek eleman çiftleri aynı anda iki hareket çeşidine izin verdiklerinden iki serbestlik derecesine ( $f=2$ ) sahiptirler.



**Şekil 1.3. Yüksek kinematik çift (a) Düz dişli çifti (b) Kam çifti**

**Kinematik zincir:** Birbirlerine kinematik çiftlerle bağlanmış uzuvlar topluluğuna kinematik zincir denir. Kinematik zinciri oluşturan uzuvlardan biri sabitlenip diğeri hareketlendirildiğinde mekanizma elde edilir.



**Şekil 1.4. (a) Kinematik zincir (b) Mekanizma**

**Mekanizmaların serbestlik derecesi:** Bir mekanizmanın serbestlik derecesi, mekanizmanın hareketli uzuvlarının konumlarını (sabit uzva göre) tanımlamak (belirlemek) için gerekli olan birbirinden bağımsız parametre sayısıdır. Diğer bir deyişle, mekanizmaların çıkış uzvunun istenilen yörüngedeki hareketini sağlamak için gerekli olan, tek hareketli giriş uzvu sayısına serbestlik derecesi denir.

**Düzlemsel Mekanizmalar:** Uzuvları aynı düzlemde veya birbirine paralel düzlemlerde hareket eden mekanizmalardır.

**Düzlemsel mekanizmalar için serbestlik derecesi:** Bu mekanizmalardaki uzuvlar için üç çeşit hareket söz konusudur. Bunlar x ekseninde öteleme hareketi, y ekseninde öteleme hareketi ve xy düzleminde dönme hareketidir.

Kayar ve döner eleman çiftlerine sahip bir düzlemsel mekanizmanın serbestlik derecesi aşağıdaki ifadeyle verilir.

$$F = 3n - 3 - 2j$$

Burada:

F: serbestlik derecesi

n: uzuv sayısı

j: mafsalsayısı

dır. Buna göre bir mekanizmanın serbestlik derecesi uzuv sayısına, mafsalsayısına ve mafsalsayısına bağlı olup, uzuv uzunluklarından bağımsızdır. Ancak uzuv uzunluklarının farklı seçimi mekanizmadan elde edilebilecek olan çıkış hareketinin özelliklerini değiştirir.

F=1 için “mecburi hareketli mekanizma” elde edilir. Bu durumda ifade

$$2j - 3n + 4 = 0$$

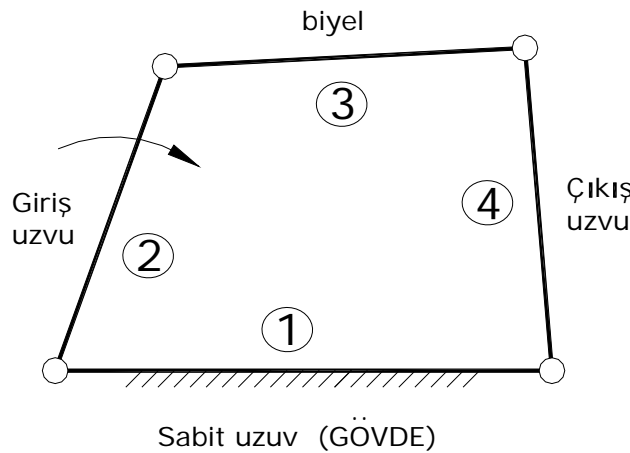
olur. Bu eşitlik “**Grübler mecburi hareketlilik eşitliği**” dir. Kullanılmakta olan makinalardaki mekanizmaların büyük bir çoğunluğu mecburi hareketli düzlemsel mekanizmalardır.

Bir mekanizmada sabit uzvun ve tahrik edilecek olan uzvun seçimine bağlı olarak farklı işleyiş özelliklerine sahip olan mekanizmalar elde edilebilir. Buna göre belirli bir uzvu tahrik edilmiş olan mecburi hareketli bir mekanizma “yönlendirilmiş mekanizma” olarak adlandırılır. Bu tanıma göre de makina tanımını aşağıdaki şekilde yapmak mümkündür. Bir makina belirli bir görevi (enerji iletme, dönüştürme ve iş yapma) yerine getirmek amacıyla tasarlanmış olan bir yönlendirilmiş mekanizmadır.

### 1.3. Basit Kol Mekanizmaları

#### 1.3.1. Dört Çubuk Mekanizması

Bu mekanizma makina ve düzeneklerde en yaygın bir şekilde kullanılan veya karşılaşılan bir mekanizmadır.



Şekil 1.5. Dört çubuk mekanizması

Bu mekanizmada her bir uzva düşen görevler aşağıda sıralanmıştır.

**Sabit uzuv:** Gövde görevini yapar, bütün diğer uzuvların hareketleri bu uzuv referans alınarak tanımlanır.

**Tahrik eden uzuv veya tahrik uzvu (giriş uzvu):** Mekanizma bu uzuvdan tahrik edilir. Giriş hareketinin verildiği uzuvdur.

**Nakil uzvu (biyel):** Tahrik eden uzuv ile tahrik edilen uzvu bağlayan uzuvdur. Hareketi nakleder.

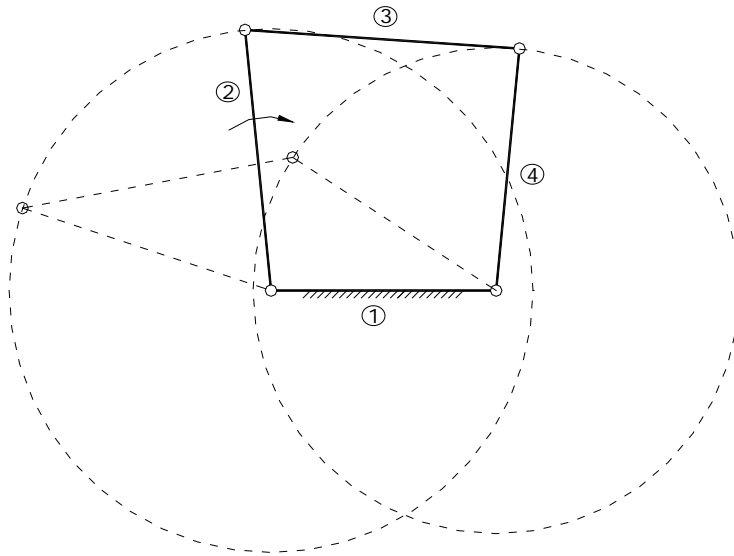
**Tahrik edilen uzuv (çıkış uzvu):** İstenilen çıkış hareketini yerine getiren uzuvdur.

Burada sabit uzva komşu olan uzuvların hareketliliği için iki olanak vardır (iki durum söz konusudur).

- a-) Uzuv tam bir dönme hareketi yapabilir. Bu durumda bu uzva **kol** veya **krank** adı verilir.
- b-) Uzuv ancak iki sınır konum (ölü konum) arasında ileri – geri gidip gelebilir, yani salınım yapabilir. Salınım yapan uzva **sarkaç kol** adı verilir.

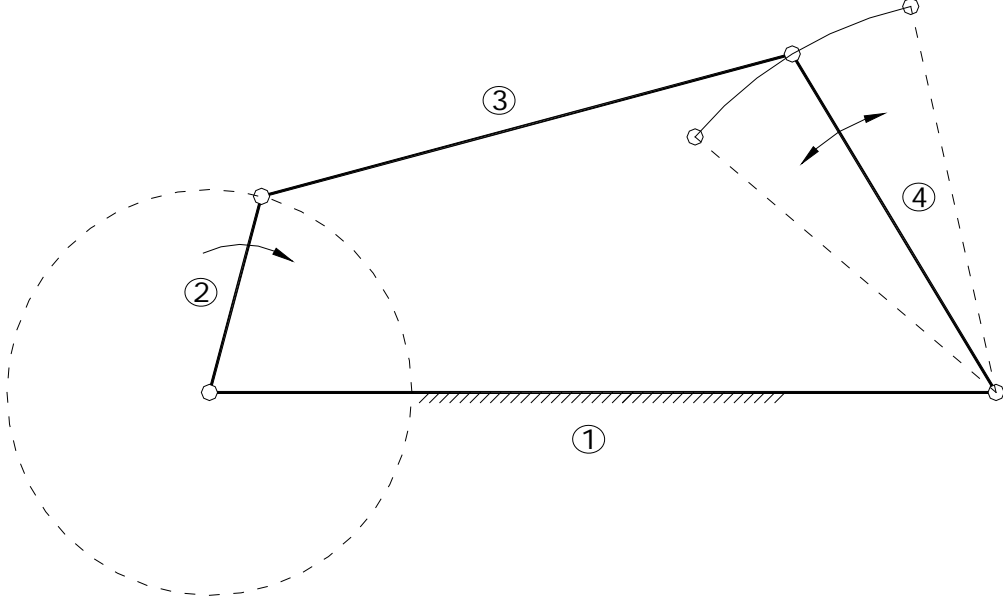
Yukarıda bahsedilen uzuvların hareketlilik durumuna göre aşağıda açıklanan üç farklı işleyiş özelliğine sahip mekanizma söz konusudur. Bu mekanizmalar için gerek ve yeter şart; Grasshof Teoremi'ne göre uzunluğu en kısa olan uzuvla en uzun olan uzvun uzunluklarının toplamı diğer iki uzvun uzunlukları toplamından küçük olmalıdır.

**1-) Çift kol mekanizması:** Uzunluğu en kısa olan uzuv sabit uzuv yapılır. Bu uzva komşu iki uzuv (2 ve 4) tam dönüş yapar.



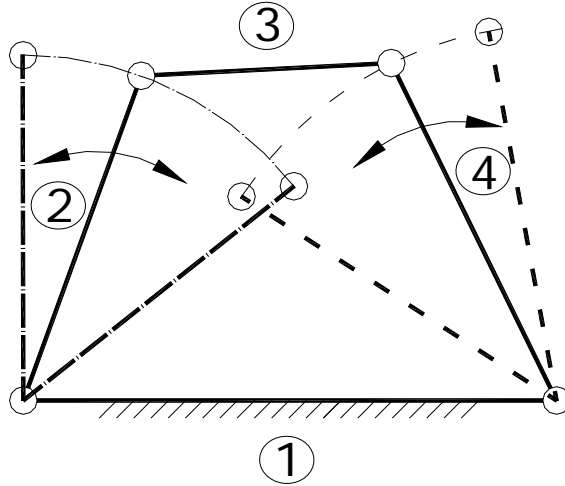
**Şekil 1.6.** Çift kol mekanizması

**2-) Kol-sarkaç kol mekanizması:** Uzunluğu en kısa olan uzva komşu bir uzuv sabit tutulur ve en kısa uzuv tahrik edilir. Bu durumda 2 uzvu tam dönüş ve 4 uzvu ise sarkaç hareketi yapar.



Şekil 1.7. Kol-sarkaç kol mekanizması

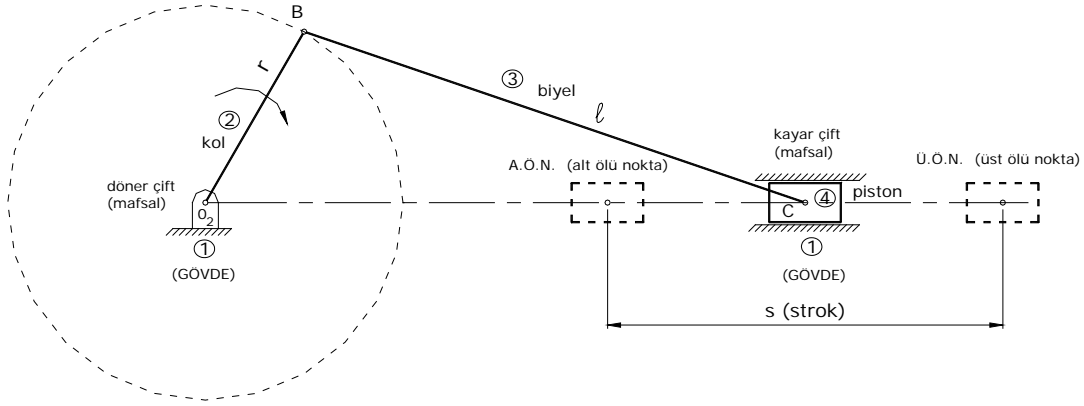
**3-) Çift sarkaç kol mekanizması:** En kısa olan uzvun karşısındaki uzuv sabit tutulur. Bu durumda 2 ve 4 uzuvları salınım hareketi yaparlar.



Şekil 1.8. Çift sarkaç kol mekanizması

### 1.3.2. Krank – biyel mekanizması

Krank – biyel mekanizması pistonlu motorlarda ve pistonlu kompresörlerde kullanılan ana mekanizmadır. Motor durumunda pistonun gidip-gelme hareketi kolda bir dönme hareketine çevrilir. Kompresör durumunda ise kolun dönme hareketi pistonda bir gidip-gelme hareketine çevrilir.



Şekil 1.9. Krank – biyel mekanizması

Burada pistonun hareket doğrultusu krank eksenine ile çakışırsa merkezi krank biyel mekanizması olur. Aksi durumda eksantrik krank biyel mekanizması söz konusu olur.

Pistonun Alt Ölü Nokta (A.Ö.N.) ve Üst Ölü Nokta (Ü.Ö.N.) arasındaki hareket uzunluğu **strok** olarak adlandırılır. Krank yarıçapı  $r$  olmak üzere

$$s = 2r$$

bağıntısı geçerlidir. Ayrıca biyel uzunluğu  $l$  olmak üzere,

$$l = r / \lambda$$

oranı mekanizmanın kullanım alanına göre pratikten seçilerek, verilen bir  $s$  stroğu için uzuv uzunlukları ( $r$  ve  $l$  değerleri) hesaplanır.

## 2. MAKİNALARDA KUVVET ANALİZİ

Makina, iş yapan, ya da enerji ileten / dönüştüren bir sistem olup burada enerji iletimi bir güç kaynağından tahrik edilecek olan veya karşılanacak olan yüke kadar mekanik kuvvetler yardımıyla olur. Bu bakımdan bir makinaı oluşturacak olan mekanizma veya mekanizmaların tasarımında makinanın girişinden çıkışına kadar iletilecek olan kuvvetlerin bilinmesi gerekir. Bu kuvvetlerin bilinmesinden sonra ancak tüm makina uzuvlarının bu kuvvetleri karşılayacak şekilde uygun olan tasarımları yapılabilir.

Makinalardaki kuvvetler çeşitli kaynaklardan doğabilirler. Bunlar, ağırlık kuvvetleri, montaj kuvvetleri, uygulanan dış kuvvetler ve enerji iletiminden doğacak olan kuvvetler olabilir. Bunlardan başka makinanın çalışması esnasında ortaya çıkan atalet kuvvetleri, sirtünme kuvvetleri, yay kuvvetleri, çarpma kuvvetleri ve sıcaklık değişiminden kaynaklanan kuvvetler de var olabilir. Bu kuvvetler içerisinde dinamik bakımından en önemli olanı atalet kuvvetleri olup, bunlar makina uzuvlarının ivmelendirilmesinden doğarlar. Eğer atalet kuvvetlerinin büyüklüğü uygulanan diğer kuvvetlerle karşılaştırıldığında oldukça küçük kalıyorsa ihmal edilebilirler. Bu durumda yapılacak olan kuvvet analizi “**statik kuvvet analizi**” olarak adlandırılır. Eğer atalet kuvvetleri ihmal edilemiyorsa, yani hesaba katılırsa yapılacak olan kuvvet analizi “**dinamik kuvvet analizi**” olarak adlandırılır.

Yapılacak olan her iki analizde de makina uzuvlarının eř çalışan kısımlarının iyi bir şekilde yağlandıkları kabul edilirse sirtünme kuvvetleri ihmal edilebilir. Bu durumda bir makina uzvundan diğer bir makina uzvuna iletilecek olan kuvvetin, uzuvların temas yüzeylerine dik olacağı kabul edilir. İncelemede yapılacak olan diğer bir kabul ise makina uzuvlarının elastik şekil değişimlerinin ihmal edilebilir mertebede kalacağıdır. Yani uzuvlar rijit katı cisimler olarak ele alınacaktır. Makina uzuvlarının elastik şekil değişimlerinin, yani yaylanma özelliklerinin hesaba katılmasının makinanın dinamik davranışı üzerindeki etkisi “**makina titreşimi**” konusu içerisinde ele alınacaktır.

### 2.1. Statik Kuvvet Analizi

#### 2.1.1. Statik Denge

Bir serbest katı cismin statik dengesi için cisim üzerine etki eden bütün kuvvetlerin vektörel toplamının (bileşkesinin) ve bu kuvvetlerin aynı bir noktaya göre alınacak olan momentlerinin vektörel toplamının (bileşkesinin) sıfır olması gerekir. Bu statik denge şartları matematik olarak aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\sum \vec{F} = 0$$
$$\sum \vec{T} = 0$$

Üç boyutlu yükleme durumunda yukarıdaki vektörel eşitliklerin her biri üç skaler eşitlikle temsil edilir. Dolayısıyla toplam olarak 6 skaler eşitliğin genel denge durumu için sağlanması gerekir. Oldukça sık karşılaşılan iki boyutlu, yani düzlemsel yükleme durumunda vektörel eşitlikler üç skaler eşitlikle ifade edilirler. Yükleme düzlemi olarak xy düzlemi seçilirse, bu eşitlikler;



$$\left. \begin{array}{l} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{array} \right\} Kuvvet$$

$$\sum T_z = 0 \left. \vphantom{\sum F_x = 0} \right\} Moment$$

olarak yazılır.

Lineer sistemler için kuvvetlerin toplamsallığı (süperpozisyon prensibi) geçerlidir. Bu prensibe göre sisteme etki eden tüm kuvvetlere karşı sistemin bileşke tepkisi, bu kuvvetlerin her birinin sistem üzerinde ayrı ayrı yaratacakları tepkilerin toplamına eşittir. Bu özellikten faydalanarak kuvvet analizi grafik olarak yapılabilir.

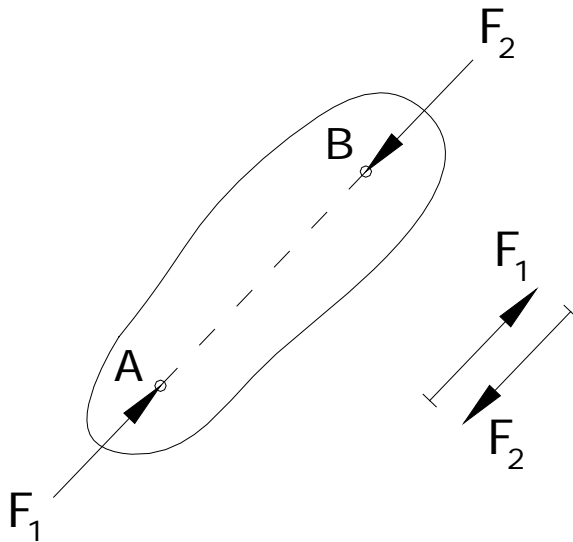
### 2.1.2. Grafik Kuvvet Analizi

Grafik Kuvvet Analizinde makina uzuvlarının serbest cisim diyagramları kullanılarak kuvvet diyagramları çizilir ve buradan bilinmeyen makina kuvvetleri tayin edilir. Bu yöntem özellikle düzlemsel kuvvet durumu için çok kullanışlıdır. Burada kuvvet analizine geçmeden önce makinayı meydana getiren uzuvlar için karşılaşılan yükleme durumlarının ele alınması gerekir. Bu yükleme durumları üç şekilde ortaya çıkar.

#### a) İki Kuvvet Etkisi Altında Bulunan Uzuv:

İki kuvvet etkisi altında bulunan bir uzvun, bu kuvvetler etkisi altında dengede olabilmesi için

- 1°)  $\vec{F}_1$  ve  $\vec{F}_2$  kuvvetlerinin büyüklüklerinin eşit olması gerekir.
- 2°) Aynı doğrultu üzerinde bulunmaları gerekir.
- 3°) Yönlerinin birbirine zıt olması gerekir.



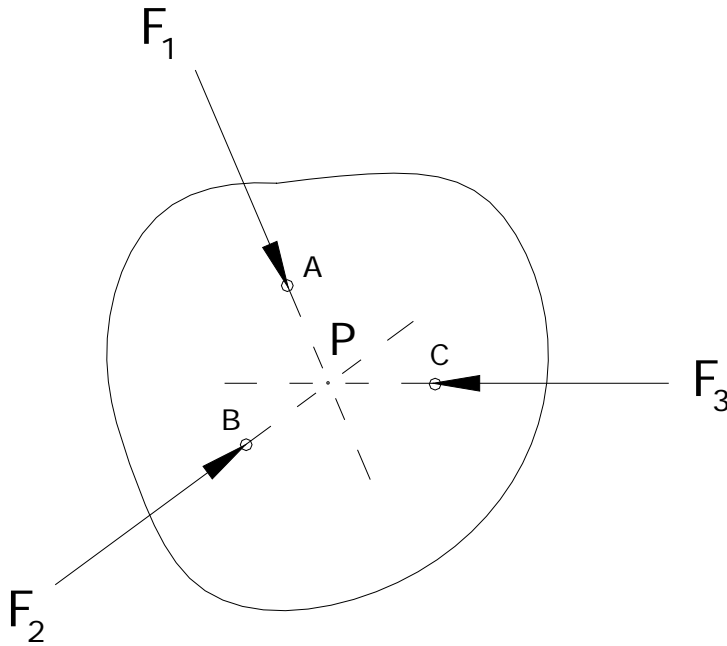
Şekil 3.1. (a) İki kuvvet etkisi altında bulunan uzuv.

**b) Üç Kuvvet Etkisi Altında Bulunan Uzun:**

Üç kuvvet etkisi altında bulunan bir uzun, bu kuvvetler etkisi altında dengede olabilmesi için

1°) Bu üç kuvvetin bileşkesi sıfır olmalıdır.  $\left( \sum \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0 \right)$

2°) Bu üç kuvvetin doğrultuları aynı bir noktada kesişmelidir. Yani bu durum  $\left( \sum \vec{T} = 0 \right)$  denge şartını sağlar.



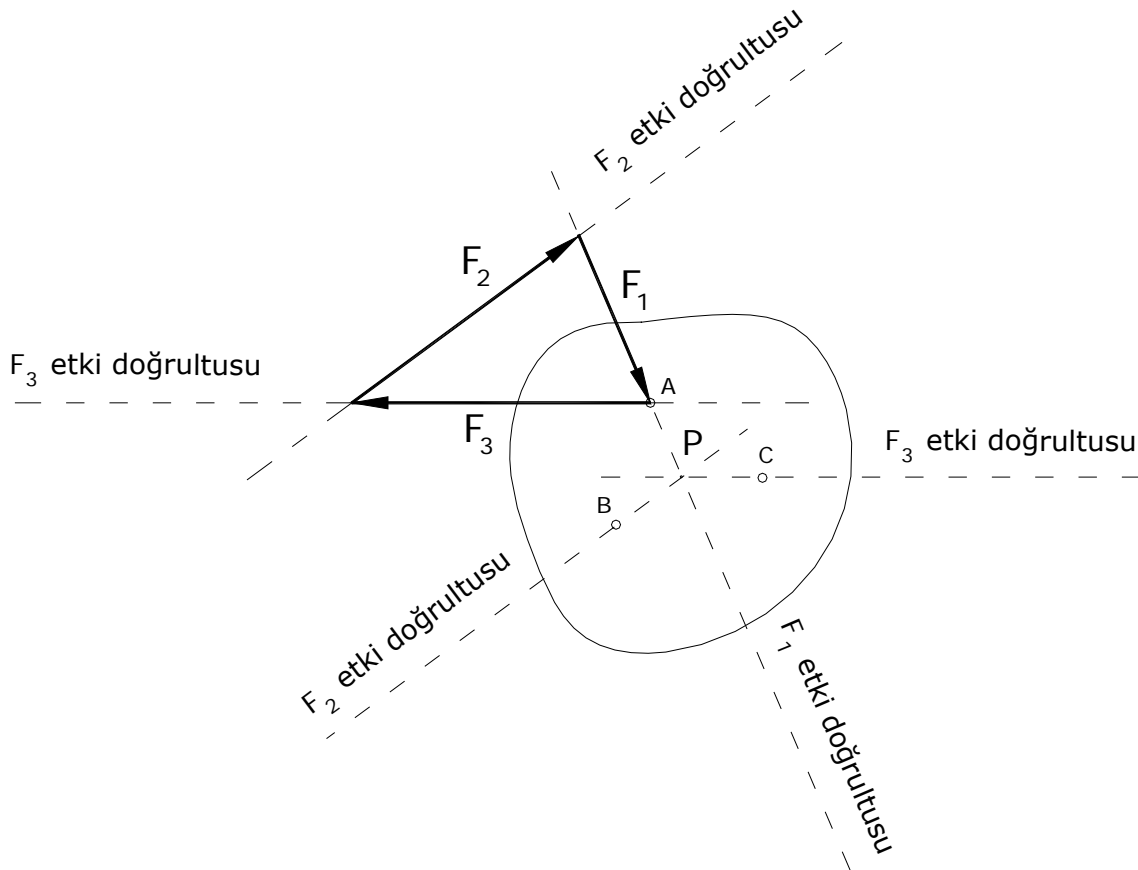
**Şekil 3.1. (b)** Üç kuvvet etkisi altında bulunan uzun.

Burada karşımıza şu durum çıkar:

- Kuvvetlerden bir tanesi tamamıyla bilinir, yani yönü ve doğrultusuyla büyüklüğü bilinir. Bu kuvvet  $\vec{F}_1$  olsun.
- İkinci kuvvetin doğrultusu bilinir ama büyüklüğü bilinmez ( $\vec{F}_2$ ).
- Üçüncü kuvvetin büyüklüğü ve yönü bilinmez ( $\vec{F}_3$ ).

Bu durumda  $\vec{F}_2$  ve  $\vec{F}_3$  kuvvetleri şu şekilde tayin edilirler;

- $\vec{F}_1$  ve  $\vec{F}_2$  'nin doğrultuları kesiştirilerek kesim noktası (P) bulunur.
- $\vec{F}_3$  'de aynı (P) noktasından geçeceğinden  $\vec{F}_3$  'ün (C) etki noktasından (bu nokta gerçekte uzun bir mafsal noktasıdır) P'ye bir doğru çizilerek  $\vec{F}_3$  'ün etki doğrultusu belirlenir.
- $\vec{F}_1$  kuvveti belirli bir ölçekle çizilir.
- $\vec{F}_1$  'in başlangıcından (veya ucundan)  $\vec{F}_2$  'nin etki doğrultusuna paralel bir doğru çizilir.
- $\vec{F}_1$  'in ucundan (veya başlangıcından)  $\vec{F}_3$  'ün etki doğrultusuna paralel bir doğru çizilir.  $\vec{F}_2$  ve  $\vec{F}_3$  doğrultularının kesişmesi ile aranan kuvvet üçgeni belirlenir. Kuvvet üçgeninden  $\vec{F}_2$  ve  $\vec{F}_3$  'ün büyüklükleri ölçülerek bulunurlar.

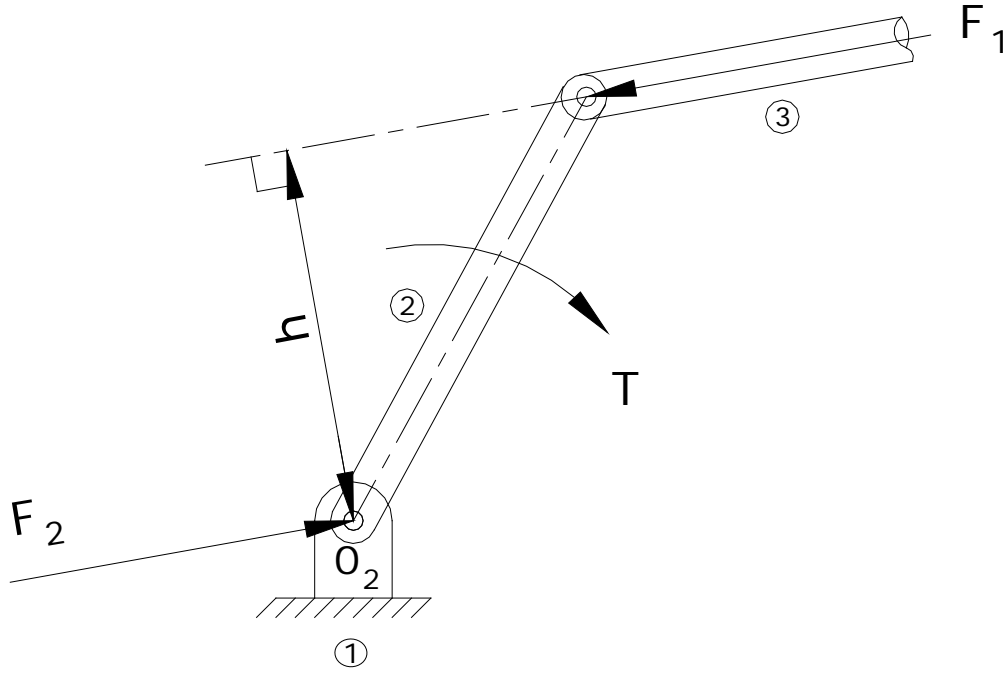


**Şekil 3.1. (c)** Üç kuvvet etkisi altında bulunan bir uzuvda bilinmeyen kuvvetlerin çizimle belirlenmesi.

c) **İki Kuvvet ve Bir Moment Etkisi Altında Bulunan Uzuv:**

İki kuvvet ve bir moment etkisi altında bulunan bir uzvun statik dengesi için;

- 1°)  $\vec{F}_1$  ve  $\vec{F}_2$  kuvvetleri bir kuvvet çifti oluşturacak şekilde olmalıdırlar  
 $\left( |\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| \text{ ve zıt yönlü} \right)$ .
- 2°) Bu kuvvet çiftinin büyüklüğü  $\vec{T}$  momentinin büyüklüğüne eşit fakat yönü zıt yönde olmalıdır.



Şekil 3.1. (d) İki kuvvet ve bir moment etkisi altında bulunan uzuv.

Kolun moment dengesinden (+ ↺ saat ibrelerinin ters dönüş yönü pozitif yöndür).

$$\sum \vec{T}_{O_2} = 0$$

$h$  mesafesi ölçülür,

$$-T + F_1 h = 0$$

$$T = F_1 h$$

olacaktır.  $\vec{F}_1$  kuvveti bilindiğinde  $\vec{T}$  denge momenti buradan hesaplanır.

### 2.1.2.1. Krank – Biyel Mekanizmasının Grafik Kuvvet Analizi

**Örnek 5:** Örnek 2’de verilen krank-biyel mekanizmasının  $\vec{P}$  kuvveti etkisi altında statik dengesi için kola uygulanması gereken  $\vec{T}$  momentini bulunuz.

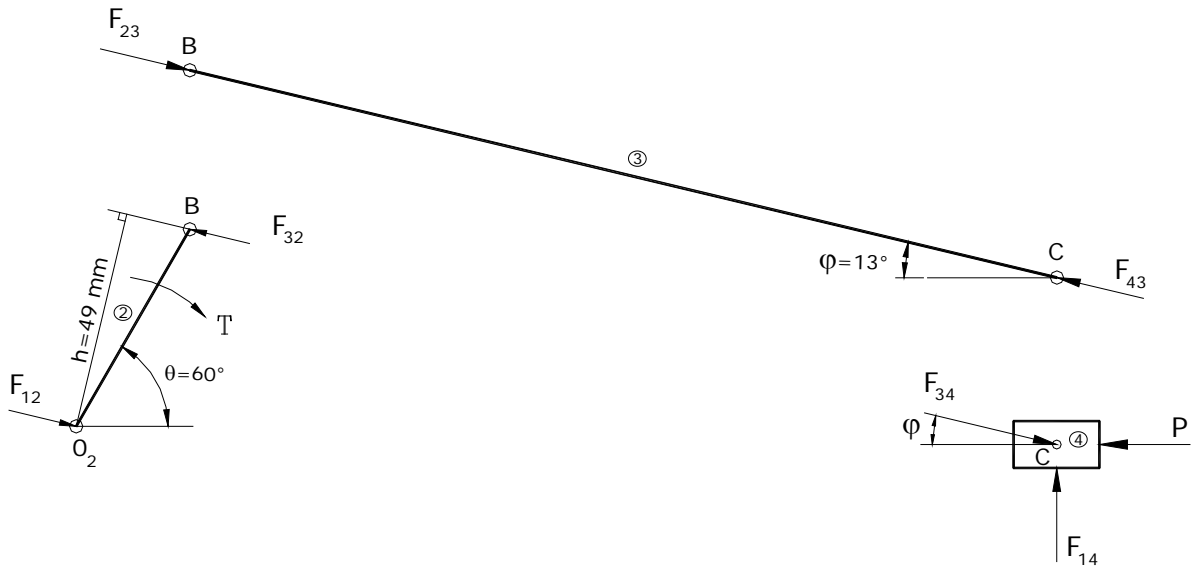
Verilenler:

$$\overline{O_2B} = 51 \text{ mm} \quad \overline{BC} = 200 \text{ mm} \quad \theta = 60^\circ \quad P = 6300 \text{ N} \quad T = ?$$

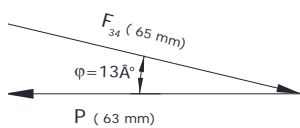
c

Çözüm:

Önce mekanizma belirli bir ölçekle çizilerek biyelin yatayla yaptığı  $\varphi$  açısı belirlenir. Mekanizmayı meydana getiren uzuvların serbest cisim diyagramları aşağıda gösterildiği şekilde çizilirler (Mafsal kuvvetlerinin numaralandırılmasında 1. indis kuvveti uygulayan bağlı uzvun numarasını ve 2. indis ise kuvvetin uygulandığı uzvun numarasını göstermektedir):



Kuvvet diyagramını oluşturmak için önce iki kuvvet etkisi altında bulunan ③ uzvundan  $\vec{F}_{43}$  doğrultusu alınarak ④ uzvu üzerine taşınır. Buna göre ④ uzvu üç kuvvet etkisi altında bulunmaktadır. Çizim işlemi 3.1.2.(b) kısmında açıklandığı şekilde yapılarak kuvvet diyagramı çizilir. Ölçüm yapılarak;



$$F_{14} = 14.5 * 100 = 1450 \text{ N}$$

$$F_{34} = F_{43} = F_{23} = F_{32} = F_{12} = 65 * 100 = 6500 \text{ N}$$

bulunur. Kol uzvu iki kuvvet ve bir moment etkisi altında bulunmaktadır. Önce  $\vec{F}_{32}$  B'ye taşınarak moment kolu uzunluğu  $h = 49 \text{ mm}$  olarak ölçülür. Kısım 3.1.2.(c)'de açıklandığı şekilde kolun moment dengesinden

$$\sum \vec{T}_{O_2} = 0$$

$$-T + F_{32} * h = 0$$

$$T = F_{32} * h = 6500 * 49 = 318500 \text{ Nmm} = 318.5 \text{ Nm} (\curvearrowright)$$

elde edilir.

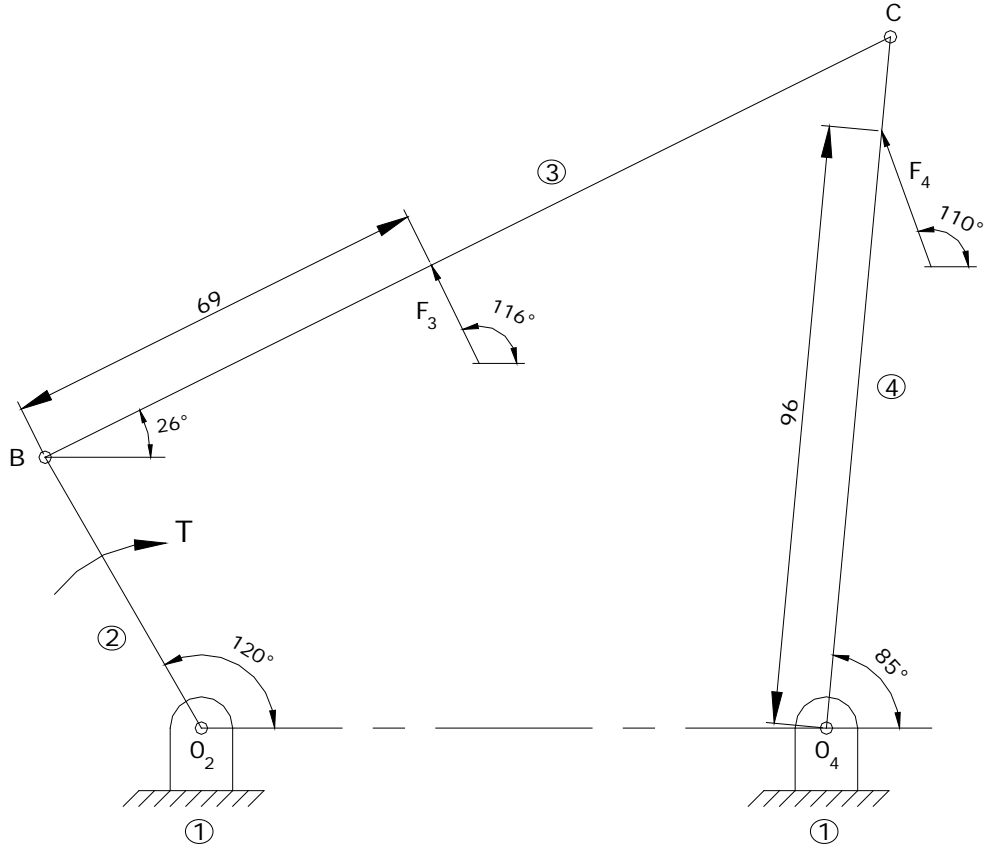
#### 2.1.2.2. Dört Çubuk Mekanizmasının Grafik Kuvvet Analizi

**Örnek 6:** Örnek 1'de verilen dört çubuk mekanizmasının verilen  $\vec{F}_3$  ve  $\vec{F}_4$  kuvvetleri etkisi altında statik dengesi için kola uygulanması gereken  $\vec{T}$  momentini bulunuz.

Verilenler:

$$\overline{O_2O_4} = 100 \text{ mm} \quad \overline{O_2B} = 50 \text{ mm} \quad \overline{BC} = 151 \text{ mm} \quad \overline{O_4C} = 111 \text{ mm}$$

$$\theta = 120^\circ \quad F_3 = 187 \text{ N} \quad F_4 = 60 \text{ N} \quad T = ?$$



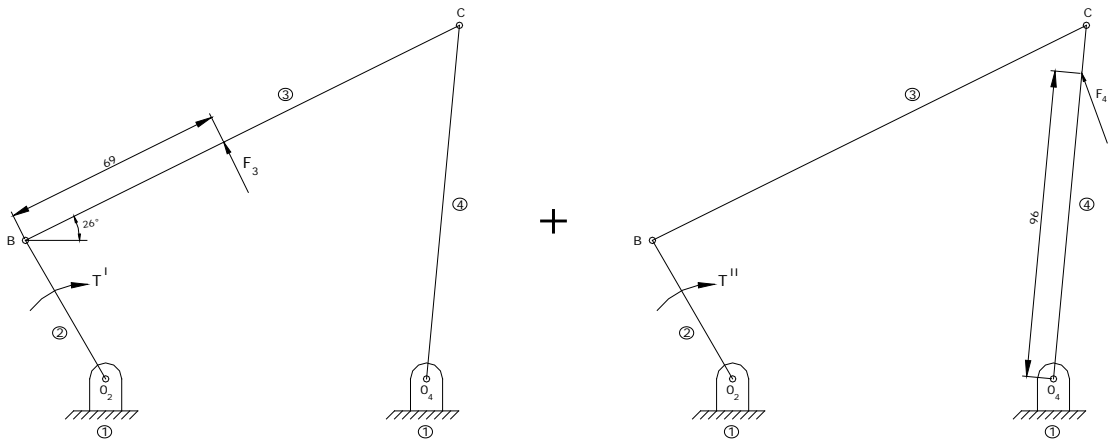
Çözüm:

Problem süper pozisyon prensibine göre iki alt probleme ayrılarak çözülür. Yani  $\vec{F}_3$  kuvveti ve  $\vec{F}_4$  kuvveti için ayrı ayrı çözüm yapılarak elde edilen mafsal kuvvetleri ve momentler vektörel olarak toplanır. Buradan bileşke değerler elde edilir.

**Alt Problem I**

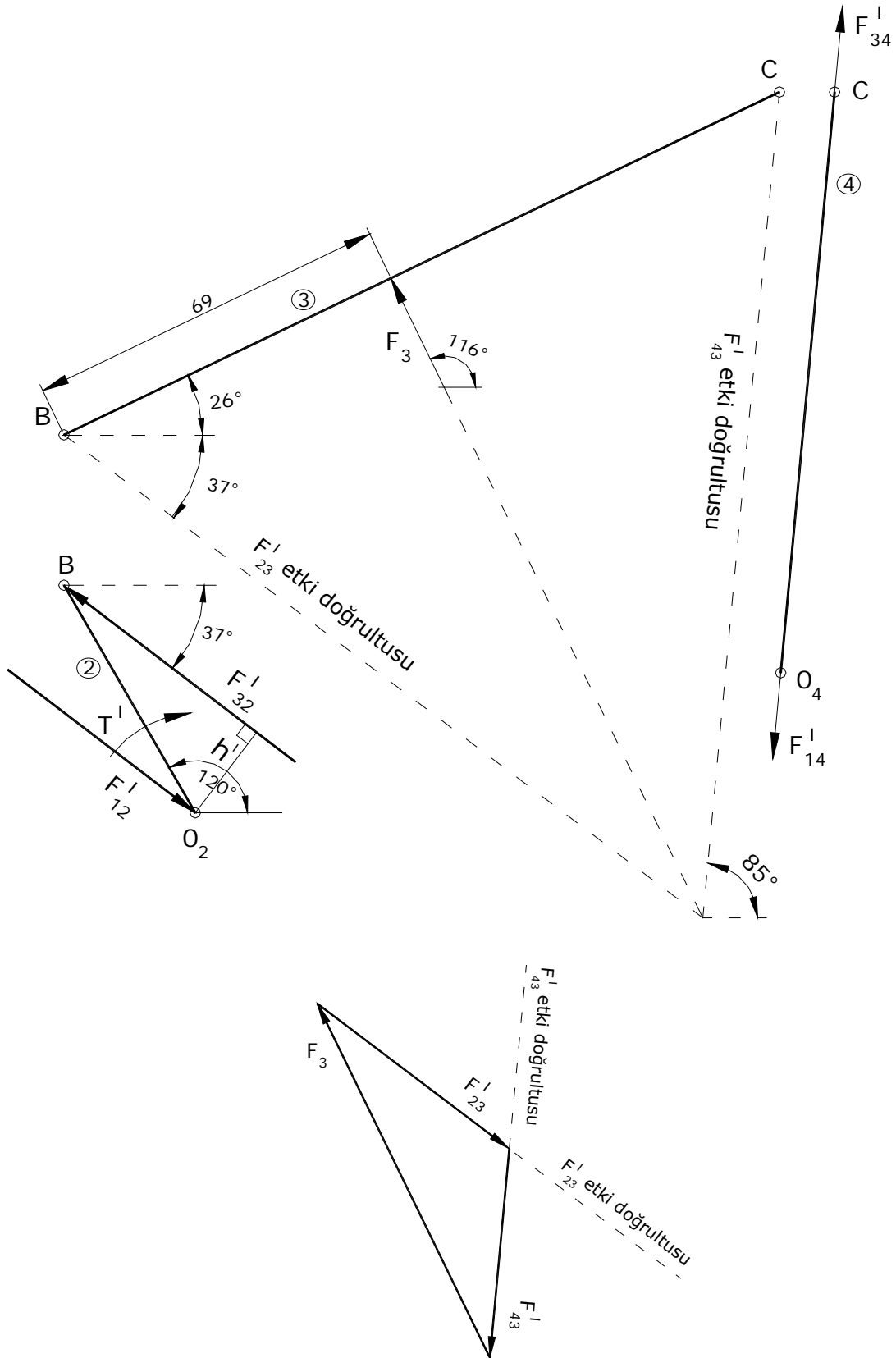
ve

**Alt Problem II**



**Alt Problem I için çözüm:** Bu çözüm yalnız  $\vec{F}_3$ 'ün var olması durumudur. Önce mekanizmanın uzuvlarının serbest cisim diyagramları çizilir. Buna göre ④ uzvu iki kuvvet,

③ uzvu 3 kuvvet ve ② uzvu ise iki kuvvet ve bir moment etkisi altında bulunmaktadır. Serbest cisim diyagramları ve buna göre çizilen kuvvet diyagramları aşağıda gösterilmiştir.





Ölçek: 2 N/mm

$$F_3 = \frac{187 \text{ N}}{2 \text{ N/mm}} = 93.5 \text{ mm}$$

Ölçüm sonucu bulunan değerler:

$$F_{43}^I = 49.79 \text{ mm ve } F_{23}^I = 49.79 \text{ mm}$$

$$F_{43}^I = 49.79 * 2 \approx 100 \text{ N}$$

$$F_{43}^I = F_{34}^I = F_{14}^I = 100 \text{ N}$$

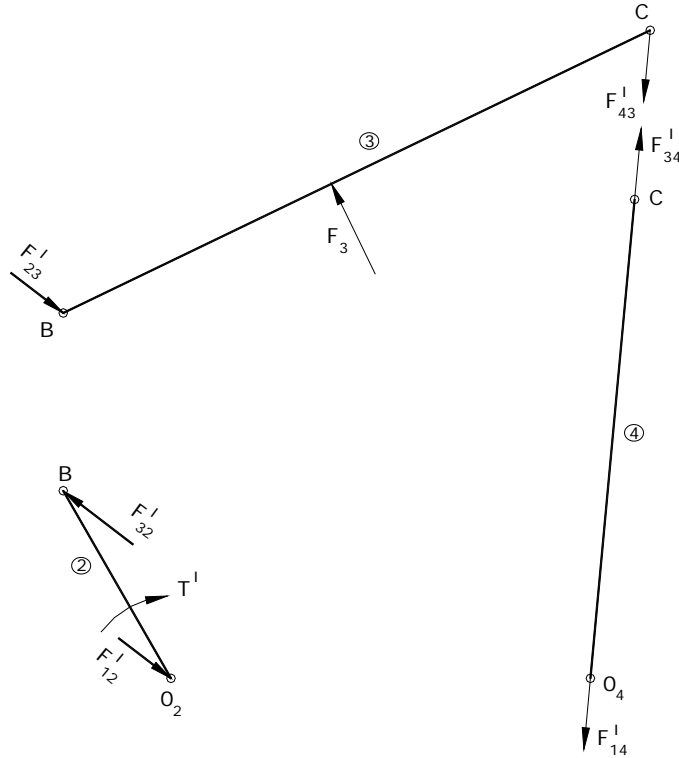
$$F_{23}^I = 57.14 * 2 \approx 114 \text{ N}$$

$$F_{23}^I = F_{32}^I = F_{12}^I = 114 \text{ N}$$

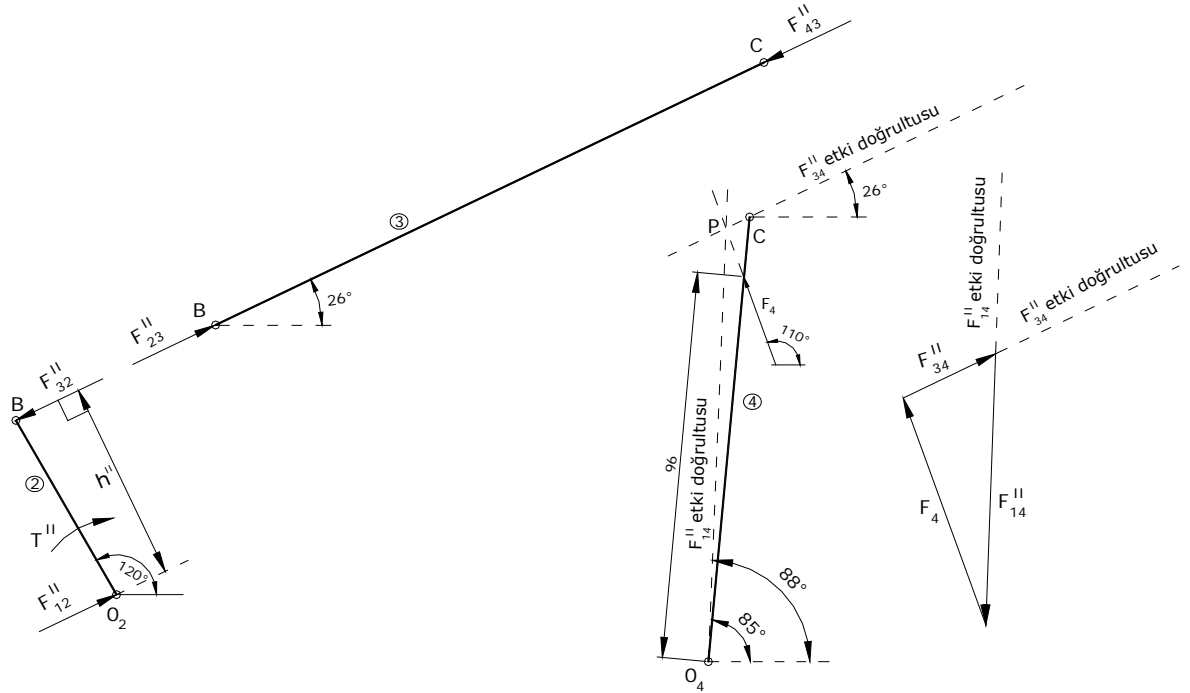
$$h^I = 19 \text{ mm}$$

$$-T^I + F_{32}^I * h^I = 0$$

$$T^I = F_{32}^I * h^I = 114 * 19 \\ = 2166 \text{ Nmm} (\curvearrowright)$$



**Alt Problem II için çözüm:** Bu çözüm yalnız  $\vec{F}_4$ 'ün var olması durumudur. Bu durumda aşağıda çizilmiş olan serbest cisim diyagramlarından görüleceği gibi ③ uzvu iki kuvvet, ④ uzvu 3 kuvvet ve ② uzvu ise iki kuvvet ve bir moment etkisi altında bulunmaktadır. Kuvvet diyagramı çizimi benzer şekilde yapılır.



Ölçüm sonucu bulunan değerler ölçekle çarpıldı:

$$F_{14}'' = 68 \text{ N}$$

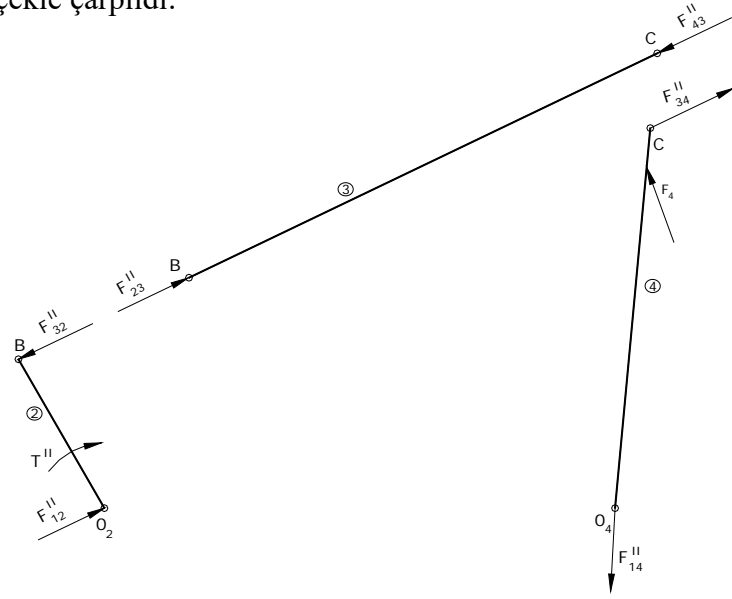
$$F_{34}'' = F_{43}'' = F_{23}'' = F_{32}'' = F_{12}'' = 25.5 \text{ N}$$

$$h'' = 50 \text{ mm}$$

$$-T'' + F_{32}'' \cdot h'' = 0$$

$$T'' = F_{32}'' \cdot h'' = 25.5 \cdot 50$$

$$= 1275 \text{ Nmm} \quad (\curvearrowright)$$



**Çözüm:** Problemin tam çözümü Alt Problem I ve Alt Problem II'nin toplamından elde edilir. Toplam denge momenti T;

$$T = T' + T'' = 2166 + 1275$$

$$= 3441 \text{ Nmm} \quad (\curvearrowright)$$

olarak bulunur.

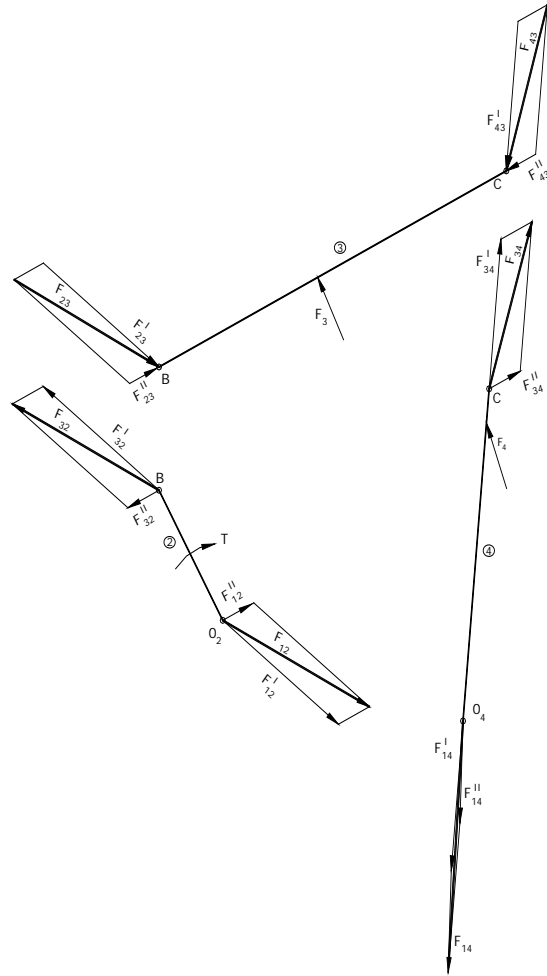
Bileşke mafsallı kuvvetleri ise uzuvların serbest cisim diyagramları üzerinde gösterildiği gibi ilgili bileşenlerin vektörel toplamından elde edilir.

Ölçüm sonucu bulunan bileşke kuvvet değerleri:

$$F_{12} = F_{32} = 127.5 \text{ N}$$

$$F_{34} = F_{43} = 115 \text{ N}$$

$$F_{14} = 168 \text{ N}$$

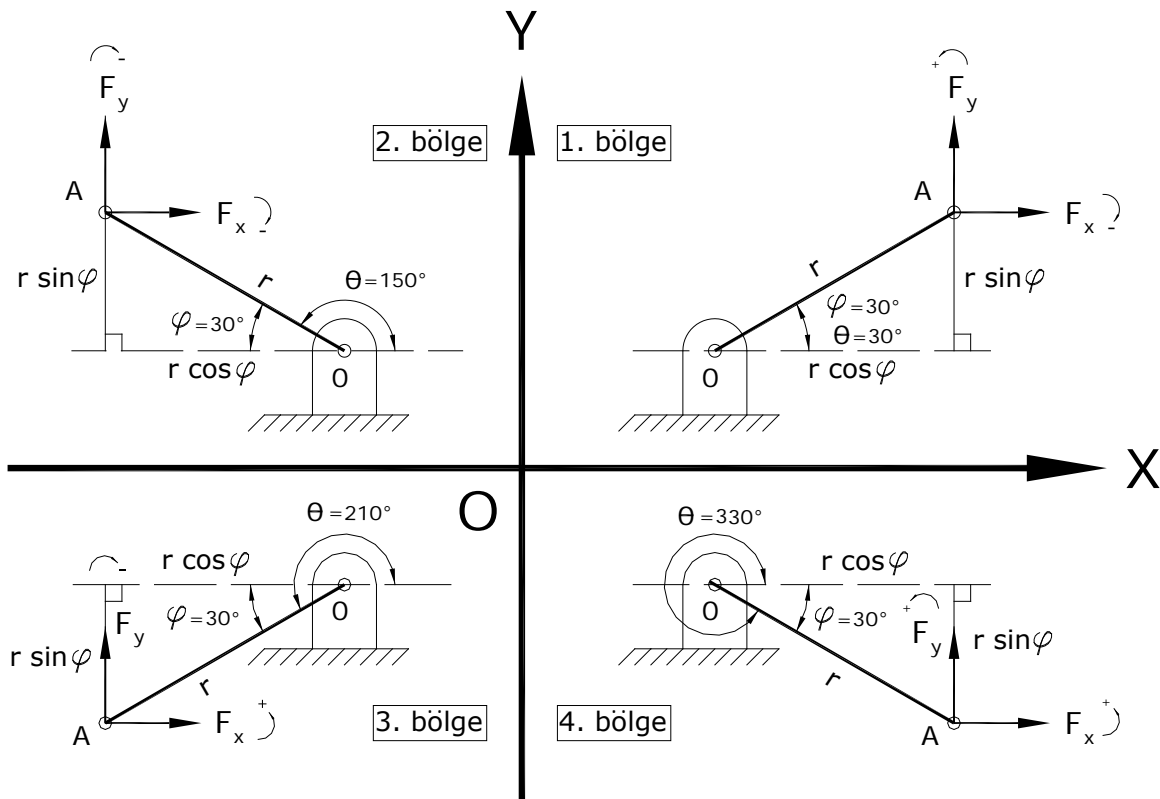


### 2.1.3. Analitik Kuvvet Analizi

Analitik kuvvet analizinde statik denge şartları olarak verilen matematik ifadeler kullanılır. Burada da yine grafik analizde yapıldığı gibi mekanizmayı meydana getiren uzuvların serbest cisim diyagramları göz önüne alınır. Ancak grafik kuvvet analizinde çizilen kuvvet diyagramları yerine bunların eşdeğeri olan vektör eşitlikleri yazılır. Analitik yöntem bilgisayar kullanımına imkan tanıdığından burada sonuçlar çok daha hızlı ve doğru bir şekilde istenildiği kadar mekanizma konumu için elde edilebilir.

#### Hatırlatma:

**MOMENT:** Bir kuvvetin bir noktaya göre momenti; o nokta ile kuvvet vektörünün arasındaki dikmenin (**moment kolu**), kuvvet ile çarpımına denir.



Şekil 3.2. r uzunluğundaki kola etkiyen F kuvvetinin oluşturduğu moment

Şekilde verilen r uzvuna A noktasından etki eden  $\vec{F}$  kuvvetinin oluşturacağı  $\vec{T}$  momentinin ifadesini uzvun konumunu belirleyen  $\theta$  ve  $\varphi$  açılarını dikkate alarak ayrı ayrı yazalım.

**Tablo 2.**  $\vec{F}$  kuvvetinin oluşturduğu  $\vec{T}$  momentinin  $\theta$  ve  $\varphi$  açılarının dikkate alınarak hesabı

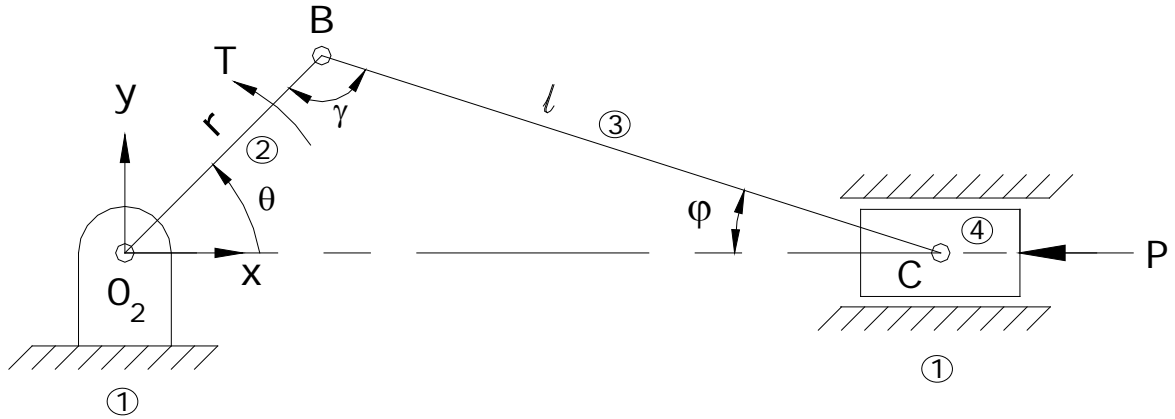
	$\theta$ açısını dikkate alarak moment hesabı	$\varphi$ açısını dikkate alarak moment hesabı
1. Bölge	$\theta = 30^\circ$ $T = -F_x r \sin \theta + F_y r \cos \theta$ $= -F_x r \sin 30 + F_y r \cos 30$	$\varphi = 30^\circ$ $T = -F_x r \sin \varphi + F_y r \cos \varphi$ $= -F_x r \sin 30 + F_y r \cos 30$
2. Bölge	$\theta = 150^\circ$ $T = -F_x r \sin \theta + F_y r \cos \theta$ $= -F_x r \sin 150 + F_y r \cos 150$ $= -F_x r \sin 30 - F_y r \cos 30$	$\varphi = 30^\circ$ $T = -F_x r \sin \varphi - F_y r \cos \varphi$ $= -F_x r \sin 30 - F_y r \cos 30$
3. Bölge	$\theta = 210^\circ$ $T = -F_x r \sin \theta + F_y r \cos \theta$ $= -F_x r \sin 210 + F_y r \cos 210$ $= +F_x r \sin 30 - F_y r \cos 30$	$\varphi = 30^\circ$ $T = +F_x r \sin \varphi - F_y r \cos \varphi$ $= +F_x r \sin 30 - F_y r \cos 30$
4. Bölge	$\theta = 330^\circ$ $T = -F_x r \sin \theta + F_y r \cos \theta$ $= -F_x r \sin 330 + F_y r \cos 330$ $= +F_x r \sin 30 + F_y r \cos 30$	$\varphi = 30^\circ$ $T = +F_x r \sin \varphi + F_y r \cos \varphi$ $= +F_x r \sin 30 + F_y r \cos 30$

Tablo 2’den de görüldüğü gibi her iki yolda aynı sonucu vermektedir;

- $\theta$  açısı dikkate alınarak yapılan hesaplamalarda uzvun bulunduğu bölgeye bakılmaksızın  $\vec{T}$  momenti  $T = -F_x r \sin \theta + F_y r \cos \theta$  denklemi kullanılarak hesaplanmaktadır. Bu hesap tarzı problemin bilgisayarda kodlanmasında kolaylık sağlar.
- Uzvun bulunduğu bölgeye dikkat ederek moment hesaplamak istenirse, bunun için  $\varphi$  dar açısından yararlanarak kuvvetlerin moment kolları  $r \sin \varphi$  ve  $r \cos \varphi$  hesaplanır. Moment eşitliği yazılırken  $\vec{F}$  kuvvetinin x ve/veya y bileşenleri, O dönme merkezine göre saat ibrelerinin dönüş yönünde (cw) moment oluşturuyorsa - işareti, saat ibrelerinin dönüş yönüne ters yönde (ccw) moment oluşturuyorsa + işareti verilerek denkleme yerleştirilirler.

### 2.1.3.1. Krank-Biyel Mekanizmasının Analitik Kuvvet Analizi

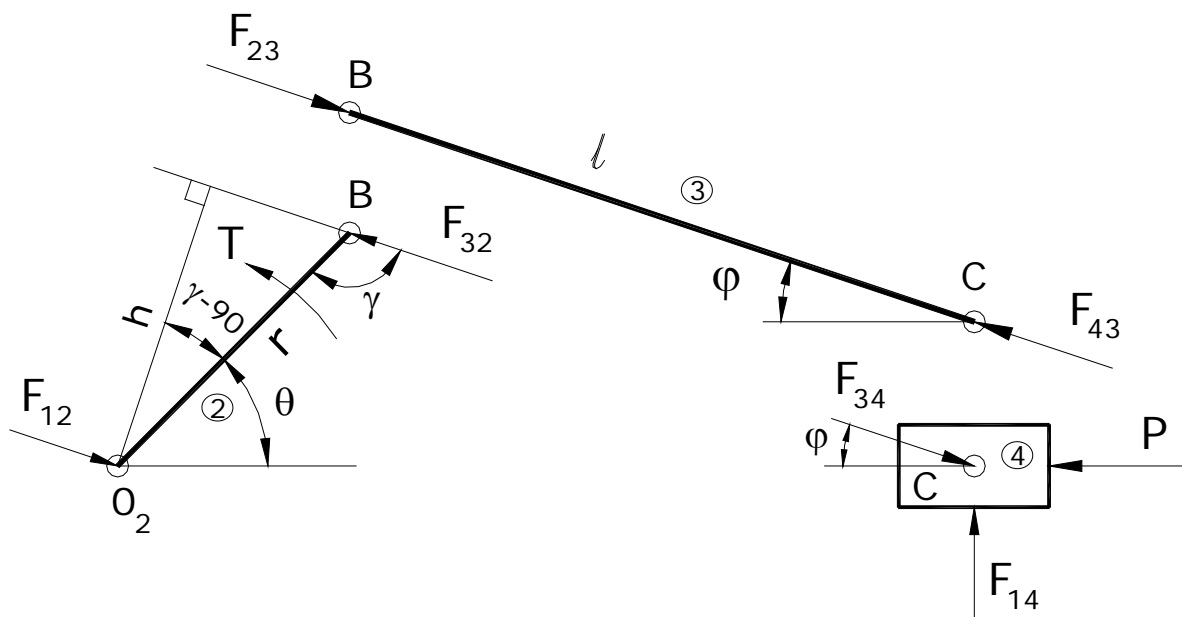
Bir merkezi krank-biyel mekanizması Şekil 3.3.(a)'da kol uzunluğu  $r$  ve biyel uzunluğu  $l$  ile gösterilmiştir. Piston üzerine  $\vec{P}$  kuvveti uygulanmaktadır. Mekanizmanın statik dengesi için kola uygulanması gereken  $\vec{T}$  momentinin analitik ifadesi  $\theta$  krank açısına bağlı olarak aşağıda açıklandığı şekilde elde edilebilir. Mekanizma uzuvlarının serbest cisim diyagramları Şekil 3.3.(b)'de gösterildiği gibi çizilir.



Şekil 3.3. (a) Merkezi krank-biyel mekanizması.

Çözüm:

Serbest cisim diyagramları çizilir.



**Şekil 3.3. (b)** Serbest cisim diyagramları.

Pistonun Denge Eşitliğinden:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{34} \cos \varphi - P = 0, \quad F_{34} = \frac{P}{\cos \varphi} \quad (F_{34} = F_{43} = F_{23} = F_{32} = F_{12})$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{14} - F_{34} \sin \varphi = 0, \quad F_{14} = F_{34} \sin \varphi = P \tan \varphi$$

Kolun (krank) Denge Eşitliğinden:

$$\sum T_{O_2} = 0 \Rightarrow T + F_{32} h = 0, \quad T = -F_{32} h$$

ve şekilden

$$h = r \cos(\gamma - 90^\circ)$$

konursa,

$$T = -F_{32} r \cos(\gamma - 90^\circ) = -F_{32} r \sin \gamma$$

elde edilir. Ayrıca şekilden  $\gamma = 180^\circ - (\theta + \varphi)$  konursa;

Hatırlatma:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(180 - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\begin{aligned} T &= -\frac{P r}{\cos \varphi} \sin(180^\circ - (\theta + \varphi)) = -\frac{P r}{\cos \varphi} (\sin 180^\circ \cos(\theta + \varphi) - \sin(\theta + \varphi) \cos 180^\circ) \\ &= -\frac{P r}{\cos \varphi} \sin(\theta + \varphi) \\ &= -P r \left( \sin \theta + \cos \theta \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \right) \end{aligned}$$

Geometriden (sinüs teoremi)

$$\frac{l}{\sin \theta} = \frac{r}{\sin \varphi}, \quad \sin \varphi = \frac{r}{l} \sin \theta, \quad \cos^2 \varphi = 1 - \sin^2 \varphi$$

ve

$$\cos \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = \sqrt{1 - \left(\frac{r}{l} \sin \theta\right)^2}$$

Buradan

$$T = -P * r \left( \sin \theta + \cos \theta \frac{\frac{r}{l} \sin \theta}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{l} \sin \theta\right)^2}} \right)$$

$$T(\theta) = -P * r * \sin \theta \left( 1 + \frac{\frac{r}{l} \cos \theta}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{l} \sin \theta\right)^2}} \right)$$

elde edilir. Böylelikle  $\vec{T}$  denge momenti verilen r, l ve P değerlerine bağlı olmak üzere  $\theta$  krank açısının bir fonksiyonu olarak yazılmış olmaktadır. Bu ifadeden açıkça görüleceği gibi  $\theta = 0^\circ$  ve  $\theta = 180^\circ$  için T=0 olur. Bu iki durum mekanizmanın ölü konumlarına karşılık gelir (A.Ö.N. ve Ü.Ö.N.). Teorik olarak bu durumlarda mekanizma kilitlenmiş olur (iş yapamaz). Ancak pratik olarak uzuvların önceden kazanılmış kütsel ataleti etkisiyle bu kilitlenme olmaz. Yani mekanizma hareketine devam eder.

**Sayısal Uygulama 1:** Örnek 5'in analitik çözümünü yapınız.

Mekanizma için  $r=51\text{mm}$ ,  $l=200\text{mm}$ ,  $P=6300\text{N}$  ve  $\theta = 60^\circ$  verildiğine göre;

$$\sin \varphi = \left(\frac{r}{l}\right) \sin \theta = \left(\frac{51}{200}\right) \sin 60^\circ = 0.22$$

$$\varphi = 12.76^\circ$$

$$F_{34} = \frac{P}{\cos \varphi} = \frac{6300}{\cos 12.76^\circ} = 6459 \text{ N}$$

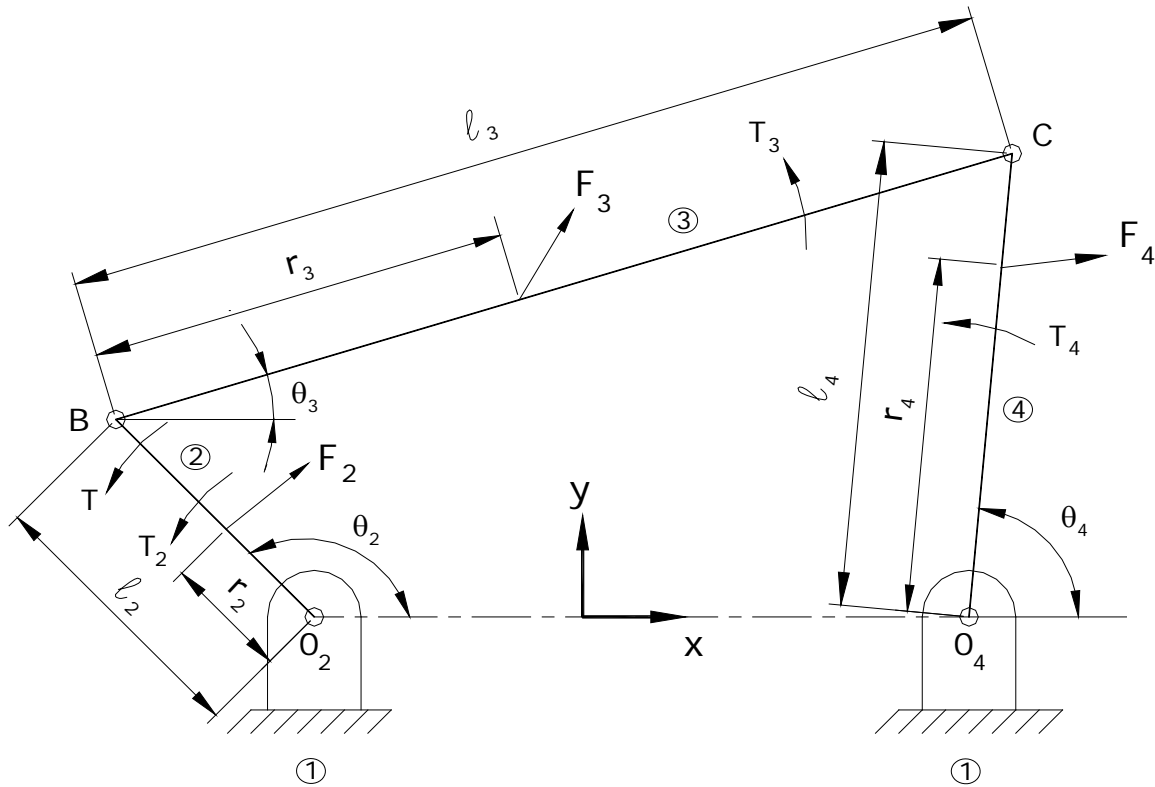
$$F_{14} = P \tan \varphi = 6300 \tan 12.76^\circ = 1426.7 \text{ N}$$

$$T \cong -6300 * 51 * \sin 60^\circ \left( 1 + \frac{\frac{51}{200} * \cos 60^\circ}{\sqrt{1 - \left(\frac{51}{200} \sin 60^\circ\right)^2}} \right) = -314628 \text{ Nmm} = -314.6 \text{ Nm}$$

elde edilir. O halde mekanizmanın statik dengesi için kola uygulanması gereken  $\vec{T}$  momentinin değeri ve yönü  $T=314.6 \text{ Nm}$ , ( $\curvearrowright$ ) olur. Bu sonuç örnek 5'in grafik çözüm sonucunu doğrulamaktadır.

### 2.1.3.2. Dört Çubuk Mekanizmasının Analitik Kuvvet Analizi

Bir dört çubuk mekanizması Şekil 3.4.(a)'da uzuv uzunlukları ( $l_2, l_3, l_4$ ), uzuvların açısal konumları ( $\theta_2, \theta_3, \theta_4$ ), uygulanan dış kuvvetler ( $\vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ ), kuvvetlerin etki konumları ( $r_2, r_3, r_4$ ) ve uygulanan dış momentler ( $\vec{T}_2, \vec{T}_3, \vec{T}_4$ ) olmak üzere genel yükleme durumunda gösterilmiştir. Bu genelleştirilmiş durumda mekanizmanın statik dengesi için kola uygulanması gereken  $T$  denge momenti genel denge eşitlikleri yazılarak aşağıda açıklandığı şekilde elde edilebilir.



Şekil 3.4. (a) Bir dört çubuk mekanizmasının genel düzlemsel yüklenme durumu.

Mekanizma uzuvlarının Şekil 3.4.(b)'de gösterilen serbest cisim diyagramlarını kullanarak 4 nolu uzvun dengesinden;



$$F_{14x} + F_{34x} + F_{4x} = 0 \quad (1)$$

$$F_{14y} + F_{34y} + F_{4y} = 0 \quad (2)$$

ve O<sub>4</sub>'e göre moment alınarak

$$F_{34y}l_4 \cos \theta_4 - F_{34x}l_4 \sin \theta_4 + F_{4y}r_4 \cos \theta_4 - F_{4x}r_4 \sin \theta_4 + T_4 = 0 \quad (3)$$

elde edilir. Burada (1), (2) ve (3) eşitliklerinin  $F_{14x}$ ,  $F_{14y}$ ,  $F_{34x}$  ve  $F_{34y}$  olmak üzere dört bilinmeyen içerdiklerine dikkat edilmelidir. Yani bu üç eşitlik çözüm için yeterli değildir. Çözüm ancak 3 nolu uzvun denge eşitliklerinin de birlikte ele alınmasıyla yapılabilir.

3 nolu uzvun dengesinden;

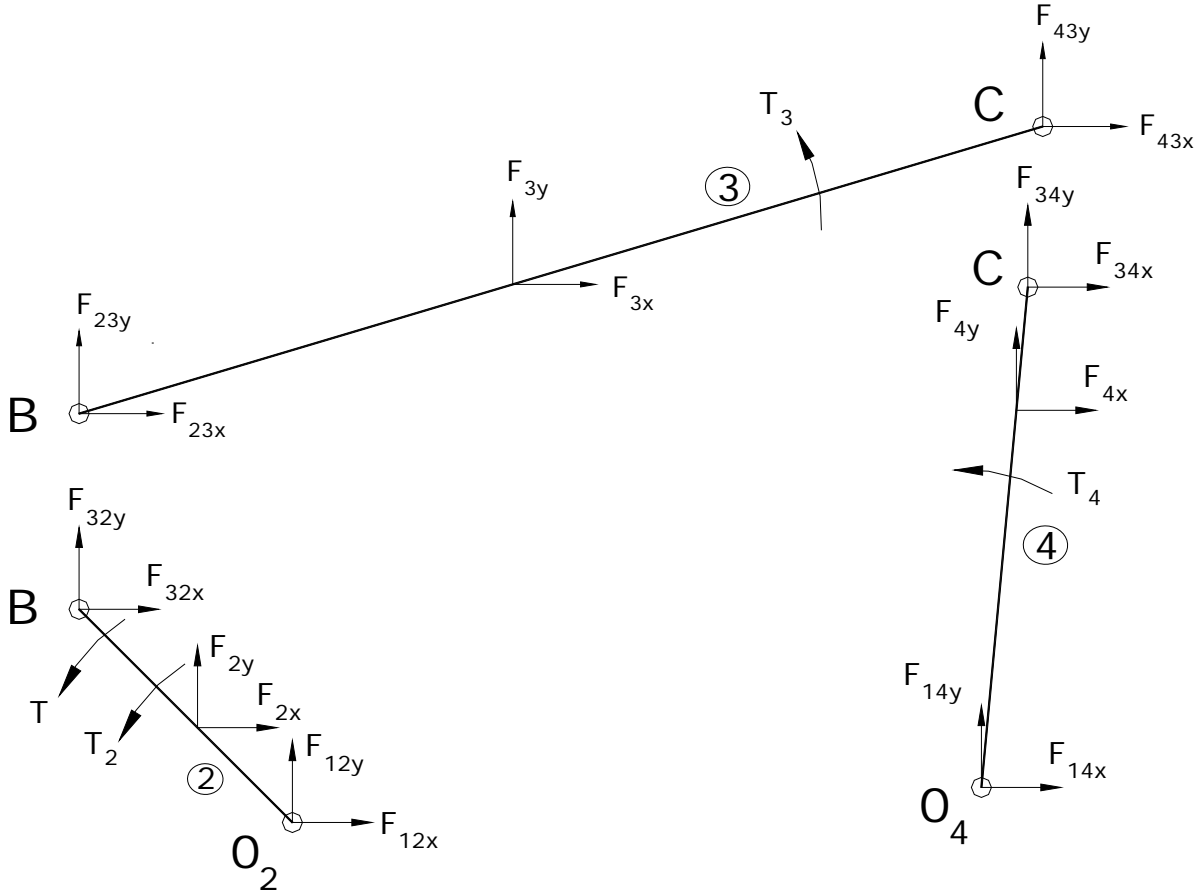
$$F_{23x} + F_{43x} + F_{3x} = 0$$

$$F_{23y} + F_{43y} + F_{3y} = 0$$

ve B'ye göre moment alınarak

$$F_{43y}l_3 \cos \theta_3 - F_{43x}l_3 \sin \theta_3 + F_{3y}r_3 \cos \theta_3 - F_{3x}r_3 \sin \theta_3 + T_3 = 0$$

elde edilir. Bu üç eşitlikte ayrıca dört yeni bilinmeyen,  $F_{23x}$ ,  $F_{23y}$ ,  $F_{43x}$  ve  $F_{43y}$  'yi getirir.



Şekil 3.4. (b) Serbest cisim diyagramları.

Ancak Newton'un 3. Kanunundan (etki-tepki);

$\left. \begin{array}{l} F_{43x} = -F_{34x} \\ F_{43y} = -F_{34y} \end{array} \right\}$  yazılabilir. Bu ifadeler 3 nolu uzvun yukarıdaki eşitliklerine yerleştirilirse;

$$F_{23x} - F_{34x} + F_{3x} = 0 \quad (4)$$

$$F_{23y} - F_{34y} + F_{3y} = 0 \quad (5)$$

$$-F_{34y}l_3 \cos \theta_3 + F_{34x}l_3 \sin \theta_3 + F_{3y}r_3 \cos \theta_3 - F_{3x}r_3 \sin \theta_3 + T_3 = 0 \quad (6)$$

şeklini alır. Böylelikle altı bilinmeyenli altı eşitlik elde edilmiş olur. Bu lineer eşitlikler takımının çözümü için kolaylık bakımından aşağıdaki çözüm adımları takip edilebilir.

(3) ve (6) eşitlikleri düzenlenerek matris formunda yazılırsa;

$$\left. \begin{aligned} a_{11} F_{34x} + a_{12} F_{34y} &= b_1 \\ a_{21} F_{34x} + a_{22} F_{34y} &= b_2 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

veya

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{34x} \\ F_{34y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} \quad (8)$$

elde edilir. Burada,

$$\begin{aligned} a_{11} &= -l_4 \sin \theta_4 \\ a_{12} &= l_4 \cos \theta_4 \\ a_{21} &= l_3 \sin \theta_3 \\ a_{22} &= -l_3 \cos \theta_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_1 &= F_{4x} r_4 \sin \theta_4 - F_{4y} r_4 \cos \theta_4 - T_4 \\ b_2 &= F_{3x} r_3 \sin \theta_3 - F_{3y} r_3 \cos \theta_3 - T_3 \end{aligned}$$

dır. (8) eşitliğinin çözümünden

$$F_{34x} = \frac{a_{22} b_1 - a_{12} b_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \quad (9)$$

$$F_{34y} = \frac{a_{11} b_2 - a_{21} b_1}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \quad (10)$$

bulunur.  $F_{34x}$ ,  $F_{34y}$  hesaplandıktan sonra diğer mafsalsal kuvvet bileşenleri (1), (2), (4) ve (5) eşitliklerinden sırasıyla;

$$F_{14x} = -F_{34x} - F_{4x} \quad (11)$$

$$F_{14y} = -F_{34y} - F_{4y} \quad (12)$$

$$F_{23x} = F_{34x} - F_{3x} \quad (13)$$

$$F_{23y} = F_{34y} - F_{3y} \quad (14)$$

elde edilir.

2 nolu uzvun dengesinden;

$$F_{12x} + F_{32x} + F_{2x} = 0$$

$$F_{12y} + F_{32y} + F_{2y} = 0$$

ve O<sub>2</sub> mafsal noktasına göre moment alınarak

$$T + F_{32y}l_2 \cos \theta_2 - F_{32x}l_2 \sin \theta_2 + F_{2y}r_2 \cos \theta_2 - F_{2x}r_2 \sin \theta_2 + T_2 = 0$$

elde edilir. Burada;

$$F_{32x} = -F_{23x} \quad \text{ve} \quad F_{32y} = -F_{23y} \quad \text{konursa;}$$

$$F_{12x} = F_{23x} - F_{2x} \tag{15}$$

$$F_{12y} = F_{23y} - F_{2y} \tag{16}$$

$$T = F_{23y}l_2 \cos \theta_2 - F_{23x}l_2 \sin \theta_2 - F_{2y}r_2 \cos \theta_2 + F_{2x}r_2 \sin \theta_2 - T_2 \tag{17}$$

Böylelikle dört çubuk mekanizmasının genel statik kuvvet analizi tamamlanmış olmaktadır. Burada verilen eşitlikler mekanizmanın dinamik kuvvet analizi için de uygulanabilir eşitliklerdir. Bu nedenle örnek sayısal uygulama dinamik kuvvet analizi kısmında verilecektir.

### 3. MEKANİZMALARDA HIZ VE İVME ANALİZİ

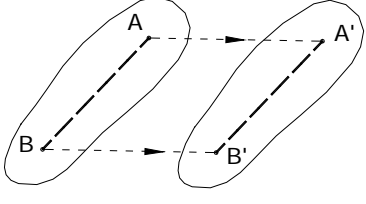
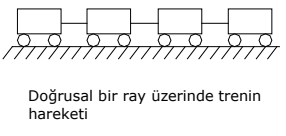
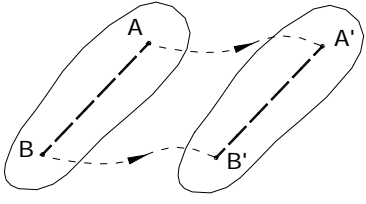
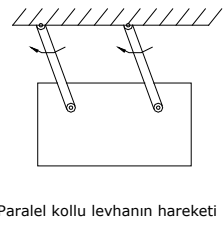
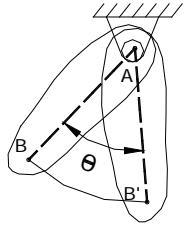
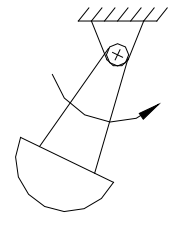
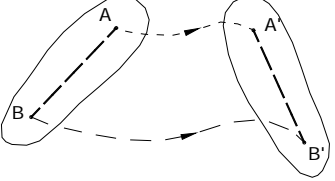
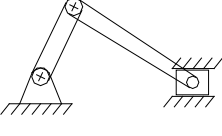
#### 3.1. Hız Analizi

##### 3.1.1. Düzlemsel Hareket Çeşitleri

Bir katı cismin hareketinde katı cisme ait bütün maddesel noktaları birbirine paralel düzlemler içerisinde kalıyorsa bu katı cismin hareketi “düzlemsel hareket” olarak tanımlanır.

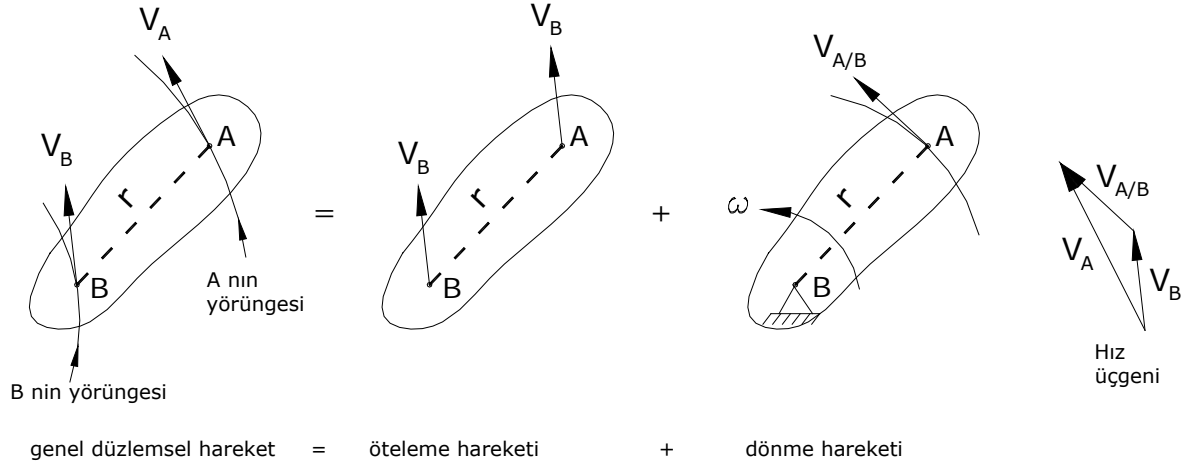
Düzlemsel hareket öteleme hareketi, dönme hareketi ve genel düzlemsel hareket olarak çeşitlere ayrılır. Bu düzlemsel hareket çeşitleri aşağıdaki tabloda örnekleri ile birlikte gösterilmiştir.

**Tablo 3.1.**

	Katı cismin düzlemsel hareketi	Örnek
Doğrusal öteleme		
Eğrisel öteleme		
Sabit bir eksen etrafında dönme		
Genel düzlemsel hareket		

### 3.1.2. Bağlı Hız Eşitliği

Bir katı cismin genel düzlemsel hareketini bir öteleme hareketi ile bir dönme hareketinin toplamı şeklinde tanımlamak mümkündür. Bu durum aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



**Şekil 3.1. Bağlı hız**

Buna göre bağlı hız eşitliği:

$$\vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{V}_{A/B}$$

şeklinde yazılır. Burada  $\vec{V}_{A/B}$  bağlı hız olarak adlandırılır. Bağlı hızın sayısal (skalar) değeri

$$V_{A/B} = r \cdot \omega$$

bağıntısından bulunur. Burada  $\omega$  (rad/s) açısal hızı temsil etmektedir. Bağlı hızın daima dönme noktası “B” ile hızı bulunmak istenilen “A” noktasını birleştiren doğruya yani AB doğrusuna dik olacağını belirtmek gerekir. Bu özellikten faydalanılarak hız problemlerinin grafik yöntemle çözümü yapılabilir.

#### 3.1.2.1. Dört Çubuk Mekanizmasının Bağlı Hız Yardımıyla Hız Analizi

**Örnek 1:** Bir dört çubuk mekanizması aşağıdaki şekilde gösterilen ölçüleri ile verilmektedir. Kol (2 nolu uzuv) 95 rad/s’lik sabit bir açısal hıza sahiptir. Mekanizmanın verilen konumu için C mafsal noktasının hızını ve 3 ile 4 nolu uzuvların açısal hızlarını bağlı hız bağıntısını kullanarak çizim yöntemiyle bulunuz.

Verilenler:

$$\overline{O_2O_4} = 100 \text{ mm}$$

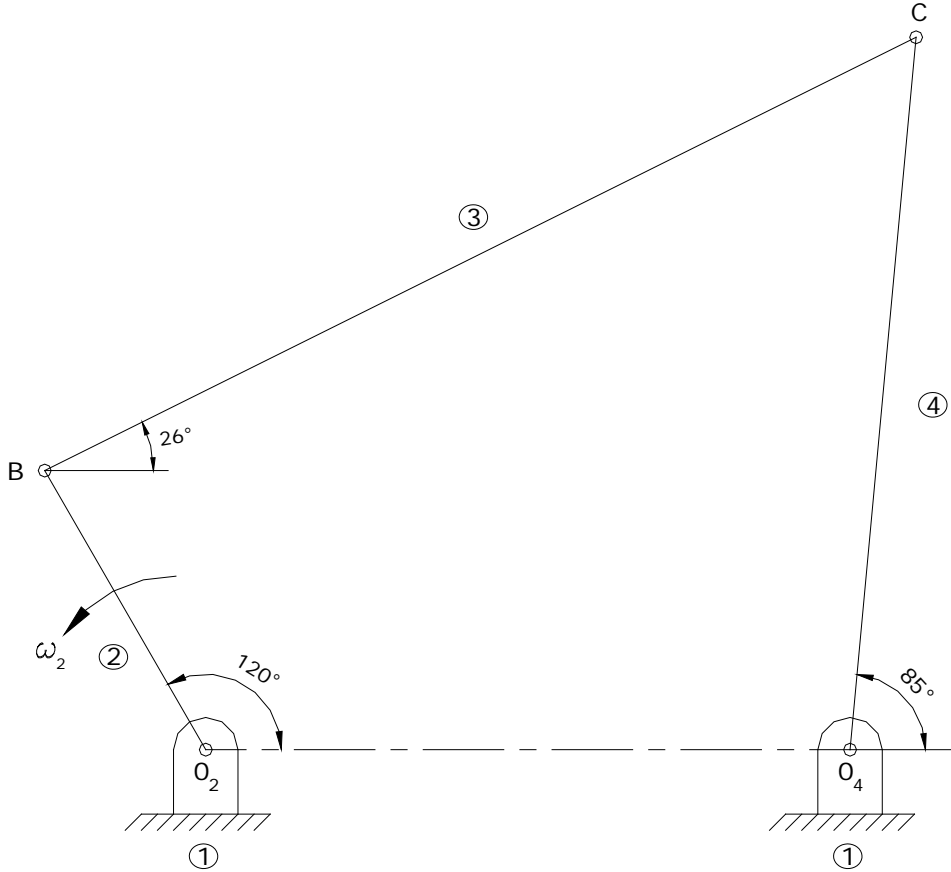
$$\overline{O_2B} = 50 \text{ mm}$$

$$\overline{BC} = 151 \text{ mm}$$

$$\overline{O_4C} = 111 \text{ mm}$$

$$\theta = 120^\circ$$

$$\omega_2 = 95 \text{ rad/s}$$



Çözüm:

Önce mekanizma belirli bir ölçekle çizilerek diğer 3 ve 4 uzuvlarının açısal konumları belirlenir. Bağlı hız eşitliği yazılarak, eşitlikte doğrultu ve büyüklükleri bilinen bileşenler işaretlenir.

$$\begin{matrix} \vec{V}_C \\ \vec{?} \end{matrix} = \begin{matrix} \vec{V}_B \\ \vec{?} \end{matrix} + \begin{matrix} \vec{V}_{C/B} \\ \vec{?} \end{matrix}$$

Bu vektör eşitliği aşağıda sıralanan işlem adımları yapılarak çözülür.

1. 2 uzvu  $O_2$  mafsals noktasına göre bir dönme yaptığına göre

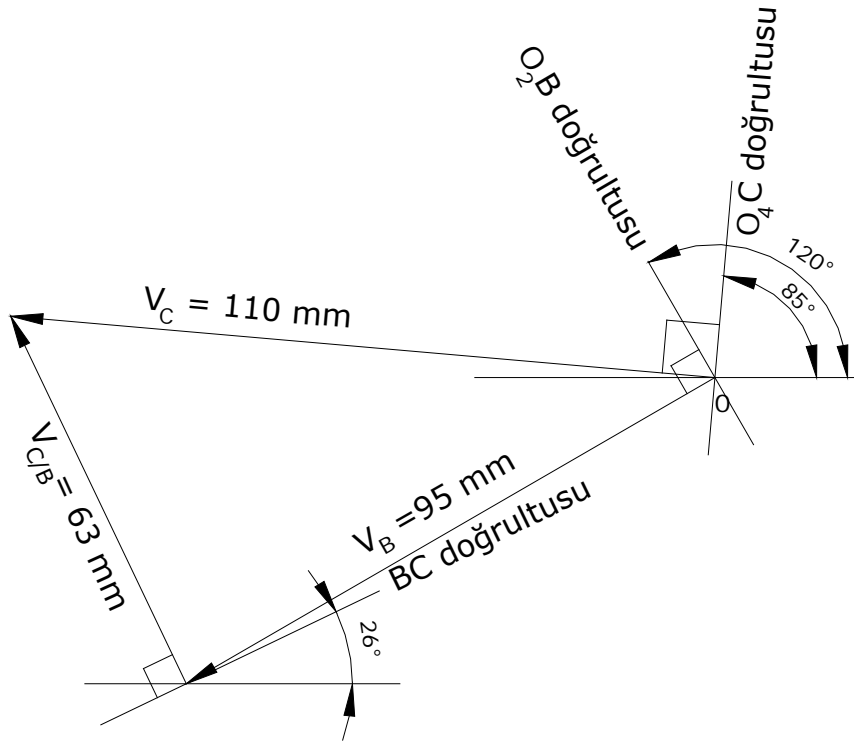
$$V_B = \overline{O_2B} \cdot \omega_2 = 50 * 95 = 4750 \text{ mm/s (4.75 m/s)}$$

$\vec{V}_B \perp \overline{O_2B}$  olup yönü bilinmektedir. ( $\omega_2$  saat ibreleri ters yönünde dönmektedir) Bu hız vektörü sabit uzuv doğrultusu referans alınarak belirli bir ölçekle çizilir. Bu hız büyüklük ve yön olarak bilinmektedir. Bu durumda  $K_v$  hız ölçeği şu şekilde belirlenir.

$$K_v = \frac{\text{Gerçek hız değeri}}{\text{Şekil üzerindeki hız değeri}} = \frac{4750 \text{ mm/s}}{95 \text{ mm}} = 50 \text{ (1/s)}$$

Yani 50 mm/s' lik hız değeri şekil üzerinde 1mm'lik uzunlukla gösterilmektedir.

2. C mafsal noktasının bağıl hızı  $\vec{V}_{C/B} \perp \overline{BC}$  olup  $\vec{V}_B$  nin ucundan geçen BC doğrultusuna dik olan bir doğru çizilir. Yani  $\vec{V}_{C/B}$  hızının sadece doğrultusu bilinmektedir.
3. C mafsal noktasının mutlak hızı ( $O_4$  mafsal noktasına göre dönme yapmaktadır)  $\vec{V}_C \perp \overline{O_4C}$  olacaktır. Yani  $\vec{V}_C$  hızının da sadece doğrultusu bilinmektedir.  $\vec{V}_B$  nin başlangıç noktasından geçen ve  $\overline{O_4C}$  'ye dik bir doğru çizilir. Buna göre  $\vec{V}_{C/B} \perp \overline{BC}$  ve  $\vec{V}_C \perp \overline{O_4C}$  doğrularının kesim noktası aranan hız üçgenini belirler.



Hız diyagramı

4. Hız üçgeninden ölçüm yapılarak ve ölçekle de çarpılarak hızlar bulunur.

$$V_{C/B} = (63 \text{ mm}) \cdot (50 \text{ s}^{-1}) = 3150 \text{ mm / s}$$

$$V_{C/B} = 3.15 \text{ m / s}$$

$$V_C = (110 \text{ mm}) \cdot (50 \text{ s}^{-1}) = 5500 \text{ mm / s}$$

$$V_C = 5.5 \text{ m / s}$$



Açısal hızlar için;

$$\omega_3 = \frac{V_{C/B}}{\overline{BC}} = \frac{3150}{151} = 20.86 \text{ rad / s} \quad (\curvearrowright)$$

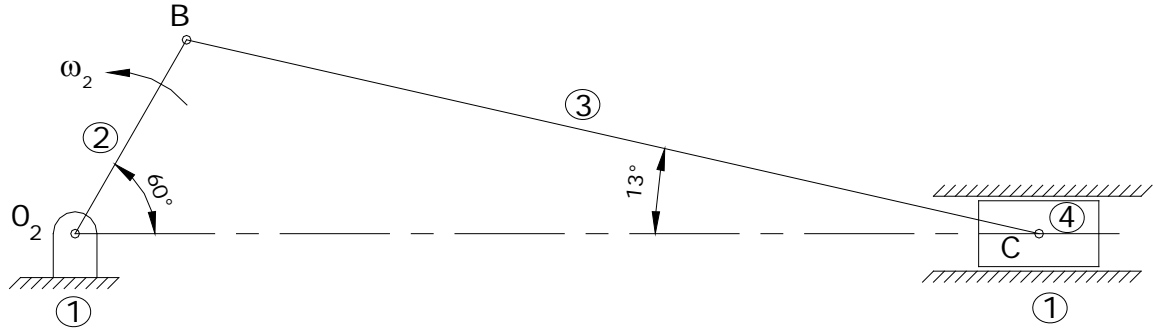
$$\omega_4 = \frac{V_C}{\overline{O_4C}} = \frac{5500}{111} = 49.55 \text{ rad / s} \quad (\curvearrowright)$$

### 3.1.2.2. Krank Biyel Mekanizmasının Bağlı Hız Yardımıyla Hız Analizi

**Örnek 2:** Bir krank-biyel mekanizması aşağıdaki şekilde gösterilen ölçüleriyle verilmektedir. Kol (uzuv 2) 314 rad/s 'lık sabit bir açısal hıza sahiptir. Mekanizmanın verilen konumu için C pistonunun hızını ve BC biyelinin açısal hızını, bağlı hız bağıntısını kullanarak çizim yöntemiyle bulunuz.

Verilenler:

$$\overline{O_2B} = 51 \text{ mm} \quad \overline{BC} = 200 \text{ mm} \quad \theta = 60^\circ \quad \omega_2 = 314 \text{ rad/s}$$



Çözüm:

Problem örnek 1'de açıklandığı şekilde sıralanan işlem adımları yapılarak çözülür. Mekanizma belirli bir ölçekle çizilerek biyelın açısal konumu belirlenir. Bağlı hız eşitliği yazılarak eşitlikte doğrultu ve büyüklükleri bilinen bileşenler işaretlenir.

$$\vec{V}_C = \vec{V}_B + \vec{V}_{C/B}$$

$$1. \quad V_B = \overline{O_2B} \cdot \omega_2 = 51 * 314 = 16014 \text{ mm/s hesaplanır.}$$

Hız ölçeği

$$K_v = \frac{16014 \text{ mm / s}}{160.14 \text{ mm}} = 100 \text{ (1 / s)}$$

olarak seçilerek  $\vec{V}_B \perp \overline{O_2B}$  olacak şekilde belirli bir ölçekle çizilir.

2. C mafsal noktasının bağıl hızı  $\vec{V}_{C/B} \perp \overline{BC}$  doğrultusundadır.  $\vec{V}_B$  hızının ucundan  $\overline{BC}$  'ye dik bir doğru çizilir.  $\vec{V}_{C/B}$  bağıl hızı bu doğru üzerinde bulunmaktadır.
3. Piston öteleme hareketi yaptığından C mafsal noktasının mutlak hızı  $\vec{V}_C$  yatay doğrultu üzerinde bulunmaktadır (Yatay doğrultu referans doğrultusu olarak seçilmiştir). Buna göre biyelin bağıl hızı  $\vec{V}_{C/B}$  'nin doğrultusunun pistonun mutlak hızı  $\vec{V}_C$  'nin doğrultusu ile kesişme noktası aranan hız üçgenini belirler.
4. Hız üçgeninden ölçüm yapılarak ve ölçekle de çarpılarak hızlar bulunur.

$$V_C = 156.5 * 100 = 15650 \text{ mm/s}$$

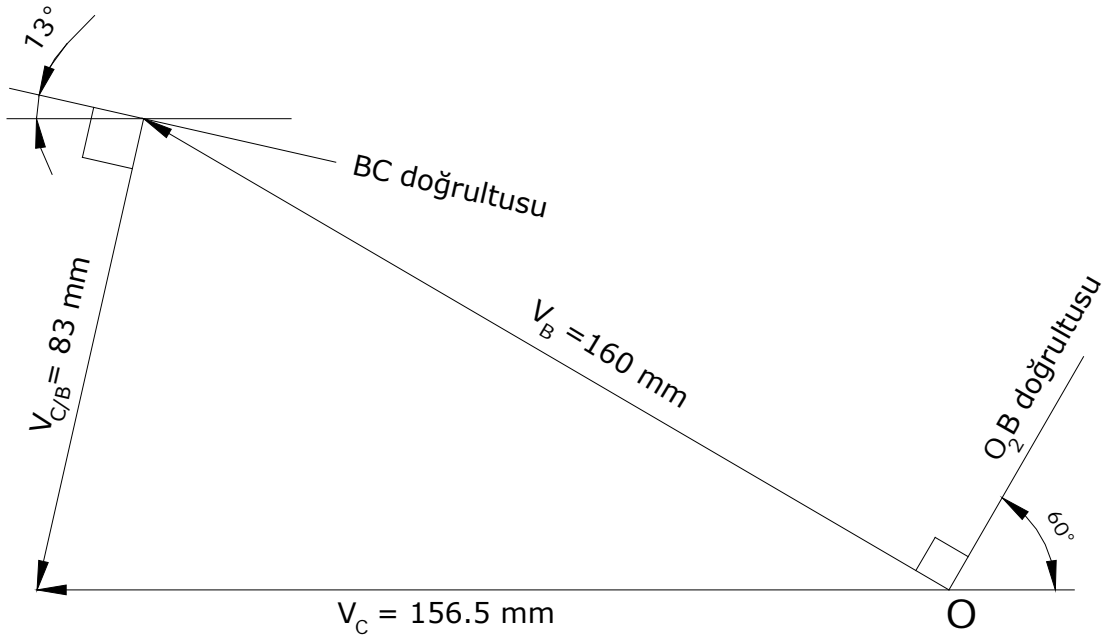
$$V_{C/B} = 83 * 100 = 8300 \text{ mm/s}$$

$$V_C = 15.7 \text{ m/s}$$

$$V_{C/B} = 8.3 \text{ m/s}$$

olarak bulunur. Biyelin açısal hızı

$$\omega_3 = \frac{V_{C/B}}{BC} = \frac{8300}{200} = 41.5 \text{ rad / s} \quad (\curvearrowright)$$



Hız diyagramı

### 3.2. İvme Analizi

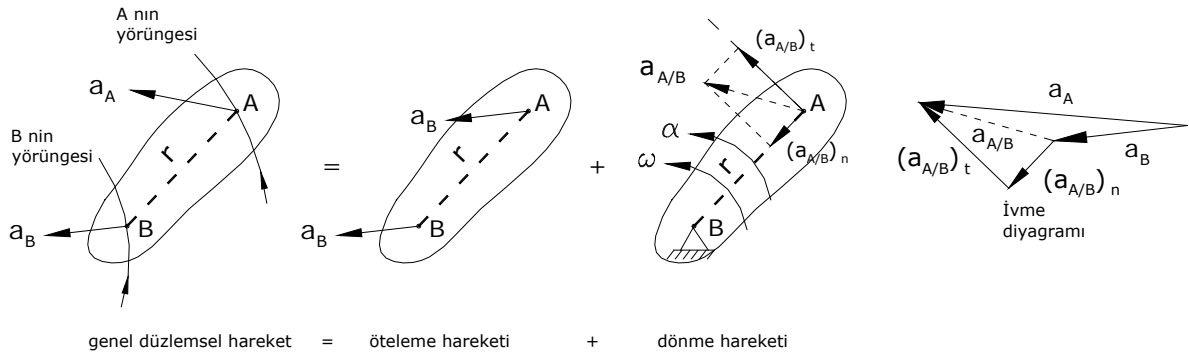
#### 3.2.1. Bağlı İvme Eşitliği

Bağlı hız eşitliğinden türev alınarak bağlı ivme eşitliği elde edilir. Yani,

$$\frac{d}{dt} \left( \vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{V}_{A/B} \right)$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/B}$$

şeklinde yazılır. Burada  $\vec{a}_{A/B}$  bağlı ivme olarak adlandırılır. Bu eşitliğe göre genel düzlemsel hareket yapan bir katı cismin bir noktasının ivmesi yine katı cisim üzerinde seçilecek olan uygun bir referans noktasına göre olan bağlı ivmesi ile bu referans noktasının mutlak ivmesinin toplamına eşittir. Bu durum aşağıdaki şekil üzerinde açıklanmıştır.



Şekil 2.2. Bağlı İvme

Bağlı ivme normal ve teğetsel bileşenlerine ayrılabilceğinden, bağlı ivme eşitliği aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + (\vec{a}_{A/B})_n + (\vec{a}_{A/B})_t$$

Burada bağlı ivmenin normal ve teğetsel bileşenlerinin skalar değerleri aşağıdaki bağıntılardan hesaplanır.

$$(\vec{a}_{A/B})_n = \frac{V_{A/B}^2}{r} = r \omega^2$$

$$(\vec{a}_{A/B})_t = \dot{V}_{A/B} = r \alpha$$

Burada  $\omega$  (rad/s) açısal hız ve  $\alpha$  (rad/s<sup>2</sup>) açısal ivmedir.

### 3.2.1.1. Dört Çubuk Mekanizmasının Bağlı İvme Yardımıyla İvme Analizi

**Örnek 3:** Örnek 1’de verilen dört çubuk mekanizmasının verilen konumu için;

- C mafsalsal noktasının ivmesini,
- 3 ve 4 uzuvlarının açısal ivmelerini,
- 3 ve 4 uzuvlarının kütle merkezlerinin ( $G_3$  ve  $G_4$ ) ivmelerini,

bağlı ivme eşitliğini kullanarak çizim yoluyla bulunuz.

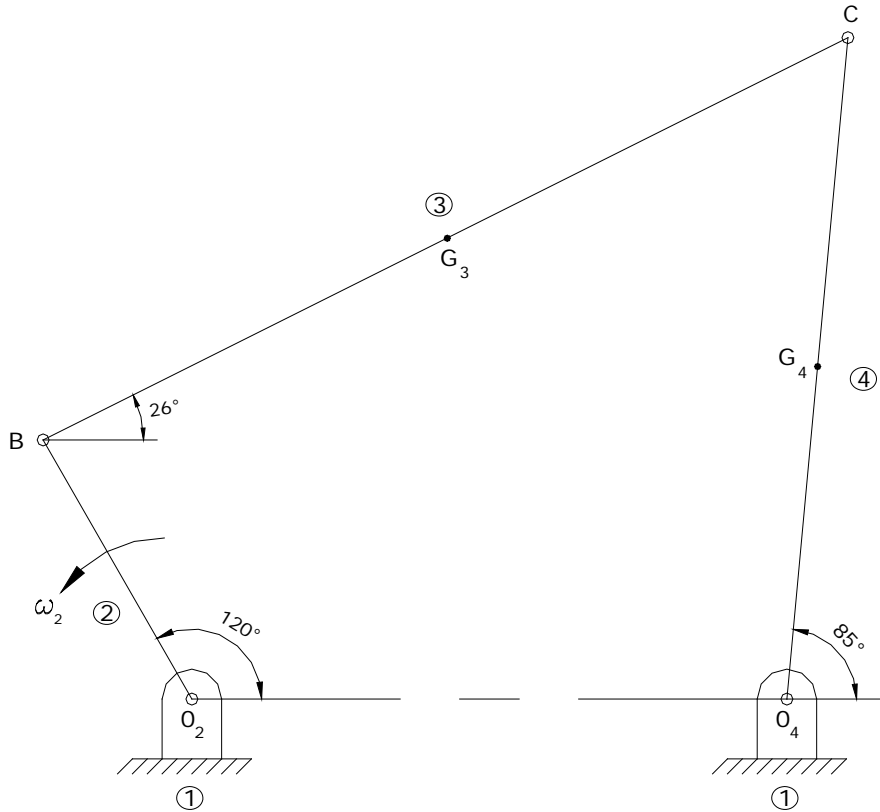
Verilenler:

$$\overline{O_2O_4} = 100 \text{ mm} \quad \overline{O_2B} = 50 \text{ mm} \quad \overline{BC} = 151 \text{ mm} \quad \overline{O_4C} = 111 \text{ mm}$$

$$\overline{BG_3} = 75.5 \text{ mm} \quad \overline{O_4G_4} = 55.5 \text{ mm}$$

$$\theta = 120^\circ \quad \omega_2 = 95 \text{ rad/s} \quad \alpha_2 = 0 \text{ rad/s}^2$$

(Not:  $\omega_3 = 20.86 \text{ rad/s}$  ve  $\omega_4 = 49.55 \text{ rad/s}$  örnek 1’de hesaplandı)



Çözüm:

- Bağlı ivme bağıntısı yazılır;

$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{C/B}$$

$$\vec{a}_C = (\vec{a}_C)_n + (\vec{a}_C)_t = (\vec{a}_B)_n + (\vec{a}_B)_t + (\vec{a}_{C/B})_n + (\vec{a}_{C/B})_t$$

Eşitlikte büyüklük ve doğrultuları bilinen bileşenler işaretlenir.

1) 2 uzvu O<sub>2</sub> mafsal noktasına göre bir dönme yaptığına göre

$$(\vec{a}_B)_n = \overline{O_2B} \cdot \omega_2^2 = 50 * 95^2 = 451250 \text{ mm/s}^2$$

$$(\vec{a}_B)_t = \overline{O_2B} \cdot \alpha_2 = 0$$

elde edilir. Bu bileşen sabit bir referans doğrultusu alınarak belirli bir ölçekle çizilir.

Bu durumda  $K_a$  ivme ölçeği şu şekilde belirlenir.

$$K_a = \frac{\text{Gerçek ivme değeri}}{\text{Şekil üzerindeki ivme değeri}} = \frac{451250 \text{ mm/s}^2}{150.41 \text{ mm}} = 3000 (1/\text{s}^2)$$

Buna göre  $(\vec{a}_B)_n$  normal bileşeni  $\overline{O_2B}$  doğrultusunda B den O<sub>2</sub> ye yönelmiş şekilde

$$\left( \frac{451250}{3000} = 150.4 \text{ mm} \right) \text{ çizilir.}$$

$$2) (\vec{a}_{C/B})_n = \overline{BC} \cdot \omega_3^2 = 151 * (20.86)^2 = 65706 \text{ mm/s}^2$$

Bu ivme bileşeni  $(\vec{a}_B)_n$  nin ucundan BC doğrultusunda çizilir.

$$(65706 / 3000 = 21.9 \text{ mm} \approx 22 \text{ mm})$$

$$3) (\vec{a}_C)_n = \overline{O_4C} \cdot \omega_4^2 = 111 * (49.55)^2 = 272527 \text{ mm/s}^2$$

Bu ivme bileşeni O başlangıç noktasından başlamak üzere  $\overline{O_4C}$  doğrultusunda çizilir.

$$(272527 / 3000 = 91 \text{ mm})$$

4) Kalan iki ivme bileşeninin doğrultuları bilinmektedir. Bunlardan  $(\vec{a}_C)_t$  nin doğrultusu

$(\vec{a}_C)_n$  in ucundan dik bir doğru olarak çizilir. Diğer kalan bileşen  $(\vec{a}_{C/B})_t$  nin

doğrultusu olarak ta  $\vec{(a_{C/B})_n}$  nin ucundan dik bir doğru çizilir. Bu iki doğrunun kesim noktası aranılan ivme bileşenlerinin uçlarını ve dolayısıyla büyüklüklerini belirler.

- 5) İvme diyagramından ölçüm yapılarak ve ölçekle de çarpılarak aranılan ivme büyüklükleri bulunur. Buna göre:

$$a_C = (100).(3000) = 300000 \text{ mm/s}^2 = 300 \text{ m/s}^2$$

$$(a_{C/B})_t = (50.4).(3000) = 151200 \text{ mm/s}^2 = 151.2 \text{ m/s}^2$$

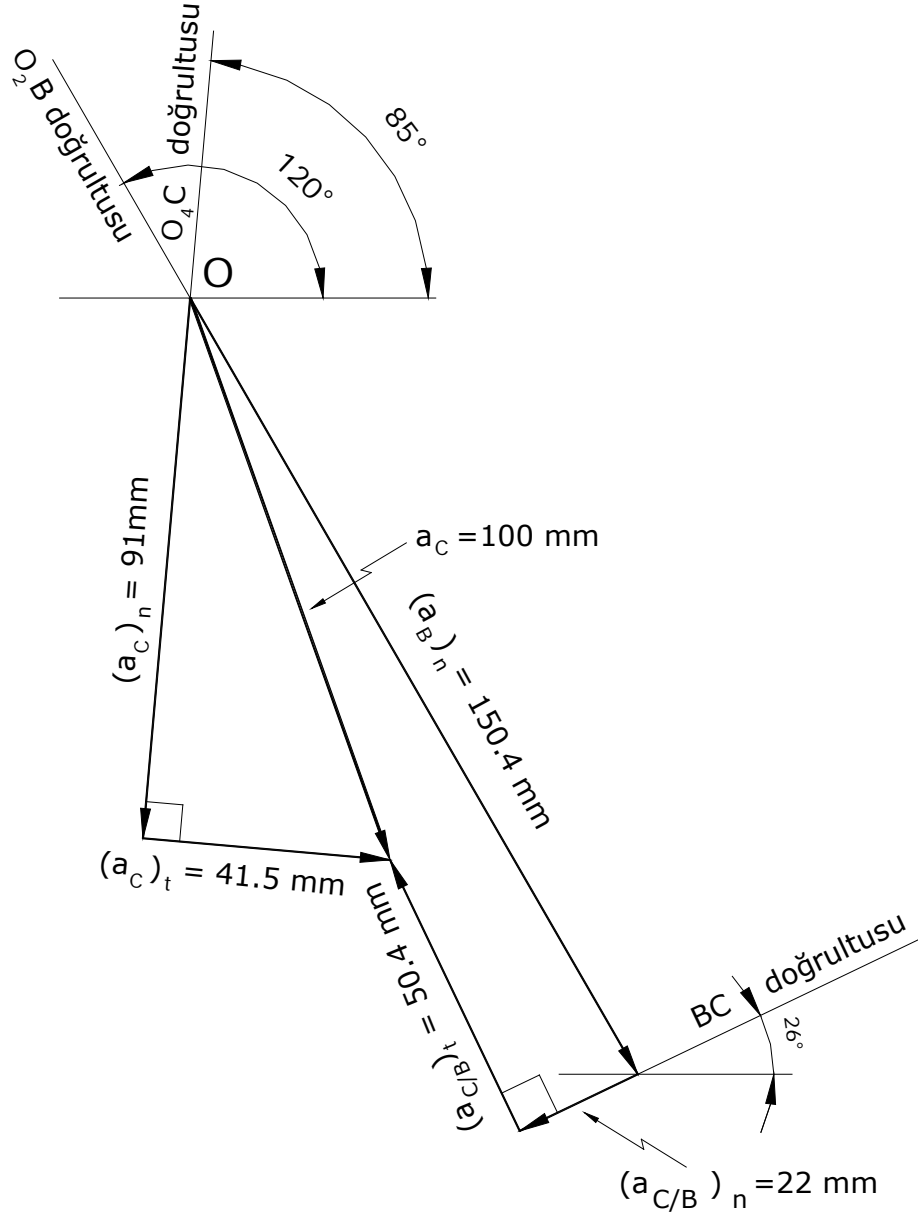
$$(a_C)_t = (41.5).(3000) = 124500 \text{ mm/s}^2 = 124.5 \text{ m/s}^2$$

- b) Buradan açısal ivmeler için;

$$\alpha_3 = \frac{(a_{C/B})_t}{\overline{BC}} = \frac{151200}{151} = 1001.3 \text{ rad / s}^2 \quad (\curvearrowright)$$

$$\alpha_4 = \frac{(a_C)_t}{\overline{O_4C}} = \frac{124500}{111} = 1121.6 \text{ rad / s}^2 \quad (\curvearrowright)$$

bulunur.



İvme diyagramı

c)  $G_3$  kütle merkezinin ivmesi için benzer şekilde bağıl ivme eşitliği yazılarak;

$$\vec{a}_{G_3} = \vec{a}_B + \vec{a}_{G_3/B} = (\vec{a}_B)_n + (\vec{a}_{G_3/B})_n + (\vec{a}_{G_3/B})_t$$

$$(\vec{a}_{G_3/B})_n = \overline{BG_3} \cdot \omega_3^2 = 75.5 * (20.86)^2 = 32853 \text{ mm/s}^2$$

$$(32853 / 3000 = 11 \text{ mm})$$

$$\left(a_{G_3/B}\right)_t = \overline{BG_3} \cdot \alpha_3 = 75.5 * (1001.3) = 75598 \text{ mm/s}^2$$

$$(75598 / 3000 = 25.2 \text{ mm})$$

buna göre yapılan çizimden ölçüm alınarak;

$$a_{G_3} = 124.5 * 3000 = 373500 \text{ mm/s}^2 = 373.5 \text{ m/s}^2, \angle 296^\circ$$

olarak bulunur.

$G_4$  kütle merkezinin ivmesi için;

$$\vec{a}_{G_4} = \left(\vec{a}_{G_4}\right)_n + \left(\vec{a}_{G_4}\right)_t$$

$$\left(a_{G_4}\right)_n = \overline{O_4G_4} \cdot \omega_4^2 = 55.5 * (49.55)^2 = 136263 \text{ mm/s}^2 = 136.26 \text{ m/s}^2$$

$$(136263 / 3000 = 45.42 \text{ mm} \approx 45.5 \text{ mm})$$

$$\left(a_{G_4}\right)_t = \overline{O_4G_4} \cdot \alpha_4 = 55.5 * 1121.6 = 62249 \text{ mm/s}^2 = 62.25 \text{ m/s}^2$$

$$(62249 / 3000 = 20.75 \text{ mm})$$

Aynı ölçekle çizim yapılarak  $a_{G_4} = 50 \text{ mm}$  ölçülür.

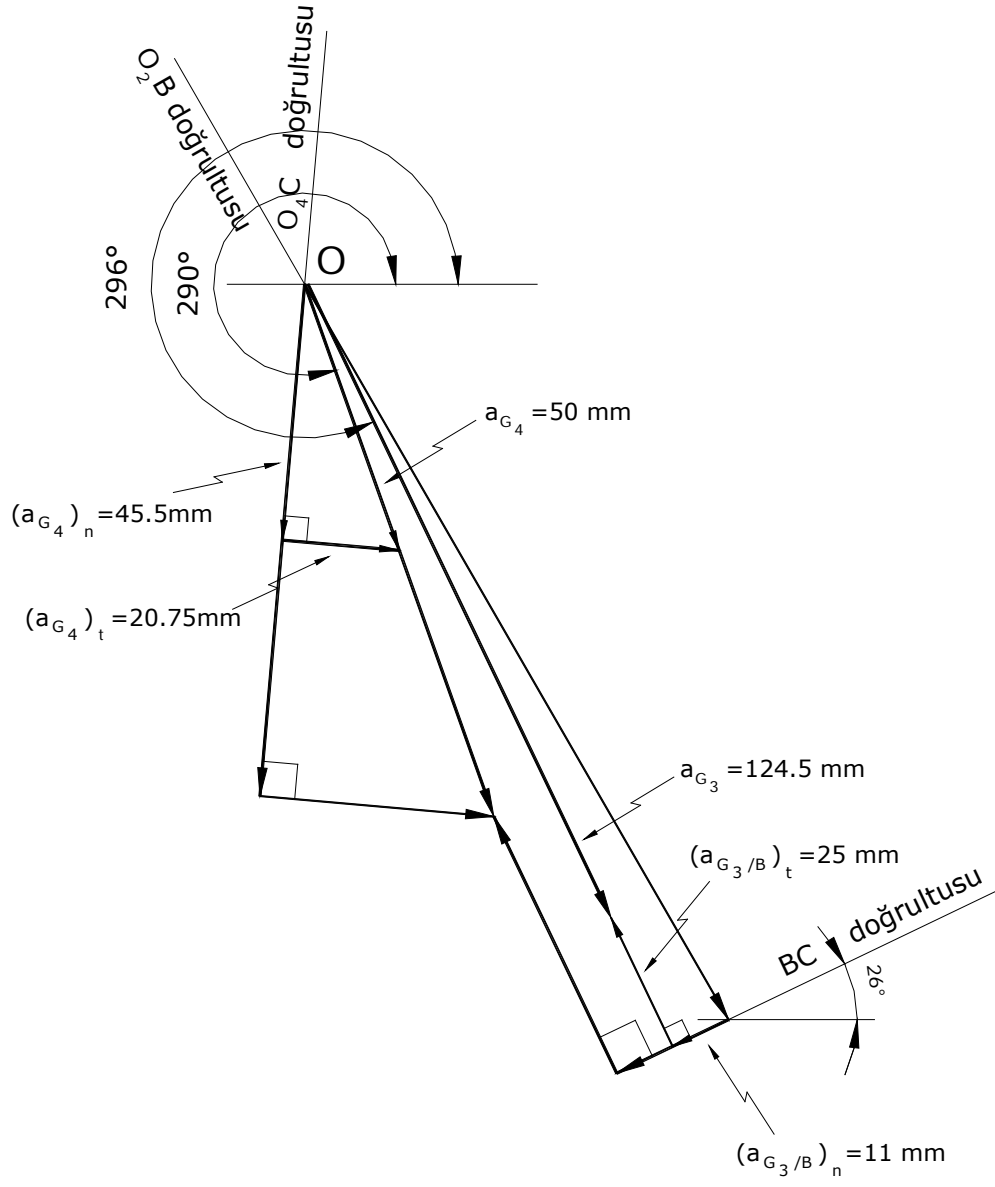
Buna göre;

$$a_{G_4} = 50 * 3000 = 150000 \text{ mm/s}^2 = 150 \text{ m/s}^2, \angle 290^\circ \text{ olarak bulunur.}$$

Analitik:

$$a_{G_4} = \sqrt{\left(a_{G_4}\right)_n^2 + \left(a_{G_4}\right)_t^2} = \sqrt{136.26^2 + 62.25^2} \approx 150 \text{ m/s}^2$$





### 3.2.1.2. Krank-Biyel Mekanizmasının Bağlı İvme Yardımıyla İvme Analizi

**Örnek 4:** Örnek 2’de verilen krank-biyel mekanizmasının verilen konumu için;

a) Pistonun ivmesini ve biyelin açısai ivmesini

b) Biyelin  $G_3$  kütle merkezinin ivmesini

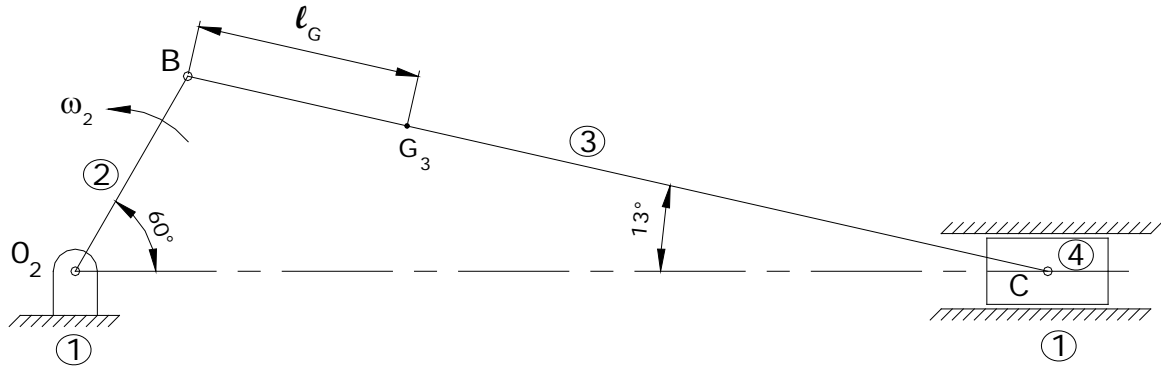
bağıl ivme bağıntısını kullanarak çizim yöntemiyle bulunuz.

Verilenler:

$$\overline{O_2B} = 51 \text{ mm} \quad \overline{BC} = 200 \text{ mm} \quad \theta = 60^\circ \quad \omega_2 = 314 \text{ rad/s}$$

$$\alpha_2 = 0 \quad l_G = 51 \text{ mm}$$

(Not:  $\omega_3 = 41.5 \text{ rad/s}$  örnek 2’de hesaplandı)



Çözüm:

a) Pistonun ivmesi ve biyelin açısai ivmesi:

Bağıl ivme bağıntısı yazılır.

$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{C/B}$$

Eşitlikte doğrultu ve büyüklükleri bilinen ivme bileşenleri işaretlenir.

$$\vec{a}_C = (\vec{a}_B)_n + (\vec{a}_B)_t + (\vec{a}_{C/B})_n + (\vec{a}_{C/B})_t$$

$\begin{matrix} \vec{?} & \vec{?} & \vec{?} & \vec{?} \\ ? & - & - & - \\ & & & ? \end{matrix}$

Problem örnek 3’de sıralanan işlem adımları takip edilerek benzer şekilde çözülür.

$$1. (a_B)_n = \overline{O_2B} * \omega_2^2 = 51 * (314)^2 = 5028396 \text{ mm/s}^2 \cong 5028 \text{ m/s}^2$$

$$(a_B)_t = \overline{O_2B} * \alpha_2 = 0$$

$$\text{Bu ivme bileşeni } K_a \text{ ivme ölçeği } K_a = \frac{5028 \text{ m/s}^2}{125.7 \text{ mm}} = 40 \text{ (m/mm s}^2\text{)} \text{ seçilerek çizilir.}$$

Yani 40 m/s<sup>2</sup>, lik ivme değeri şekil üzerinde 1 mm’lik uzunlukla gösterilmektedir.

$$(a_B)_n = 5028 \text{ (m/s}^2\text{)} / 40 \text{ (m/mm s}^2\text{)} = 125.7 \text{ mm} \approx 126 \text{ mm} \quad O_2B \text{ doğrultusunda ve } O_2' \text{ ye yönelmiş olarak çizilir.}$$

$$\alpha_2 = 0 \text{ verildiğinden } \vec{a_B} \text{ 'nin teğetsel bileşeni } (a_B)_t = 0 \text{ olur.}$$

$$2. (a_{C/B})_n = \overline{BC} * \omega_3^2 = 200 * (41.5)^2 = 344450 \text{ mm/s}^2 \approx 345 \text{ m/s}^2,$$

$$(345 \text{ (m/s}^2\text{)} / 40 \text{ (m/mm s}^2\text{)}) = 8.625 \text{ mm} \approx 8.6 \text{ mm}$$

Bu ivme bileşeni  $\vec{(a_B)_n}$  'nin ucundan  $\overline{BC}$  doğrultusunda ve B’ye yönelmiş olarak çizilir.

3. Kalan iki ivme bileşeninin sadece doğrultuları bilinmektedir. Bu bileşenlerden  $\vec{(a_{C/B})_t}$  'nin doğrultusu BC’ye diktir.  $\vec{(a_{C/B})_n}$  'in ucundan BC’ye dik bir doğru çizilir.  $\vec{(a_C)}$  'nin doğrultusu da piston yatay doğrultuda hareket ettiğinden bu doğrultu üzerinde bulunacaktır. Buna göre  $\vec{(a_{C/B})_t}$  'in yatay doğrultu ile kesim noktası aranılan ivme diyagramını belirler.

4. İvme diyagramından ölçüm yapılarak istenen ivme büyüklükleri bulunur.

$$(a_{C/B})_t = 110 \text{ (mm)} * 40 \text{ (m/mm s}^2\text{)} = 4400 \text{ m/s}^2$$

$$a_C = 47 * 40 = 1880 \text{ m/s}^2$$

Biyelin açısal ivmesi:

$$\alpha_3 = \frac{(a_{C/B})_t}{\overline{BC}} = \frac{4400 \text{ m/s}^2}{0.2 \text{ m}} = 22000 \text{ rad/s}^2 \quad (\curvearrowright)$$

b)  $G_3$  kütle merkezinin ivmesi için;

$$\vec{a}_{G_3} = \vec{a}_B + (\vec{a}_{G_3/B})$$

bağıl ivme eşitliği yazılarak, ivme bileşenlerinin bilinen büyüklük ve doğrultuları işaretlenir.

$$\vec{a}_{G_3} = (\vec{a}_B)_n + (\vec{a}_B)_t + (\vec{a}_{G_3/B})_n + (\vec{a}_{G_3/B})_t$$

$\begin{matrix} ? & \vec{a} & \vec{a} & \vec{a} & \vec{a} \\ ? & - & - & - & - \end{matrix}$

eşitliğin sağ tarafının tamamen bilindiği görülür.

$$(\vec{a}_{G_3/B})_n = l_G * \omega_3^2 = 51 * (41.5)^2 = 87834.8 \text{ mm/s}^2 \approx 87.83 \text{ m/s}^2, (87.83/40=2.2 \text{ mm})$$

$$(\vec{a}_{G_3/B})_t = l_G * \alpha_3 = 51 * 22000 = 1122000 \text{ mm/s}^2 = 1122 \text{ m/s}^2, (1122/40=28 \text{ mm})$$

Buna göre çizim tamamlanırsa

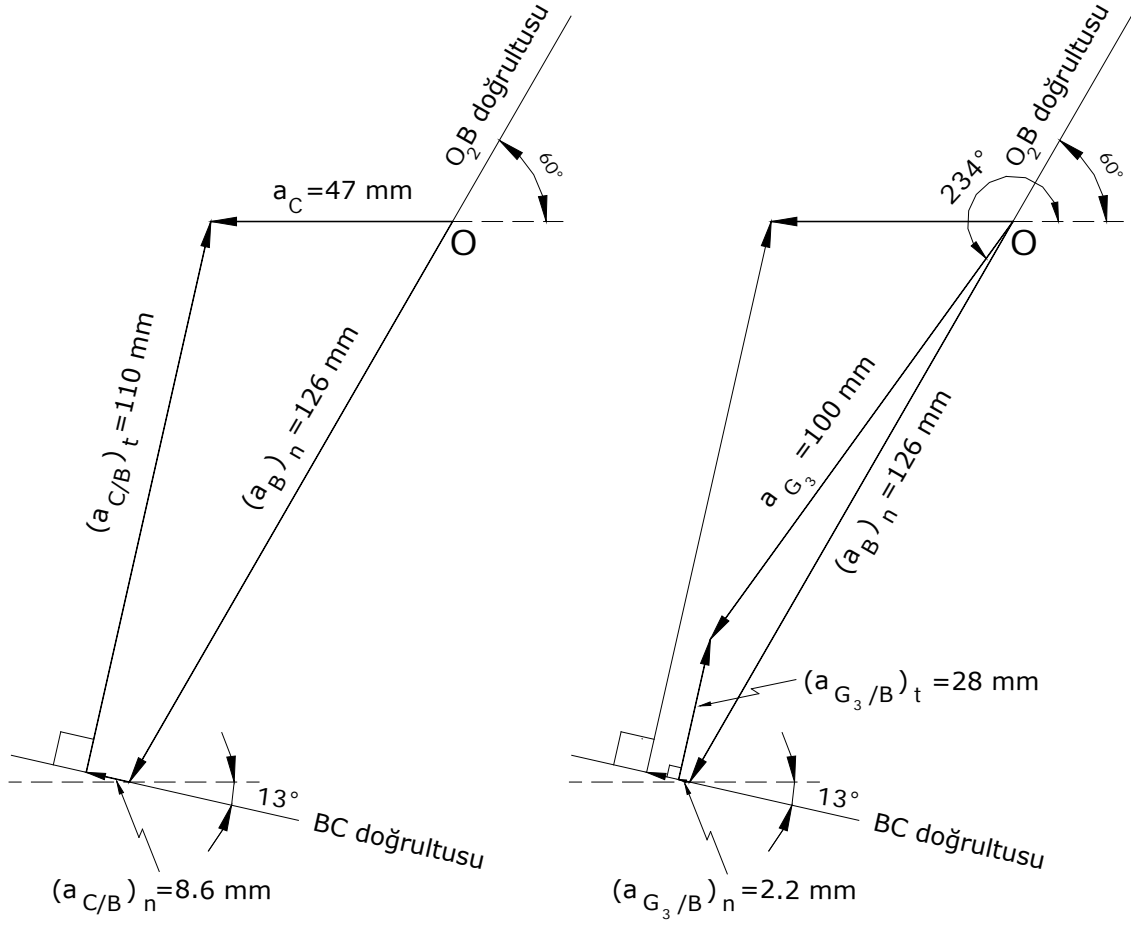
$$a_{G_3} = 100 * 40 = 4000 \text{ m/s}^2$$

bulunur. Grafikten ölçümle  $\vec{a}_{G_3}$  vektörünün O noktasından  $234^\circ$  eğimle geçtiği bulunur.

Buradan x ve y bileşenleri;

$$\left. \begin{aligned} a_{G_3x} &= a_{G_3} * \cos 234^\circ = -2351 \text{ m/s}^2 \\ a_{G_3y} &= a_{G_3} * \sin 234^\circ = -3236 \text{ m/s}^2 \end{aligned} \right\}$$

elde edilir.



İvme diyagramı

#### 4. Dinamik Kuvvet Analizi

Makinalarda ortaya çıkan dinamik kuvvetler veya atalet kuvvetleri hareketli makina uzuvlarının ivmelenmesinden doğarlar. Bu bakımdan dinamik kuvvet analizinin yapılabilmesi için öncelikle makinanın ivme durumunun tayin edilmesi gerekir.

Yüksek hızlı makinalarda atalet kuvvetleri statik kuvvetlerle karşılaştırıldığında çok daha büyük mertebelerde olabilirler. Örneğin taşıtlarda kullanılan içten yanmalı makinalarda yüksek hızlarda atalet kuvvetleri piston üzerine etki eden gaz kuvvetlerinden daha büyük olabilir. Yine turbo makinalarda dönen eleman olan rotorun sahip olacağı çok küçük bir dengesizlik bile yüksek hızlarda büyük mertebede atalet kuvvetlerinin ortaya çıkmasına sebep olabilir. Bu bakımdan bu çeşit makinaların tasarımı yapılırken dinamik analiz sonuçları hesaba katılmalıdır. Aksi halde makinada istenmeyen titreşim, aşırı aşınma ve hatta makinanın hasara uğraması problemleri ortaya çıkabilir.

##### 4.1. Newton'un Hareket Kanunu (2. Kanun)

Makinalarda dinamik kuvvetlerin incelenmesi için temel kanun Newton'un hareket kanunudur. Bu kanuna göre bir bileşke kuvvet etkisi ile hareket eden bir cismin hareket miktarının yani momentumunun zamana göre değişimi yani türevi bu bileşke kuvvetle orantılıdır. Bu kanun cismin kütlelerinin sabit olması durumunda yani katı cisim durumu için matematik olarak aşağıdaki eşitlikle ifade edilir.

$$\sum \vec{F} = m \vec{a}_G$$

Burada;

m : cismin kütlesi (kg)

$\vec{a}_G$  : cismin G kütle merkezinin ivmesi (m/s<sup>2</sup>)

$\sum \vec{F}$  : cisme etki eden bileşke kuvvet (N)

Katı cismin dönme hareketi yapması durumunda Newton'un hareket kanunu benzer şekilde aşağıdaki gibi yazılır.

$$\sum \vec{T}_G = J_G \vec{\alpha}$$

Burada;

$J_G$  : cismin G kütle merkezine göre olan kütleli atalet momenti (kg m<sup>2</sup>)

$\vec{\alpha}$  : açısal ivme (rad/s<sup>2</sup>)

$\sum \vec{T}_G$  : cismin G kütle merkezine göre olan bileşke moment (Nm)

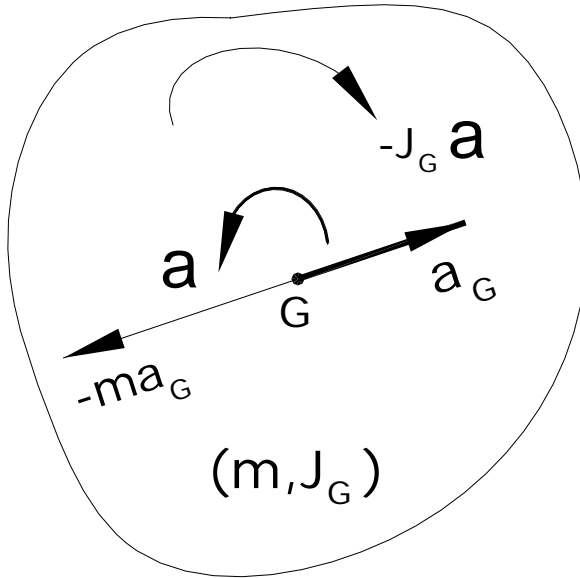
Newton'un hareket kanunu aşağıdaki gibi değişik bir formda yazılarak **D'Alembert Eşitliği** elde edilir.

$$\sum \vec{F} + \left( -m \vec{a}_G \right) = 0$$

$$\sum \vec{T}_G + \left( -J_G \vec{\alpha} \right) = 0$$

Burada  $(-m \vec{a}_G)$  atalet kuvveti ve  $(-J_G \vec{\alpha})$  da atalet momenti olarak adlandırılır. Atalet kuvveti ve atalet momentinin yönleri Şekil 3.5'de gösterilmiştir.

D'Alembert eşitliği ya da prensibine göre bir katı cisim üzerine etki eden dış kuvvetler ve dış momentler atalet kuvveti ve atalet momenti ile denge halinde bulunurlar. Bu şekilde dinamik bir problem statik bir probleme indirgenerek çözülebilir.



**Şekil 4.1.** Atalet kuvveti ve atalet momentinin yönleri.

Katı cismin düzlemsel hareket yapması durumunda yukarıda verilen vektör eşitlikleri, xy hareket düzlemi seçilirse:

$$\sum F_x + (-m a_{Gx}) = 0$$

$$\sum F_y + (-m a_{Gy}) = 0$$

$$\sum T_G + (-J_G \alpha) = 0$$

şeklinde yazılır.

Sonuç olarak özetlemek gerekirse verilen bir mekanizma ya da makinanın dinamik analizi için öncelikle ivme durumunun bilinmesi ya da çözülmesi gerekir. İvme durumu bilindikten sonra ilgili atalet kuvvet ve momentleri var olan diğer kuvvet ve momentlerle

birlikte uzuvların serbest cisim diyagramları üzerine konurlar. Serbest cisim diyagramlarından ilgili denge eşitlikleri yazılarak statik kuvvet analizinde yapıldığı gibi çözüm yapılır.

#### 4.1.1. Dört Çubuk Mekanizmasının Dinamik Kuvvet Analizi

Mekanizmanın dinamik kuvvet analizi, Kısım 3.1.3.2.'de mekanizmanın statik analitik analizi için çıkarılan eşitlikler kullanılarak yapılabilir. Ancak dinamik analizde daha önce açıklandığı gibi ilave olarak mekanizma uzuvlarına etki eden atalet kuvvetleri ve atalet momentlerinin de hesaba katılmaları gerekir. Dört çubuk mekanizması için yapılacak olan bu analiz diğer mekanizma çeşitlerinin analizi içinde açıklayıcı bir örnek oluşturur.

**Örnek 7:** Örnek 3'de ivme analizi yapılan dört çubuk mekanizmasının dinamik kuvvet analizini yapınız. Mekanizma uzuvlarının kütleli büyüklükleri;

$m_2$	Kolun kütle merkezi $G_2$ 'nin $O_2$ merkezinde olduğu kabul edileceğinden hesaba katılmayacaktır.	$J_{G_2}$	$\alpha_2 = 0$ verildiğinden hesaba katılmayacaktır.
$m_3$	0.5 kg	$J_{G_3}$	$1.21 \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2$
$m_4$	0.4 kg	$J_{G_4}$	$0.91 \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2$

olarak veriliyor.

Hatırlatma:

**Örnek 3'de verilen boyutlar** (Şekil 3.4.(a)'daki tanımlamalara göre):

$$l_2 = 50 \text{ mm} \quad r_2 = 0 \quad \theta_2 = 120^\circ$$

$$l_3 = 151 \text{ mm} \quad r_3 = 75.5 \text{ mm} \quad \theta_3 = 26^\circ$$

$$l_4 = 111 \text{ mm} \quad r_4 = 55.5 \text{ mm} \quad \theta_4 = 85^\circ$$

İvme değerleri:

$$a_{G_2} = 0 \text{ (sabit kütle merkezi)} \quad \alpha_2 = 0 \text{ rad/s}^2$$

$$a_{G_3} = 375.5 \text{ m/s}^2 \angle 296^\circ \quad \alpha_3 = 1001.3 \text{ rad/s}^2 \quad (\curvearrowright) \Rightarrow \alpha_3 = 1001.3 \text{ rad/s}^2$$

$$a_{G_4} = 150 \text{ m/s}^2 \angle 290^\circ \quad \alpha_4 = 1121.6 \text{ rad/s}^2 \quad (\curvearrowleft) \Rightarrow \alpha_4 = -1121.6 \text{ rad/s}^2$$

Çözüm:

Buna göre ilgili atalet kuvveti bileşenleri ve atalet momentleri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$F_2 = -m_2 a_{G_2} = 0$$

$$F_3 = -m_3 a_{G_3} = - (0.5) \cdot (375.5) = - 186.75 \text{ N} \Rightarrow 187 \text{ N} \angle 116^\circ$$

$$F_{3x} = 187 \cdot \cos 116^\circ = - 82 \text{ N}$$

$$F_{3y} = 187 \cdot \sin 116^\circ = 168 \text{ N}$$



$$F_4 = -m_4 a_{G4} = - (0.4).(150) = - 60 \text{ N} \Rightarrow 60 \text{ N} \angle 110^\circ$$

$$F_{4x} = 60. \cos 110^\circ = - 20.5 \text{ N}$$

$$F_{4y} = 60. \sin 110^\circ = 56.4 \text{ N}$$

$$T_2 = -J_{G2} \alpha_2 = 0$$

$$T_3 = -J_{G3} \alpha_3 = - (1.21 * 10^{-3} \text{ kg m}^2) (1001.3 \text{ rad/s}^2) = -1211.6 * 10^{-3} \text{ Nm}$$

$$\Rightarrow 1211.6 \text{ Nmm} (\curvearrowright)$$

$$T_4 = -J_{G4} \alpha_4 = - (0.91 * 10^{-3} \text{ kg m}^2) (-1121.6 \text{ rad/s}^2) = 1020.6 * 10^{-3} \text{ Nm}$$

$$\Rightarrow 1020.6 \text{ Nmm} (\curvearrowleft)$$

Kısım 3.1.3.2.'de çıkarılan eşitlikler kullanılarak:

(7) ve (8) eşitliklerindeki katsayılar

$$a_{11} = -l_4 \sin \theta_4 = -111 * \sin 85^\circ = -110.6$$

$$a_{12} = l_4 \cos \theta_4 = 111 * \cos 85^\circ = 9.7$$

$$a_{21} = l_3 \sin \theta_3 = 151 * \sin 26^\circ = 66.2$$

$$a_{22} = -l_3 \cos \theta_3 = -151 * \cos 26^\circ = -135.7$$

$$b_1 = F_{4x} r_4 \sin \theta_4 - F_{4y} r_4 \cos \theta_4 - T_4$$

$$= (-20.5 \text{ N})(55.5 \text{ mm}) \sin 85^\circ - (56.4 \text{ N})(55.5 \text{ mm}) \cos 85^\circ - (1020.6) = -2426.8$$

$$b_2 = F_{3x} r_3 \sin \theta_3 - F_{3y} r_3 \cos \theta_3 - T_3$$

$$= (-82 \text{ N})(75.5 \text{ mm}) \sin 26^\circ - (168 \text{ N})(75.5 \text{ mm}) \cos 26^\circ - (-1211.6) = -12902.6$$

Bu değerler (9) dan (16) ya kadar olan eşitliklere yerleştirilirse;

$$F_{34x} = \frac{a_{22} b_1 - a_{12} b_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} = \frac{(-135.7)(-2426.8) - (9.7)(-12902.6)}{(-110.6)(-135.7) - (9.7)(66.2)} = \frac{454472}{14366} = 31.6 \text{ N}$$

$$F_{34y} = \frac{a_{11} b_2 - a_{21} b_1}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} = \frac{(-110.6)(-12902.6) - (66.2)(-2426.8)}{(-110.6)(-135.7) - (9.7)(66.2)} = \frac{1587682}{14366} = 110.5 \text{ N}$$

$$F_{14x} = -F_{34x} - F_{4x} = -31.6 + (-20.5) = -11.1 \text{ N}$$

$$F_{14y} = -F_{34y} - F_{4y} = -110.5 - 56.4 = -166.9 \text{ N}$$

$$F_{23x} = F_{34x} - F_{3x} = 31.6 - (-82) = 113.6 \text{ N}$$

$$F_{23y} = F_{34y} - F_{3y} = 110.5 - 168 = -57.5 \text{ N}$$

$$F_{12x} = F_{23x} - F_{2x} = 113.6 - 0 = 113.6 N$$

$$F_{12y} = F_{23y} - F_{2y} = -57.5 - 0 = -57.5 N$$

ve bileşke değerler ise;

$$F_{34} = \sqrt{F_{34x}^2 + F_{34y}^2} = \sqrt{31.6^2 + 110.5^2} = 115 N$$

$$F_{23} = \sqrt{F_{23x}^2 + F_{23y}^2} = \sqrt{113.6^2 + (-57.5)^2} = 127 N$$

$$F_{14} = \sqrt{F_{14x}^2 + F_{14y}^2} = \sqrt{11.1^2 + (-166.9)^2} = 167 N$$

$$F_{12} = \sqrt{F_{12x}^2 + F_{12y}^2} = \sqrt{113.6^2 + (-57.5)^2} = 127 N$$

Mekanizmanın statik dengesi için kola uygulanması gereken T denge momenti

$$\begin{aligned} T &= F_{23y} L_2 \cos \theta_2 - F_{23x} L_2 \sin \theta_2 - F_{2y} r_2 \cos \theta_2 + F_{2x} r_2 \sin \theta_2 - T_2 \\ &= (-57.5)(50) \cos 120^\circ - (113.6)(50) \sin 120^\circ - 0 + 0 - 0 = -3481.5 \text{ Nmm} \end{aligned}$$

$$T = 3481.5 \text{ Nmm} \quad (\curvearrowright)$$

olarak bulunur.

**Örnek 8:** Örnek 7’yi grafik yöntemle çözünüz.

Çözüm:

Problemin grafik çözümü süperpozisyon prensibi uygulanarak Örnek 6’da açıklandığı şekilde yapılabilir. Ancak bunun için önce “eşdeğer atalet kuvveti” tanımı kullanılarak problemin statik bir probleme indirgenmesi gerekir.

“Eşdeğer atalet kuvveti” tanımı “atalet momenti” yerine bunun eşdeğeri olan bir “kuvvet çifti” alınarak yapılır. Burada kuvvet çiftinin moment kolu uzunluğu h;

$$h = \frac{|J_G \alpha|}{|m a_G|}$$

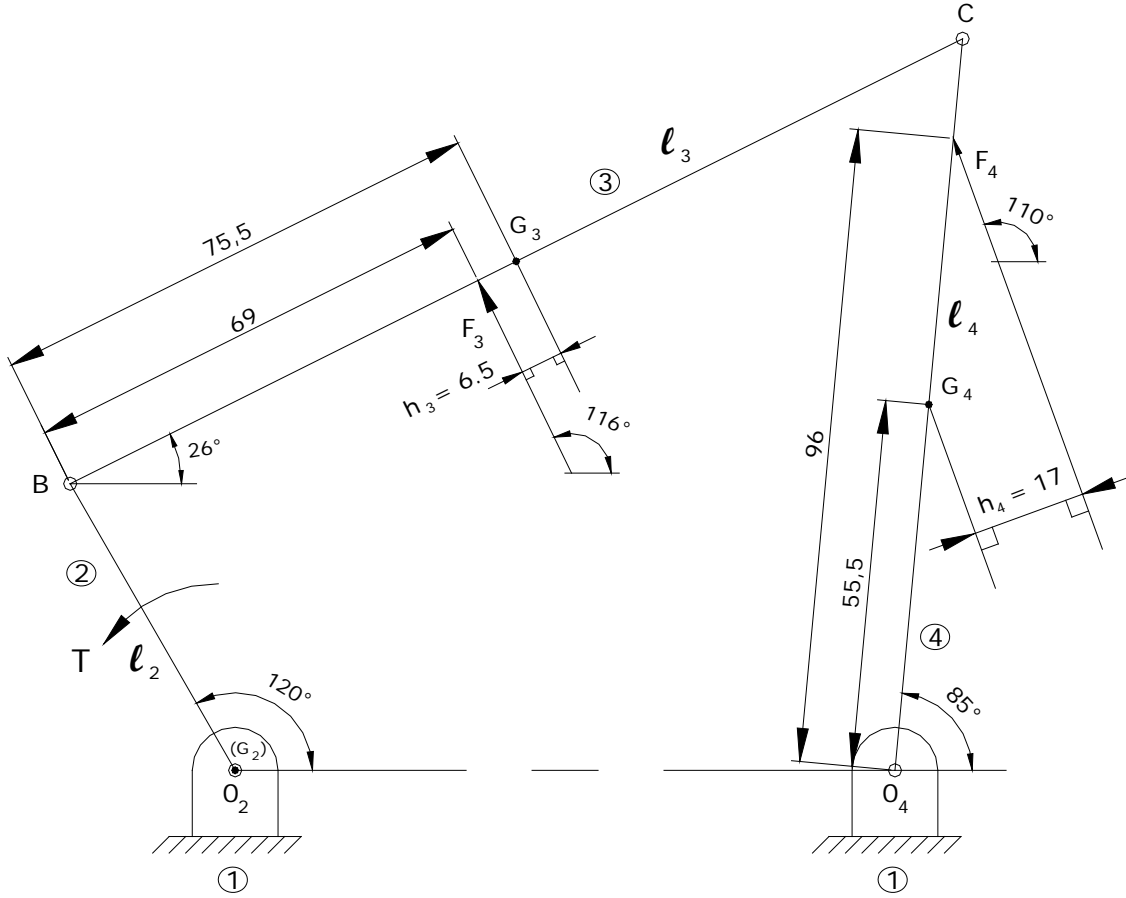
eşitliğinden hesaplanır. Yani, böylelikle atalet kuvveti “h” kadar kaçık bir konuma taşınmış (paralel ötelenmiş) olmaktadır. Bu h kaçıklığı atalet momentini yönüyle verecek tarafta (G kütle merkezine göre) alınır.

Örnek için;

$$h_3 = \frac{|J_{G3} \alpha_3|}{|m_3 a_{G3}|} = \frac{1211.6}{187} = 6.5 \text{ mm}$$

$$h_4 = \frac{|J_{G4} \alpha_4|}{|m_4 a_{G4}|} = \frac{1020.6}{60} = 17 \text{ mm}$$

olarak hesaplanır. Aşağıdaki şekil üzerinde bu yeni kuvvet durumu gösterilmiştir.



Şekilde;

$F_3 = -m_3 a_{G3} = 187 \text{ N} \angle 116^\circ$  kuvvetinin  $G_3$  kütle merkezinin sol tarafında;

$F_3 h_3 = -J_{G3} \alpha_3 (= -1211.6 \text{ Nmm})$  momentini saat ibreleri yönünde verecek şekilde

ve

$F_4 = -m_4 a_{G4} = 60 \text{ N} \angle 110^\circ$  kuvvetinin de  $G_4$  kütle merkezinin sağ tarafında;

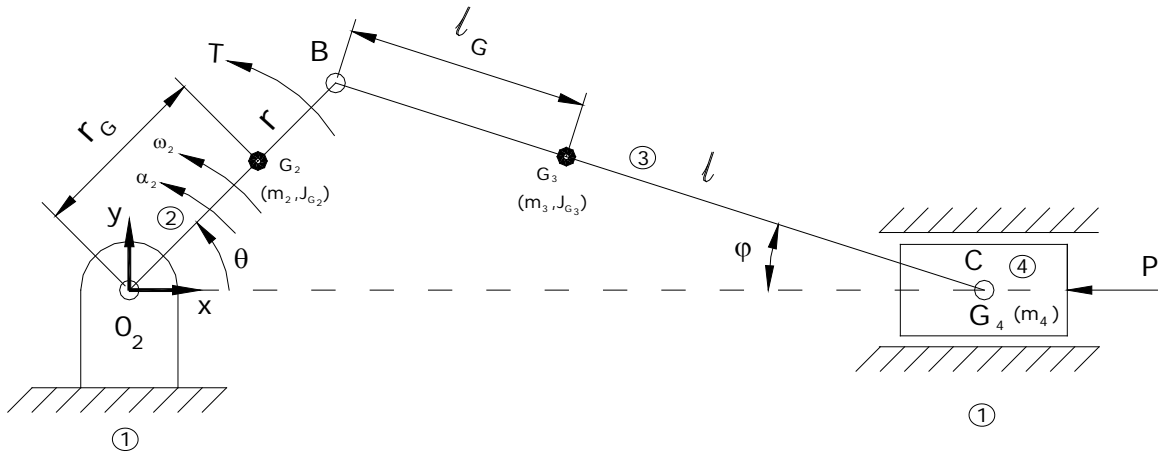
$F_4 h_4 = -J_{G4} \alpha_4 (= 1020.6 \text{ Nmm})$  momentini saat ibreleri ters yönünde verecek şekilde

yerleştirilmiş olduklarına dikkat edilmelidir.

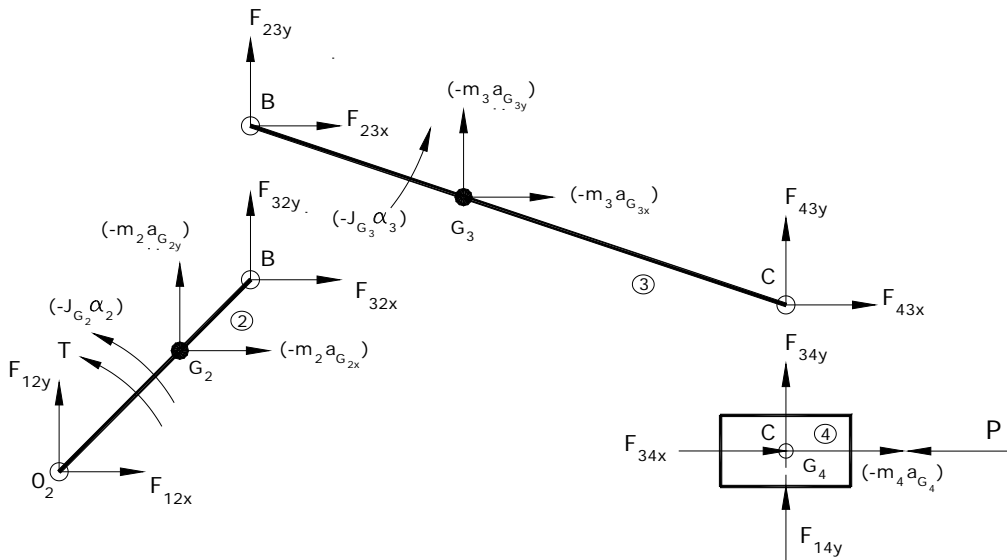
Böylelikle problem Örnek 6'da grafik çözümü yapılmış olan probleme indirgenmiş olmaktadır. Örnek 7'deki analitik çözüm sonuçlarının grafik çözüm sonuçlarını çok iyi bir yaklaşıkla doğruladığı görülmektedir.

#### 4.1.2. Krank-Biyel Mekanizmasının Dinamik Kuvvet Analizi

İçten yanmalı makinalar ve pistonlu kompresörlerde kullanılan krank-biyel mekanizmasının tasarımı yapılırken dinamik kuvvetlerin hesaba katılması büyük bir öneme sahiptir. Şekil 3.6.(a)'da gösterilen krank-biyel mekanizmasında kolun, biyelin ve pistonun kütleleri sırasıyla  $(m_2, m_3, m_4)$  ve kütle merkezleri  $(G_2, G_3, G_4)$  ile verilmektedir. Ayrıca kolun ve biyelin kütleli atalet momentleri  $(J_{G_2}, J_{G_3})$  olarak tanımlanmıştır. Kol  $\omega_2$  açısal hızına ve  $\alpha_2$  açısal ivmesine sahiptir. Piston üzerine ayrıca bir  $P$  kuvveti etki etmektedir. Bu tanımlamalara göre mekanizmanın dinamik dengesi için kola uygulanması gereken  $T$  momenti aşağıda açıklandığı şekilde elde edilebilir. Mekanizmanın hareketli uzuvlarının serbest cisim diyagramları Şekil 3.6.(b)'de gösterilmiştir.



Şekil 4.2.(a) Krank-biyel mekanizmasının dinamik kuvvet analizi.



Şekil 4.2.(b) Serbest cisim diyagramları.

Şekil 3.6.(b)'den her bir uzuv için denge eşitlikleri aşağıdaki gibi yazılır;

4 nolu uzuv için;

$$F_{34x} + (-m_4 a_{G_4}) - P = 0 \quad (1)$$

$$F_{14y} + F_{34y} = 0 \quad (2)$$

3 nolu uzuv için;

$$F_{23x} + F_{43x} + (-m_3 a_{G_{3x}}) = 0 \quad (3)$$

$$F_{23y} + F_{43y} + (-m_3 a_{G_{3y}}) = 0 \quad (4)$$

ve B'ye göre moment alınarak,

$$F_{43x} l \sin \varphi + F_{43y} l \cos \varphi + (-m_3 a_{G_{3x}}) l_G \sin \varphi + (-m_3 a_{G_{3y}}) l_G \cos \varphi + (-J_{G_3} \alpha_3) = 0 \quad (5)$$

2 nolu uzuv için;

$$F_{12x} + F_{32x} + (-m_2 a_{G_{2x}}) = 0 \quad (6)$$

$$F_{12y} + F_{32y} + (-m_2 a_{G_{2y}}) = 0 \quad (7)$$

ve O<sub>2</sub>'ye göre moment alınırsa,

$$T - F_{32x} r \sin \theta + F_{32y} r \cos \theta - (-m_2 a_{G_{2x}}) r_G \sin \theta + (-m_2 a_{G_{2y}}) r_G \cos \theta + (-J_{G_2} \alpha_2) = 0 \quad (8)$$

elde edilir.

**Örnek 9:** Örnek 4'de ivme analizi yapılan krank-biyel mekanizmasının dinamik kuvvet analizini yapınız. Piston üzerine ayrıca P=6300 N'luk bir gaz kuvveti etki etmektedir.

Kabuller ve Kütleli büyüklükler;

$m_2$  ( $G_2$  kütle merkezi  $O_2$  merkezinde kabul edilecektir) ,

$J_{G_2} (\alpha_2 = 0 \text{ verildiğinden hesaba katılmayacaktır})$  ,

$m_3 = 1.36 \text{ kg}$  ,  $J_{G_3} = 0.0102 \text{ kgm}^2$  ,

$m_4 = 0.91 \text{ kg}$  ,

Hatırlatma:

**Örnek 4'de verilen boyutlar:**  $r = 51 \text{ mm}$  ,  $l = 200 \text{ mm}$  ,  $\theta = 60^\circ$  ,  $\varphi = 13^\circ$  (hesaplandı),

$r_G = 0 \text{ mm}$  ,  $l_G = 51 \text{ mm}$

**Örnek 4'de verilen ve hesaplanan ivme değerleri;**

$a_{G_{3x}} = -2351 \text{ m/s}^2$  ,  $a_{G_{3y}} = -3236 \text{ m/s}^2$  ,

$\alpha_3 = 22000 \text{ rad/s}^2$  (↺) ,  $a_{G_4} = a_c = -1880 \text{ m/s}^2$

Çözüm:

Buna göre ilgili atalet kuvveti bileşenleri ve atalet momentleri aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$-m_2 a_{G_{2x}} = 0$$

$$-m_2 a_{G_{2y}} = 0$$

$$-J_{G_2} \alpha_2 = 0$$

$$-m_3 a_{G_{3x}} = -1.36(-2351) = 3197.4 \text{ N}$$

$$-m_3 a_{G_{3y}} = -1.36 (-3236) = 4401.0 \text{ N}$$

$$-J_{G_3} \alpha_3 = -0.0102 (22000) = -224.4 \text{ Nm}$$

$$-m_4 a_{G_4} = -0.91(-1880) = 1710.8 \text{ N}$$

bu değerler kullanılarak yukarıdaki eşitliklerden,

i) (1) den

$$F_{34x} = -(-m_4 a_{G_4}) + P = -1710.8 + 6300 = 4589.2 \text{ N} = -F_{43x}$$

ii) (5) den

$$F_{43y} = \left[ -F_{43x} l \sin \varphi - (-m_3 a_{G_{3x}}) l_G \sin \varphi - (-m_3 a_{G_{3y}}) l_G \cos \varphi - (-J_{G_3} \alpha_3) \right] / l \cos \varphi$$

$$F_{43y} = \left[ 4589.2 (200) \sin 13^\circ - 3197.4 (51) \sin 13^\circ - 4401 (51) \cos 13^\circ - (-224.4 \cdot 10^3) \right] / (200) \cos 13^\circ$$

$$F_{43y} = 900.5 \text{ N} = (-F_{34y})$$

iii) (2) den

$$F_{14y} = -F_{34y} \Rightarrow F_{14y} = 900.5 \text{ N}$$

iv) (3) den

$$F_{23x} = -F_{43x} - (-m_3 a_{G_{3x}}) = 4589.2 - 3197.4$$

$$F_{23x} = 1391.8 \text{ N} , (= -F_{32x})$$

v) (4) den

$$F_{23y} = -F_{43y} - (-m_3 a_{G_{3y}}) = -900.5 - 4401$$

$$F_{23y} = -5301.5 \text{ N} (= -F_{32y})$$

vi) (6) dan

$$F_{12x} = -F_{32x} - (-m_2 a_{G_{2x}}) = 1391.8 - 0$$

$$F_{12x} = 1391.8 \text{ N}$$

vii) (7) den

$$F_{12y} = -F_{32y} - (-m_2 a_{G_{2y}}) = -5301.5 - 0$$

$$F_{12y} = -5301.5 \text{ N}$$

viii) (8) den

$$T = F_{32x} r \sin \theta - F_{32y} r \cos \theta + (-m_2 a_{G_{2x}}) r_G \sin \theta - (-m_2 a_{G_{2y}}) r_G \cos \theta - (-J_{G_2} \alpha_2)$$

$$= -1391.8 (51) \sin 60^\circ - 5301.5 (51) \cos 60^\circ + 0 - 0 - 0$$

$$T = -196660.3 \text{ Nmm}$$

$$\cong 196.7 \text{ Nm} \quad (\curvearrowright)$$

bulunur. Burada ayrıca bileşke mafsalsal kuvvetleri:

$$F_{12} = F_{32} = F_{23} = \sqrt{F_{12x}^2 + F_{12y}^2} = \sqrt{1391.8^2 + (-5301.5)^2} = 5481.15 \text{ N}$$

$$F_{34} = F_{43} = \sqrt{F_{43x}^2 + F_{43y}^2} = \sqrt{4589.2^2 + 900.5^2} = 4676.71 \text{ N}$$

$$F_{14} = F_{14y} = 900.5 \text{ N}$$

olarak hesaplanır.

**Örnek 10:** Örnek 9’u grafik yöntemle çözünüz.

Çözüm:

Problemin grafik çözümü yine süperpozisyon prensibi uygulanarak dört çubuk mekanizması örneğinde (Örnek 6) açıklandığı şekilde yapılır. Örnek 9’da verilen değerlere göre ilgili atalet kuvvetleri ve atalet momenti değerleri:

$$F_3 = -m_3 a_{G_3} = -(1.36) \cdot (4000) = -5440 \text{ N} = 5440 \text{ N} \quad \square \quad 54^\circ$$

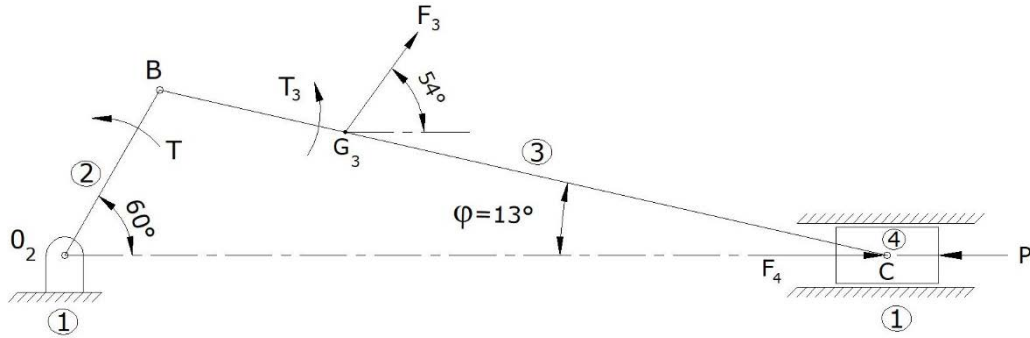
(Örnek 4’de  $a_{G_3} = 4000 \text{ m/s}^2 \quad \square \quad 234^\circ$  olarak hesaplanmıştı)

$$F_4 = -m_4 a_{G_4} = 1710.8 \text{ N}$$

$$T_3 = -J_{G_3} \alpha_3 = -224.4 \text{ Nm} \Rightarrow 224.4 \text{ Nm} \quad (\curvearrowright)$$

(Örnek 9’da hesaplanmışlardı)

Hesaplanan bu atalet kuvvetleri ve atalet momenti aşağıdaki şekil üzerinde gösterilmiştir.

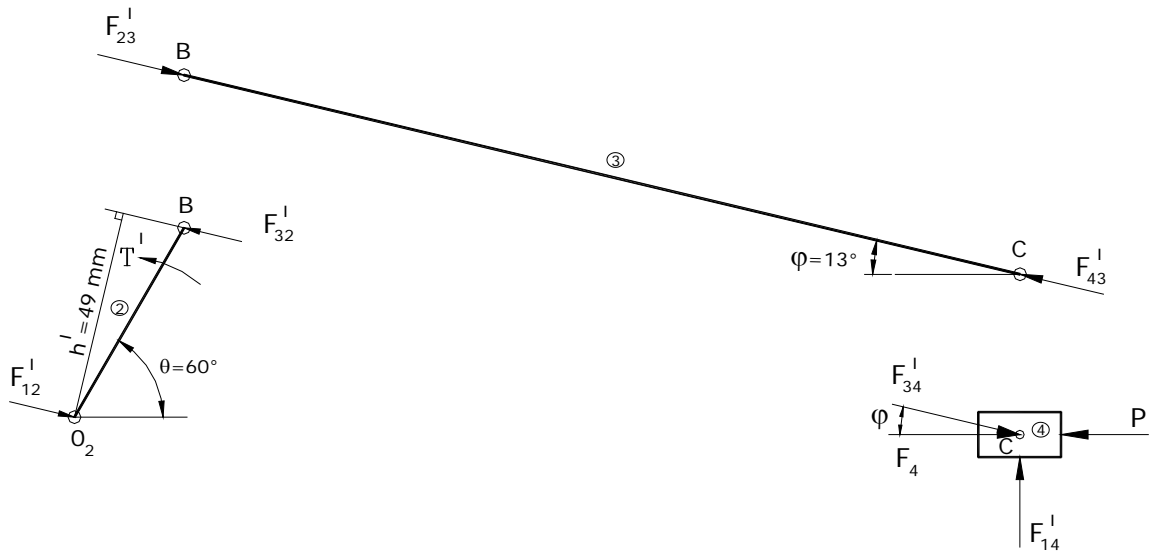


**Alt problem I:** Sadece  $F_4$  ve  $P$ 'nin var olması durumudur. Bu durumda piston üzerine etki eden bileşke kuvvet;

$$\begin{aligned} F &= F_4 - P \\ &= 1710.8 - 6300 \\ &= -4589.2 \text{ N} \end{aligned}$$

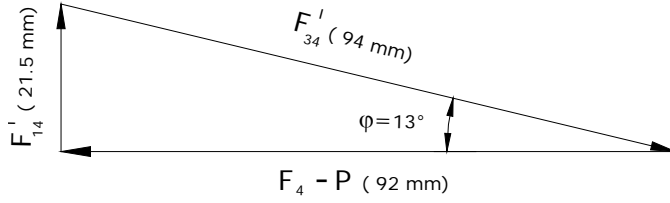
olacaktır.

Buna göre serbest cisim diyagramları aşağıdaki gibi çizilirler.



Kuvvet diyagramını oluşturmak için önce iki kuvvet etkisi altında bulunan ③ uzvundan  $\vec{F}_{43}^I$  doğrultusu alınarak ④ uzvu üzerine taşınır. Buna göre ④ uzvu üç kuvvet etkisi altında bulunmaktadır. Çizim işlemi Örnek 5'de açıklandığı şekilde yapılarak kuvvet diyagramı çizilir (1/50 ölçekle 50N=1mm). Ölçüm yapılarak;





$$F'_{14} = 21.5 * 50 = 1075 \text{ N}$$

$$F'_{34} = F'_{43} = F'_{23} = F'_{32} = F'_{12} = 94 * 50 = 4700 \text{ N}$$

bulunur. Kol uzvu iki kuvvet ve bir moment etkisi altında bulunmaktadır. Önce  $\vec{F}'_{32}$  B'ye taşınarak moment kolu uzunluğu  $h^I = 49 \text{ mm}$  olarak ölçülür. Kolun moment dengesinden

$$\sum \vec{T}_{O_2} = 0$$

$$T^I + F'_{32} * h^I = 0$$

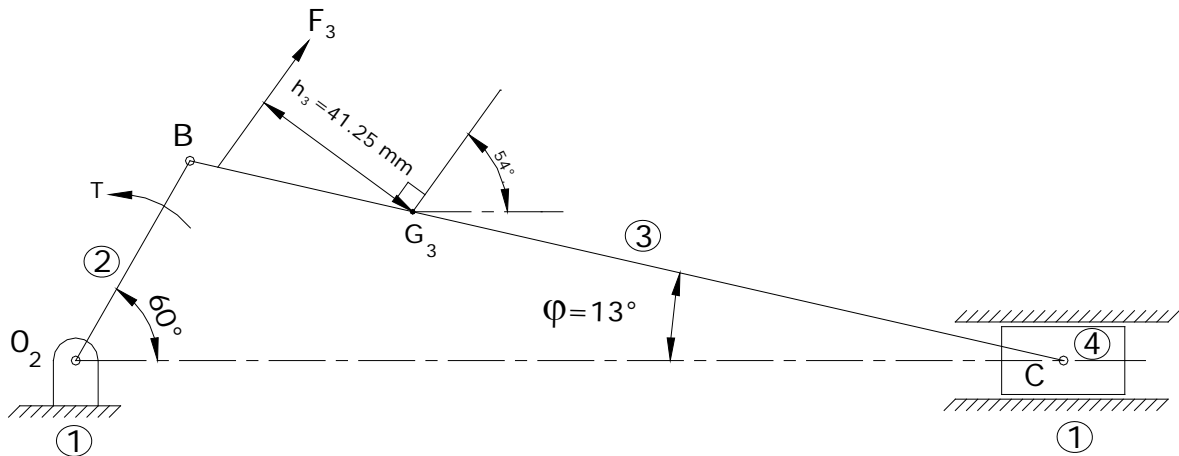
$$T^I = -F'_{32} * h^I = -4700 * 49 = -230300 \text{ Nmm} = -230.3 \text{ Nm} \Rightarrow 230.3 \text{ Nm} (\curvearrowright)$$

bulunur.

**Alt problem II:** Sadece  $\vec{F}_3$  ve  $\vec{T}_3$ 'ün var olması durumudur. Bu durumda tek bir yükleme durumu elde etmek için yine Örnek 8'de yapıldığı gibi bir “eşdeğer atalet kuvveti” hesaplamak gerekir.

$$h_3 = \frac{|T_3|}{|F_3|} = \frac{224.4 * 10^3 \text{ Nmm}}{5440 \text{ N}} = 41.25 \text{ mm}$$

Buna göre  $\vec{F}_3$  atalet kuvveti ( $\vec{T}_3$  atalet momentini doğru yönüyle verecek şekilde)  $G_3$  kütle merkezinin sol tarafında  $h_3 = 41.25 \text{ mm}$  kaçık bir konuma taşınmalıdır. Bu kuvvet durumu aşağıdaki şekil üzerinde gösterilmiştir.



Bu yeni kuvvet durumuna göre de uzuvların serbest cisim diyagramları aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi çizilirler. Buna göre kuvvet diyagramı (③) nolu uzvun serbest cisim diyagramının sol tarafında) 1/50 ölçekle çizilmiştir.

Kuvvet üçgeni üzerinden ölçüm yapılarak ve ölçekle de çarpılarak ilgili mafsallardaki kuvvetleri;

$$F_{23}'' = 106.2 * 50 = 5310 \text{ N} \Rightarrow F_{23}'' = F_{32}'' = F_{12}'' = 5310 \text{ N}$$

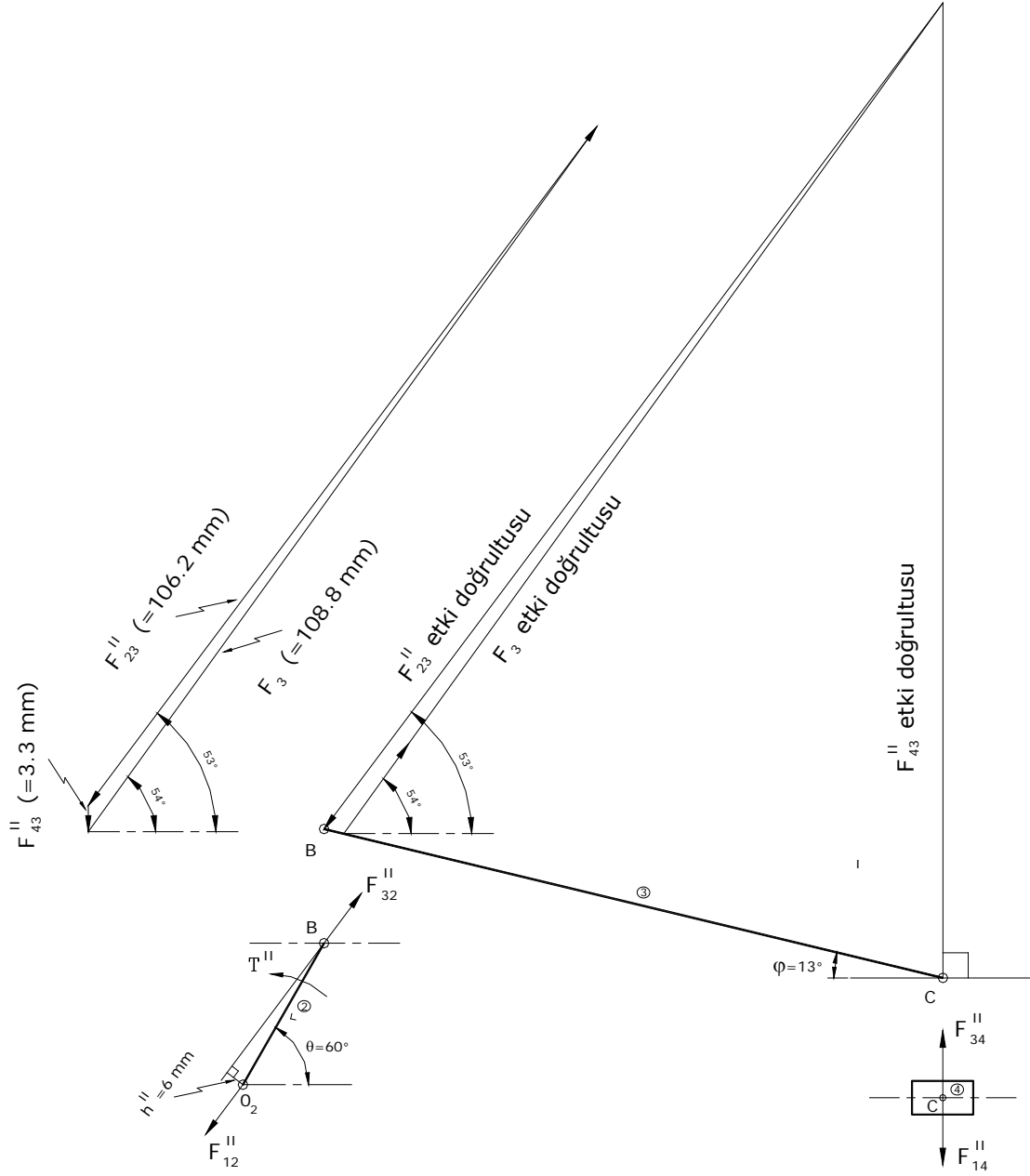
$$F_{43}'' = 3.3 * 50 = 165 \text{ N} \Rightarrow F_{43}'' = F_{34}'' = F_{14}'' = 165 \text{ N}$$

bulunur. Kolun moment dengesinden:

$$T'' - F_{32}'' * h'' = 0$$

$$T'' = F_{32}'' * h'' = 5310 * 6 = 31860 \text{ Nmm} \cong 31.9 \text{ Nm} \Rightarrow 31.9 \text{ Nm} (\curvearrowright)$$

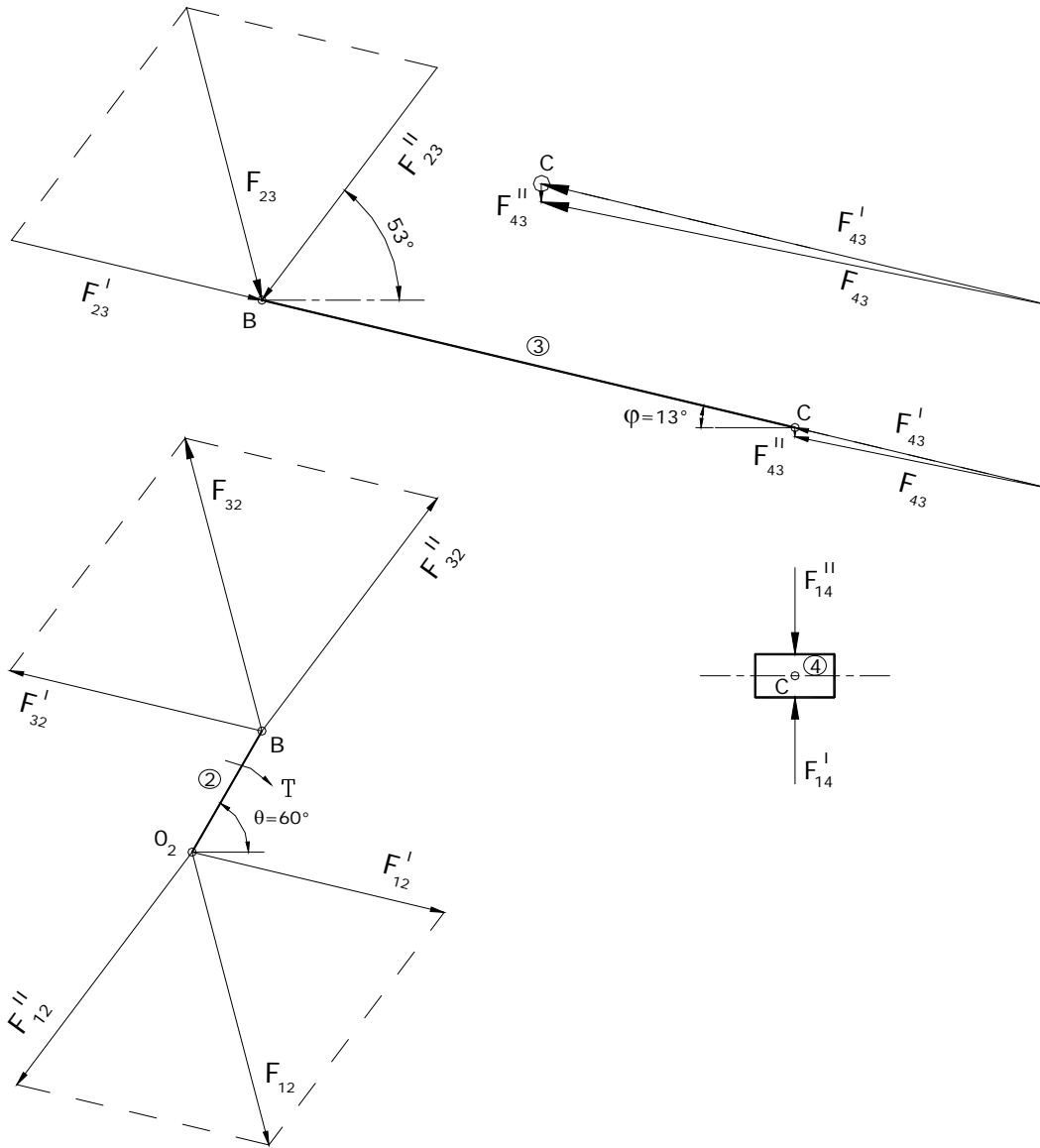
bulunur.



Böylelikle mekanizmanın dinamik dengesi için kola uygulanması gereken toplam moment:

$$\begin{aligned}\vec{T} &= \vec{T}^I + \vec{T}^{II} \\ &= -230.3 + 31.9 = -198.4 \text{ Nm} \Rightarrow 198.4 \text{ Nm} \quad (\curvearrowright)\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bileşke mafsıl kuvvetleri de Alt Problem I ve Alt Problem II sonuçlarının vektörel toplamından aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi bulunurlar:



Ölçüm sonuçları:

$$F_{23} = F_{32} = F_{12} = 5500 \text{ N}$$

$$F_{43} = F_{34} = 4685 \text{ N}$$

$$F_{14} = 1075 - 165 = 910 \text{ N}$$

Sonuç olarak grafik çözüm yöntemiyle de analitik çözüm yöntemiyle elde edilen sonuçlara çok yakın değerler elde edilmiş olmaktadır.