¡Draft! Caminos rugosos y soluciones de ecuaciones diferenciales.

David Alejandro Alquichire Rincón

17 de julio de 2025

Idea: Estudiar ecuaciones diferenciales estocásticas por medio de caminos rugosos.

¿Hasta dónde? Peter Fritz... soluciones a PDE estocásticas... ¿Métodos Numéricos?

Propuesta capítulos:

1. Introducción y Preliminares

    a) Conceptos de Probabilidad y Teoría de la medida (LB, D. Cohn, Protter y el otro libro).
    b) Conceptos en Convergencia de Procesos Estocásticos.
    c) Conceptos de Procesos Estocásticos (Notas de Freddy, apoyo de Capinski)
    d) Integración de Riemann Stieltjes
    e) Teoría de la medida y la integral de Lebesgue
    f) Análisis Funcional
    g) Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (Existencia y Unicidad)
    h) Ecuaciones Diferenciales Parciales

2. Construcción del Movimiento Browniano

    a) a

3. Construcción de la Integral de Itô

    a) a

4. Ecuaciones Diferenciales Estocásticas por Itô -¿Oksendal

    a) Integral de Itô, Cálculo Estocástico
    b) Ecuaciones Diferenciales Estocásticas, Solución clásica de Itô.
    c) Teoremas de Existencia y Unicidad.

5. Ecuaciones Diferenciales Estocásticas por caminos rugosos Pruebas de funciones α. Gráficas: Simulaciones de ecuaciones rugosos. α-Hölder. Caminos orden α, ¿Cómo luce?

Título
Caminos rugosos y soluciones de ecuaciones diferenciales.

Title
Rough paths and solutions to differential equations.

Resumen:

Abstract:

Palabras clave:

Keywords:

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo, nos dedicaremos a repasar conceptos de teoría de la probabilidad, teoría de integración y ecuaciones diferenciales.

1.1. Conceptos de Probabilidad.

En esta sección, daremos un breve repaso a conceptos esenciales en probabilidad, para poder entender mejor procesos estocásticos, y de igual forma, poder realizar la construcción de la integral de Itô. Para mayor información, puede consultar [6], del cuál se basará la gran parte de este capítulo.

1.1.1. Espacios de probabilidad.

Sea Ω un conjunto abstracto. Denotamos por 2^{Ω} el conjunto de partes de Ω.

Definimos a $\mathcal{F}$ una **σ-álgebra** de Ω, como un subconjunto de 2^{Ω} que cumple las siguientes propiedades:

- $\emptyset, \Omega \in \mathcal{F}$
- Si $A \in \mathcal{A}$, luego $A^c \in \mathcal{A}$
- Dado $\{A_i\}_{i\in I}$ una sucesión de subconjuntos de Ω a lo más contable. Luego, si para todo $i \in I$, $A_i \in \mathcal{A}$, entonces $\cup_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$

El espacio $(\Omega, \mathcal{A})$ se llama **espacio medible**.

Los elementos en $\mathcal{A}$ se llamarán *eventos*.

Ejemplo:

- Para Ω un conjunto abstracto, $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$ es la σ-álgebra trivial.

- Sea $A \subset \Omega$, entonces $\sigma(A) = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$ también es una σ-álgebra, llamada la **menor σ-álgebra** que contiene a A, que se genera mediante la intersección de todas las σ-álgebras que contienen a A.

- Para $\Omega = \mathbb{R}$, una σ-álgebra para este conjunto es la **σ-álgebra de Borel**, que se puede generar con intervalos de la forma $(-\infty, a]$ para todo $a \in \mathbb{Q}$. También, es la generada por todos los conjuntos abiertos (O cerrados, o semiabiertos...). Para más información consulte [2] Y [6]

$\square$

Una **medida de probabilidad** definida en una σ-álgebra $\mathcal{A}$ de Ω, es una función $P : \mathcal{A} \to [0,1]$ que cumple:

- $P(\Omega) = 1$

- Para toda colección contable $\{A_n\}_{n\geq 1}$ de elementos en $\mathcal{A}$ que son disyuntos par a par, se tiene:

$$P\left(\cup_{n=1}^{\infty}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P\left(A_n\right)$$

  Es decir, la función es *contablemente aditiva*. Se llama a $P(A)$ como la *probabilidad del evento* A.

La tripla $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ se conoce como **espacio de probabilidad**.

De forma general, la medida de probabilidad, es un caso específico de una *función de medida*, en este caso, tendremos un *espacio de medida*. Vea COHN.

Note que, podemos ver una propiedad más débil que el axioma (2) en la anterior definición. Para toda colección $\{A_k\}_{k=1}^{n}$ *finita*, de disyuntos par a par, si tenemos:

$$P\left(\cup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$$

entonces la función P es **aditiva (O finitamente aditiva)**.

Vamos a revisar algunas propiedades de las funciones de probabilidad, sin demostración. Para consultar los detalles, puede consultar PROTTER.

Teorema 1 *Sea* $(\Omega, \mathcal{A})$ *un espacio medible, y* $P : \mathcal{A} \to [0,1]$ *una función finitamente aditiva y* $P(\Omega) = 1$. *Entonces, tenemos las siguientes equivalencias:*

- *La función es contablemente aditiva.*
- *Si* $A_n \in \mathcal{A}$ *y* $A_n \downarrow \emptyset$, *luego* $P(A_n) \downarrow 0$.

- *Si* $A_n \in \mathcal{A}$ *y* $A_n \downarrow A$*, luego* $P(A_n) \downarrow P(A)$.
- *Si* $A_n \in \mathcal{A}$ *y* $A_n \uparrow \Omega$*, luego* $P(A_n) \uparrow 1$.
- *Si* $A_n \in \mathcal{A}$ *y* $A_n \uparrow A$*, luego* $P(A_n) \uparrow P(A)$.

Más aún, si P *es una medida de probabilidad, y dado* $\{A_n\}$ *sucesión de eventos que converge a* A*. Entonces* $A \in \mathcal{A}$ *y* $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(A)$

Finalmente, damos el concepto de sub-σ-álgebra.

> Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad. Decimos que $\mathcal{T}$ es una **sub-σ-álgebra** si $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{A}$ y $\mathcal{T}$ es σ-álgebra de Ω

1.1.2. Variables aleatorias.

En esta sección, tommaos a $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio abstracto, donde Ω no es necesariamente contable.

> Sean $(E, \mathcal{E})$ y $(F, \mathcal{F})$ dos espacios medibles (No necesariamente tienen una medida de probabilidad). Una función $X : E \to F$ es una **función medible** si $X^{-1}(\Lambda) \in \mathcal{E}$ para todo $\Lambda \in \mathcal{F}$.
>
> Si $(E, \mathcal{E}, P)$ es un espacio de probabilidad, X posee el nombre de **variable aleatoria**.

Nuevamente, tenemos varias propiedades para las funciones medibles, que enunciaremos acá, sin la demostración respectiva. Para esto, consulte, PROTTER.

Corolario 1 *Sea* $(E, \mathcal{E})$ *un espacio medible aleatorio, y* $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$*. Sea* $X, X_n : E \to \mathbb{R}$ *funciones:*

- X *es medible si y sólo si* $\{X \leq a\} = X^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{E}$*, para todo* $a \in \mathbb{R}$.
- *Si cada* X_n *es medible, luego* $\sup X_n$*,* $\inf X_n$*,* $\limsup X_n$ *y* $\liminf X_n$ *son medibles.*
- *Si cada* X_n *es medible, y* $\{X_n\}$ *converge puntualmente a* X*, luego* X *es medible.*

Teorema 2 *Sea X medible de $(E, \mathcal{E})$ en $(F, \mathcal{F})$, y Y medible de $(F, \mathcal{F})$ en $(G, \mathcal{G})$. Entonces, $Y \circ X$ es medible de $(E, \mathcal{E})$ en $(G, \mathcal{G})$.*

Teorema 3 *Sean $(E, \mathcal{U})$ y $(F, \mathcal{V})$ espacios topológicos, y $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ sus σ-álgebras de Borel (generada por los abiertos), respectivamente. Entonces, cada función continua $X : E \to F$ es medible (O también llamada, función boreliana).*

Recuerde que, *la función indicadora*, $f(x) = 1_A(x)$ se define como:

$$1_A(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & x \in A \\ 1 & x \notin A \end{array} \right\}$$

Teorema 4 *Sea $(F, \mathcal{F}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ y $(E, \mathcal{E})$ un espacio medible.*

- *Función indicadora 1_A en E es medible si y sólo sí $A \in \mathcal{E}$*
- *Si $X_1, \cdots, X_n$ son funciones medibles de $(E, \mathcal{E})$ en $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, y si f es borel en $\mathbb{R}^n$, luego $f(X_1, \cdots, X_n)$.*
- *Si X, Y son medibles, luego $X + Y$, XY, $\max(X, Y)$, $\min X, Y$ y X/Y con $Y \neq 0$ son medibles.*

Recordemos, para X una variable aleatoria, será una función entre los espacios medibles $(\Omega, \mathcal{A})$ y $(E, \mathcal{E})$. Si dotamos al primer espacio de una probabilidad, P, de forma canónica podemos dotar al segundo espacio, de una medida de probabilidad, según X.

Si X es una variable aleatoria entre $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, con valores en $(E, \mathcal{E})$, la **distribución** (O **medida de distribución**) de X, está definida por:

$$P^X(B) = P(X^{-1}(B)) = P(\{\omega : X(\omega) \in B\}) = P(X \in B)$$

para todo $B \in \mathcal{E}$.

Como la inversa se comporta bien bajo uniones e intersecciones, no es muy dificil probar que:

Teorema 5 *La distribución de X es una medida de probabilidad en $(E, \mathcal{E})$*

Si X es una variable aleatoria en $\mathbb{R}$, P^X es una probabilidad en los reales, caracterizada por la función:

$$F_X(x) = P^X((-\infty, x]) = P(X \leq x)$$

por el hecho, que los elementos en los borelianos, $\mathcal{B}$, pueden ser generador por elementos de la forma $(-\infty, x]$. $F_X(x)$ se conoce como **función de distribución cumulativa**.

1.1.3. Integración respecto a medida de probabilidad. Valor esperado.

Dada una variable aleatoria, en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, podríamos determinar un valor esperado, un promedio ponderado según la probabilidad, la imagen que se espera que tenga la variable aleatoria.

Para una variable aleatoria discreta, tenemos la definición:

Ahora, queremos hallar el valor esperado para variables aleatorias en general. Consideramos algunos casos especiales inicialmente:

Una variable aleatoria X es **simple** si su imagen es un conjunto finito, por ende, para una familia de conjuntos disyuntos medibles, $\{A_i\} \subset \mathcal{A}$, y constantes, $a_i \in \mathbb{R}$, para $1 \leq i \leq n$, veremos que la variable aleatoria tiene la forma:

$$X = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i}$$

Para X variable aleatoria simple, podemos definir su **integral respecto a P** o **valor esperado** como:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} a_i P(A_i)$$

o también denotado por $\int X dP$.

Ahora, deseamos extender la definición para funciones más generales. Para esto, tendremos en cuenta los siguientes resultados:

Teorema 6 *Para cada variable aleatoria positiva X, existe una sucesión de variables aleatorias simples $\{A_n\}_{n\geq 1}$ tal que X_n tiende a X de forma creciente, para $n \to \infty$*

Demostración: Podemos tomar la sucesión:

$$X_n(\omega) = \begin{cases} k2^{-n} & \text{si } k2^{-n} \leq X(\omega) < (k+1)2^{-n} \text{ y } 0 \leq k \leq n2^n - 1 \\ n & \text{si } X(\omega) \geq n \end{cases}$$

AÑADIR UNA GRAFICA

□

Teorema 7 *Sea X una variable aleatoria positiva. Si $\{X_n\}$ es sucesión de variables aleatorias simples que tienden de forma creciente a X, entonces $\mathbb{E}[X_n]$ tiende a $\mathbb{E}[X]$*

Primero, podemos definir el valor esperado para variables aleatorias en positivas, esto es, que toma valores en $[0, \infty)$, como:

$$\int X dP = \mathbb{E}[X] = \sup \{\mathbb{E}[Y] : Y \text{ es función simple con } 0 \leq Y \leq X\}$$

De este modo, podemos definir:

Sea $X^+ = \max(X, 0)$ y $X^- = -\min(X, 0)$. Una variable aleatoria X es **integrable** si $\mathbb{E}[X^+] < \infty$ y $\mathbb{E}[X^-] < \infty$. En este caso, el **valor esperado** de X se define como:

$$\int X dP = \mathbb{E}[X] = \int X^+ dP + \int X^- dP = \mathbb{E}[X^+] + \mathbb{E}[X^-]$$

Tenemos que $\mathcal{L}^1$ o $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$, es el conjunto de variables aleatorias que son integrables.

Ya estamos listos para enunciar varias propiedades importantes de las variables aleatorias.

Teorema 8

- *$\mathcal{L}^1$ es espacio vectorial, donde $\mathbb{E}$ es operador lineal, y para $X \in \mathcal{L}^1$ tal que $X \geq 0$, luego $\mathbb{E}[X] \geq 0$. Más aún, para $X \leq Y$, tenemos que $\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$.*
- *$X \in \mathcal{L}^1$ si y sólo si $|X| \in \mathcal{L}^1$.*
- *$|\mathbb{E}[X]| \leq \mathbb{E}[|X|]$. Mas aún, cualquier variable aleatoria acotada es integrable.*
- *Si $X = Y$ casi siempre (Esto es, que $P(X = Y) = P(\{\omega : X(\omega) = Y(\omega)\}) = 1$), entonces, $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]$.*

Teorema 9 (Teorema de la convergencia monótona.) *Si las variables aleatorias X_n son positivas y tienden de forma creciente casi siempre a X, luego $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X]$.*

En este caso, X_n tienden de forma creciente *casi siempre* a X, si $P(\{\omega : \lim_{n\to\infty} X_n(w) = X_n\}) = 1$.

Lema 1 (Lema de Fatou) *Si las variables aleatorias X_n satisfacen $X_n \geq Y$ casi siempre ($P(X_n \leq Y) = P(\{\omega : X_n(\omega) \leq Y(\omega)\}) = 1$) con $Y \in \mathcal{L}^1$, para todo n, entonces:*

$$\mathbb{E}\left[\liminf_{n\to\infty} X_n\right] \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n]$$

o se puede escribir como:

$$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} X_n \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega X_n$$

En particular, si $X_n \leq 0$ casi siempre para todo n, entonces se cumple la desigualdad.

Teorema 10 (Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue) *Si las variables aleatorias X_n convergen casi siempre a X y si $|X_n| \leq Y$ casi siempre para $Y \in \mathcal{L}^1$, para todo n, entonces, $X_n, X \in \mathcal{L}^1$, y:*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X]$$

o

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega X_n = \int_\Omega X_n$$

Para consultar las pruebas, sugerimos consultar [6]. Ahora, estos teoremas poderosos, van a traer una serie de consecuencias, que serán útiles en la práctica. Enunciamos sin demostración.

Teorema 11 *Sea X_n una sucesión de variables aleatorias.*

- *Si para todo n, X_n es positiva, entonces:*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{\infty} X_n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[X_n]$$

  o

$$\int_{\Omega} \sum_{n=1}^{\infty} X_n dP = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega} X_n dP$$

- *Si $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[|X_n|] < \infty$, luego $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ converge casi siempre y la suma de esta serie es integrable.*

Antes de enunciar más propiedades, definimos los espacios $\mathcal{L}^p$.

Para $1 < p < \infty$, definimos $\mathcal{L}^p$ el espacio de variables aleatorias tal que $|X|^p \in \mathcal{L}^1$.

Teorema 12

- *Si $X, Y \in \mathcal{L}^2$, entonces $XY \in \mathcal{L}^1$ y se cumple la desigualdad de Cauchy-Schwarz:*

$$|\mathbb{E}[XY]| \leq \sqrt{\mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[Y^2]}$$

- *$\mathcal{L}^2 \subset \mathcal{L}^1$. Si, $X \in \mathcal{L}^2$, luego $(\mathcal{E}[X])^2 \leq \mathbb{E}[X^2]$.*

- *$\mathcal{L}^2$ es un espacio vectorial.*

El siguiente resultado, permite calcular el valor esperado de cualquier función medible de una variable aleatoria.

Teorema 13 (Regla del valor esperado.) *Sea X una variable aleatoria en $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, con valores en $(E, \mathcal{E})$ y distribución P^X. Sea $h : (E, \mathcal{E}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ una función medible.*

- *$h(X) \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ si y sólo si $h \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{E}, P^X)$.*
- *Si, h es positiva, o se tienen las condiciones del inciso anterior, entonces:*

$$\mathbb{E}[h(X)] = \int_{\Omega} h(x) P^X(dx)$$

Finalmente, definimos varianza y mostramos una desigualdad conocida y bastante útil.

Si $X \in \mathcal{L}^2$, la **varianza** de X, denotada por σ_X^2, está dada por:

$$\sigma_X^2 = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$$

También llamado **segundo momento alrededor de la media** μ_2.

Teorema 14 (Desigualdad de Chebyshev - Bienaymé)

$$P(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[X^2]}{\sigma^2}$$

1.1.4. Variables aleatorias independientes.

Al tener dos variables aleatorias independientes, nos dará varias propiedades, por ejemplo, al tener la esperanza del producto de esas dos variables. De igual forma, vamos a definir σ-álgebras en $\mathbb{R}^n$.

Dado $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad. Dados eventos $A, B \in \mathcal{A}$, definimos la **probabilidad condicional** de B dado A, como:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

siempre que $P(B) > 0$.

De manera intuitiva, podemos ver que si A y B son dos eventos, tal que la ocurrencia de uno, no afecta a otro, o dicho de otra forma, son *independientes*, entonces, sería razonable pensar que:

$$P(B|A) = P(B)$$

porque el hecho que el evento A ocurra, no afectará en nada a B. Formalizando, damos la siguiente definición:

Dado $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ y $\{A_i\}_{i\in I}$ una colección (a lo más contable) de conjuntos medibles, que pertenecen a $\mathcal{A}$ (También llamados *eventos*). Se dice que la colección es **colección independiente**, o **mutuamente independiente**, si dado $J \subset I$ conjunto finito de índices, se cumple que:

$$P\left(\cap_{j\in J} A_j\right) = \prod_{j\in J} P(A_j)$$

.
La colección es **independiente de a parejas**, si para todo $i, j \in I$, se tiene que $P(A_j \cap A_i) = P(A_j)P(A_i)$.

Tenga en cuenta, que si la colección $\{A_i\}_{i\in I}$ es mutuamente independiente, entonces es independiente de a parejas. Sin embargo, la recíproca no se tiene.

Damos algunas propiedades y teoremas importantes acerca de eventos independientes.

Teorema 15 *Si A, B son independientes, entonces:*

- A, B^c
- A^c, B
- A^c, B^c

son también independientes.

Teorema 16 (Ley de la probabilidad total.) *Dado $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad. Sea $\{E_n\}_{n\geq 1}$ una partición a lo más contable de Ω. Luego, para un evento $A \in \mathcal{A}$, se cumple:*

$$P(A) = \sum_{n} P(A|E_n)P(E_n)$$

Teorema 17 (Teorema de Bayes.) *Dado $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad. Sea $\{E_n\}_{n\geq 1}$ una partición a lo más contable de Ω, y sea $P(A) > 0$. Entonces:*

$$P(E_n|A) = \frac{P(A|E_n)P(E_n)}{\sum_m P(A|E_m)P(E_m)}$$

Ahora, podemos generalizar el concepto de independencia a σ-álgebras, e inclusive, a variables aleatorias.

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad.

- Dadas sub-σ-álgebras $\{A_i\}_{i\in I}$ de $\mathcal{A}$. Decimos que esta colección es **independiente** si para todo $J \subseteq I$ con J finito, y todo $A_i \in \mathcal{A}_i$, se cumple que:

  $$P\left(\cap_{j\in J} A_j\right) = \prod_{j\in J} P(A_j)$$

  En este caso, hablamos de **independencia de σ -álgebras**.

- Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ un conjunto de variables aleatorias en el espacio de probabilidad dado, tal que la imagen de X_i es $(E_i, \mathcal{E}_\rangle)$. Decimos que las variables aleatorias son **independientes** si $\sigma(X_i) = X_i^{-1}(\mathcal{E}_\rangle)$ (Esto es, las σ-álgebras generadas por X_i) son independientes.

Enunciamos algunas propiedades para X y Y variables aleatorias independientes. De forma canónica, se puede extender el enunciado a un número a lo más contable de variables aleatorias independientes, $\{X_i\}_{i\in I}$.

Teorema 18 *Sea X, Y variables aleatorias cuya imagen son los espacios $(E, \mathcal{E})$ y $(F, \mathcal{F})$, respectivamente. X y Y son independientes si y sólo sí, se tiene algunas de las siguientes condiciones:*

- *$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$ para todo $A \in \mathcal{E}$ y $B \in \mathcal{F}$.*
- *$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$, para todo $A \in \mathcal{C}$, $B \in \mathcal{D}$ donde $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ son clases de conjuntos cerrados bajo intersecciones finitas, tal que $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{E}$ y $\sigma(\mathcal{D}) = \mathcal{F}$*

- *Para f, g funciones medibles, $f(X)$ y $g(X)$ son independientes.*

- *Para f, g funciones medibles positivas, o medibles acotadas,* $\mathbb{E}[f(X)g(Y)] = \mathbb{E}[f(X)]\mathbb{E}[g(Y)]$.

- *Sean E, F espacios métricos, y $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ sus σ-álgebras de Borel. Entonces,* $\mathbb{E}[f(X)g(Y)] = \mathbb{E}[f(X)]\mathbb{E}[g(Y)]$ *para todas f, g funciones acotadas y continuas.*

En este punto, vemos que estamos comenzando a tomar conjuntos de dos o más variables aleatorias. Sería deseable hablar de una noción de *conjuntamente medible*. Sean $(E, \mathcal{E})$ y $(F, \mathcal{F})$ espacios medibles. En general, $\mathcal{E} \times \mathcal{F} = \{A \subseteq E \times F | A = \Lambda \times \Gamma, \Lambda \in \mathcal{E}, \Gamma \in \mathcal{F}\}$ no será una σ-álgebra, por ejemplo, si tomamos el producto $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (Producto de los conjuntos de Borel en $\mathbb{R}$), es tentador pensar que tal producto es σ-álgebra de $\mathbb{R}^2$, sin embargo, note que el elemento $[0,1] \times [0,1] \cup [-1,-1/2] \times [0,1]$ debe estar en la σ-álgebra de $\mathbb{R}^2$, pero no está en $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$, falla la estabilidad bajo uniones.

Por tanto, denotaremos a:

$$\mathcal{E} \otimes \mathcal{F} = \sigma(\mathcal{E} \times \mathcal{F})$$

como la menor σ-álgebra que contiene a $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$. Tal cuál como las anteriores definiciones, enunciamos algunas propiedades y teoremas que serán de utilidad.

Teorema 19 *Sea $f : (E \times F, \mathcal{E} \otimes \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{R})$ función medible. Entonces, las secciones $y \to f(x, y)$ (Para todo $x \in E$) y $x \to f(x, y)$ (Para todo $y \in F$) son, respectivamente, $\mathcal{F}$-medible y $\mathcal{E}$-medible.*

Teorema 20 (Tonelli-Fubini) *Sea $(E, \mathcal{E}, P)$ y $(F, \mathcal{F}), Q$ espacios de probabilidad.*

- *Sea $R(A \times B) = P(A)Q(B)$, para $A \in \mathcal{E}$ y $B \in \mathcal{F}$. Entonces, R se extiende de forma unívoca a una probabilidad en $(E \times F, \mathcal{E} \otimes \mathcal{F})$, denotada por $P \otimes Q$.*

- *Cada función f que es $\mathcal{E}\otimes\mathcal{F}$-medible, positiva o integrable, respecto a $P\otimes Q$, tenemos que $x \rightarrow \int f(x,y)Q(dy)$ es $\mathcal{E}$-medible, $y \rightarrow \int f(x,y)P(dx)$ es $\mathcal{F}$-medible. Además:*

$$\int f dP\otimes Q = \int \left\{ \int f(x,y)Q(dy) \right\} P(dx) = \int \left\{ \int f(x,y)P(dx) \right\} Q(dy)$$

Antes de acabar esta sección, vamos a ver dos teoremas importantes en probabilidad. Primero damos una definiciones:

- Sea A_n una sucesión de eventos en $\mathcal{A}$. Definimos:

  $$\limsup_{n\to\infty} A_n = \cap_{n=1}^{\infty}(\cup_{m\geq n})A_m = \lim_{n\to\infty}(\cup_{m\geq n}A_m)$$

  De manera probabilística, podemos interpretar este evento como:

  $$\limsup_{n\to\infty} A_n = A_n \text{ ocurre } \textbf{infinitamente seguido}$$

  o del inglés, *infinitely often (i.o)*. Esto es, que el evento A_n ocurre para un número infinito de n. Podemos escribir:

  $$\limsup_{n\to\infty} A_n = \{A_n \text{ i.o } \}$$

- Sean X_n variables aleatorias definidas en $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Defina las σ-álgebras:

  $$B_n = \sigma(X_n)$$
  $$C_n = \sigma(\cup_{p\geq n}B_n)$$
  $$C_\infty = \cap_{n=1}^{\infty}C_n$$

  C_∞ es la σ-**álgebra cola**.

Teorema 21 (Lema de Borel-Cantelli.) *Sea A_n una sucesión de eventos en $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.*

- *Si* $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, *luego* $P(Ai.o) = 0$.
- *Si* $P(A_n i.o) = 0$ *y si los eventos* A_n *son mutuamente independientes, entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$.

Teorema 22 (Ley cero-uno de Kolmogorov.) *Sea* X_n *una sucesión de variables aleatorias independientes, definidas en* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$*, y sea* C_∞ *la* σ*-álgebra cola correspondiente. Si* $C \in C_\infty$*, entonces* $P(C) = 0$ *o* $P(C) = 1$.

1.1.5. Distribuciones en $\mathbb{R}^n$ y variables aleatorias Gaussianas.

1.1.6. Convergencia de variables aleatorias.

1.1.7. Esperanza Condicional.

Para X, Y variables aleatorias (Con Y tomando valores de $\mathbb{R}$ y X toma valores a lo sumo contables), ya sabemos calcular el valor de $P(Y|X = i)$, esto es, la probabilidad condicional de Y dado $X = i$. Deseamos extender este concepto, para poder calcular el valor esperado de la variable aleatoria Y, dado que $X = i$, esto es, una *esperanza condicional.*

> Dado X que toma valores en $\{x_1, \cdots, x_n, \cdots\}$ (Conjunto a lo sumo contable), y Y una variable aleatoria. Si $P(X = x_j) > 0$, entonces la **esperanza condicional de Y dado** $\{X = x_j\}$ está definida por:
>
> $$\mathbb{E}[Y|X = x_j] = \mathbb{E}_Q[Y] = \int Y dQ$$
>
> tal que $Q(\Lambda) = P(\Lambda|X = x_j)$, y dado que $\mathbb{E}_Q[|Y|] < \infty$.

Una forma clásica de calcular esta esperanza condicional, con Y tomando valores de un conjunto a lo más contable, está enunciada en este teorema, que es consecuencia de la definición:

Teorema 23 *Asuma las condiciones de la definición anterior. Además, si* Y *tiene valores contables* $\{y_1, \cdots, y_n, \cdots\}$ *y si* $P(X = x_j) > 0$*, entonces:*

$$\mathbb{E}[Y|X = x_j] = \sum_{k=1}^{\infty} y_k P(Y = y_k|X = x_j)$$

dado que la serie converge absolutamente.

Sin embargo, no todas las variables aleatorias tomarán valores de un conjunto a lo más contable, deseamos extender la definición a variables aleatorias más generales. Primero, podemos definir la esperanza condicional, entre dos variables aleatorias.

Sea:

$$f(x) = \begin{cases} \mathbb{E}[Y|X = x] & \text{si } P(X = x) > 0 \\ \text{Otro valor} & \text{si } P(X = x) = 0 \end{cases}$$

Dado X con valores contables, y Y una variable aleatoria con valores en $\mathbb{R}$. La **esperanza condicional de Y dado X** está definida por:

$$\mathbb{E}[Y|X] = f(Y)$$

Note que la definición está dada por eventos que ocurren *casi siempre (a.s)*, es decir, salvo en elementos, donde la probabilidad sea 0. Ahora, si X toma valores reales, en general los eventos $\{X = x_j\}$ tendrán probabilidad 0 y el enfoque dado no funciona.

Sin embargo, lo que se realizó fue hallar una función f auxiliar, para hallar la esperanza condicional, y este será el enfoque que se tomará para el caso en general. Para cumplir el objetivo, se usará el siguiente teorema.

Teorema 24 (Lema de Doob-Dynkin.) *Sea X una variable aleatoria con valores en $\mathbb{R}^n$, y Y una variable aleatoria con valores en $\mathbb{R}$. Y es medible con respecto a $\sigma(X)$ (La σ-álgebra generada por X) si y sólo si existe una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que sea Borel-medible tal que $Y = f(X)$.*

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad, y $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ una variable aleatoria. Recuerde que, $\mathcal{L}^2$ es el espacio de los *cuadrado-integrables*, esto es, que para $Y \in \mathcal{L}^2$, $\mathbb{E}[Y^2] < \infty$ (O $\int_\Omega Y^2 dP < \infty$). Como $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ es un *espacio de Hilbert*, entonces se puede definir un producto interno en este espacio:

$$\langle Y, Z \rangle = \int_\Omega YZ dP = \mathbb{E}[YZ]$$

Como $\sigma(X) \subset \mathcal{A}$, entonces $(\Omega, \sigma(X), P)$ es también un subespacio de Hilbert. Dado estos conceptos, se procede a generalizar la esperanza condicional.

> Sea $Y \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$. La **esperanza condicional de Y dado X** es el único $\hat{Y} \in \mathcal{L}^2(\Omega, \sigma(X), P)$ tal que:
>
> $$\mathbb{E}[\hat{Y}X] = \mathbb{E}[YZ]$$
>
> para todo $Z \in \mathcal{L}^2(\Omega, \sigma(X), P)$, se denota como $\mathbb{E}[Y|X] = \hat{Y}$.

Note que la esperanza condicional de Y dado X, será la proyección de Y en el subespacio de Hilbert $\mathcal{L}^2(\Omega, \sigma(X), P)$. Para más detalles de análisis funcional, consulte el apéndice.

Como $\hat{Y}$ es $\sigma(X)$-medible, por el lema de Doob-Dynkin, existe una función f Borel medible tal que:

$$\mathbb{E}[Y|X] = f(X)$$

Entonces, se tiene una expresión alternativa para el teorema de Doob-Dynkin; para toda función g Borel-medible tal que $g(X) \in \mathcal{L}^2$:

$$\mathbb{E}[f(X)g(X)] = \mathbb{E}[Yg(X)]$$

Ahora, se puede definir la esperanza condicional respecto a una σ-álgebra.

> Sea $Y \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ y $\mathcal{G}$ una sub-σ-álgebra de $\mathcal{A}$. Definimos la **esperanza condicional de Y respecto a $\mathcal{G}$** como el único elemento $\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}] \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, P)$ tal que:
>
> $$\mathbb{E}[YZ] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]Z]$$
>
> para todo $Z \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, P)$. También podemos escribir como:
>
> $$\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}] = \int_\Lambda Y dP$$
>
> para todo $\Lambda in \mathcal{G}$.

Note que, $\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$ se puede ver como la proyección de Y sobre el subespacio de Hilbert $(\Omega, \mathcal{G}, P)$.

Como dato adicional, es importante recalcar que la esperanza condicional es un elemento de $\mathcal{L}^2$, y es una *clase de equivalencia* de alguna variable aleatoria. Por ende, relaciones del tipo $\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}] \geq 0$ o $\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}] = Z$ se sobreentienden como relaciones que se cumplen en *casi siempre* o en *casi todo sitio* (Esto es, se preserva la igualdad salvo en conjuntos nulos o de medida cero).

Al igual que el operador $\mathbb{E}$ cumple varias propiedades, también $\mathbb{E}[\cdot|\cdot]$ cumple propiedades similares.

Teorema 25 (Propiedades de la esperanza condicional.) *Sea $Y \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ y $\mathcal{G}$ una sub-σ-álgebra de $\mathcal{A}$. Entonces,*

- *Si $Y \geq 0$, luego $\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}] \geq 0$.*
- *Si $\mathcal{G} = \sigma(X)$ para cierta variable aleatoria X, entonces existe una función Borel medible f tal que $\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}] = f(X)$.*
- *$\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]] = \mathbb{E}[Y]$.*
- *La función $Y \to \mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$ es lineal.*

Teorema 26 *Sea $Y \in \mathcal{L}^+(\Omega, \mathcal{A}, P)$ (El espacio de variables aleatorias no negativas), y sea $\mathcal{G}$ una sub-σ-álgebra de $\mathcal{A}$. Entonces existe un único elemento $\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$ de $\mathcal{L}^+(\Omega, \mathcal{G}, P)$ tal que:*

$$\mathbb{E}[YX] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]X]$$

para todo $X \in \mathcal{L}^+(\Omega, \mathcal{G}, P)$. Más aún, si $0 \leq Y \leq Y'$, luego:

$$\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}] \leq \mathbb{E}[Y'|\mathcal{G}],$$

es decir, la esperanza condicional es monótona creciente.

Teorema 27 *Sea $Y \in \mathcal{L}^+(\Omega, \mathcal{A}, P)$ y $\mathcal{G}$ una sub-σ-álgebra de $\mathcal{A}$. Entonces, existe un único elemento $\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}] \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{G}, P)$ tal que:*

$$\mathbb{E}[YX] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y \in \mathcal{G}]X]$$

para toda X que es acotada y $\mathcal{G}$-medible. Además, se cumple:

- *Si $Y \geq 0$, luego $\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}] \geq 0$.*

- *$Y \to \mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$ es un mapa lineal.*

Note que, se han visto algunas definiciones equivalentes a la esperanza condicional.

Ahora, se puede caracterizar la esperanza condicional para diversos casos, como cuando una variable aleatoria es medible respecto a una sub-σ-álgebra.

Teorema 28 *Sea Y una variable aleatoria positiva o integrable en $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, y sea $\mathcal{G}$ una sub-σ-álgebra. Entonces, $\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}] = Y$ si y sólo si Y es $\mathcal{G}$-medible.*

Al tomar dos variables aleatorias, y colocar condiciones, se pueden obtener resultados interesantes.

Teorema 29 *Sea $Y \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$, y sea X, Y independientes, luego:*

$$\mathbb{E}[Y|X] = \mathbb{E}[Y]$$

Teorema 30 *Sea X, Y variables aleatorias en $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, sea $\mathcal{G}$ una sub-σ-álgebra de $\mathcal{A}$, y suponga que X es $\mathcal{G}$-medible. Si X, Y y XY son integrables, o si X, Y son positivos, tendremos que: $\mathbb{E}[XY|\mathcal{G}] = X\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$*

En la esperanza condicional, también se tendrán los teoremas importantes de convergencia, que se tenían para la esperanza usual.

Teorema 31 (Teoremas de convergencia para la esperanza condicional.) *Sea $\{Y_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias en $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, y sea $\mathcal{G}$ una sub-σ-álgebra de $\mathcal{A}$.*

- ***(Convergencia monótona).*** *Si $Y_n \geq 0$, $n \geq 1$ y $Y_n \to Y$ de forma creciente, luego, casi siempre se tiene:*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[Y_n|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$$

- ***(Lema de Fatou).*** *Si $Y_n \geq 0$, $n \geq 1$, entonces:*

$$\mathbb{E}[\liminf_{n\to\infty} Y_n|\mathcal{G}] \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[Y_n|\mathcal{G}]$$

- ***(Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue.)*** *Si* $\lim_{n\to\infty} Y_n = Y$ *casi siempre, y* $|Y_n| \geq Z$*, con* $n \geq 1$ *para algún* $Z \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$*, entonces, casi siempre:*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[Y_n|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$$

Se finaliza la sección, con algunas desigualdades importantes que involucran a la esperanza condicional.

Teorema 32 (Desigualdad de Jensen.) *Dada* $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función convexa, y sea* X*,* $\phi(X)$ *variables aleatorias. Entonces, para toda sub-*σ*-álgebra, se tiene que:*

$$\phi\left(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\right) \leq \mathbb{E}[\phi(X)|\mathcal{G}]$$

Como consecuencia de la desigualdad de Jensen, se tiene:

Teorema 33 (Desigualdad de Hölder.) *Dados* X, Y *variables aleatorias, tal que* $\mathbb{E}[|X|^p] \leq \infty$*,* $\mathbb{E}[|Y|^q] \leq \infty$ *con* $p > 1$*, y* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*. Luego:*

$$\mathbb{E}[|XY|] \leq \mathbb{E}[|X|^p]^{\frac{1}{p}} \mathbb{E}[|Y|^q]^{\frac{1}{q}}$$

Y de igual forma, se tiene una consecuencia de la desigualdad de Hölder:

Teorema 34 (Desigualdad de Minkowski.) *Dada* X, Y *variables aleatorias,* $1 \leq p < \infty$ *con* $\mathbb{E}[|X|^p] < \infty$ *y* $\mathbb{E}[|Y|^p] < \infty$*. Luego:*

$$\mathbb{E}[|X+Y|^p]^{\frac{1}{p}} \leq \mathbb{E}[X^p]^{\frac{1}{p}} + \mathbb{E}[Y^p]^{\frac{1}{p}}$$

1.2. Preliminares de Integración y Ecuaciones Diferenciales.

En esta sección, se hablará un poco acerca de temas de Integración, como la integral de Riemann-Stieltjes, la integración de Young y algunos teoremas importantes para poder estudiar caminos rugosos.

De igual forma, se verá una breve introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias, enunciando algunos teoremas de existencia y unicidad. Este será útil, al demostrar el teorema de existencia y unicidad en ecuaciones diferenciales estocásticas.

1.2.1. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Controladas e Integración..

En esta sección, se hablarán algunos aspectos breves acerca de las ecuaciones diferenciales controladas, y ciertos problemas que estas pueden poseer. También se hablará brevemente *integral de Riemann-Stieltjes* (Para un tratamiento más extenso, consulte [1]) y también sobre la *integral de Young*, y finalmente, se observará que estas integrales en ciertas ocasiones no son suficientes al tener caminos poco regulares.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Definimos una *norma* en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ como:

$$|(t,x)| = \max \{|t|, \|x\|\} .$$

Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ una función continua, e I un intervalo conexo de $\mathbb{R}$ no reducido a un punto. Entonces, se dice que una función diferenciale $\phi : I \to \mathbb{R}^n$ es una **solución de la ecuación diferencial**

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x)$$

en el intervalo I si se cumplen las condiciones:

- $\{(t, \phi(t)) | t \in I\} \subset \Omega$.
- $\frac{d\phi}{dt}(t) = f(t, \phi(t))$ para todo $t \in T$.

La ecuación diferencial mostrada, es una **ecuación diferencial ordinaria de primer orden.**

En general, se observa que las ecuaciones diferenciales ordinarias, son un tipo de **sistema controlado de ecuaciones diferenciales**:

$$dY_t = f(Y_t)dX_t$$

donde f se puede pensar como un campo vectorial, $Y : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ es la solución y $X : [0,T] \to \mathbb{R}^d$ es una *señal de entrada*. Si tenemos que X_t es absolutamente continua, se tendrá una EDO. Pero, ¿Qué pasa si X_t toma otra forma? De forma integral, la expresión de arriba se puede reescribir como:

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t f(Y_s) dX_s$$

y el problema es sobre cómo definir la integral $\int f dX_s$, por ejemplo, si X_t es una función con baja regularidad, como un movimiento de ruido blanco, u otro proceso estocástico. Una solución a medias, bajo una topología sutil se podría aproximar por caminos suaves $X_n \to X$ y $Y_n \to Y$, como:

$$\int_0^t f(Y_s) dX_s = \lim_{n\to\infty} f(Y_s^n) dX_s^n$$

Por ejemplo, al tener funciones continuas, se podría tomar la norma del supremo, que es la topología de la convergencia uniforme. Comenzando por el caso más simple, se puede definir la integral de Riemann-Stieljes:

> Sea $\pi = \{0 = t_0, t_1, \cdots, t_N = T\}$ una partición de $[0, T]$. Sea $\pi_n = \{0 = t_0^n, t_1^n, \cdots, t_N^n = T\}$ una sucesión de particiones tal que $|\pi_n| \to 0$ para $n \to \infty$, con $u_i^n \in [t_i^n, t_{i+1}^n]$. Para Y camino continuo, y X camino de variación acotada, definimos la **integral de Riemann-Stieljes** como:
>
> $$\int_0^T Y_s dX_s = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{N_{n-1}} Y_{u_i^n}(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})$$

Gracias a las condiciones de los caminos Y y X, la integral no dependerá del punto u_i^n seleccionado en el intervalo de la partición, lo que es una gran ventaja. Sin embargo, este lujo se pierde al hacer los caminos menos regulares.

Se puede debilitar la condición de continuidad de los caminos, por un concepto más débil.

> Para $\alpha \in (0, 1]$, un camino $X : [0, T] \to \mathbb{R}^d$ es **α-Hölder continuo** si existe C constante tal que:
>
> $$|X_t - X_s| \leq C|t - s|^\alpha$$
>
> para todo $t, s \in [0, T]$ con $s < t$.

De esta forma, definimos la **integración de Young**.

Teorema 35 (Integración de Young.) *Sea $\alpha, \beta \in (0, 1]$ tal que:*

$$\alpha + \beta > 1$$

Sea X una función α-Hölder continua, y Y β-Hölder continua. Sea $\pi_n = \{t_0^n, \cdots, t_N^n\}$ sucesión de particiones con $|\pi_n| \to 0$ para $n \to 0$. Para todo $n \geq 1$, e $i = 0, 1, \cdots, N-1$, tomando $u_i^n \in [t_i^n, t_{i+1}^n]$. Luego el límite

$$\int_0^T Y_s dX_s = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{N_n - 1} Y_{u_n^i}(X_{t_{i+i}^n} - X_{t_i^n})$$

llamada ***integral de Young****, existe, y no depende de la sucesión $\{\pi_n\}$, ni de la elección del punto u_i^n.*

Al trabajar en ecuaciones diferenciales estocásticas, usualmente el integrador es $X_s = B_s$, un movimiento Browniano, que tiene muy baja regularidad. Por el teorema de continuidad de Kolmogorov (Capítulo 2), las trayectorias del Browniano son *casi siempre* α-Hölder continuas para $\alpha < \frac{1}{2}$. En este caso, no se pueden cumplir siempre las condiciones de la integral de Young, por ende, es mejor cambiar el enfoque.

Más adelante, en el presente trabajo, se hablará acerca del movimiento Browniano, y la construcción de la integral de Itô, como una solución para atacar la baja regularidad.

1.2.2. Teoremas de Existencia y Unicidad.

De forma preliminar, las ecuaciones diferenciales se han usado a lo largo de los años para modelar distintos fenómenos naturales, económicos, etc... y es natural preguntarse si es posible solucionar cierta ecuación diferencial, obtener una solución y determinar un modelo matemático a cierto fenómeno. En este apartado, se formalizará estos conceptos, y se mostrarán los teoremas de existencia y unicidad, con su demostración.

Ahora, consideramos el *problema de Cauchy*, o específicamente, *problema de valor inicial*:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \text{ sujeto a } x(t_0) = x_0$$

Bajo algunas condiciones sutiles, esta ecuación diferencial tiene solución y es única. Primero, se muestran algunas definiciones y un lema importante, antes de pasar a trabajar la existencia y unicidad de la solución.

Una función $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una función **Lipschitz-continua** en Ω (En este caso, respecto a la segunda variable), si existe $K \in \mathbb{R}$ constante tal que:

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq K|x - y|$$

para toda $(t, x), (t, y) \in \Omega$.
Si para una vecindad de $(t_0, x_0) \in \Omega$, $V_{\mathbb{R}}(t_0, x_0; \epsilon)$, la función es Lipschitz-continua, entonces se dice **localmente Lipschitz-continua.**

Note que, si f tiene derivada parcial respecto a la segunda variable, $D_2 f$, que está acotada, $\|D_2 f\| \leq K$ y Ω es un conjunto convexo, entonces, por el teorema del valor medio, tendremos:

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq \sup_{0 \leq \theta \leq 1} \|D_2 f(t, \theta x + (1 - \theta) y)\| |x - y| \leq K|x - y|$$

Lema 2 (Lema de la contracción (Punto fijo de Banach).) *Dado (X, d) un espacio métrico completo, $F : X \to X$ una contracción, esto es, $d(F(x), F(y)) \leq K d(x, y)$ para $0 < K < 1$. Entonces, F tiene un único punto fijo p. Más aún, $F^n(x) = F(F^{n-1}(x)) \to p$ cuando $n \to \infty$ para todo $x \in X$. En este caso, p se conoce como* ***atractor*** *de F.*

Corolario 2 *Dado (X, d) un espacio métrico completo. Si $F : X \to X$ es continua, y para algún m, F^m es contracción, luego existe un único punto fijo para F. Más aún, ese punto fijo p es atractor de F.*

Ya con estos resultados, comenzamos a trabajar los teoremas de existencia y unicidad de soluciones en ecuaciones diferenciales ordinarias.

Teorema 36 (Teorema de Picard.) *Sea f una función continua, y de Lipschitz en $\Omega = I_a \times B_b$, donde $I_a = \{t \| t - t_0| \leq a\}$ y $B_b = \{x \| \|x - x_0\| \leq b\}$. Sea $|f| \leq M$, esto es, la función está acotada. Entonces, el problema:*

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x),\ \ x(t_0) = x_0$$

tiene solución única en I_α con $\alpha = \min\{a, b/M\}$

Demostración. Sea $X = \mathcal{C}(I_a, B_b)$ el espacio métrico completo de funciones $\phi : I_a \to B_b$ continuas, equipado de la métrica uniforme;

$$d(\phi_1, \phi_2) = \sup_{t\in I_\alpha}|\phi_1(t) - \phi_2(t)|$$

Para $\phi \in X$, sea $F(\phi) : I_\alpha \to \mathbb{R}^n$ definida como:

$$F(\phi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi(s))ds$$

con $t \in I_\alpha$. Podemos verificar lo siguiente:

- $F(X) \subseteq X$.

  Tomando $t \in I_\alpha$, tenemos:

$$\begin{aligned} |F(\phi)(t) - x_0| &= \left|\int_{t_0}^{t} f(s,\phi(s))ds\right| \quad \text{, definición de } F \\ &\leq M\alpha \quad \text{, } f \text{ está acotado y } |t - t_0| \leq \alpha \\ &\leq b \quad \text{porque } M\alpha = \min\{Ma, b\} \end{aligned}$$

  y así, $F(\phi)(t) \in B_b$, y como $F(\phi)$ es continua, tenemos que $F(X) \subset X$.

- Para n suficientemente grande, $F^n(X)$ es contracción.

  Tomando $\phi_1, \phi_2 \in X$, y $n \geq 0$. La idea es probar que:

$$\left|F^{(n)}(\phi_1)(t) - F^{(n)}(\phi_2)(t)\right| \leq \frac{K^n(t-t_0)^n}{n!} d(\phi_1, \phi_2)$$

  con $t \in I_\alpha$. La prueba es por inducción sobre n. El caso $n = 0$ es trivial. Suponer que se tiene lo deseado para $n = k$, entonces, se prueba para $k + 1$;

$$
\begin{aligned}
|F^{(k+1)}(\phi_1)(t) - F^{(k+1)}(\phi_2)(t)| &= |F(F^{(k)}(\phi_1))(t) - F(F^{(k)}(\phi_2))(t)| \\
&\leq \left| \int_{t_0}^{t} |f(s, F^{(k)}(\phi_1)(s)) - f(s, F^{(k)}(\phi_2)(s))| \right| \\
&\leq \left| \int_{t_0}^{t} K|F^{(k)}(\phi_1)(s) - F^{(k)}(\phi_2)(s)| \right| \\
&\leq K \left| \int_{t_0}^{t} \frac{K^k (t_0 - s)^k}{k!} d(\phi_1, \phi_2) ds \right| \\
&= \frac{K^{k+1}|t_- t_0|^{k+1}}{(k+1)!} d(\phi_1, \phi_2)
\end{aligned}
$$

donde este último paso se obtiene al realizar la integral. Entonces, ya queda probado que:

$$
d(F^{(n)}(\phi_1), F^{(n)}(\phi_2)) \leq \frac{K^n \alpha^n}{n!} d(\phi_1, \phi_2)
$$

para n suficientemente grande. Además, también para un n grande, se tendrá que $\frac{K^n \alpha^n}{n!} \leq 1$, porque el término de este serie debe converger a $e^{k\alpha}$, si fuera mayor a 1, la serie no converge.

Así, queda probado que F^n es contracción de X.

Entonces, por el corolario consecuencia del lema de contracción, existe una función $\phi \in X$ tal que $F(\phi) = \phi$, y de esta forma, queda demostrado lo deseado.

$\square$

En el teorema de Picard, se puede relajar las hipótesis, y se puede retirar la condición de Lipschitz, para obtener otra versión del teorema más general. Para ello, se presentan primero dos teoremas necesarios (Sin demostración) usados en la prueba del teorema general.

Teorema 37 (Teorema de Ascoli-Arzelá.) *Sea (X, d) un espacio métrico compacto. Sea F una familia equicontinua de funciones $\phi : X \to \mathbb{R}$ (Esto es, para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si $d(x, y) < \delta$, luego $|\phi(x) - \phi(y)| < \epsilon$, para toda $\phi \in F$). Sea F uniformemente acotada (Existe $M > 0$ tal que para todo $\phi \in F$, $|\phi| < M$), entonces, toda sucesión $\{\phi_n\}$ en F, tiene subsucesión uniformemente convergente en X.*

Teorema 38 (Teorema de la aproximación de Weierstrass.) *Para cualquier $\epsilon > 0$ y para cualquier función f continua en un intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, existe un polinomio de coeficientes reales p tal que*

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - p(x)| < \epsilon$$

Esto es, se puede aproximar una función por una sucesión de polinomios con coeficientes reales, tal que converjan uniformemente.

Teorema 39 (Teorema de Peano.) *Sea F continua en $\Omega = I_a \times B_b$, definidos como en el teorema de Picard. Si $|f| < M$ en Ω, luego la ecuación diferencial:*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x),\ x(t_0) = x_0$$

tiene al menos una solución en I_α con $\alpha = \text{mín}\{a, b/M\}$

Demostración: PENDIENTE.

$\square$

Para finalizar esta sección, se hablará un poco de ecuaciones diferenciales controladas, que también, son parte importante al hablar de caminos rugosos...

1.3. Comentarios extras

Comentarios adicionales, que probablemente no se incluyan en la versión final del texto, pero ayudan a tener una visión más general.

1.3.1. Notas de Friz y Victoir

Algunos extras que nos ofrece *Multidimensional Stochastic Processes as Rough Paths. Peter Friz, Nicolas Victoir.*

Este material explica de forma más detallada algunos conceptos... puede servir para ver la intuición y un poco más.

Sea:

$$\int \cdots dB$$

Gracias a la teoría de Itô, se pueden plantear y resolver integrales de esta forma (Aunque B_t tenga variación infinita y la teoría de RS no sea muy útil). En este caso, Itô usa fuertemente que B es una martingala. Más aún, se puede extender a una integración respecto a semimartíngalas, de forma canónica.

Ahora, se puede extender una generalización Gausiana. Movimiento Browniano fraccionario con parámetro Hurst $H > \frac{1}{2}$, de esta manera estudiar el comportamiento ergódico de sistemas no markovianos (Mercados libres).

De igual manera, se puede hacer una generalización Markoviana. Reemplazar el movimiento Browniano por un proceso de Markov X^a con *generador elíptico uniforme* en forma de divergencia:

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j}\partial_i(a^{ij}\partial_j)$$

sin regularidad en la matriz simétrica.

Tanto el proceso Gaussiano como el Markoviano pueden estar arbitrariamente cerca de una trayectoria Browniana. ¡Se rompe teoría de Itô! ¿Por qué?

Teoría Lyons -¿Trabajar para tales procesos que no son semimartíngalas, para una solución en el sentido de los caminos rugosos.

Modelo flexible y robusto. Solución de Stratonovich de la EDE se puede ver como *área estocástica Lévy (Apéndice)*. Esto simplifica mucho algunos resultados como el *teorema de Stroock-Varadhan* y *estimadores de Freidlin-Wentzell*, resultados a nivel de flujos estocásticos.

Además, el mapa de Itô - Lyons (Camino Rugoso a solución), suele ser regular en ciertas peturbaciones del camino rugosos $\mathbf{x}$, en el espacio de Cameron-Martin, donde juega el cálculo de Malliavin.

Capítulo 2

Procesos Estocásticos y el Movimiento Browniano

En este capítulo, inicialmente se hablará acerca de los procesos estocásticos y se darán algunos conceptos básicos. Luego, se estudiará un proceso estocástico a tiempo continuo, que es muy importante en la teoría de ecuaciones diferenciales estocásticas, que es el *movimiento Browniano*. Primero, se hablará sobre la construcción de este proceso (Usando los teoremas de Kolmogorov), luego se darán algunas propiedades bastante importantes.

2.1. Conceptos de Procesos Estocásticos

En esta sección, se introducirán los conceptos básicos de procesos estocásticos en general, tanto de tiempo discreto como de tiempo continuo.

> Un **proceso estocástico** corresponde a la colección $\{X_t : \Omega \to S\}_{t\in T}$ de variables aleatorias definidas en un mismo espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
>
> A S se le conoce como **espacio de estados** y T se le conoce como el tiempo.

Si T es un conjunto finito o contable, entonces el proceso corresponde a un *proceso a tiempo discreto*. De otro modo, se dice que se tiene un *proceso a tiempo continuo*.

Ejemplo: El *movimiento Browniano*, posee un espacio de estados continuo, $S = \mathbb{R}^n$, y también tiempo continuo, $T = [0, \infty)$. Otro ejemplo es el *paso aleatorio simple*, tal que su espacio de estados es discreto, $S = \{s_1, s_2, \cdots\}$ (Se puede interpretar los vértices en un grafo que se pueden visitar), y además, también tiene tiempos discretos, por ejemplo, $T = \{t_1, t_2, \cdots\}$.

□

Mayoritariamente, en procesos estocásticos, uno se interesa más en las distribuciones conjuntas de las variables aleatorias. Esto motiva la siguiente definición:

Las distribuciones conjuntas de $(X_{t_1}, X_{t_2}, \cdots)$ son llamadas **distribuciones finito-dimensionales** del proceso $\{X_t\}_{t\in T}$.

Dado $\{X_t\}_{t\in T}$ un proceso con espacio de estados S definido en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Para cada $w \in \Omega$, se define como la **trayectoria**, a la función:

$$\begin{aligned} X(w) : T &\to S \\ t &\mapsto X_t(w) \end{aligned}$$

Note que, hay una equivalencia, entre hablar una probabilidad μ_X sobre el conjunto de las trayectorias $X : T \to S$, y una distribución conjunta de todos los tiempos $t \in T$ para el proceso $\{X_t\}_{t\in T}$.

Un proceso estocástico $\{X_t\}_{t\in T}$ en $(\Omega, \mathcal{F})$ se llama **conjuntamente medible** si:

$$\begin{aligned} X : T \times \Omega &\to \mathbb{R} \\ (t, w) &\mapsto X_t(w) \end{aligned}$$

es medible respecto a la σ-álgebra producto $\mathcal{B}(T) \otimes \mathcal{F}$.

Dados $\{X_t\}_{t\in T}$ y $\{Y_t\}_{t\in T}$ en un mismo espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

- Se dice que $\{Y_t\}$ es **versión** de $\{X_t\}$ si:

$$P(X_t = Y_t) = P(\{w \in \Omega | X_t(w) = Y_t(w)\}) = 1$$

  para todo $t \in T$, esto es para todo tiempo fijo.

- Se dice que estos dos procesos son **indistinguibles** si:

$$P[X_t = Y_t \text{ para todo } t \in T] =$$
$$P[\{w \in \Omega | X_t(w) = Y_t(w) \text{ para todo } t \in T\}] = 1$$

Note que la segunda definición es mucho más fuerte que la primera definición, porque dos procesos *indistinguibles* tendrás trayectorias iguales (Salvo en un conjunto de puntos de medida cero, como un conjunto de puntos discreto).

Una familia $\{\mathcal{F}_t\}$ de sub-σ-álgebras de $\mathcal{F}$ se dice **filtración** en $(\Omega, \mathcal{F})$ si, para $t_1 \leq t_2$, $\mathcal{F}_{t_1} \subset \mathcal{F}_{t_2}$, esto es, una familia creciente de sub-σ-álgebras.

Dado $\{X_t\}_{t\in T}$ un proceso estocástico, se le llamará **proceso $\mathcal{F}_\sqcup$-adaptado** si para todo $t \in T$, X_t es medible respecto a $\mathcal{F}_t$, para todo t.

Si se toma como $\mathcal{F}_t^X = \sigma(\{X_s\}_{s<t})$, esta es la menor filtración tal que $\{X_t\}$ es un proceso adaptado a esta filtración, conocida como **filtración natural de** $\{X_t\}_{t\in T}$.

Una variable aleatoria τ en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ se le conoce como **tiempo de parada** respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}$ si:

- $P[\tau < \infty] = 1$
- $\{\tau \leq t\} = \{w \in \Omega | \tau(w) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$

2.2. Movimiento Browniano

Primero, se da la definición de un movimiento Browniano, y luego, se hará la construcción. Esta, se puede hacer por tres métodos distintas (Consulte [3]):

1. Teoremas de existencia y continuidad de Kolmogorov.
2. Construcción propuesta por Levý, Wiener y Ciesielski, que usa fuertemente conceptos de espacios de Hilbert, aprovechando que el movimiento Browniano es Gaussiano. Usando funciones de Haar.
3. Principo de invarianza de Donsker, donde se busca una convergencia débil a una medida de Wiener.

En el presente trabajo, se enunciarán los teoremas de Kolmogorov, y en el apéndice se discutirán brevemente las demás construcciones.

Dado $\{W_t\}$ un proceso estocástico, en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. El proceso $\{W_t\}$ es un **movimiento Browniano** en una dimensión, si se cumplen las siguientes condiciones:

- Para casi todo ω, los caminos $W_t(\omega)$ son continuos (En el sentido de la probabilidad).
- $\{W_t\}$ es un proceso Gaussiano, es decir, para $k \geq 1$, y todo $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_k$, el vector aleatorio, $Z = (W_{t_1}, \cdots, W_{t_k}) \in \mathbb{R}^n$ tiene distribución multinormal (O Gaussiana), con media el vector 0, y la matriz de covarianza como $B(t_i, t_j) = \mathbb{E}[W_{t_i} W_{t_j}] = \text{mín}(t_i, t_j)$.

Más general, podemos considerar el movimiento Browniano respecto a una filtración.

Un proceso W_t en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ adaptado a una filtración $(\mathcal{F}_t)_{t>0}$ es un **movimiento Browniano relativo a la filtración** $\mathcal{F}_t$, si:

- Los caminos $W_t(\omega)$ son trayectorias continuas de t para casi todo ω.
- $W_0(\omega) = 0$ para casi todo ω.
- Para $0 \leq s \leq t$, los incrementos $W_t - W_s$ son variables aleatorias Faussianas con media 0 y varianza $t - s$.
- Para $0 \leq s \leq t$, los incrementos $W_T - W_s$ son independientes de las σ-álgebras $\mathcal{F}_s$.

Una pregunta que natural, es acerca de la existencia y de la unicidad de este proceso. Kolmogorov propone dos teoremas para verificar que el proceso existe y es único (En el sentido de distribuciones). Antes, se define el concepto de familia *consistente*.

Sea T un conjunto de sucesiones finitas $\tilde{t} = (t_1, \cdots, t_n)$ de números positivos distintos. Suponga que para cada $\tilde{t}$ de longitud n, existe una medida de probabilidad $Q_{\tilde{t}}$ en $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. Luego, $\{Q_{\tilde{t}}\}_{\tilde{t}\in T}$ es una **familia de distribuciones finito-dimensionales**. La familia se dice **consistente** si cumple las siguientes condiciones:

- Si $\tilde{s} = (t_{i_1}, \cdots, t_{i_n})$ es una permutación de $\tilde{t} = (t_1, \cdots, t_n)$, luego para todo $A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ con $i = 1, \cdots, n$ tenemos:

  $$Q_{\tilde{t}}(A_1 \times \cdots \times A_n) = Q_{\tilde{s}}(A_{i_1} \times \cdots \times A_{i_n})$$

  esto es, es invariante bajo permutaciones.
- Si $\tilde{t} = (t_1, \cdots, t_n)$ con $n \geq 1$, y $\tilde{s} = (t_1, \cdots, t_{n-1})$, con $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1})$, luego:

  $$Q_{\tilde{t}}(A \times \mathbb{R}) = Q_{\tilde{s}}(A)$$

Note que, al tener un espacio de probabilidad, $(\mathbb{R}^{[0,\infty)}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0,\infty)}), P)$, se puede definir una familia de distribuciones finito-dimensionales:

$$Q_{\tilde{t}}(A) = P[\{w \in \mathbb{R}^{[0,\infty)} | (w(t_1), \cdots, w(t_n)) \in A\}]$$

Para construir el movimiento Browniano, se usará el hecho, de tener las distribuciones finito-dimensaionales, para construir una medida de probabilidad en el espacio, como primer paso. Para ello, se usa el siguiente teorema:

Teorema 40 (Teorema de consistencia de Kolmogorov y Daniell.) *Sea $\{Q_{\tilde{t}}\}$ una familia de distribuciones finito-dimensonales consistentes. Así, existe una medida de probabilidad P en $(\mathbb{R}^{[0,\infty)}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0,\infty)}))$ tal que:*

$$Q_{\tilde{t}}(A) = P[\{w \in \mathbb{R}^{[0,\infty)} | (w(t_1), w(t_2), \cdots, w(t_n))\}]$$

se cumpla para todo $\tilde{t} = \{t_1, t_2, \cdots, t_n\} \in T$.

Como consecuencia, se tiene el siguiente resultado:

Corolario 3 *Existe una medida de probabilidad P en $(\mathbb{R}^{[0,\infty)}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0,\infty)}))$ tal que el proceso:*

$$B_t(w) = w(t),\ w \in \mathbb{R}^{[0,\infty)}, t \geq 0$$

tiene incrementos estacionarios e independientes. Además, los incrementos $B_t - B_s$, con $0 \leq s \leq t$, es normalmente distribuido con media 0 y varianza $t - s$,

Ya se tiene una medida de probabilidad. Ahora, se debe construir el proceso en todo el espacio $\mathbb{R}^{[0,\infty)}$. Sin embargo, hay que notar que $C[0,\infty) \notin \mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0,\infty)})$, y por ende, se debe construir una modificación continua del proceso. Se tiene entonces, el segundo teorema de Kolmogorov.

Teorema 41 (Teorema de continuidad de Kolmogorov y Chenstov.) *Suponga que un proceso $X = \{X_t | 0 \leq t \leq T\}$ en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ cumple la condición:*

$$\mathbb{E}[|X_t - X_s|^\alpha] \leq C|t - s|^{1+\beta}$$

con $0 \leq s, t \leq T$, para constantes positivas α, β y C. Entonces, existe una modificación $\tilde{X} = \left\{\tilde{X}_t | 0 \leq t \leq T\right\}$ de X, que es localmente Hölder-continua, con exponente γ, para todo $\gamma \in (0, \beta/\alpha)$, esto es:

$$P\left[w|\sup_{0<t-s<h(w),\ s,t\in[0,T]}\frac{|\tilde{X}_t(w)-\tilde{X}_s(w)|}{|t-s|^{\gamma}}\leq\delta\right]=1$$

donde $h(w)$ es una variable aleatoria positiva casi siemprem y $\delta>0$ una constante apropiada.

Como resultado final, tendremos:

Corolario 4 *Hay una medida de probabilidad P en $(\mathbb{R}^{[0,\infty)},\mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0,\infty)}))$ y un proceso estocástico $W=\left\{W_t,\mathcal{F}_t^W|t\leq 0\right\}$ en el mismo espacio, tal que W es un movimiento Browniano respecto a P.*

Como consecuencia, cada trayectoria del movimiento Browniano $\{W_t(w)|0\leq t<\infty\}$ es localmente Hölder-continua con exponente γ, para $\gamma\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

2.3. Miscelánea de Procesos Estocásticos (Opcional)

2.3.1. Procesos Markovianos.

2.3.2. Movimiento Browniano.

El movimiento Browniano satisface varias propiedades. Como

- $\{B_t\}$ es un proceso Gaussiano (Multinormal).
- $\mathbb{E}[B_t]=0$ y $\mathbb{E}[B_tB_s]=\min\{s,t\}$
- Para casi todo $\omega\in\Omega$, $t\mapsto B_t(\omega)$ es continua.

Observe lo siguiente:

- **Escalamiento:** Para todo $s>0$, $\left\{s^{-1/2}B_{st}|t\geq 0\right\}$ es un movimiento Browniano comenzando en 0. Más aún, se cumple que:

$$\{B_{s,t}|t\geq 0\}\stackrel{d}{=}\left\{s^{1/2}B_t|t\geq 0\right\}$$

2.3.3. Movimiento Browniano Fraccionario

.

Corresponde a una generalización del movimiento Browniano, este último es importante en modelamiento de volatilidad y trading óptimo, además, también en mecánica cuántica.

Un proceso X se dice **gaussiano** si para todo $t_1 < \cdots < t_n$, $X_{t_1}, \cdots, X_{t_n}$ tiene una distribución normal multivariada. Un proceso Gaussiano W_t^H con media 0, es un **movimiento Browniano fraccionario estándar** (fBM) con **exponente/parámero de Hurst** $H \in (0,1)$ si tiene la función de covarianza:

$$\mathbb{E}(W_t^H W_s^H) - \mathbb{E}(W_t^H)\mathbb{E}(W_s^H) = \frac{1}{2}(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H})$$

El fBM preserva propiedades de incrementos estacionarios, autosimilaridad (¿?) y distribuciones finito-dimensionales Gaussianas.

Capítulo 3

Ecuaciones diferenciales estocásticas: Enfoque de Itô.

En este capítulo, se comenzará la construcción de la integral de Itô. Para cumplir este objetivo, usaremos fuertemente los hechos vistos en el capítulo anterior del movimiento Browniano. Pero antes, se verán algunos ejemplos de ecuaciones diferenciales estocásticas, que poseen cierto ruido.

1. Se puede considerar un modelo de crecimiento poblacional, sujeto a un ruido:

   $$\frac{dN}{dt} = (r(t) + \mathit{Ruido})N(t)$$

   con la condición inicial $N(0) = N_0$. El término $(r(t) + \mathit{Ruido})$ corresponde a la tasa de crecimiento, esta puede variar en función de una distribución de probabilidad.

2. Otro problema conocido, es el **problema de filtrado**. Suponga que se hacen observaciones $Z(s)$ de, por ejemplo, la carga electrica en cierto medio, cuya función es denotada por $Q(s)$, para $s \leq t$. Se puede ver la relación entre ambas funciones como:

   $$Z(s) = Q(s) + \mathit{Ruido}$$

   donde el ruido proviene de errores al realizar las mediciones. Realmente, uno obtiene una versión peturbada de $Q(s)$. El problema consiste en determinar: *¿Cuál es la mejor estimación de $Q(t)$ que cumple la relación dada, basado en las observaciones $Z(s)$?*. En otras palabras, se desea filtrar el ruido, y obtener la medición más precisa. Este problema se puede plantear como una ecuación diferencial lineal con ruido.

3. En matemáticas financiera, es muy común el uso de estas ecuaciones diferenciales para modelar diferentes fenómenos financieros. Por ejemplo, suponga que una persona tiene dos posibles inversiones:

   a) Una inversión riesgosa, donde el precio $p_1(t)$ satisface la ecuación diferencial estocástica (Modelo poblacional estocástico):

   $$\frac{dp_1}{dt} = (a + \alpha \cdot Ruido)p_1$$

   donde $a > 0$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

   b) Una inversión segura, donde el precio $p_2(t)$ crece exponencialmente:

   $$\frac{dp_2}{dt} = bp_2$$

   donde $0 < b < a$.

   La persona, en cada instante t desea saber qué porcentaje u_t de su fortuna, sea X_t, colocar en la inversión riesgosa. Así, coloca $(1 - u_t)X_t$ de su fortuna en la inversión segura. Dada una *función de utilidad* U y un tiempo final T, se desea hallar la *cartera* óptima $u_t \in [0, 1]$ que maximizar la utilidad de la fortuna terminal, esto es:

   $$\max_{0 \le u_t \le 1} \left\{ \mathbb{E}[U(X_T^{(n)})] \right\}$$

   Si se supone que la inversión riesgosa, es una *opción de llamada Europea*, se deriva la famosa ecuación de **Black-Scholes**.

Con estos ejemplos, ya se sabe el por qué es necesario, en algunos casos, recurrir a estas ecuaciones diferenciales con ruido. En este capítulo, siguiendo el tratamiento de [5], se verá un enfoque *probabilístico* para solucionar estas ecuaciones, y en el próximo capítulo, se verán algunas desventajas de usar este método, proponiendo un método más analítico.

3.1. La integral de Itô.

Ahora, ¿Por qué es necesario construir una nueva integral? Veamos el objetivo inicial, solucionar una ecuación diferencial que tiene cierto ruido:

$$\frac{dX}{dt} = b(t, X_t) + \sigma(t, X_t) \cdot W_t$$

Note que el ruido se puede representar como el proceso estocástico W_t. Bajo experimentación, se interponen las siguientes condiciones sobre el ruido:

- Dos variables del proceso W_{t_1} y W_{t_2} con $t_1 \neq t_2$ son independientes.
- $\{W_t\}$ es un proceso estacionario.
- $\mathbb{E}[W_t] = 0$ para todo t.

No hay algún proceso estocástico tradicional que cumpla las condiciones dadas. Por ende, lo podemos ver como un proceso estocástico generalizado, un **proceso de ruido blanco**, esto es, un proceso que se puede construir como medida de probabilidad en cierto espacio sútil de funcionales $\mathcal{C}[0, \infty)$. Por ende, se nos sugiere que el proceso $\{W_t\}$ será el movimiento Browniano.

Ahora, la ecuación diferencial estocástica se puede representar forma integral, usando el hecho que W_t será el movimiento Browniano, como:

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) \cdot B_s$$

Sin embargo, el inconveniente se presenta con la segunda integral de la derecha, cuyo integrador no es de variación acotada, y por ende, no existe la *integral de Riemann-Stieljes* en este caso:

$$\int_0^t f(s, w)dB_s(w)$$

Por ende, se debe realizar una construcción nueva. La idea será análoga a construir la integral de Lebesgue (Consulte [2]). Esto es, definir la integral para un conjunto de funciones simples, luego tomar sucesión de funciones simples uniformemente convergente a una función positiva (Donde ya se conoce que existe esta sucesión), y luego ver el caso para funciones en general.

Sea f de la forma:

$$\phi(t,w) = \sum_{j\geq 0} e_j(w)\chi_{[j\cdot 2^{-n},(j+1)\cdot 2^{-n}]}(t)$$

para $n \in \mathbb{N}$. Entonces, se define la integral en este caso como:

$$\int_S^T \phi(t,w)dB_t(w) = \sum_{j\geq 0} e_j(w)[B_{t_{j+1}} - B_{t_j}](t)$$

donde

$$t_k = t_k^{(n)} = \begin{cases} k\cdot 2^{-n} & \text{Si } S \leq k\cdot 2^{-n} \leq T \\ S & \text{Si } k\cdot 2^{-n} < S \\ T & \text{Si } T < k\cdot 2^{-n} \end{cases}$$

pero, si no hay condiciones adicionales sobre e_j, habrán ciertos problemas. Suponga, que tenemos:

$$\phi_1(t,w) = \sum_{j\geq 0} B_{j\cdot 2^{-n}}(w)\cdot\chi_{[j\cdot 2^{-n},(j+1)\cdot 2^{-n}]}(t)$$

y

$$\phi_2(t,w) = \sum_{j\geq 0} B_{(j+1)\cdot 2^{-n}}(w)\cdot\chi_{[j\cdot 2^{-n},(j+1)\cdot 2^{-n}]}(t)$$

Capítulo 4

Caminos Rugosos e Integración Rugosa

La teoría de caminos rugosos (Vea, por ejemplo [4]) permite extender una teoría de ecuaciones diferenciales controladas, para poder trabajar el caso al tener una señal de entrada que sea *ruidosa*, tal como una *semimartingala*, como lo es el movimiento Browniano. Sea una ecuación diferencial controlada:

$$dY_t = f(Y_t)dX_t, \quad Y_0 = \zeta$$

Si la ecuación determinística admite solución única, entonces se denota como $Y = I_f(X, \zeta)$, y se conoce a I_f como **mapeo de Itô asociado a** f. Podemos expresar, de forma *integral* la solución de esta ecuación diferencial como:

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t f(Y_s)dX_s$$

Y, el problema de solucionar la ecuación diferencial, implica en definir la integral:

$$\int_0^t f(Y_s)dX_s$$

Recordando el Capítulo 1, se sabe que el integrador X_s debe, en principio, cumplir algunas condiciones de regularidad (Que sea α-Hölder, con $\alpha \geq \frac{1}{2}$) para permitir que exista su integral de Young (Consulte teorema 35).

Sin embargo, suponga que X_t es un camino mucho menos regular, como las trayectorias de un movimiento Browniano, que son α-Hölder con $\alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$. Se puede usar el enfoque de integración estocástica propuesto por Itô, pero en este caso, el mapa de Itô, carecerá de continuidad. Además, la integral de Young, no estará bien definida en este caso, por lo que dependerá de la elección de la partición, y más aún, el límite puede no existir. También, otro problema de la integral de Itô, es acerca de la elección de puntos, que puede afectar el valor de la integral, puesto que, las trayectorías tienen una variación muy rápida, y una integral como la de Riemann-Stieljes no es capaz de capturar esta información y más en intervalos de tiempos pequeños.

Se puede dar otro enfoque al problema. Sea $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una función suave, $X : [0, T] \to \mathbb{R}^d$ un camino α-Hölder continuo. Suponga que se desea darle un significado a

$$\int_0^T f(X_r) dX_r$$

Para eso, se usará la expansión de Taylor. Tomando $[s, t] \subset [0, T]$ un intervalo de tiempo lo suficientemente pequeño y $r \in [s, t]$, tenemos:

$$f(X_r) = f(X_s) + \nabla f(X_s)(X_r - X_s) + \cdots$$

Integrando respecto al camino X, obtenemos:

$$\int_s^t f(X_r) dX_r = f(X_s)(X_t - X_s) + \nabla f(X_s) \int_s^t (X_r - X_s) \otimes dX_r + \cdots$$

Véase el apéndice XX para una introducción a los tensores. Dado que $\alpha > \frac{1}{3}$, se pueden omitir los términos de grado superior en la expansión. Ahora, suponiendo que $\alpha > \frac{1}{2}$, por la condición de Young, teorema 35, se puede probar que:

$$\lim_{|\pi| \to 0} \sum_{[s,t] \in \pi} \int_s^t (X_r - X_s) \otimes dX_r = 0$$

Sin embargo, al tomar $\alpha \leq \frac{1}{2}$, el término de segundo orden, no necesariamente se anula, por lo que quedará:

$$\begin{aligned}
\int_0^T f(X_r)dX_r &= \lim_{[s,t]\in\pi} \int_s^t f(X_r)dX_r \\
&= \lim_{[s,t]\in\pi} \left(f(X_s)(X_t - X_s) + \nabla f(X_s) \int_s^t (X_r - X_s) \otimes dX_r \right)
\end{aligned}$$

Note que, se le debe dar un significado a la integral, al término de segundo orden. Este se conocerá como **levantamiento** de X, que será un tipo de candidato para el valor de la integral. Este levantamiento se expresa como:

$$\int_s^t (X_r - X_s) \otimes dX_r \coloneqq \mathbb{X}_{s,t}$$

Y vea que la integral se define como el valor propuesto para el levantamiento (No al contrario, como se podría pensar). Mientras se define qué es un camino rugoso, puede pensar a $\mathbb{X}$ como mayor información codificada por X.

Con esto en mente, la idea es, obtener un camino rugoso para X, de tal manera, que se puede definir la integral $\int f(X) \otimes X$ como una *integral rugosa*, integrando respecto al camino rugosos $(X, \mathbb{X})$. Con ello, el mapeo solución $(X, \mathbb{X}) \mapsto Y$ será continuo en una topología sutil.

Entonces, resolver ecuaciones diferenciales rugosas, implicará hallar dos funciones:

$$X \mapsto (X, \mathbb{X}) \mapsto Y$$

donde el primer mapeo consiste en agregar más información a X, y el segundo mapeo, conocido como **mapa de Itô-Lyons**, va a la solución del problema. Dado el levantamiento, este mapeo será continuo, e inclusive, en algunos casos, será localmente Lipschitz.

Ya con esta idea acerca de caminos rugosos, se puede ver algunas ventajas al trabajar con este enfoque. En el capítulo, antes de pasar a la definición formal de caminos rugosos, se hablará de caminos α-Hölder y algunas de sus propiedades. Con esto, ya se hablará de caminos rugosos, algunas propiedades, y también se verá algunos ejemplos, como lo es el *movimiento Browniano*.

4.1. Caminos α-Hölder

Sea $\alpha \in (0,1]$. Recuerde que una trayectoria $X : [O,T] \in \mathbb{R}^d$ es **α-Hölder continua**, si se cumple que:

$$|X_t - X_s| \leq C|t-s|^\alpha$$

para $s,t \in [0,T]$ con $s < t$.

Para $\alpha \in (0,1]$, defina una **seminorma α-Hölder** de X, como:

$$\|X\|_\alpha = \sup_{0\leq s<t\leq T} \frac{|X_{s,t}|}{|t-s|^\alpha}$$

Si $\|X\|_\alpha < \infty$, el camino se denomina **α-Hölder continuo** . El espacio de los caminos α-Hölder continuo se denota por $\mathcal{C}^\alpha = \mathcal{C}^\alpha([0,T];\mathbb{R}^d)$

Una vez con los preliminares en trayectorias α-Hölder, se comienza a trabajar acerca de caminos rugosos.

Para $\alpha \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$, un **camino rugoso α-Hölder** corresponde a una $\mathbf{X} = (X, \mathbb{X})$, donde:

- $X : [0,T] \to \mathbb{R}^d$ es una trayectoria α-Hölder continua.
- $\mathbb{X} : \Delta_{[0,T]} \to \mathbb{R}^{d\times d}$ es 2α-Hölder continua.

Además, se cumple la *relación de Chen*:

$$\mathbb{X}_{s,t} = \mathbb{X}_{s,u} + \mathbb{X}_{u,t} + X_{s,u} \otimes X_{u,t}$$

para todo $0 \leq s \leq u \leq t \leq T$.

4.2. Caminos Rugosos y el movimiento Browniano.

Recuerde, que la integral de Itô está definina como:

$$\int_s^t B_{s,r} dB_r$$

esto es, tomando el punto izquierdo. En esta sección, se va a ver que el movimiento Browniano, en conjunto con esta integral, conforman un camino rugoso para $\alpha \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$. Con esto, se puede aplicar la teoría de caminos rugosos e integración rugosa, a la integración estocástica, lo que abre un gran mundo de posibilidades.

En primer lugar, se va a demostrar el teorema fuerte de esta sección, que corresponde al *criterio de Kolmogorov de caminos rugosos*, el cuál, parafraseando, mostrará la existencia del una modificación para ciertos procesos estocásticos medibles, cuya modificación será un camino rugoso. Más específicamente, el enunciado dice:

Teorema 42 (Criterio de Kolmogorov para caminos rugosos) *Sea* $(X, \mathbb{X}) : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d\times d}$ *un proceso estocástico medible (Respecto a la* σ*-álgebra producto* $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0, T]$*) que, para casi todo* $\omega \in \Omega$*, satisface la relación de Chen. Sea* $q \geq 2$ *y* $\beta > \frac{1}{q}$*. Suponga que existe una constante* $C > 0$*, tal que, para todo* $(s, t) \in \Delta_{[0,T]}$*,*

$$\|X_{s,t}\|_{L^q} \leq C|t - s|^{\beta}, \quad \|\mathbb{X}_{s,t}\|_{L^{q/2}} \leq C|t - s|^{2\beta}$$

(Esta elección que constantes q *y* β *se hace para concuerde con la definición de camino rugoso, que* X *sea* β*-Hölder y el levantamiento* $\mathbb{X}$ *sea* 2β*-Hölder).*

Entonces, para todo $\alpha \in [0, \beta - \frac{1}{q}]$*, existe una modificación* $(\tilde{X}, \tilde{\mathbb{X}})$ *de* $(X, \mathbb{X})$ *y también existen variables aleatorias* $K_\alpha \in L^q$*,* $\mathbb{K}_\alpha \in L^{q/2}$ *tal que, para todo* $(s, t) \in \Delta_{[0,T]}$*,*

$$|\tilde{X}_{s,t}| \leq K_\alpha |t - s|^{\alpha}, \quad |\tilde{\mathbb{X}}_{s,t}| \leq \mathbb{K}_\alpha |t - s|^{2\alpha}$$

(Esta relación es para casi toda $\omega \in \Omega$ *¿?). En particular, si* $\beta - \frac{1}{q} > \frac{1}{3}$*, entonces, para todo* $\alpha \in (\frac{1}{3}, \beta - \frac{1}{q})$*, tenemos que* $(\tilde{X}, \tilde{\mathbb{X}})$

En primer lugar, se puede ver el proceso estocástico como la siguiente función:

$$Y_t(\omega) = (X_{s,t}(\omega), \mathbb{X}_{s,t}(\omega))$$

donde $\mathbb{X}_{s,t}(\omega) = \int_s^t X_{s,r}(\omega) \otimes dX_r$, tal que para casi todo $\omega \in \Omega$, se cumple que:

$$\mathbb{X}_{s,t}(\omega) = \mathbb{X}_{s,u}(\omega) + \mathbb{X}_{u,t}(\omega) + X_{s,u}(\omega) \otimes X_{u,t}(\omega)$$

Esto es, se cumple para casi todo ω la relación del Chen.

Demostración: En este caso, se probará primero el enunciado, para el conjunto de particiones diádicas, $\mathcal{D}_n = \left\{ \frac{k}{2^n} | k = 0, 1, \cdots, 2^n - 1 \right\}$. Además, se puede, sin pérdida de generalidad, tomar $T = 1$. Defina, así:

$$K_n = \max_{t \in \mathcal{D}_n} |X_{t,t+2^{-n}}| \quad \mathbb{K}_n = \max_{t \in \mathcal{D}_n} |\mathbb{X}_{t,t+2^{-n}}|$$

(Este corresponde a la modificación propuesta!)

Echando cuentas, tenemos:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[K_n^q] &= \mathbb{E}\left[\max_{t \in \mathcal{D}_n} |X_{t,t+2^{-n}}|^q\right] \quad \text{Sumar sobre los otros términos positivos de } \mathcal{D}_n \\
&\leq \mathbb{E}\left[\sum_{t \in \mathcal{D}_n} |X_{t,t+2^{-n}}|^q\right] \quad \text{Aplicar ¿DT?} \\
&= \sum_{t \in \mathcal{D}_n} \mathbb{E}[|X_{t,t+2^{-n}}|^q] \quad \text{Recuerde} \|X_{s,t}\|_{L^q} = \mathbb{E}[|X_{s,t}|^q]^{1/q} \\
&= \sum_{t \in \mathcal{D}_n} \|X_{t,t+2^{-n}}\|^q \quad \text{Use las hipótesis acerca de la norma} \\
&\leq \sum_{t \in \mathcal{D}_n} C^q |t - (t - 2^{-n})|^{q\beta} \quad \text{Hay } 2^n \text{elementos en la partición} \\
&= C^q |2^{-n}|^{q\beta} \cdot 2^n \\
&= C^q 2^{-n\beta q + n} = C^q 2^{n(-\beta q + 1)}
\end{aligned}$$

Puede repetir esta cuenta con el levantamiento $\mathbb{K}_n$, ¡Vamos a ello!:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\mathbb{K}_n^{q/2}] &= \mathbb{E}[\max_{t\in\mathcal{D}_n} |\mathbb{X}_{t,t+2^{-n}}|^{q/2}] \quad \text{Sumar sobre los otros términos } \mathcal{D}_n \\
&\leq \mathbb{E}\left[\sum_{t\in\mathcal{D}_n} |\mathbb{X}_{t,t+2^{-n}}|^{q/2}\right] \\
&= \sum_{t\in\mathcal{D}_n} \mathbb{E}[|\mathbb{X}_{t,t+2^{-n}}|^{q/2}] \quad \text{Definición de norma} \\
&= \sum_{t\in\mathcal{D}_n} \|X_{t,t+2^{-n}}\|_{L^{q/2}}^{q/2} \quad \text{Aplicar hipótesis, cota para } \mathbb{X} \\
&\leq \sum_{t\in\mathcal{D}_n} C^{q/2} 2^{-n\cdot q/2\cdot 2\beta} \\
&= C^{q/2} 2^{-nq\beta+n} = C^{q/2} 2^{-n(q\beta-1)}
\end{aligned}$$

Ya tenemos cotas para los valores esperados de K_n^q y $\mathbb{K}_n^q$! ¿Y ahora? La idea es, con estas cotas, mostrar que $K_\alpha \in L^p$ y $\mathbb{K}_\alpha \in L^(p/2)$ (**VEA, EN EL APÉNDICE, ESPACIOS** L^p).

Dados $s < t$, elementos tomados de $\cup_{n\leq 0}\mathcal{D}_n$ (La unión de todos los elementos en la partición diádica, esto es, $t = \frac{k}{2^n}$ para algún k, n). Seleccione algún m, de tal forma que

$$2^{-(m+1)} < t - s < 2^{-m}$$

Para cada $n \geq m+1$, tome $u_n, v_n \in \mathcal{D}_n$, tal que $u_n < v_n$, $[u_n, v_n] \subset [s,t]$ y $\cup[u_n, v_n] = [s,t]$, esto es, una partición. Note que, no es posible que existan 3 subintervalos con el mismo tamaño, ¿Por qué? Graficando esta situación tenemos:

En este caso, se aplicó unrgumento de descomposición multiescala: Argumento de encadenamiento. Luego, tenemos

$$|X_{s,t}| \leq \max_{0\leq i<N} |X_{s,u_{i+1}}| \leq \sum_{i=0}^{N-1} |X_{u_i,u_{i+1}}| \leq 2 \sum_{n=m+1}^{\infty} K_n$$

Y de manera análoga,

$$
\begin{aligned}
|\mathbb{X}_{s,t}| &= \left|\sum_{i=0}^{N-1}(\mathbb{X}_{u_i,u_{i+1}}) + X_{s,u_i} \otimes X_{u_i,u_{i+1}}\right| \quad \text{Aplique desigualdad triangular dos veces} \\
&\leq \sum_{i=0}^{N-1}|\mathbb{X}_{u_i,u_{i+1}}| + |X_{s,u_i}||X_{u_i,u_{i+1}}| \quad \text{Saque el máximo} \\
&\leq \sum_{i=0}^{N-1}|\mathbb{X}_{u_i,u_{i+1}}| + \left(\max_{0\leq i<N}|X_{s,u_i}|\right)\sum_{i=0}^{N-1}|X_{u_i,u_{i+1}}| \quad \text{Use las consecuencias de lo anterior} \\
&= 2\sum_{i=m+1}^{\infty}\mathbb{K}_n + 2\sum_{i=m+1}^{\infty}K_n \cdot 2\sum_{i=m+1}^{\infty}K_n \\
&= 2\sum_{i=m+1}^{\infty}\mathbb{K}_n + \left(2\sum_{i=m+1}^{\infty}K_n\right)^2
\end{aligned}
$$

Con esto, obtener otra cota para la norma α-Hölder de X:

$$
\begin{aligned}
\frac{|X_{s,t}|}{|t-s|^{\alpha}} &\leq 2\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{K_n}{2^{-(m+1)\alpha}} \quad |t-s| \geq 2^{-(m+1)} \\
&\leq 2\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{K_n}{2^{-n\alpha}} \quad \text{Porque } 2^{-n} < 2^{-(m+1)} \\
&\leq 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{K_n}{2^{-n\alpha}} =: K_\alpha \quad \text{Porque } 2^{-n} < 2^{-(m+1)}
\end{aligned}
$$

Esta es la variable aleatoria deseada. Observe, finalmente que:

$$
\begin{aligned}
\|K_\alpha\|_{L^q} &= \left\| 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{K_n}{2^{-n\alpha}} \right\| && \text{Aplicar desigualdad triangular}\\
&\leq 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|K_n\|_{L^q}}{2^{-n\alpha}} && \text{Definición de la norma}\\
&= 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbb{E}[K_n^q]^{1/q}}{2^{-n\alpha}}\\
&\leq 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(C^q 2^{-n(\beta q-1)}\right)^{1/q}}{2^{-n\alpha}} && \text{Por el resultado anterior. Hagamos más cuentas!}\\
&= 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{C\cdot 2^{-n(\beta-\frac{1}{q})}}{2^{-n\alpha}}\\
&= 2C\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n(\beta-\frac{1}{q}-\alpha)} < \infty
\end{aligned}
$$

Este último es, debibo a que tendremos una serie geométrica. Note que, por hipótesis, $\beta > \frac{1}{q}$ o $\beta - \frac{1}{q} > 0$. Como $\alpha \in \left[0, \beta - \frac{1}{q}\right)$, $\beta - \frac{1}{q} > \alpha$ o $\beta - \frac{1}{q} - \alpha > 0$, por ende, la serie es convergente.

Con esto, queda probado que $\|K_\alpha\|_{L^q}$. Ahora, queda probar el resultado análogo para la variable aleatoria $\mathbb{K}_\alpha$. Haciendo los trámites correspondientes:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathbb{X}_{s,t}}{|t-s|^{2\alpha}} &\leq \frac{1}{2^{-2(m+1)\alpha}}\left[2\sum_{n=m+1}^{\infty}\mathbb{K}_n + \left(2\sum_{n=m+1}^{\infty}K_n\right)^2\right] && \text{Usando resultados anteriores, expandiendo...}\\
&= 2\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{\mathbb{K}_n}{2^{-2(m+1)\alpha}} + \left(2\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{K_n}{2^{-(m+1)\alpha}}\right)^2 && \text{Use las cuentas anteriores}\\
&\leq 2\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{\mathbb{K}_n}{2^{-2(m+1)\alpha}} + K_\alpha^2 =: \mathbb{K}_\alpha
\end{aligned}
$$

Y análogo a la variable aleatoria $K_{\c{}\alpha}$, hallamos su norma $\|\cdot\|_{L^{q/2}}$.

$$
\begin{aligned}
\|\mathbb{K}_\alpha\|_{L^{q/2}} &\leq \left\| 2\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{\mathbb{K}_n}{2^{-2(m+1)\alpha}} + K_\alpha^2 \right\|_{L^{q/2}} && \text{Aplicando la cota del ejercicio anterior, aplicamos} \\
&\leq 2\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{\|\mathbb{K}_n\|_{L^{q/2}}}{2^{-2(m+1)\alpha}} + \|K_\alpha^2\|_{L^{q/2}} && \text{Aplicar definición de norma} \\
&= 2\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}[\mathbb{K}_n^{q/2}]^{2/q}}{2^{-2(m+1)\alpha}} + \|K_\alpha^2\|_{L^{q/2}} && \text{Aplicar cota para el valor esperado de } \mathbb{K}_n^{q/2} \\
&\leq 2\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{\left(C^{q/2}2^{-n(q\beta-1)}\right)^{2/q}}{2^{-2(m+1)\alpha}} + \|K_\alpha^2\|_{L^{q/2}} && \text{Cuentas, verificar si la serie es geométrica} \\
&= 2\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{C\cdot 2^{-2n(\beta-\frac{1}{q})}}{2^{-2(m+1)\alpha}} + \|K_\alpha^2\|_{L^{q/2}} && \text{Reindexar, suma de términos positivos} \\
&= 2C\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-2n(\beta-\frac{1}{q}-\alpha)} + \|K_\alpha^2\|_{L^{q/2}} < \infty
\end{aligned}
$$

Porque la serie es geométrica, con $\beta-\frac{1}{q}-\alpha > 0$, y sabemos que $\|K_\alpha^2\|_{L^{q/2}} < \infty$. Así, queda probado que $\mathbb{K}_\alpha \in L^{q/2}$.

Note que únicamente, se ha probado el enunciado para los elementos en la partición diádica. Como tarea final, se extenderá el resultado a todo el intervalo $[0,T]$ con $T=1$.

Note que, el conjunto de todas las particiones diádicas $\cup_{n=0}^{\infty}\mathcal{D}_n$ de $[0,1]$ es denso en el conjunto $[0,1]$, de tal forma, que la clausura, el conjunto de puntos de adherencia, es todo el intervalo $[0,1]$. Entonces, para todo elemento en este conjunto, es posible hallar una sucesión de tal forma que converja a este elemento. Formalizando, sea $t\in[0,1]$, existe $\{t_k\}_{k\geq 1} \subset \cup_{n\geq 0}\mathcal{D}_n$ sucesión en el conjunto de particiones diádicas, de tal forma que $t_k \to t$. Por las cuentas anteriores, sabemos que X es α-Hölder continua en $\cup_{n\geq 0}\mathcal{D}_n$, de tal forma que se define $\tilde{X}_t = \lim_{k\to\infty} X_{t_k}$ (Este límite existe). Por lema de Fatou:

$$
\begin{aligned}
\|\tilde{X}_t - X_t\|_{L^q} &\leq \liminf_{k\to\infty} \|X_{t,t_k}\|_{L^q} && \text{Aplicar hipótesis del problema} \\
&\leq \liminf_{k\to\infty} C|t-t_k|^{\beta} = 0
\end{aligned}
$$

De esta forma, $\tilde{X}_t = X_t$ en casi todo punto, por ende, $\tilde{X}$ es modificación de X. Queda verificar que $\tilde{X}_t$, en casi todo punto, no depende de la elección de la sucesión. Sea $s_k \to s$ y $t_k \to t$, con $s_k, t_k \in \cup_{n\geq 0}\mathcal{D}_n$, se tiene:

$$|\tilde{X}_{s,t}| = \lim_{k\to\infty} |X_{s_k,t_k}| \leq \lim_{k\to\infty} K_\alpha |t_k - s_k|^\alpha = K_\alpha |t-s|^\alpha$$

Lo que prueba lo deseado.

Finalmente (Ahora sí, te juro que sí), queda demostrar $\tilde{\mathbb{X}}_{s,t}$ es una modificación de $\mathbb{X}$. En este caso, se toman cuatro casos distintos:

- Sea $(s,t) \in \Delta_{[0,1]}$ de tal forma que $0 < s \leq t < 1$. Defina $\{s_k\}_{k\geq 1}, \{t_k\}_{k\geq 1} \subset \cup_{n\leq 0}\mathcal{D}_n$ sucesiones, de tal forma que $s_k \nearrow s$ y $t_k \searrow t$ para $k \to \infty$.
- Los otros casos corresponden a tomar $s = 0$ y $t < 1$, o $0 < s$ y $t = 1$, o $s = 0$ y $t = 1$. ¿COMPLETAR?

Defina $\tilde{X}_{s,t} = \lim_{k\to\infty} \mathbb{X}_{s_k,t_k}$. Como $s_k \leq s \leq t \leq t_k$, se puede aplicar la desigualdad de Chen:

$$\begin{aligned}
\mathbb{X}_{s_k,t_k} - \mathbb{X}_{s,t} &= \mathbb{X}_{s_k,s} + \mathbb{X}_{s,t_k} + X_{s_k,s} \otimes X_{s,t_k} - \mathbb{X}_{s,t} \quad \text{Nuevamente relación de Chen}\\
&= \mathbb{X}_{s_k,s} + \mathbb{X}_{s,t} + \mathbb{X}_{t,t_k} + X_{s,t} \otimes X_{t,t_k} + X_{s_k,s} \otimes X_{s,t_k} - \mathbb{X}_{s,t}\\
&= \mathbb{X}_{s_k,s} + \mathbb{X}_{t,t_k} + X_{s,t} \otimes X_{t,t_k} + X_{s_k,s} \otimes X_{s,t_k}
\end{aligned}$$

Calculando la norma en $\|\cdot\|_{L^{q/2}}$, queda:

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{X}_{s_k,t_k} - \mathbb{X}_{s,t}\|_{L^{q/2}} &= \|\mathbb{X}_{s_k,s} + \mathbb{X}_{t,t_k} + X_{s,t} \otimes X_{t,t_k} + X_{s_k,s} \otimes X_{s,t_k}\|_{L^{q/2}} \quad \text{Desigualdad triangular}\\
&\leq \|\mathbb{X}_{s_k,s}\|_{L^{q/2}} + \|\mathbb{X}_{t,t_k}\|_{L^{q/2}} + \|X_{s,t}\|_{L^q}\|X_{t,t_k}\|_{L^q} + \|X_{s_k,s}\|_{L^q}\|X_{s,t_k}\|_{L^q} \quad \text{Usando lo que}\\
&\leq C|s-s_k|^{2\beta} + C|t_k - t|^{2\beta} + C^2|s-s_k|^\beta |t_k - s|^\beta + C^2|t-s|^\beta |t_k - t|^\beta
\end{aligned}$$

Por lema de Fatou, aplicando límites a ambos lados, implicará que:

$$\|\tilde{\mathbb{X}}_{s,t} - X_{s,t}\| \to 0$$

en casi toda pareja $(s,t) \in \Delta_{[0,T]}$. Finalmente, note que:

$$\begin{aligned}
|\tilde{\mathbb{X}}_{s,t}| &= \lim_{n\to\infty} |\mathbb{X}_{s_k,t_k}|\\
&\leq \lim_{k\to\infty} \mathbb{K}_\alpha |t_k - s_k|^{2\alpha}\\
&= \mathbb{K}_\alpha |t-s|^{2\alpha}
\end{aligned}$$

de tal forma que, en casi todo punto, $\tilde{\mathbb{X}}$ cumple la condición dada. Con esto, ya pruebe lo deseado.

$\square$

4.2.1. Integral de Itô

Sea $B_t \in \mathbb{R}^n$ un movimiento Browniano estándar en dimensión n. Ya se conoce que las trayectorias del movimiento Browniano son α-Hölder continua para $\alpha \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$, entonces, se va a proponer un levantamiento que esea 2α-Hölder continua. Este levantamiento será la, ya vista en capítulos anteriores, *integral de Itô*:

$$\mathbb{B}_{s,t} = \int_s^t B_{s,r} \otimes dB_r$$

Se puede ver esta integral, como una suma de integrales iteradas:

$$\mathbb{B}_{s,t} = \sum_{i,j}^{d} \int_s^t B_{s,r}^{(i)} dB_r^{(j)}$$

O también, de forma matricial:

$$\mathbb{B}_{s,j}^{(i,j)} = \int_s^t B_{s,r}^{(i)} dB_r^{(j)}$$

Proposición 1 *Para cualquier $\alpha \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$, casi siempre se cumple que:*

$$\mathbf{B} := (B, \mathbb{B}_{s,t}) \in \mathcal{C}^{\alpha}([0,T]; \mathbb{R}^n)$$

Demostración: Para usar el criterio de Kolmogorov de caminos rugosos, en primer lugar se deben verificar las condiciones del problema.

- En primer lugar, se conoce que B_t y $\int_s^t B_{s,r} dB_r$ son medibles respecto a $\mathcal{F}_T$ (La σ-álgebra generada por $\{B_s\}_{s \leq T}$), por ende, $(B, \mathbb{B})$ es medible respecto a $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0,T]$.

- Verificar que cumple la relación de Chen (Casi siempre). Haciendo cuentas, para $s \leq u \leq t$, observe que:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{B}_{s,t} &= \int_s^t B_{s,r} \otimes dB_r \quad \text{Aplicar propiedades integral Itô, Capítulo 3.} \\
&= \int_s^u B_{s,r} \otimes dB_r + \int_u^t B_{s,r} \otimes dB_r \quad \text{Sumar ceros. El primer índice de } B_{s,r} \text{ es } u. \\
&= \int_s^u B_{s,r} \otimes dB_r + \int_u^t (B_r - B_s + B_u - B_u) \otimes dB_r \quad \text{Aplicar aditividad de la integral de Itô} \\
&= \int_s^u B_{s,r} \otimes dB_r + \int_u^t B_{u,r} \otimes dB_r + \int_u^t B_u - B_s \otimes dB_r \quad \text{Definición del levantamiento, sacar} \\
&= \mathbb{B}_{s,u} + \mathbb{B}_{u,t} + (B_{s,u}) \otimes \int_u^t dB_r \quad \text{Por construcción de integral de Itô:} \\
&= \mathbb{B}_{s,u} + \mathbb{B}_{u,t} + B_{s,u} \otimes B_{u,t}
\end{aligned}
$$

Por ende, la relación de Chen se cumple casi siempre.

- Sea $q \geq 2$ (¿$q = 2$?) y $\beta > \frac{1}{q}$. Tome $(s,t) \in \Delta_{[0,T]}$. Observe:

$$
\|B_{s,t}\|_{L^q} = \|(t-s)^{1/2} B_1\|_{L^q} = |(t-s)|^{1/2} \|B_1\|_{L^q}
$$

La primera igualdad viene por la propiedades del escalamiento en el sentido de la distribución de probabilidad. Luego, se aplica homogeneidad de la norma $\|\cdot\|_{L^q}$.

Aplicamos la *desigualdad de Burkhölder-David-Gundy* dos veces. Así, tendremos:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[|\mathbb{B}_{s,t}|^{q/2}] &= \mathbb{E}\left[\left|\int_s^t B_{s,r} \otimes dB_r\right|\right] \\
&\leq C_q \mathbb{E}\left[\left|\int_s^t |B_{s,r}|^2 dr\right|^{q/4}\right] \\
&\leq C_q \mathbb{E}\left[\sup_{r \in [s,t]} |B_{s,r}|^{q/2}\right] |t-s|^{q/4} \\
&\leq C_q^2 |t-s|^{q/2}
\end{aligned}
$$

Note que este es un estimador de la norma $\|\cdot\|_{L^{q/2}}$. Así, tenemos que:

$$\|\mathbb{B}_{s,t}\|_{L^{q/2}} \leq \left(C_q^2|t-s|^{q/2}\right)^{2/q} = C_q^{4/q}|t-s|$$

De esta forma, como se cumplen las hipótesis, tomando $\beta = \frac{1}{2}$, por el criterio de Kolmogorov (Caso particular), haciendo $q \to \infty$, para todo $\alpha \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$, existe una modificación $(\tilde{B}, \tilde{\mathbb{B}}) \in \mathcal{C}^\alpha \times \mathcal{C}_2^{2\alpha}$,y queda demostrado lo deseado.

□

Una pregunta natural sería verificar si $(B, \mathbb{B})$ es un camino rugoso geométrico, esto es, si cumple el teorema de integración por partes. Verificando por la fórmula de Itô (Ejercicio 4.3), tendremos:

$$\frac{1}{2}B_{s,t} \otimes B_{s,t} = \mathrm{Sym}(\mathbb{B}_{s,t}) + \left[\langle B^i, B^j\rangle_{s,t}\right]_{ij}$$

Esto es, está el término de variación cuadrática adicional, por ende, no puede ser un camino rugoso geométrico :(, y no puede ser aproximable por una sucesión de caminos suaves.

4.2.2. Integral de Stratonovich

Dados X, Y semimartingalas continuas, puede definir la integral de Stratonovich como:

$$\int_0^t Y_s \circ dX_s = \int_0^t Y_s dX_s + \frac{1}{2}\langle Y, X\rangle_t$$

Esta varianza cuadrática sale al seleccionar el punto medio, que es como se define originalmente la integral de Stratonovich. Esta satisface la fórmula de integración por partes:

$$X_tY_t = X_0Y_0 + \int_0^t X_s \circ dY_s + \int_0^t Y_s \circ dX_s$$

Esta puede ser una alternativa al levantamiento propuesto para el movimiento Browniano (Recuerde que acá la idea es ir proponiendo valores para el levantamiento y capturar más información del camino).

$$\mathbb{B}^{\text{Strat}}_{s,t} := \int_s^t B_{s,r} \otimes \circ dB_r$$

para $(s,t) \in \Delta_{[0,T]}$. Note que, se puede demostrar que la pareja $(B, \mathbb{B}^{\text{Strat}})$ satisface la relación de Chen:

$$\begin{aligned}\mathbb{B}^{\text{Strat}}_{s,t} &= \int_s^t B_{s,r} \otimes \circ dB_r \\ &= \int_s^t B_{s,r} \otimes dB_r + \frac{1}{2}\langle B, B\rangle_{s,t}\end{aligned}$$

PENDIENTE HACER LA CUENTA!!!!

Podemos demostrar, que, una mejora respecto a la integral de Itô, el movimiento Browniano junto al levantamiento de Stratonovich, es un camino rugoso geométrico.

Proposición 2 *Para $\alpha \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$, tenemos que, casi siempre:*

$$(B, \mathbb{B}^{Strat}) \in \mathcal{C}^{0,\alpha}_g([0,T]; \mathbb{R}^d)$$

Demostración: Primero, sea la función $A : (s,t) \mapsto \frac{1}{2}(t-s)I$. Verificar que es 1-Hölder continua:

$$|A_{s,t}| = \frac{1}{2}|(t-s)I| = \frac{1}{2}(t-s) \leq (t-s)$$

asumiendo que $|\cdot|$ es una norma matricial, que $|I| = 1$. Ahora, como:

$$\mathbb{B}^{\text{Strat}}_{s,t} = \mathbb{B}_{s,t} + \frac{1}{2}(t-s)I$$

Por la proposición anterior, podemos ver:

$$\begin{aligned}\|\mathbb{B}^{\text{Strat}}\|_\alpha &= \left\|\mathbb{B}_{s,t} + \frac{1}{2}(t-s)I\right\|_\alpha \\ &\leq \|\mathbb{B}_{s,t}\|_\alpha + \left\|\frac{1}{2}(t-s)I\right\|_\alpha \quad \text{Usar que } \mathbb{B}_{s,t} \text{ es regular 2-alpha} \\ &\leq C_{2\alpha}|t-s|^{2\alpha} + C_1|t-s| \leq \infty\end{aligned}$$

por ende, la regularidad del camino rugoso $(B, \mathbb{B}^{\text{Strat}})$ se hereda por $(B, \mathbb{B})$, y de este modo $(B, \mathbb{B}^{\text{Strat}}) \in \mathcal{C}^{\alpha}$.

Por ende, tomando $\beta \in \left(\alpha, \frac{1}{2}\right)$, entonces, por las inclusiones dadas (Al inicio) y que $(B, \mathbb{B}^{\text{Strat}}) \in \mathcal{C}_g^{\beta}$ (El movimiento Browniano es un camino rugoso geométrico débil), entonces $(B, \mathbb{B}^{\text{Strat}}) \in \mathcal{C}^{0,\alpha}$ (Esto es, el movimiento geométrico).

□

Note que, en ambos levantamientos (Itô y Stratonovich), la parte simétrica ya es conocida (Aplicando las propiedades de las integrales estocásticas). Ahora, observando la parte antisimétrica, que es más información codificada por el levantamiento del camino rugoso, $\mathbb{X}_{s,t}$, está dada por:

$$\text{Anti}(X_{s,t})^{ij} = \frac{1}{2}\left(\int_s^t X_{s,r}^i dX_r^j - \int_s^t X_{s,r}^j dX_r^i\right)$$

esta se conoce como *el área de Lévy*, que es un proceso estocástico que modela el área entre una trayectoria del movimiento Browniano y la cuerda.

4.3. Integración Rugosa

La idea de esta sección, es comenzar a trabajar acerca de la integración respecto a un camino rugoso. Primero, se va a ver un lema, que nos permite obtener unas estimaciones de dos trayectorias que aproximan a una función continua.

Teorema 43 (Lema de Costura) *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach (Espacio vectorial normado completo), y sea $A : \Delta_{[0,T]} \to E$ una función continua. Para cada tripla $0 \leq s \leq u \leq t \leq T$, sea $\delta A_{s,u,t} := A_{s,t} - A_{s,u} - A_{u,t}$. Suponga que existe constantes $\lambda \leq 0$ y $\epsilon > 0$ tal que:*

$$\|\delta A_{s,u,t}\| \leq \lambda |t - s|^{1+e}$$

para todo $0 \leq s \leq u \leq t \leq T$. ($\delta A_{s,u,t}$ indica la diferencia entre el área total y el área particionada. La norma es un estimador del error).

Entonces, existe un camino continuo $\gamma : [0, T] \to E$, con $\gamma_0 = 0$, tal que:

$$\|\gamma_t - \gamma_s - A_{s,t}\| \leq C\lambda |t - s|^{1+\epsilon}$$

para todo $(s,t) \in \Delta_{[0,T]}$, donde las constantes C depende sólo de ϵ. Más aún, para todo $(s,t) \in \Delta_{[0,T]}$, tenemos que:

$$\lim_{|\pi|\to 0} \sum_{[u,v]\in\pi} A_{u,v} = \gamma_t - \gamma_s$$

donde el límite es tomado sobre un descuento de partición π del intervalo $[s,t]$ con el tamaño de malla $|\pi| \to 0$.

Este teorema nos permite dar una aproximación a una función de dos parámetros, con dos funciones de un parámetro.

Demostración: Sea $(s,t) \in \Delta_{[0,T]}$. Para cada $n \leq 0$, sea $\{s = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_{2^n}^n = t\}$ una partición, tal que $t_i^n = s + \frac{i}{2^n}(t-s)$, que tiene un tamaño de malla $|\pi^n| = |t_{i+1}^n - t_i^n| = 2^{-n}|t-s|$. Sea:

$$A_{s,t}^n = \sum_{i=0}^{2^n-1} A_{t_i^n, t_{i+1}^n}$$

Para cada n, y cada i, sea u_i^n el punto medio del intervalo $[t_i^n, t_{i+1}^n]$, esto es, $u_i^n = \frac{t_{i+1}^n - t_i^n}{2}$. Tenemos que:

$$\begin{aligned}
A_{s,t}^n - A_{s,t}^{n+1} &= \sum_{i=0}^{2^n-1} A_{t_i^n, t_{i+1}^n} - \sum_{i=0}^{2^{n+1}-1} A_{t_i^n, t_{i+1}^n} \\
&= \sum_{i=0}^{2^n-1} A_{t_i^n, t_{i+1}^n} - A_{t_i^n, u_i^n} - A_{u_i^n, t_{i+1}^n}, \text{ ¿Cómo sale esta cuenta? PENDIENTE} \\
&= \sum_{n=0}^{2^n-1} \delta A_{t_i^n, u_i^n, t_{i+1}^n}
\end{aligned}$$

y por ende;

$$\begin{aligned}
\|A^n_{s,t} - A^{n+1}_{s,t}\| &\leq \sum_{i=0}^{2^n-1} \|\delta A_{t_i^n,u_i^n,t_{i+1}^n}\|, \text{ desigualdad triangular. Norma del Espacio Banach.}\\
&\leq \sum_{i=0}^{2^n-1} \lambda |t^n_{i+1} - t^n_i|^{1+\epsilon} \text{ hipótesis.}\\
&= \lambda |t-s|^{1+\epsilon} \sum_{i=0}^{2^n-1} 2^{-n(1+\epsilon)} \text{ , la longitud de la partición}\\
&= \lambda |t-s|^{1+\epsilon} 2^{-n\epsilon} \text{ sacar término de la sumatoria, queda suma de unos, da } 2^n.
\end{aligned}$$

Luego, con esta estimación:

$$\sum_{n=k}^{\infty} \|A^n_{s,t} - A^{n+1}_{s,t}\| \leq \lambda |t-s|^{1+\epsilon} \sum_{n=k}^{\infty} 2^{-n\epsilon} = \lambda |t-s|^{1+\epsilon} \frac{2^{-k\epsilon}}{1-2^{-\epsilon}} \to 0$$

para $k \to 0$. De esto podemos deducir que $\{A^n_{s,t}\}_{n\geq 0}$ es una sucesión de Cauchy. Como A^n es un espacio de Banach, esta sucesión de Cauchy converge, y denotamos al límite:

$$\Gamma_{s,t} = \lim_{n\to\infty} A^n_{s,t}$$

que sabemos que existe. Luego:

$$\begin{aligned}
\|\Gamma_{s,t} - A^k_{s,t}\| &= \left\| \sum_{n=k}^{\infty} (A^n_{s,t} - A^{n+1}_{s,t}) \right\|\\
&\leq \lambda |t-s|^{1+\epsilon} \frac{2^{-k\epsilon}}{1-2^{-\epsilon}}
\end{aligned}$$

y por ende, la convergencia es uniforme en $(s,t) \in \Delta_{[0,T]}$, y más aún:

$$\|\Gamma_{s,t} - A^n_{s,t}\| \leq \frac{\lambda |t-s|^{1+\epsilon}}{1-2^{-\epsilon}}$$

Como A^n es continua, entonces, Γ es continua. Note que:

$$\Gamma_{s,u} + \Gamma_{u,t} = \lim_{n\to\infty} A^n_{s,u} + \lim_{n\to\infty} A^n_{u,t} = \lim_{n\to\infty} A^n_{s,t} = \Gamma_{s,t}$$

por porque $A^n_{s,u} + A^n_{u,t} = A^n_{s,t}$. ¿DUDAS DE LOS ESTIMADORES DE ARRIBA?

Esto se tiene para todas las particiones diádicas $s \leq u \leq t$, y por la continuidad (El límite de una sucesión es un punto de acumulación, y las particiones diádicas son un conjunto denso en los reales), se tiene para todo los intervalos de tiempo $s \leq u \leq t$. Note que, Γ son los incrementos de un camino continuo (¿Por qué?). Esto es, para $\gamma_t = \Gamma_{0,t}$ para $t \in [0,T]$, entonces tenemos que:

$$\gamma_t - \gamma_s = \Gamma_{s,t}, \quad \text{Para todo}(s,t) \in \Delta_{[0,T]}$$

y en particular, que $\gamma_0 = 0$. Podemos reescribir la desigualdad de arriba como:

$$\|\gamma_t - \gamma_s - A_{s,t}\| \leq \frac{\gamma|t-s|^{1+\epsilon}}{1-2^{-\epsilon}}$$

de tal forma que, haciendo $C = \frac{1}{1-2^{\epsilon}}$, tenemos la primera desigualdad. Finalmente, para cualquier $(s,t) \in \Delta_{[0,T]}$ y cualquier partición $\pi = \{s = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = t\}$ de $[s,t]$, tenemos:

$$\begin{aligned}
\left\|\gamma_t - \gamma_s - \sum_{i=0}^{N-1} A_{t_i,t_{i+1}}\right\| &= \left\|\sum_{i=0}^{N-1} \gamma_{t_{i+1}} - \gamma_{t_i} - A_{t_i,t_{i+1}}\right\| \\
&\leq \frac{\lambda}{1-2^{-\epsilon}} \sum_{i=0}^{N-1} |t_{i+1} - t_i|^{1+\epsilon}, \text{ por la última desigualdad.} \\
&\leq \frac{\lambda}{1-2^{-\epsilon}} |t-s||\pi|^{\epsilon}
\end{aligned}$$

de tal forma que $\sum_{i=0}^{N-1} A_{t_i,t_{i+1}} \to \gamma_t - \gamma_s$ para $|\pi| \to 0$.

¡¡¡REVISAR DEMOSTRACIÓN!!!

$\square$

Ya luego, de revisar el lema de costura, este teorema es un resultado muy fuerte, que permitirá determinar algunos estimadores al integrar en trayectorias α-Hölder.

El primer caso dónde se aplicará el lema de costura, será para demostrar la existencia de la integral de Young.

Proposición 3 (Integración de Young) *Sea $X \in \mathcal{C}^\alpha$ y $Y \in \mathcal{C}^\beta$ para $\alpha, \beta \in (0,1]$, donde se cumple la condición $\alpha + \beta > 1$. Entonces, el límite:*

$$\int_0^t Y_u dX_u := \lim_{|\pi| \to 0} \sum_{[u,v] \in \pi} Y_u X_{u,v}$$

existe para cualquier $t \in [0,T]$, donde el límite se toma sobre cualquier sucesión de particiones π de $[0,t]$ cuya longitud tiende a 0, esto es, $|\pi| \to 0$. Este límite se conoce como ***integral de Young*** *de Y respecto a X, dónde tenemos la estimación:*

$$\left| \int_s^t Y_u dX_u - Y_s X_{s,t} \right| \leq C \|Y\|_\beta \|X\|_\alpha |t-s|^{\alpha+\beta}$$

para todo $(s,t) \in \Delta_{[0,T]}$. Además, la constante C depende de $\alpha + \beta$

Demostración: La idea es aplicar el lema de costura. De forma natural, se toma $A_{s,t} = Y_s X_{s,t}$, de tal forma que la función es continua. Luego, para $0 \leq s \leq u \leq t \leq T$, tenemos:

$$\begin{aligned}
\delta A_{s,u,t} &= A_{s,t} - A_{s,u} - A_{u,t} \text{ por la definición.} \\
&= Y_s X_{s,t} - Y_s X_{s,u} - Y_u X_{u,t} \\
&= Y_s (X_{s,t} - X_{s,u}) - Y_u X_{u,t} \\
&= Y_s X_{u,t} - Y_u X_{u,t} \\
&= Y_{u,s} X_{u,t} \\
&= -Y_{s,u} X_{u,t}
\end{aligned}$$

realizando las cuentas respectivas. Por ende, tenemos la siguiente cota:

$$\begin{aligned}
\|\delta A_{s,u,t}\| &= |Y_{s,u} X_{u,t}| \\
&= \frac{|Y_{s,u}|}{|u-s|^\beta} \frac{|X_{u,t}|}{|t-u|^\alpha} |u-s|^\beta |t-u|^\alpha \\
&\leq \|Y\|_\beta \|X\|_\alpha |t-s|^{\alpha+\beta}
\end{aligned}$$

tomando máximos, y por el hecho que la función exponencial es creciente. Por ende, por el lema de costura al tomar $\lambda = \|Y\|_\beta \|X\|_\gamma$ y $\epsilon = \alpha + \beta - 1$, existe una trayectoria continua $\gamma_t = \int_0^t Y_u dX_u$, tal que

$$\left\| \int_s^t Y_u dX_u - Y_u X_{s,t} \right\| \leq C\|X\|_\alpha \|Y\|_\beta |t-s|^{\alpha+\beta}$$

donde C depende de $\alpha + \beta$ únicamente. Además, se cumple:

$$\lim_{|\pi|\to 0} \sum_{[u,v]\in\pi} Y_u X_{u,v} = \int_s^t Y_u dX_u$$

y queda demostrado todo lo deseado

□

La integral de Young cumple varias propiedades. Una de ellas, que viene desde la integral de Riemann-Stieljes, es la posibilidad de tomar cualquier punto en el intervalo, sin que esto afecte el valor de la integral.

Lema 3 *Sea $X \in \mathcal{C}^\alpha$ y $Y \in \mathcal{C}^\beta$ para $\alpha, \beta \in (0,1]$ con $\alpha + \beta > 1$. Sea π una partición, $[u,v]$ un intervalo en la partición y $r \in [u,v]$ un punto arbitrario del intervalo. Entonces, la integral de Young de Y respecto a X es igual a:*

$$\int_0^t Y_u dX_u = \lim_{|\pi|\to 0} \sum_{[u,v]\in\pi} Y_r X_{u,v}$$

para cualquier $t \in [0,T]$

Demostración: Tenemos:

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{[u,v]\in\pi} Y_{u,r} X_{u,v} \right| &\leq \sum_{[u,v]\in\pi} |Y_{u,r}||X_{u,v}| \\
&\leq \|Y\|_\beta \|X\|_\alpha \sum_{[u,v]\in\pi} |v-u|^{\alpha+\beta} \text{ tomando supremos en la seminorma } \|\cdot\|_\alpha \\
&\leq \|Y\|_\beta \|X\|_\alpha \sum_{[u,v]\in\pi} |\pi|^{\alpha+\beta} \text{ tomando supremos} \\
&\leq \|Y\|_\beta \|X\|_\alpha \frac{T}{|\pi|} |\pi|^{\alpha+\beta} \text{ por el número de intervalos en la partición}
\end{aligned}$$

Y note que, el último término, mientras $|\pi| \to 0$, luego $\|Y\|_\beta \|X\|_\alpha T|\pi|^{\alpha+\beta-1} \to 0$. Entonces, para $r \in [u,v]$:

$$\begin{aligned}
\lim_{|\pi|\to 0} \sum_{[u,v]\in\pi} Y_r X_{u,v} &= \lim_{|\pi|\to 0} \left(\sum_{[u,v]\in\pi} Y_u X_{u,v} + \sum_{[u,v]\in\pi} Y_{u,r} X_{u,v} \right) \\
&= \lim_{|\pi|\to 0} \sum_{[u,v]\in\pi} Y_u X_{u,v}, \text{ el término de la derecha se anula} \\
&= \int_0^t Y_u dX_u
\end{aligned}$$

lo que demuestra lo deseado.

□

Con ambos resultados, entonces ya se tiene una forma de integral respecto a caminos α-Hölder, tal que al tomar sumas de Riemann-Stieltjes, mientras la partición va disminuyendo la longitud, la suma converge, sin importar la elección del punto.

Ahora, procedemos a revisar algunas propiedades de la integral de Young. Primero, se estudia una cota superior para la integral respecto a trayectorias α-Hölder y β-Hölder distintas.

Proposición 4 *Sea $X, \tilde{X} \in \mathcal{C}^\alpha$ y $Y, \tilde{Y} \in \mathcal{C}^\beta$ para $\alpha, \beta \in (0,1]$ con $\alpha+\beta > 1$. Entonces, existe constante C dependiente de α, β y T, tal que:*

$$\left\| \int_0^t Y_u dX_u - \int_0^t \tilde{Y}_u d\tilde{X}_u \right\|_\alpha \leq C \left[\left(|Y_0 - \tilde{Y}_0| + \|Y - \tilde{Y}\|_\beta \right) \|X\|_\alpha + \left(|\tilde{Y}_0| + \|\tilde{Y}\|_\beta \right) \|X - \tilde{X}\|_\alpha \right]$$

Demostración: Para la demostración, se usará el lema de costura. Tomando $A_{s,t} = Y_s X_{s,t}$, $\tilde{A}_{s,t} = \tilde{Y}_s \tilde{X}_{s,t}$, $\Delta = A - \tilde{A}$ y $\delta\Delta_{s,u,t} = \Delta_{s,t} - \Delta_{s,u} - \Delta_{u,t}$, entonces:

$$\begin{aligned}
\delta\Delta_{s,u,t} &= \Delta_{s,t} - \Delta_{s,u} - \Delta_{u,t} \\
&= A_{s,t} - \tilde{A}_{s,t} - A_{s,u} + \tilde{A}_{s,u} - A_{u,t} + \tilde{A}_{u,t} \\
&= A_{s,t} - A_{s,u} - A_{u,t} - \tilde{A}_{s,t} + \tilde{A}_{s,u} + \tilde{A}_{u,t} \\
&= \delta A_{s,u,t} - \delta\tilde{A}_{s,u,t} \\
&= Y_s X_{s,t} - Y_s X_{s,u} - Y_u X_{u,t} - \tilde{Y}_s \tilde{X}_{s,t} + \tilde{Y}_s \tilde{X}_{s,u} + \tilde{Y}_u \tilde{X}_{u,t} \\
&= Y_s X_{u,t} - Y_u X_{u,t} - \tilde{Y}_s \tilde{X}_{u,t} + \tilde{Y}_u \tilde{X}_{u,t} \\
&= -(Y_{s,u} X_{u,t} - \tilde{Y}_{s,u} \tilde{X}_{u,t})
\end{aligned}$$

tal que

$$\begin{aligned}
|\delta\Delta_{s,u,t}| &\leq |Y_{s,u} X_{u,t} - \tilde{Y}_{s,u} \tilde{X}_{u,t}| \\
&\leq |Y_{s,u} X_{u,t} - \tilde{Y}_{s,u} X_{u,t} + \tilde{Y}_{s,u} X_{u,t} - \tilde{Y}_{s,u} \tilde{X}_{u,t}| \\
&\leq |Y_{s,u} - \tilde{Y}_{s,u}||X_{u,t}| + |X_{u,t} - \tilde{X}_{u,t}||\tilde{Y}_{s,u}| \\
&\leq \left(\frac{|Y_{s,u} - \tilde{Y}_{s,u}|}{|u-s|^\beta} \frac{|X_{u,t}|}{|t-u|^\alpha} + \frac{|X_{u,t} - \tilde{X}_{u,t}|}{|t-u|^\beta} \frac{|\tilde{Y}_{s,u}|}{|u-s|^\beta} \right) |u-s|^\beta |t-u|^\alpha \\
&\leq \left(\|Y - \tilde{Y}\|_\beta \|X\|_\alpha + \|\tilde{Y}\|_\beta \|X - \tilde{X}\|_\alpha \right) |t-s|^{\alpha+\beta}
\end{aligned}$$

Entonces, por el lema de costura, tomando $\lambda = \|Y - \tilde{Y}\|_\beta \|X\|_\alpha + \|\tilde{Y}\|_\beta \|X - \tilde{X}\|_\alpha$ y $\epsilon = \alpha + \beta - 1$, existe una trayectoría γ y una constante C tal que:

$$|\gamma_t - \gamma_s - \Delta_{s,t}| \leq C \left(\|Y - \tilde{Y}\|_\beta \|X\|_\alpha + \|\tilde{Y}\|_\beta \|X - \tilde{X}\|_\alpha \right) |t-s|^{\alpha+\beta}$$

y, al tomar π una partición del intervalo $[s,t]$, queda, aplicando la definiciones de las hipótesis:

$$\begin{aligned}
\gamma_t - \gamma_s &= \lim_{|\pi|\to 0} \sum_{[u,v]\in\pi} \Delta_{u,v} = \lim_{|\pi|\to 0} \left(\sum_{[u,v]\in\pi} A_{u,v} - \sum_{[u,v]\in\pi} \tilde{A}_{u,v} \right) \\
&= \lim_{|\pi|\to 0} \left(\sum_{[u,v]\in\pi} Y_u X_{u,v} - \sum_{[u,v]\in\pi} \tilde{Y}_u \tilde{X}_{u,v} \right) = \int_s^t Y_u dX_u - \int_s^t \tilde{Y}_u d\tilde{X}_u
\end{aligned}$$

De esta forma, se tendrá:

$$\left|\int_s^t Y_u dX_u - \int_s^t \tilde{Y}_u d\tilde{X}_u - (Y_s X_{s,t} - \tilde{Y}_s \tilde{X}_{s,t})\right| \leq C \left(\|Y - \tilde{Y}\|_\beta \|X\|_\alpha + \|\tilde{Y}\|_\beta \|X - \tilde{X}\|_\alpha\right) |t-s|^{\alpha+}$$

Más aún:

$$|Y_s X_{s,t} - \tilde{Y}_s \tilde{X}_{s,t}| \leq \left(\|Y - \tilde{Y}\|_\infty \|X\|_\alpha + \|\tilde{Y}\|_\infty \|X - \tilde{X}\|_\alpha\right) |t-s|^\alpha$$

Obtenemos otras dos cotas:

$$\|\tilde{Y}\|_\infty \leq |\tilde{Y}_0| + T^\beta \|\tilde{Y}\|_\beta$$

y

$$\|Y - \tilde{Y}\|_\infty \leq |Y_0 - \tilde{Y}_0| + T^\beta \|Y - \tilde{Y}\|_\beta$$

por lema de interpolación. Además, se sigue que, para todo t, se tiene:

$$\left|\int_s^t Y_u dX_u - \int_s^t \tilde{Y}_u d\tilde{X}_u\right|$$
$$\leq (1+C)(1+T^\beta) \left[\left(|Y_0 - \tilde{Y}_0| + \|Y - \tilde{Y}\|_\beta\right) \|X\|_\alpha + \left(|\tilde{Y}_0| + \|\tilde{Y}\|_\beta\right) |$$

Y por ende:

$$\left\|\int_s^t Y_u dX_u - \int_s^t \tilde{Y}_u d\tilde{X}_u\right\|$$
$$\leq (1+C)(1+T^\beta) \left[\left(|Y_0 - \tilde{Y}_0| + \|Y - \tilde{Y}\|_\beta\right) \|X\|_\alpha + \left(|\tilde{Y}_0| + \|\tilde{Y}\|_\beta\right)$$

Y queda demostrado lo deseado.

□

La integral de Young satisface algunas reglas del cálculo clásico, como la integración por partes.

Lema 4 (Integración por partes (Young)) *Sea* $X \in \mathcal{C}^\alpha$ *y* $Y \in \mathcal{C}^\beta$ *para algún* $\alpha, \beta \in (0,1]$ *con* $\alpha + \beta > 1$*. Entonces:*

$$X_T Y_T = X_0 Y_0 + \int_0^T X_u dY_u + \int_0^T Y_u dX_u$$

Demostración: Aplicando la definición de integral de Young y aplicando también el hecho de la elección cualquiera del punto sobre la partición:

$$\begin{aligned} X_T Y_T - X_0 Y_0 &= \lim_{|\pi| \to 0} \sum_{[s,t] \in \pi} (X_t Y_t - X_s Y_s) \\ &= \lim_{|\pi| \to 0} \sum_{[s,t] \in \pi} (X_t Y_{s,t} + Y_s X_{s,t}) \\ &= \int_0^T X_u dY_u + \int_0^T Y_u dX_u \end{aligned}$$

que muestra lo deseado.

□

Ahora, se van a mostrar unas propiedades que se preservan de la integral de Young, en funciones que son α-Hölder *locales.*

Para $\alpha \in (0,1]$, se dice que f es **localmente α-Hölder continua**, sí para todo subconjunto acotado $K \subset \mathbb{R}^d$, existe C constante tal que:

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha$$

para todo $x, y \in K$.

Para $k \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in (0,1]$, se denota $\mathcal{C}^{k+\alpha} = \mathcal{C}^{k+\alpha}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$ si $f \in \mathcal{C}^k$ (k-ésima derivada continua), y $D^k f$ es localmente α-Hölder continua.

Lema 5 *Sea* $X \in \mathcal{C}^\alpha([0,T]; \mathbb{R}^d)$ *y* $f \in \mathcal{C}^{1+\gamma}$ *para ciertos índices* $\alpha, \gamma \in (0,1]$ *tal que* $\alpha(\gamma + 1) > 1$*. Luego:*

$$\int_0^T Df(X_u) dX_u$$

existe (Es una integral de Young bien definida), y más aún:

$$f(X_T) = f(X_0) + \int_0^T Df(X_u)dX_u$$

Demostración: (Ejercicio del libro). Sea $X : [0,T] \to \mathbb{R}^d$ una trayectoría α-Hölder continua. Como el dominio de X es acotado y cerrado (Esto es, compacto en $\mathbb{R}$), luego, X será continua, y por ende, uniformemente continua. Esto implica que $X([0,T]) \subset \mathbb{R}^d$ será un conjunto compacto, y en específico, acotado. Por ende, existe algún $R > 0$ y $p \in \mathbb{R}^d$, tal que $X([0,T]) \subseteq B(p,R)$.

Entonces, observe que, para algún $u, v \in [0,T]$, como $X_u, X_v \in B(p,R)$ que es un conjunto acotado de $\mathbb{R}^d$, se cumple la hipótesis que Df sea localmente γ-Hölder continua:

$$|Df(X_u) - Df(X_v)| \leq C_1 |X_u - X_v|^\gamma$$

Para alguna constante C_1, se usa el hecho que X es α-Hölder continua:

$$\begin{aligned}|Df(X_u) - Df(X_v)| &\leq C_1 |X_u - X_v|^\gamma \\ &\leq C_1 \left(C_2 |u-v|^\alpha\right)^\gamma \\ &\leq C_1 C_2 |u-v|^{\alpha\cdot\gamma}\end{aligned}$$

para otra constante C_2, y de esta forma, $Df(X_t) \in \mathcal{C}^{\alpha\cdot\gamma}([0,T];\mathbb{R})$ con $C* = C_1 \cdot C_2$. Entonces, por la definición de integral de Young, como $\alpha + \alpha\gamma > 1$ y $\alpha\gamma \in (0,1]$, se cumple:

$$\int_0^T Df(X_u)dX_u = \lim_{|\pi|\to 0} \sum_{[u,v]\in\pi} Df(X_u)X_{u,v}$$

y la integral existe, por lo que queda demostrada la primera parte.

Para demostrar la segunda parte... pendiente.

□

Se termina la sección con una propiedad de la integral de Young, sobre la *asociatividad*.

Lema 6 (Asociatividad en la integral de Young.) *Sea $X \in \mathcal{C}^\alpha$, y $Y, K \in \mathcal{C}^\beta$ para algún $\alpha, \beta \in (0,1]$ con $\alpha + \beta > 1$. Sea $Z_t = \int_0^t K_u dX_u$. Luego $Z \in \mathcal{C}^\alpha$ y se cumple:*

$$\int_0^T Y_u dZ_u = \int_0^T Y_u K_u dX_u$$

Demostración: Por la cota superior en la definición de la integral de Young, tenemos:

$$|Z_{s,t}| = \left| \int_s^t K_u dX_u - K_s X_{s,t} + K_s X_{s,t} \right| \leq C\|K\|_\beta \|X\|_\alpha |t-s|^{\alpha-\beta} + \|K\|_\infty \|X\|_\alpha |t-s|^\alpha$$

y tomando supremos, se cumple

$$\|Z\|_\alpha \leq C\|K\|_\beta \|X\|_\alpha T^\beta + \|K\|_\infty \|X\|_\alpha < \infty$$

y por ende, $Z \in \mathcal{C}^\alpha$. Como $Y \in \mathcal{C}^\beta$, cumple la condición de Young, y la integral está bien definida.

Para probar la igualdad restante, usamos el estimador de la integral de Young:

$$\begin{aligned}
\left| \int_s^t Y_u dZ_u - \int_s^t Y_u K_u dX_u \right| &= \left| \int_s^t Y_u dZ_u - Y_s K_s X_{s,t} \right| \\
&= \left| \int_s^t Y_u dZ_u - Y_s Z_{s,t} \right| \\
&\leq C\|Y\|_\beta \|Z\|_\alpha |t-s|^{\alpha+\beta}
\end{aligned}$$

y tomando $|\pi| \to 0$, y sumando sobre $[s,t] \in \pi$, se tiene lo deseado.

$\square$

Usando la notación $Y \bullet X = \int_s^t Y_u dX_u$, el teorema anterior se puede reescribir como:

$$Y \bullet (K \bullet X) = (YK) \bullet X$$

dónde medianamente, se puede ver la propiedad asociativa.

4.3.1. Caminos Controlados.

Recuerde la motivación inicial, al tomar expansión en series de Taylor, se tiene una expresión de la forma:

$$\int_s^t f(X_r)dX_r \simeq f(X_s)X_{s,t} + Df(X_s)\int_s^t X_{s,r}\otimes dX_r$$

Es normal preguntarse si es posible (Bajo alguna topología), establecer el límite:

$$\int_0^T f(X_r)dX_r = \lim_{|\pi|\to 0}\sum_{[s,t]\in\pi} f(X_s)X_{s,t} + Df(X_s)\mathbb{X}_{s,t}$$

Note que, si se establece tal límite, se podría establecer algún tipo de integración rugosa.

Observe, que el integrando es una función de la trayectoría X. Esta función, debe cumplir ciertas condiciones, que aunque a primera vista parece restrictiva, en la práctica usualmente las funciones consideradas cumplen la condición. Estos se conocen como *trayectorias controladas*.

Sea $\alpha \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$, y $X \in \mathcal{C}^\alpha([0,T];\mathbb{R}^d)$. Se dice que (Y, Y') es una **trayectoría controlada** respecto a X, si $Y \in \mathcal{C}^\alpha([0,T];\mathbb{R}^m)$ y $Y' \in \mathcal{C}^\alpha([0,T];\mathcal{L}(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^m))$, y existe $R^Y \in \mathcal{C}_2^{2\alpha}([0,T];\mathbb{R}^m)$, con $R^Y : \Delta_{[0,T]} \to \mathbb{R}^m$ se define como:

$$Y_{s,t} = Y'_s X_{s,t} + R^Y_{s,t}$$

para $(s,t) \in \Delta_{[0,T]}$. Se denota a $\mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T];\mathbb{R}^m)$ o simplemente $\mathscr{D}_X^{2\alpha}$ el espacio de trayectorías controladas. El término Y' se conoce como **derivada de Gubinelli.**

El espacio $\mathscr{D}_X^{2\alpha}$ se puede equipar con la norma:

$$\|Y, Y'\|_{\mathscr{D}_X^{2\alpha}} = |Y_0| + |Y'_0| + \|Y'\|_\alpha + \|R^Y\|_{2\alpha}$$

y más aún, será un espacio de Banach.

Sea $\mathcal{C}_b^k$ el espacio de funciones f tal que f y sus primeras k-ésimas derivadas son uniformemente acotadas. Se define la norma como:

$$\|f\|_{C_b^k} = \|f\|_\infty + \|Df\|_\infty + \cdots + \|D^k f\|_\infty$$

Ejemplo: Sea $\alpha \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$ y $X \in \mathcal{C}^\alpha$. La trayectoría $(f(X), Df(X))$ es un camino controlado respecto a X. Más aún, $R^{f(X)}_{s,t} := f(X_t) - f(X_s) - Df(X_s)X_{s,t}$.

$\square$

Ejemplo: Sea $\alpha \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$ y $X \in \mathcal{C}^\alpha$. Sea $(Y, Y'), (Z, Z') \in \mathfrak{D}^{2\alpha}_X$ caminos controlados. Observe que, al tomar $(YZ)' = Y'Z + YZ'$, haciendo las respectivas cuentas:

$$
\begin{aligned}
R^{YZ}_{s,t} &= (YZ)_{s,t} - (YZ)'_s X_{s,t} \\
&= Y_t Z_t - Y_s Z_s - (Y'Z)_s X_{s,t} - (YZ')_s X_{s,t} \\
&= Y_t Z_t - Y_s Z_s + Y_s Z_t - Y_s Z_t + Y_t Z_s - Y_t Z_s + Y_s Z_s - Y_s Z_s - (Y'_s Z_s + Y_s Z'_s) X_{s,t} \\
&= Y_s Z_{s,t} + Y_{s,t} Z_s + Y_{s,t} Z_{s,t} - (Y'_s Z_s + Y_s Z'_s) X_{s,t} \\
&= Y_s (Z_{s,t} - Z'_s X_{s,t}) + Z_s (Y_{s,t} - Y'_s X_{s,t}) + Y_{s,t} Z_{s,t} \\
&= Y_s R^Z_{s,t} + Z_s R^Y_{s,t} + Y_{s,t} Z_{s,t}
\end{aligned}
$$

y por ende, estimando:

$$
\|R^{YZ}\|_{2\alpha} \leq \|Y\|_\infty \|R^Z\|_{2\alpha} + \|R^Y\|_{2\alpha} \|Z\|_\infty + \|Y\|_\infty \|Z\|_\infty < \infty
$$

Por ende, el residuo R^{YZ} como se define, cumple $R^{YZ} \in \mathcal{C}^{2\alpha}_2$ y se tiene lo deseado.

$\square$

4.3.2. Integración Rugosa.

Una vez estudiados los caminos controlados, ya es base suficiente para comenzar a estudiar la integración rugosa; esto es, integrar respecto a un camino rugoso. Esta es la base principal para solucionar ecuaciones diferenciales rugosas (Y en específico, ecuaciones diferenciales estocásticas, usando un enfoque distinto al clásico de Itô).

Note que, el lema de costura funciona cuando las trayectorías $X \in \mathcal{C}^\alpha$ y $Y \in \mathcal{C}^\beta$, los índices cumple $\alpha + \beta > 1$ o $\alpha > \frac{1}{2}$. Sin embargo, al tomar $\alpha \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$, es probable que no se tenga la desigualdad. En este caso, la idea es usar el *levantamiento* $\mathbb{X}$, la información adicional del camino para que se pueda cumplir lo deseado. Formalmente, tenemos:

Proposición 5 *Sea* $\alpha \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$, *y sea* $\mathbf{X} = (X, \mathbb{X}) \in \mathscr{C}^{\alpha}([0,T]; \mathbb{R}^d)$ *un camino rugoso. Sea* $(Y, Y') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}([0,T]; \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^m))$ *un camino controlado y sea* R^Y *el residuo. Luego el límite:*

$$\int_0^t Y_u d\mathbf{X}_u := \lim_{|\pi| \to 0} \sum_{[u,v] \in \pi} Y_u X_{u,v} + Y'_u \mathbb{X}_{u,v}$$

existe para todo $t \in [0,T]$, *donde el límite se toma sobre cualquier sucesión de particiones* π *del intervalo* $[0,t]$ *tal que* $|\pi| \to 0$. *El límite se conoce como* ***integral rugosa*** *de* (Y, Y') *respecto a* $\mathbf{X}$. *Más aún, se tiene el estimador:*

$$\left| \int_s^t Y_u d\mathbf{X}_u - Y_s X_{s,t} - Y'_s \mathbb{X}_{s,t} \right| \leq C \left(\|R^Y\|_{2\alpha} \|X\|_{\alpha} + \|Y'\|_{\alpha} \|\mathbb{X}\|_{2\alpha} \right) |t-s|^{3\alpha}$$

para todo $(s,t) \in \Delta_{[0,T]}$, *donde* C *depende únicamente de* α.

La proposición ya permite una forma de integración respecto a un camino rugoso. Note que, el conjunto de integrandos para el cuál es válida la integral, son para *caminos controlados*; sin embargo, cómo se discutió en la sección anterior, en la práctica no suele ser muy restrictiva la condición.

Demostración: Al igual que la integral de Young, se usa el lema de costura. Tome $A_{s,t} = Y_s X_{s,t} + Y' \mathbb{X}_{s,t}$, y sea $\delta A_{s,u,t} = A_{s,t} - A_{s,u} - A_{u,t}$, para $s \leq u \leq t$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\delta A_{s,u,t} &= A_{s,t} - A_{s,u} - A_{u,t} \\
&= Y_s X_{s,t} - Y_s X_{s,u} - Y_u X_{u,t} + Y'_s \mathbb{X}_{s,t} - Y'_s \mathbb{X}_{s,u} - Y'_u \mathbb{X}_{u,t} \\
&= Y_s X_{u,t} - Y_u X_{u,t} + Y'_s (\mathbb{X}_{s,t} - \mathbb{X}_{s,u}) - Y'_u \mathbb{X}_{u,t}, \text{ aplicar relación de Chen.} \\
&= -Y_{s,u} X_{u,t} + Y'_s (\mathbb{X}_{u,t} + X_{s,u} \otimes X_{u,t}) - Y'_u \mathbb{X}_{u,t}, \text{ acomodar de forma conveniente.} \\
&= (-Y_{s,u} + Y'_s X_{s,u}) X_{s,u} - Y'_{s,u} \mathbb{X}_{u,t} \\
&= -R^Y_{s,u} X_{s,u} - Y'_{s,u} \mathbb{X}_{u,t}
\end{aligned}$$

y razonando de forma análoga como en los teoremas anteriores:

$$|\delta A_{s,u,t}| \leq \left(\|R^Y\|_{2\alpha} \|X\|_{\alpha} + \|Y'\|_{\alpha} \|\mathbb{X}\|_{2\alpha} \right) |t-s|^{3\alpha}$$

Tomando a $\epsilon = 3\alpha - 1$ y $\lambda = \|R^Y\|_{2\alpha} \|X\|_{\alpha} + \|Y'\|_{\alpha} \|\mathbb{X}\|_{2\alpha}$, como $3\alpha > 1$, se cumple el lema de costura. Por ende, existe una trayectoría continua $\gamma : [0,T] \to E$, tal que $\gamma_t = \int_0^t Y_u d\mathbf{X}_u$ que cumple todas las condiciones deseadas.

□

Note que, uno integra una pareja (Y, Y') que representa a un camino controlado, contra $\mathbb{X} = (X, \mathbb{X})$ que es el camino rugoso. Usualmente, la derivada de Gubinelli Y' es clara del contexto, y se obvia de la notación.

Ejemplo: En este ejemplo, veremos que la pareja $(Z, Z') := \left(\int_0^t Y_u d\mathbf{X}_u, Y\right)$ es un camino controlado con respecto a X, donde $\mathbf{X} = (X, \mathbb{X}) \in \mathcal{C}^\alpha$ y $(Y, Y') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}$. Como $R_{s,t}^Z := Z_{s,t} - Z'_s X_{s,t}$, entonces, aplicando el estimador de la integración rugosa, se tiene:

$$\begin{aligned}
|R_{s,t}^Z| &= \left| \int_s^t Y d\mathbb{X}_u - Y_s X_{s,t} \right| \\
&\leq |Y'_s \mathbb{X}_{s,t}| + C \left(\|R^Y\|_{2\alpha} \|X\|_\alpha + \|Y'\|_\alpha \|\mathbb{X}\|_{2\alpha} \right) |t-s|^{3\alpha} \\
&\leq \|Y\|_\infty \|\mathbb{X}\|_{2\alpha} |t-s|^{2\alpha} + C \left(\|R^Y\|_{2\alpha} \|X\|_\alpha + \|Y'\|_\alpha \|\mathbb{X}\|_{2\alpha} \right) |t-s|^{3\alpha}
\end{aligned}$$

y en este modo, $\|R^Z\|_{2\alpha} < \infty$, por ende, a integral rugosa es un camino controlado, y su derivada de Gubinelli está dada por Y.

□

Lema 7 *Para $\alpha \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$, para $F \in \mathcal{C}^{2\alpha}$ una trayectoría 2α-Hölder continua, y sea $\mathbf{X} = (X, \mathbb{X}) \in \mathscr{C}^\alpha$ y $\tilde{\mathbf{X}} = (\tilde{X}, \tilde{\mathbb{X}}) \in \mathscr{C}^\alpha$ dos caminos rugosos tal que:*

$$\tilde{X}_t = X_t$$

y también:

$$\tilde{\mathbb{X}}_{s,t} = \mathbb{X}_{s,t} + F_{s,t}$$

Sea $(Y, Y') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha} = \mathscr{D}_{\tilde{X}}^{2\alpha}$. Luego:

$$\int_0^T Y_u d\tilde{\mathbf{X}}_u = \int_0^T Y_u d\mathbf{X}_u + \int_0^T Y'_u dF_U$$

Demostración: (Ejercicio para el lector). Por las hipótesis dadas, las integrales rugosas $\int_0^T Y_u d\mathbf{X}_u$ y $\int_0^T Y_u d\tilde{\mathbf{X}}_u$ existe; más aún, $\int_0^T Y'_u dF_u$ es integral de Young, porque $\alpha + 2\alpha > \frac{1}{3}$. Entonces, tenemos:

$$\begin{aligned}
\int_0^T Y_u d\tilde{\mathbf{X}}_u &= \lim_{|\pi|\to 0} \sum_{[u,v]\in\pi} \left(Y_u \tilde{X}_{u,v} + Y'_u \tilde{\mathbb{X}}_{u,v} \right) \\
&= \lim_{|\pi|\to 0} \sum_{[u,v]\in\pi} \left(Y_u X_{u,v} + Y'_u (\mathbb{X}_{s,t} + F_{s,t}) \right), \text{ distribuir la suma y el límite} \\
&= \lim_{|\pi|\to 0} \sum_{[u,v]\in\pi} \left(Y_u X_{u,v} + Y'_u \mathbb{X}_{s,t} \right) + \lim_{|\pi|\to 0} \sum_{[u,v]\in\pi} Y'_u F_{s,t} \\
&= \int_0^T Y_u dX_u + \int_0^T Y'_u dF_u
\end{aligned}$$

Y tenemos lo deseado.

□

En el siguiente teorema, veremos una condición un poco más débil que la continuidad del mapa de Itô.

Teorema 44 (Estabilidad de la integración rugosa.) *Sea $\alpha \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$, y sea $\mathbf{X} = (X, \mathbb{X}) \in \mathscr{C}^\alpha$ y $\tilde{\mathbf{X}} = (\tilde{X}, \tilde{\mathbb{X}}) \in \mathscr{C}^\alpha$ caminos rugosos. Sea $(Y, Y') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}$ y $(\tilde{Y}, \tilde{Y}') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}$ caminos controlados respecto a X, y sean R_X^Y y $R^{\tilde{Y}_X}$ sus respectivos residuos. Entonces, existe una constante C que depende sólo de α y T, tal que:*

$$\begin{aligned}
\|Y - \tilde{Y}\| \leq C \Big[&\left(|Y'_0 - \tilde{Y}'_0| + \|\tilde{Y} - \tilde{Y}'\|_\alpha \right) \|X\|_\alpha \\
&+ \left(|Y'_0| + \|\tilde{Y}'\|_\alpha \right) \|X - \tilde{X}\|_\alpha + \|R^Y - R^{\tilde{Y}}\|_{2\alpha} T^\alpha \Big]
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\|R^{\int_0^\cdot Y_u d\mathbf{X}_u} - R^{\int_0^\cdot \tilde{Y}_u d\tilde{\mathbf{X}}_u}\|_{2\alpha} \leq C \Big[&\left(|Y'_0 - \tilde{Y}'_0| + \|Y' - \tilde{Y}'\|_\alpha + \|R^Y - R^{\tilde{Y}}\|_{2\alpha} \right) |||\mathbf{X}|||_\alpha \\
&+ \left(|Y'_0| + \|\tilde{Y}'\|_\alpha + \|R^{\tilde{Y}}\|_{2\alpha} \right) \|\mathbf{X}; \tilde{\mathbf{X}}\|_\alpha \Big]
\end{aligned}$$

En el teorema, vemos que, al tomar caminos controlados, será la derivada la que tome el lugar de integrador. Más aún, obtenemos cierta estabilidad en el mapa de Itô, el cuál permitirá la continuidad.

Demostración: En estas páginas, para definir y lograr encontrar cotas para varias integrales, se ha usado el lema de costura fuertemente, y este caso no será la excepción.

Se tiene:

$$\begin{aligned}|Y_{s,t}-\tilde{Y}_{s,t}| &= |Y'_sX_{s,t}+R^Y_{s,t}-\tilde{Y}'_s\tilde{X}_{s,t}-R^{\tilde{Y}}_{s,t}|\\ &\leq |Y'_s-\tilde{Y}'_s||X_{s,t}|+|\tilde{Y}'_s||X_{s,t}-\tilde{X}_{s,t}|+|R^Y_{s,t}-R^{\tilde{Y}}_{s,t}|\\ &\leq \left(\|Y'-\tilde{Y}'\|_\infty\|X\|_\alpha+\|\tilde{Y}'\|_\infty\|X-\tilde{X}\|_\infty\right)|t-s|^\alpha+\|R^Y-R^{\tilde{Y}}\|_{2\alpha}|t-s|^{2\alpha}\end{aligned}$$

al aplicar desigualdad triangular y definiciones de las respectivas normas. Entonce, tomando supremos, queda:

$$\|Y-\tilde{Y}\|_\alpha \leq \|Y'-\tilde{Y}'\|_\infty\|X\|_\alpha+\|\tilde{Y}'\|_\infty\|X-\tilde{X}\|_\alpha+\|R^Y-R^{\tilde{Y}}\|_{2\alpha}T^\alpha$$

el cuál nos da el primer estimador.

Para el otro caso, sea $A_{s,t}=Y_sX_{s,t}+\tilde{Y}'_s\mathbb{X}_{s,t}$, $\tilde{A}_{s,t}=\tilde{Y}_s\tilde{X}_{s,t}$, $\Delta=A-\tilde{A}$, y $\delta\Delta_{s,u,t}=\Delta_{s,t}-\Delta_{s,u}-\Delta_{u,t}$. Entonces;

$$\delta\Delta_{s,u,t}=\delta A_{s,u,t}-\delta\tilde{A}_{s,u,t}=-\left(R^Y_{s,u}X_{s,u}+Y'_{s,u}\mathbb{X}_{u,t}-R^{\tilde{Y}}_{s,u}\tilde{X}_{u,t}-\tilde{Y}_{s,u}\tilde{X}_{u,t}-\tilde{Y}'_{s,u}\tilde{\mathbb{X}}_{u,t}\right)$$

¿Cuentas? ...

De tal forma que:

$$\begin{aligned}|\delta\Delta_{s,u,t}| &= |R^Y_{s,u}X_{s,u}+Y'_{s,u}\mathbb{X}_{u,t}-R^{\tilde{Y}}_{s,u}\tilde{X}_{u,t}-\tilde{Y}_{s,u}\tilde{X}_{u,t}-\tilde{Y}'_{s,u}\tilde{\mathbb{X}}_{u,t}|\\ &\leq |R^Y_{s,u}-R^{\tilde{Y}}_{s,u}||X_{u,t}|+|R^{\tilde{Y}}_{s,u}||X_{u,t}-\tilde{X}_{u,t}|+|Y'_{s,u}-\tilde{Y}'_{s,u}||\mathbb{X}_{u,t}|+|\tilde{Y}'_{s,u}||\mathbb{X}_{u,t}-\tilde{X}_{u,t}|\\ &\leq \Big(\|R^Y-R^{\tilde{Y}}\|_{2\alpha}\|X\|_\alpha+\|R^{\tilde{Y}}\|_{2\alpha}\|X-\tilde{X}\|_\alpha\\ &\qquad +\|Y'-\tilde{Y}'\|_\alpha+\|\tilde{Y}'\|_\alpha\|\mathbb{X}-\tilde{\mathbb{X}}\|_{2\alpha}\Big)|t-s|^{3\alpha}\end{aligned}$$

al tomar supremos. Por ende, tomando $\lambda=\|R^Y-R^{\tilde{Y}}\|_{2\alpha}\|X\|_\alpha+\|R^{\tilde{Y}}\|_{2\alpha}\|X-\tilde{X}\|_\alpha+\|Y'-\tilde{Y}'\|_\alpha+\|\tilde{Y}'\|_\alpha\|\mathbb{X}-\tilde{\mathbb{X}}\|_{2\alpha}$ y $\epsilon=3\alpha-1$, podemos usar el lema de costura, para mostrar que existe una trayectoria γ y una constante C tal que:

$$
\begin{aligned}
|\gamma_t - \gamma_s - \Delta_{s,t}| \leq C \Big(& \|R^Y - R^{\tilde{Y}}\|_{2\alpha}\|X\|_\alpha + \|R^{\tilde{Y}}\|_{2\alpha}\|X - \tilde{X}\|_\alpha \\
& + \|Y' - \tilde{Y}'\|_\alpha + \|\tilde{Y}'\|_\alpha \|\mathbb{X} - \tilde{\mathbb{X}}\|_{2\alpha}\Big) |t-s|^{3\alpha}
\end{aligned}
$$

y, al tomar π la partición del intervalo $[s,t]$,

$$
\gamma_t - \gamma_s = \lim_{|\pi|\to 0} \sum_{[u,v]\in\pi} \Delta_{u,v} = \lim_{|\pi|\to 0} \left(\sum_{[u,v]\in\pi} A_{u,v} - \sum_{[u,v]\in\pi} \tilde{A}_{u,v} \right) = \int_s^t Y_u d\mathbf{X}_u - \int_s^t \tilde{Y}_u d\tilde{\mathbf{X}}_u
$$

Además, de forma análoga a los estimadores de la integral rugosa,

$$
\begin{aligned}
& \left| \int_s^t Y_u d\mathbf{X}_u - \int_s^t \tilde{Y}_u - (Y_s X_{s,t} + Y'_s \mathbb{X}_{s,t} - \tilde{Y}_s \tilde{X}_{s,t} - \tilde{Y}'_s \tilde{\mathbb{X}}_{s,t}) \right| \\
& \leq C \Big(\|R^Y - R^{\tilde{Y}}\|_{2\alpha}\|X\|_\alpha + \|R^{\tilde{Y}}\|_{2\alpha}\|X - \tilde{X}\|_\alpha \\
& \qquad + \|Y' - \tilde{Y}'\|_\alpha + \|\tilde{Y}'\|_\alpha \|\mathbb{X} - \tilde{\mathbb{X}}\|_{2\alpha}\Big) |t-s|^{3\alpha}
\end{aligned}
$$

Además,

$$
\begin{aligned}
|Y'_s \mathbb{X}_{s,t} - \tilde{Y}'_s \tilde{\mathbb{X}}_{s,t}| & \leq |Y'_s \tilde{Y}'_s||\mathbb{X}_{s,t}| + |\tilde{Y}'_s||\mathbb{X}_{s,t} - \tilde{X}_{s,t}| \\
& \leq \Big(\|Y' - \tilde{Y}'\|_\infty \|\mathbb{X}\|_{2\alpha} + \|\tilde{Y}'\|_\infty \|\mathbb{X} - \tilde{\mathbb{X}}\|_{2\alpha} \Big) |t-s|^{2\alpha}
\end{aligned}
$$

Al combinar las dos anteriores, y aplicar desigualdad triangular:

$$
\begin{aligned}
\|R^{\int_0^\cdot Y_u d\mathbf{X}_u} - R_{s,t}^{\int_0^\cdot \tilde{Y}_u d\tilde{\mathbf{X}}_u}\| & = \left| \int_s^t Y_u d\mathbf{X}_u - Y_s X_{s,t} - \int_s^t \tilde{Y}_u d\tilde{\mathbf{X}}_u + \tilde{Y}_s \tilde{X}_{s,t} \right| \\
& = \Big| \int_s^t Y_u d\mathbf{X}_u - \int_s^t \tilde{Y}_u d\tilde{\mathbf{X}}_u - (Y_s X_{s,t} + Y'_s \mathbb{X}_{s,t} - \tilde{Y}_s \tilde{X}_{s,t} - \tilde{Y}'_s \tilde{\mathbb{X}}_{s,t}) \\
& \qquad + (Y'_s \mathbb{X}_{s,t} - \tilde{Y}'_s \tilde{\mathbb{X}}_{s,t}) \Big| \\
& \leq \Big(\|Y' - \tilde{Y}'\|_\infty \|\mathbb{X}\|_{2\alpha} + \|\tilde{Y}'\|_\infty \|\mathbb{X} - \tilde{\mathbb{X}}\|_{2\alpha} \Big) |t-s|^{2\alpha} \\
& \quad + C \Big(\|R^Y - R^{\tilde{Y}}\|_{2\alpha}\|X\|_\alpha + \|R^{\tilde{Y}}\|_{2\alpha}\|X - \tilde{X}\|_\alpha \\
& \quad + \|Y' - \tilde{Y}'\| \|\mathbb{X}\|_{2\alpha} + \|\tilde{Y}'\|_\alpha \|\mathbb{X} - \tilde{\mathbb{X}}\|_{2\alpha}\Big) |t-s|^{3\alpha}
\end{aligned}
$$

Al dividir por $|t-s|^{2\alpha}$ y tomar supremos, si llamamos a $K_1 = \|Y' - \tilde{Y}'\|_\infty \|\mathbb{X}\|_{2\alpha} + \|\tilde{Y}'\|_\infty \|\mathbb{X} - \tilde{\mathbb{X}}\|_{2\alpha}$ y a $K_2 = \|R^Y - R^{\tilde{Y}}\|_{2\alpha}\|X\|_\alpha + \|R^{\tilde{Y}}\|_{2\alpha}\|X - \tilde{X}\|_\alpha + \|Y' - \tilde{Y}'\|\|\mathbb{X}\|_{2\alpha} + \|\tilde{Y}'\|_\alpha \|\mathbb{X} - \tilde{\mathbb{X}}\|_{2\alpha}$, para de tal forma:

$$\|R^{\int_0^\cdot Y_u d\mathbf{X}_u} - R_{s,t}^{\int_0^\cdot \tilde{Y}_u d\tilde{\mathbf{X}}_u}\|_{2\alpha} \leq K_1 + CK_2T^\alpha$$

y tenemos los deseado.

□

Antes de finalizar esta sección, hablaremos acerca de la continuidad del mapa de Itô en la integración rugosa.

Corolario 5 *Sea $\alpha \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$, y sea $\mathbf{X} = (X, \mathbb{X}) \in \mathscr{C}^\alpha$ y $\tilde{\mathbf{X}} = (\tilde{X}, \tilde{\mathbb{X}}) \in \mathscr{C}^\alpha$ una trayectoría rugosa. Sea $(Y, Y') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}$ y $(\tilde{Y}, \tilde{Y}') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha} \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}$ trayectorías controladas, y sean R^Y y $R^{\tilde{Y}}$ los residuos correspondientes. Entonces, existe una constante $C(\alpha, T)$ (Que depende de α y T) tal que:*

$$\begin{aligned}\left\|\int_0^\cdot Y_u d\mathbf{X}_u - \int_0^\cdot \tilde{Y}_u d\tilde{\mathbf{X}}_u\right\| &\leq C\left(1 + \|X\|_\alpha + \|\tilde{X}\|_\alpha\right)\left(\|\tilde{Y}, \tilde{Y}'\|_{\mathscr{D}_X^{2\alpha}}\|\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}}\|_\alpha\right. \\ &\quad \left. + \left(|Y_0 + \tilde{Y}_0| + |Y_0' - \tilde{Y}_0'| + \|Y' - \tilde{Y}'\|_\alpha + \|R^Y - R^{\tilde{Y}}\|_{2\alpha}\right)\right) |||\mathbf{X}|||_\alpha\end{aligned}$$

Demostración: Como $(\int_0^\cdot Y_u d\mathbf{X}_u, Y) \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}$ y $(\int_0^\cdot \tilde{Y}_u d\tilde{\mathbf{X}}_u, \tilde{Y}) \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}$ son caminos controlados, al aplicar la definición y las diferentes cotas, tenemos:

$$\begin{aligned}\left|\int_s^t Y_u \; d\mathbf{X}_u - \int_s^t \tilde{Y}_u d\tilde{\mathbf{X}}_u\right| &= |Y_s X_{s,t} + R^{\int_0^\cdot Y_u d\mathbf{X}_u} - \tilde{Y}_s \tilde{X}_{s,t} - R^{\int_0^\cdot \tilde{Y}_u d\tilde{\mathbf{X}}_u}| \\ &\leq |Y_s - \tilde{Y}_s||X_{s,t}| + |\tilde{Y}_s||X_{s,t} - \tilde{X}_{s,t}| + |R^{\int_0^\cdot Y_u d\mathbf{X}_u} - R^{\int_0^\cdot \tilde{Y}_u d\tilde{\mathbf{X}}_u}| \\ &\leq \left(\|Y - \tilde{Y}\|_\alpha \|X\|_\alpha + \|\tilde{Y}\|_\infty \|X - \tilde{X}\|_\alpha\right)|t-s|^\alpha + \|R^{\int_0^\cdot Y_u d\mathbf{X}_u} - R^{\int_0^\cdot \tilde{Y}_u d\tilde{\mathbf{X}}_u}\|_{2\alpha}|t-s|^{2\alpha}\end{aligned}$$

De tal forma, que al dividir por $|t-s|^\alpha$ y tomar supremos, tenemos:

$$\begin{aligned}&\left\|\int_0^\cdot Y_u d\; \mathbf{X}_u - \int_0^\cdot \tilde{Y}_u d\tilde{\mathbf{X}}_u\right\|_\alpha \\ &\quad \leq \; \|Y - \tilde{Y}\|_\alpha \|X\|_\alpha + \|\tilde{Y}\|_\infty \|X - \tilde{X}\|_\alpha + \|R^{\int_0^\cdot Y_u d\mathbf{X}_u} - R^{\int_0^\cdot \tilde{Y}_u d\tilde{\mathbf{X}}_u}\|_{2\alpha} T^\alpha\end{aligned}$$

Finalmente, puede ver que, al hacer $\tilde{Y}_t = \tilde{Y}_0 + \tilde{Y}_{0,t}$, por desigualdad triangular, al tomar supremos:

$$\|\tilde{Y}\|_\infty \leq |Y_0 - \tilde{Y}_0| + \|Y - \tilde{Y}\|_\alpha T^\alpha$$

y también:

$$\|Y - \tilde{Y}\|_\infty \leq |Y_0 - \tilde{Y}_0| + \|Y - \tilde{Y}\|_\alpha T^\alpha$$

De igual forma, tomando $\tilde{Y}_{s,t} = \tilde{Y}'_s X_{s,t+R^{\tilde{Y}}_{s,t}}$ tal que:

$$\|\tilde{Y}\|_\alpha \leq \left(|\tilde{Y}'_0| + \|\tilde{Y}'\|_\alpha T^\alpha\right) \|\tilde{X}\|_\alpha + \|R^{\tilde{Y}}\|_{2\alpha} T^\alpha$$

por la desigualdad anterior. Uniendo estas desigualdades, con las desigualdades de la estabilidad de integración rugosa, tenemos lo deseado.

¡PENDIENTE ECHAR LAS CUENTAS!

□

Este fue el último comentario acerca de la integración rugosa. Ya con esta cantidad de estimadores, será suficiente para hablar de ecuaciones diferenciales rugosas, y un poco su relación con las ecuaciones diferenciales estocásticas comparado con el enfoque de Itô.

4.4. Comentarios adicionales*.

4.4.1. Movimiento Browniano como camino rugoso.

Algunos comentarios, teoremas, conceptos... relacionados al capítulo, posiblemente no se incluyan en la versión final del texto.

Proposición 6 *Considere aproximaciones lineales a trozos diádicas $\{B^n\}$ a B en $[0,T]$. Esto es, $B^n_t = B_t$ para $t = \frac{iT}{2^n}$ para algún entero i (Se interpola en intervalos de la forma $\left[\frac{iT}{2^n}, \frac{(i+1)T}{2^n}\right]$). Luego, en el sentido de la probabilidad:*

$$\left(B^n, \int_0^t B^n \otimes dB^n\right) \to (B, \mathbb{B}^{Strat})$$

en $\mathcal{C}^\alpha_g$.

ESto es, que en el sentido de la probabilidad (Y en L^q con $q < \infty$), el camino rugoso interpolado, converge al camino rugoso del movimiento Browniano con el levantamiento de Stratonovich, con el criterio de Kolmogorovo paa la métrica rugosa. Más aún, este enfoque da cierta tasa $\theta < \frac{1}{2} - \alpha$.

Demostración: Tomando partición diádica. Sea B^n definida como:

$$B^n = \mathbb{E}(B \quad | \quad \sigma\{B_{kT2^{-n}} : 0 \leq k \leq 2^n\})$$

Porque el movimiento Browniano es una martingala. Por la independencia de B^i, B^j para $i \neq j$, se cumple para $\mathbb{B}^{\text{Strat}}$ fuera de la diagonal (¿?). Para los elementos de la diagonal $\mathbb{B}^{\text{Strat},(i,i)}_{s,t} = \frac{1}{2}(B^i_{s,t})^2$. Por convergencia de martingala, se tiene la convergencia deseada.

Más aún, por el criterio de Kolmogorov, tenemos:

$$|B^i_{s,t}| \leq K_\alpha(\omega)|t-s|^\alpha, \qquad |\mathbb{B}^{\text{Strat},(i,j)}_{s,t}| \leq \mathbb{K}_\alpha(\omega)|t-s|^{2\alpha}$$

y la probabilidad condicional respecto a $\sigma\left\{B_{kT2^{-n}} : 0 \leq k \leq 2^n\right\}$, se tienen las mismas cotas para $B^{n,i}$ y para $\int_0^\cdot B^{n,i} dB^{n,j}$. De hecho, K_α, $\mathbb{K}_\alpha$ tienen la suficiente integrabilidad para aplicar la *desigualdad maximal de Doob*. Esto nos dará que, con probabilidad 1:

$$\sup_n \left\| B^{(n)}, \int_0^\cdot B^{(n)} \otimes dB^{(n)} \right\| < \infty$$

□

4.4.2. Apuntes en el Lyons acerca de los caminos rugosos.

4.4.3. Geometría de Carnot-Caratheodory

Se desea obtener un poco más de conocimiento acerca de los caminos rugosos, por lo que se proceden a usar más integrales iteradas. Dado $x \in \mathcal{C}^\infty([0,T], \mathbb{R}^d)$, generalizar:

$$\mathbf{x}_t := S_n(x)_{0,t} := \left(1, \int_0^t dx, \int_{\Delta^2_{[0,t]}} dx \otimes dx, \cdots, \int_{\Delta^N_{[0,t]}} dx \otimes \cdots \otimes dx\right)$$

que es la **signatura/firma de paso** N de x sobre $[0,t]$, dado x el control o la trayectoria. Toma valores de las álgebras tensoriales truncadas (¿de Lie?):

$$T^N(\mathbb{R}^d) := \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^d \oplus \left(\mathbb{R}^d\right)^{\otimes 2} \oplus \cdots (\mathbb{R}^d)^{\otimes N}$$

Estructura de álgebra tensorial con producto tensorial $\otimes$, usando la base estándar $\{e_1, \cdots, e_d\}$ de $\mathbb{R}^d$. Esta álgebra se usa con el fin de extender:

$$x_{s,t} \equiv (-x_s) + x_t = \int_s^t dx =: x_{s,t}$$

a:

$$\mathbf{x}_{s,t} \equiv \mathbf{x}_s^{-1} \otimes \mathbf{x}_t = \left(1, \int_s^t dx, \int_{\Delta^2_{[s,t]}} dx \otimes dx, \cdots, \int_{\Delta^N_{[s,t]}} dx \otimes \cdots \otimes dx\right)$$

El cuál nos deja como enseñanza la *relación de Chen*, qué nos indica como se pueden *unir* integrales iteradas sobre intervalos adyacentes.

Note que, el levantamiento de N-pasos (La signatura) del camino suave x, toma valores en el grupo de Lie de paso libre N nilpotente con d generadores, domo restricción de $T^N(\mathbb{R}^d)$ a

$$G^N(\mathbb{R}^d) = \exp\left(\mathbb{R}^d \oplus \left[\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d\right] \oplus \left[\mathbb{R}^d, \left[\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d\right]\right] \oplus \cdots\right) \equiv \exp(\mathfrak{g}^N(\mathbb{R}^d))$$

¿Qué es $\mathfrak{g}^N(\mathbb{R}^d)$? es una álgebra de Lie nilpotente de N-pasos libres, y exp se define usando la serie basada en $\otimes$.

Un **álgebra de Lie** es un espacio vectorial $\mathfrak{g}$ equipada con un mapeo bilineal alternante $[\cdot,\cdot]$(Esto es, si $x_1, x_2 \in \mathfrak{g}$ son linealmente dependientes, $[x_1, x_2] = 0$, note que esto es ëquivalenteä decir que si los argumentos son iguales, es igual a 0 por la bilinealidad). Este mapa se conoce como **corchete de Lie**.

Sea ahora X un conjunto y $i : X \to L$ un morfismo de conjuntos (._.) de X a L que es un álgebra de Lie. El álgebra de Lie L se dice **libre en X**, si i es el morfismo universal (Para toda álgebra de Lie A con $f : X \to A$ morfismo, existe un único morfimo de álgebras de Lie $g : L \to A$ tal que $f = g \circ i$, todo morfismo será composición del morfismo con el morfismo universal).

Álgebra de Lie nilpotente, serie central baja.

...

4.4.4. Apuntes del Martin Hairer

Problema de dar significado a la expreión $\int Y_t dX_t$ para $X \in \mathscr{C}^\alpha([0,T], V)$ y Y alguna función continua con valores en $\mathcal{L}(V, W)$ (Y será un *camino controlado*), este es el espacio de operadores lineales acotados de V a otro espacio de Banach W.

¿Qué funciones harán que la integral sea definida? Además, toca que:

$$(X, Y) \mapsto \int Y dX$$

sea continua en topologías relevantes. ¿Cuáles son esos buenos integrandos para el camino rugoso X?. Integral de Young, tomando caminos α y β tal que $\alpha + \beta > 1$, el operador es continuo, la integral converga! :D. Desigualdad de Young.

¿Y qué obtenemos con los caminos rugosos? Romper esa barrera de los $\alpha + \beta > 1$, al obtener una mayor estructura del problema. Postular valores para $\mathbb{X}$ de la integral de $'' \int X dX''$. Más aún, ver a $\int Y dX$ cuando Y es parecida a X, al menos en pequeñas escalas.

¿Y cómo? Teniendo a $Y_t = F(X_t)$ para alguna función suave $F : V \to \mathcal{L}(V, W)$, llamada **1-forma**.

1-FORMA -¿GEOMETRÍA DIFERENCIAL. (Como $f(x)dx$).

Integración en 1-Formas

Integrar $Y = F(X)$ en contra de $\mathbf{X} = (X, \mathbb{X}) \in \mathscr{C}^\alpha$. Para $F : V \to \mathcal{L}(V, W)$ en $\mathcal{C}^1$, una aproximación en series de Taylor da

$$F(X_r) \approx F(X_s) + DF(X_s)X_{s,r}$$

4.4.5. Extra de la derivada de Gubinelli.

C6 -¿Friz Hairer. Una trayectoría lejos de ser suave, tendrá derivada de Gubinelli definida de forma única.

Capítulo 5

Ecuaciones Diferenciales Rugosas

Vea el siguiente ejemplo...
PENDIENTES!!!

- **Capítulo 1:** Limpiar. Teorema de Peano. Gráficas α-Hölder
- **Capítulo 2:** Limpiar. Propiedades MB.
- **Capítulo 3:** Lectura Oksendal. CH1, CH3, CH4, CH5. Enfocarnos en ejemplos, integral de Itô y EDE. Ejemplos, suprimir algunas demostraciones.
- **Capítulo 4:** Limpiar (Verificar no repetición). Gráficas Lema de Costura.
- **Capítulo 5:** ¿CH6?, CH7 y CH8. Suprimir algunas demostraciones. Gráficas.
- **Apéndice.** Tensores, ¿CH6?... no sé si hace falta algo más xd.

5.1. Ejemplos de Ecuaciones Diferenciales Rugosas.

Las ecuaciones diferenciales rugosas, se pueden ver como una generalización de las ecuaciones diferenciales controlados. Cuando tenemos un control, cuya regularidad es α-Hölder con $\alpha \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$, podemos inducir un levantamiento:

$$dY_t = f(Y_t)dX_t \to dY_t = f(Y_t)d\mathbf{X}_t$$

donde $\mathbf{X}_t = (X_t, \mathbb{X}_t)$. Al escribir el problema de forma integral, se tendrá definida la integral rugosa, que se vió en capítulos anteriores.

Antes de pasar a los teoremas de existencia y unicidad, primero se estudian algunos ejemplos.

- Dado $\alpha \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$, y $\mathbf{X} \in \mathscr{C}^\alpha$. La siguiente ecuación diferencial rugosa:

  $$V_t = 1 + \int_0^t V_u d\mathbf{X}_u$$

  tiene como solución única:

  $$V_t = \exp\left(X_t - \frac{1}{2}[\mathbf{X}]_t\right)$$

  y se conoce como la **exponencial rugosa**. El corchete $[\mathbf{X}]_t$ se conoce como **corchete de camino rugoso**, y para verificar la solución, se usa la fórmula de Itô para caminos rugosos (Ver el apéndice).

- Una ecuación similar a la anterior, está dada por:

  $$V_t = 1 + \int_0^t V_u K_u d\mathbf{X}_u$$

  En este caso, poseemos un camino controlado $(K, K') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}$, donde $\int_0^\cdot K_u d\mathbf{X}_u$ toma valores reales. La solución está dada por:

  $$V_t = \exp\left(\int_0^t K_u d\mathbf{X}_u - \frac{1}{2}\int_0^t (K_u \otimes K_u) d[\mathbf{X}]_u\right)$$

5.2. Ecuaciones Diferenciales de Young*

5.3. Funciones de caminos controlados y ecuaciones diferenciales rugosas.

Antes de enunciar el teorema más poderoso e interesante de la teoría de caminos rugosos, se van a enunciar unos resultados usados en la demostración, que involucran a las funciones de caminos controlados (Que, son los integrandos trabajados en la integral rugosa).

Lema 8 *Sea* $\alpha \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$ *y* $\mathbf{X} \in (X, \mathbb{X}) \in \mathscr{C}^{\alpha}$. *Sea* $f \in C_b^2$. *Para* $(Y, Y') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}$, *la pareja:*

$$\left(\int_0^{\cdot} f(Y_u) d\mathbf{X}_u, f(Y)\right) \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}$$

es un camino controlado. Más aún, tenemos los estimadores para la derivada de Gubinelli y el residuo:

$$\|f(Y)\|_{\alpha} \leq C\left(\left(|Y_0'| + \|Y'\|_{\alpha}\right)\| X\|_{\alpha} + \|R^Y\|_{2\alpha} T^{\alpha}\right)$$
$$\|R^{\int_0^{\cdot} f(Y_u) d\mathbf{X}_u}\|_{2\alpha} \leq C\left(1 + |Y_0'| + \|Y'\|_{\alpha} + \|R^Y\|_{2\alpha}\right)^2 (1 + \|X\|_{\alpha})^2 \||X|\|_{\alpha}$$

donde C *depende de* α, T *y* $\|f\|_{C_b^2}$.

El teorema anterior, se puede interpretar de forma intuitiva, al tomar la trayectoria $\mathbf{X}$ como una trayectoria lo suficientemente suave, cuya integral $\int_0^{\cdot} f(Y_u) dX_u$ exista en el sentido de Riemann-Stieljes. Así, al usar el teorema fundamental del cálculo, la derivada de Gubinelli (O la derivada usual, en este caso), estará dado por $f(Y)$.

Lema 9 *Sea* $\alpha \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$ *y* $\mathbf{X} = (X, \mathbb{X}), \tilde{\mathbf{X}} = (\tilde{X}, \tilde{\mathbb{X}}) \in \mathscr{C}^{\alpha}$. *Sea* $(Y, Y') \in \mathscr{D}_X^{2\alpha}$, $(\tilde{Y}, \tilde{Y'}) \in \mathscr{D}_{\tilde{X}}^{2\alpha}$ *y* $f \in C_b^3$. *Sea* $M > 0$ *una constante tal que* $\|X\|_{\alpha} \leq M$, $\|\tilde{X}\|_{\alpha} \leq M$, $|Y_0'| + \|Y'\|_{\alpha} + \|R^Y\|_{2\alpha} \leq M$ *y* $|\tilde{Y}_0'| + \|\tilde{Y}'\|_{\alpha} + \|R^{\tilde{Y}}\|_{2\alpha} \leq M$. *Entonces:*

$$\|f(Y)-f(\tilde{Y})\|_\alpha \\ \leq C\left(|Y_0-\tilde{Y}_0|+(|Y_0'-\tilde{Y}_0'|+\|Y'-\tilde{Y}'\|_\alpha)\|X\|_\alpha+\|R^Y-R^{\tilde{Y}}\|_{2\alpha}T^\alpha+\|X-\tilde{X}\|_\alpha\right)$$

y

$$\|R^{\int_0^\cdot f(Y_u)d\mathbf{X}_u}-R^{\int_0^\cdot f(\tilde{Y}_u)d\tilde{\mathbf{X}}_u}\|_{2\alpha} \\ \leq C\left((|Y_0-\tilde{Y}_0|+|Y_0'-\tilde{Y}_0'|+\|Y'-\tilde{Y}'\|_\alpha+\|R^Y-R^{\tilde{Y}}\|_{2\alpha}+\|X-\tilde{X}\|_\alpha)\||\mathbf{X}|\|_\alpha+ \\ \|\mathbf{X};\tilde{\mathbf{X}}\|_\alpha\right)$$

Este lema muestra, la posibilidad de acotar dos funciones de caminos controlados y dos residuos, usando las trayectorías controladas, lo que, de forma preliminar, va a generar una dependencia a los datos iniciales.

5.3.1. Existencia y unicidad en ecuaciones diferenciales rugosas.

Dado un campo vectorial f, lo suficientemente regular. Sea la ecuación diferencial rugosa:

$$dY_t = f(Y_t)d\mathbf{X}_t$$

El siguiente teorema, indica la existencia y unicidad de la solución de ecuaciones de este tipo.

Teorema 45 *Sea $\alpha \in \left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]$, y sea $\mathbf{X}=(X,\mathbb{X})\in\mathscr{C}^\alpha([0,T],\mathbb{R}^d)$ un camino rugoso. Sea $f\in C_b^3(\mathbb{R}^m;\mathscr{L}(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^m))$, y $y\in\mathbb{R}^m$. Entonces, existe una solución única, un camino controlado $(Y,Y')\in\mathscr{D}_X^{2\alpha}$, tal que $Y'=f(Y)$, y tal que:*

$$Y_t = y+\int_0^t f(Y_s)d\mathbf{X}_s$$

para todo $t\in[0,T]$

La demostración es similar al teorema de Picard. Usando una iteración de punto fijo en un espacio de Banach adecuado.

Demostración:

Capítulo 6

Apéndice.

Este apéndice de forma temporal, tendrá todos los apuntes de temas relacionados pero no tan relacionados acerca de la tesis (Teoría de la medida, Análisis Funcional...) conceptos que se usen en cierta demostración o en alguna definición muy específica, pero que no sea necesaria realmente para continuar con el desarrollo de la tesis.

Finalmente, se hará un apéndice "limpio", con los elementos realmente necesarios :).

6.1. FAQ

Preguntas acerca de la tesis. Pedir asesoría de los prof. Freddy Hernández y Juan Galvis.

1. Cuenta 1, Lema de Costura.
2. Revisar estimador $\|\Gamma_{s,t} - A^k_{s,t}\|$
3. Comentario, acerca Γ: Incremento continuo.
4. Prop 5.4. ¿Qué es X y $\tilde{X}$?¿Son totalmente diferentes o tienen algo que ver?
5. ¿Latear todo?
6. Revisar cotas simples teorema 5.4
7. ¿Bien mi demostración de integración por partes?

8. Demostración 5.6

9. Demostración 5.7 ¿Lo que yo hice?

6.2. Teoría de la Medida

Algunas notas acerca de teoría de la medida, usadas para el presente trabajo de grado.

6.2.1. Funciones L^p y $\mathcal{L}^p$

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, con $1 < p < \infty$ (p no necesariamente entero). Denotará a:

$$\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$$

el conjunto de funciones medibles respecto a $\mathcal{A}$, tal que $f : X \to \mathbb{R}$, donde $|f|^p$ es integrable, esto es:

$$\int |f|^p d\mu < \infty$$

Ese conjunto conforma un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ (¿Por qué?). Más aún, $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ también es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$.

Si $p = \infty$, $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ es el conjunto de funciones acotadas y medibles respecto a $\mathcal{A}$ (O *esencialmente acotada*).

Podemos definir una **seminorma** en $\mathcal{L}^p$ como:

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{1/p}$$

Falla al ser norma al pedir que $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Podemos construir a partir de este espacio, un espacio Banach normado, $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$. Sea $\mathcal{N}^p(X, \mathcal{A}, \mu) \subset \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ las funciones que cumplen:

$$f \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu) \text{ y } \|f\|_p = 0$$

Esto es, funciones que en casi todo punto se anulan para $1 < p < \infty$. Si $p = \infty$, son funciones acotadas medibles respecto a $\mathcal{A}$ en X, tal que se anulan en casi todo punto localmente. $\mathcal{N}^p$ es subespacio lineal de $\mathcal{L}^p$. Defina:

$$L^p(X, \mathcal{A}, \mu) = \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)/\mathcal{N}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$$

Esto es, una colección de cosets, que están definidos por la relación de equivalencia definida por:

$$f\tilde{g} \Leftrightarrow f - g \in \mathcal{N}^p$$

Esto es, si las funciones son iguales en casi todo punto. (Para $p = \infty$, corresponde a las funciones iguales en casi todo punto localmente). En este caso, $\|\cdot\|_p$ es una norma en $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Consulte: https://en.wikipedia.org/wiki/Quotient_space_(linear_algebra).

Espacios de Hilbert.

6.3. Temas de Probabilidad avanzados

Algunos conceptos, teoremas, etc... de probabilidad, procesos estocásticas que pueden estar algo fuera de la tesis.

6.3.1. Semimartingalas, Martingalas locales

Conceptos necesarios para entender algunas definiciones acerca el movimiento Browniano. Asuma el espacio filtrado de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$

> Un proceso A es **creciente** o de **variación finita**, si es adaptado (A la filtración del espacio), y las trayectorias $t \mapsto A_t(\omega)$ son finitas, continuas a derecha y crecientes (O variación finita), para casi todo ω

Recuerde conceptos de martingalas y tiempos de parada (Cuándo debo parar, información hasta el momento presente). Puede ver las martingalas locales, como un proceso estocástico que localmente es una martingala.

(Wikipedia) Un proceso X es una **martingala local** si existe una sucesión de tiempos de parada T_n con $T_n \nearrow \infty$ siempre, $T_n < T$ casi siempre en $\{T > 0\}$ y $\lim_{n\to\infty} T_n = T$ casi siempre.
Otra definición! (Science Direct) X es **martingala local** si existe una sucesión creciente $\{T_n\}$ de tiempos de parada con $T_n \nearrow \infty$ a.s, tal que para cada n, X^{T_n} es una martingala.
(Stochastic Calculus, Capinski) Dado $\{X_t\}$ un proceso adaptado a $\mathcal{F}_t$ es una **martingala local** si existe una sucesión $\{\tau_n\}_{n\leq 1}$ de tiempos de parada, tal que para todo ω existe un $N(\omega)$ (Constante), tal que $n \leq N(\omega)$ implica $\tau_n(\omega) \leq T$ (casi siempre eventualmente), tal que para cada n, X_{τ_n} es una martingala respecto a $\mathcal{F}_t$

6.3.2. Variación Cuadrática

Dado $\{X_t\}$ un proceso estocástico con valores reales definidos en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Definimos la **variación cuadrática** como:

$$\langle X\rangle_t = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} (X_{t_k} - X_{t_{k-1}})^2$$

6.3.3. Desigualdad de Burkholder-Davis-Gundy

Usado en la demostración que el movimiento Browniano con la integral de Itô es un camino rugoso.

Primero, verificar la caracterización de Lévŷ para el movimiento Browniano.

Teorema 46 (Lévy) *Sea X un proceso d-dimensional $\mathcal{F}_t$-adaptado y continuo, con $X_0 = 0$. Se tienen las siguientes equivalencias:*

- *X es un movimiento Browniano respecto a $\mathcal{F}_t$.*
- *X es una martingala local continua (¿?) y $\langle X^i, X^j\rangle_t = \delta_{i,j} t$.*
- *X es una martingala local continua y para cada elección de funciones $f_1, \cdots, f_d \in L^2(\mathbb{R}_+)$, el proceso*

$$\mathcal{E}_t = \exp\left(i \sum_{k=1}^{d} \int_0^t f_k(s) dX_s^k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{d} \sum_{0}^{t} f_k^2(s) ds \right)$$

es una martingala compleja.

Demostración:

□

Note que las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ definido en el espacio de martingalas continuas acotadas en L^2, que se anulan en 0, son equivalentes por la desigualdad de Doob's (Ver preliminares en PE):

$$\|M\|_1 = \mathbb{E}[M_\infty^2]^{1/2} = \mathbb{E}[\langle M, M\rangle_\infty]^{1/2} \qquad \|M\|_2 = \mathbb{E}[(M_\infty^*)^2]^{1/2}$$

Con esto en mente, se enuncia la desigualdad de *Burkholder-Davis-Gundy*:

Teorema 47 (Desigualdad de Burkholder-Davis-Gundy) *Para cualquier $p > 0$, existen dos constantes c_p y C_p tal que para toda martingala local continua M que se anula en 0, tenemos:*

$$c_p \mathbb{E}[\langle M, M\rangle_\infty^{p/2}] \leq \mathbb{E}[(M_\infty^*)^p] \leq C_p \mathbb{E}[\langle M, M\rangle_\infty^{p/2}]$$

45¿Qué es M_∞^* y $\langle M, M\rangle$?

6.3.4. Área de Lévy

Proceso estocástico que describe el área encerrada entre una trayectoria del movimiento Browniano y su cuerda. Introducido por Paul Lévy en 1940.

Tiene relación curiosda como con las soluciones por solitones de la ecuación KdV (Korteweg-De Vries), y la función zeta de Riemann.

Para $W = (W_s^1, W_s^2)_{s\leq 0}$ un movimiento Browniano en 2 dimensiones, se define el **área estocástica de Lévy** como:

$$S(t, W) = \frac{1}{2} \int_0^t (W_s^1 dW_s^2 - W_s^2 dW_s^1)$$

donde se usa la integral de Itô.

La KdV y el área de Lévy.

6.3.5. Análisis Gaussiano, Espacios de Wiener Abstractos.

¿Por qué trabajar con estas medidas? POr el teorema del límite central... una maravilla.

Dimensión finita.

> Sea $n \in N$, $B_0(\mathbb{R}^n)$ la completez (Hacer todos los conjuntos nulos medibles) de la σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}^n$. Sea $\lambda^n : B_0(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ la medida de Lebesgue usual n-dimensional. Defina **medida Gaussiana estándar** $\gamma^n : B_0(\mathbb{R}^n) \to [0, 1]$ como:
>
> $$\gamma^n(A) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \exp\left(-\frac{1}{2}\|x\|^2_{\mathbb{R}^n}\right) d\lambda^n(x)$$

O en función de la derivada de *Radon-Nikodym* (Relación entre dos medidas, en un mismo espacio)

$$\frac{d\gamma^n}{d\lambda^n}(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \exp\left(-\frac{1}{2}\|x\|^2_{\mathbb{R}^n}\right)$$

Y para medidas Gaussianas con media $\mu \in \mathbb{R}^n$ y varianza $\sigma^2 > 0$

$$\gamma^n_{\mu,\sigma^2}(A) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi\sigma^2)^n}} \int_A \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\|x-\mu\|^2_{\mathbb{R}^n}\right) d\lambda^n(x)$$

Ahora, más general en dimensión infinita:

Una **medida μ Gaussiana con media cero**, en un espacio de Banach separable E equipado con una σ-álgebra $\mathcal{B}$ y una norma $|\cdot|$, es una medida en $(E, \mathcal{B})$ tal que la distribución de cada funcional lineal (Elemento del dual, función del espacio al cuerpo asociado) en E es una variable aleatoria Gaussiana con media cero.
Esto es, dado $f \in E*$, o véalo como:

$$(E, \mathcal{B}, \mu_f) \xrightarrow{f} (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$$

Tal que, el segundo espacio tiene una medida de probabilidad inducida (Usualmente, la medida de Lebesgue, λ). Entonces:

$$\mu_f(A) = \gamma^n_{0,\sigma^2}(A)$$

para todo $A \in \mathcal{B}$.

Tenemos:

$$\sigma^2 = \sup_{\zeta \in E*, |\zeta| \leq 1} \int \langle \zeta, x \rangle^2 d\mu(x) < \infty$$

Tome el mapa de ïnyección", $i : E* \to L^2(\mu) = L^2(E, \mathcal{B}, \mu; \mathbb{R})$, σ es la norma del operador i, acotada por el teorema de la gráfica cerrada (¿El qué?).

...

6.3.6. Teorema del Soporte de Stroock-Varadhan

Teorema 48 (Teorema de soporte de Stroock-Varadhan) *Sea $V = (V_1, \cdots, V_d)$ una colección de campos vectoriales Lip^2 en $\mathbb{R}^e$, y V_0 es Lip$^1(\mathbb{R}^e)$. Sea B un movimiento Browniano d-dimensional, y sea (Bajo indistiguibilidad) la única solución de Stratonovich de la ecuación diferencial estocástica Y en $[0, T]$ en:*

$$dY = \sum_{i=1}^{d} V_i(Y) \circ dB^i + V_0(Y)dt, \quad Y_0 = y_0 \in \mathbb{R}^e$$

o de forma integral:

$$Y_t = Y_0 + \sum_{i=1}^{d} \int_0^t V_i(Y) \circ dB^i + \int_0^t V_0(Y)dt, \quad Y_0 = y_0 \in \mathbb{R}^e$$

(Suma incluye una suma de integrales estocásticas de Stratonovich para los términos Lip^2*).*

Escribamos $y^h = \pi_{(V,V_0)}(0, y_0; (h,t))$ *(Mapa de Itô) para la solución de la ecuación diferencial ordinaria (asociada)*

$$dy = \sum_{i=1}^{d} V_i(Y)dh^i + V_0(Y)dt$$

comenzando en $y_0 \in \mathbb{R}^e$ *donde* h *es un camino de Cameron-Martin (Esto es,* $h \in W_0^{1,2}([0,T], \mathbb{R}^d)$*).*

Entonces, para $\alpha \in [0, 1/2)$*, y cualquier* $\delta > 0$*,*

$$\lim_{\epsilon \to 0} \mathbb{P}\left(\|Y - y^h\|_\alpha \leq \delta \quad | \quad |B - h|_{\infty,[0,T]} \leq \epsilon \right) \to 1$$

(Del lado derecho, tenemos norma Euclídea $|B - h|_{\infty,[0,T]}$*).*

6.4. Algunos conceptos de topología

Algunos temas de topología, necesaria para entender algunas pruebas y conceptos puntuales.

Ver concepto de base en espacios topológicos (Protter había una equivalencia entre espacios topológicos y medibles... ¿Cuál?)

[Base contable] Un espacio X se dice que tiene una **base contable en x**, si existe una colección contable $\mathcal{B}$ de vecindades de x tal que para cada vecindad de x, contiene al menos uno de los elementos de $\mathcal{B}$ ¡- Primer axioma de numerabilidad.

[Espacio separable]
Un espacio medible $(\Omega, \mathcal{A})$ se dice **separable** si $\mathcal{A}$ es generado por una colección contable de conjuntos.
Otra definición! (Munkres) Espacio X con un subconjunto denso contable. (Conjunto denso es que el conjunto de puntos de adherencia sea el espacio, $\bar{A} = X$)

[Espacio localmente compacto]
Un espacio E es un espacio **localmente compacto** si para todo $x \in E$, x tiene un vecindario compacto.

Bibliografía

[1] Tom M. Apostol, *Análisis matemática*, Editorial Reverté, 1976.

[2] Donald L. Cohn, *Measure theory*, Springer-Brikhäuser, 2013.

[3] Ioannis Karatzas and Steven Shreve, *Brownian motion and stochastic calculus*, Springer, 2005.

[4] Terry Lyons and Michael Caruana, *Differential equations driven by rough paths*, Springer, 2007.

[5] Bernt Oksendal, *Stochastic differential equations*, Springer, 2000.

[6] Protter Philip and Jean Jacob, *Probability essentials*, Springer-Verlag, 2004.