

# Camino rugoso y soluciones de ecuaciones diferenciales.

David Alejandro Alquichire Rincón

11 de marzo de 2025

Idea: Estudiar ecuaciones diferenciales estocásticas por medio de caminos rugosos.

¿Hasta dónde? Peter Fritz... soluciones a PDE estocásticas... ¿Métodos Numéricos?

Propuesta capítulos:

### 1. Introducción y Preliminares

- a) Conceptos de Probabilidad y Teoría de la medida (LB, D. Cohn, Protter y el otro libro).
- b) Conceptos en Convergencia de Procesos Estocásticos.
- c) Conceptos de Procesos Estocásticos (Notas de Freddy, apoyo de Capinski)
- d) Integración de Riemann Stieltjes
- e) Teoría de la medida y la integral de Lebesgue
- f) Análisis Funcional
- g) Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (Existencia y Unicidad)
- h) Ecuaciones Diferenciales Parciales

### 2. Construcción del Movimiento Browniano

- a) a

### 3. Construcción de la Integral de Itô

- a) a

### 4. Ecuaciones Diferenciales Estocásticas por Itô -¿Oksendal

- a) Integral de Itô, Cálculo Estocástico
- b) Ecuaciones Diferenciales Estocásticas, Solución clásica de Itô.
- c) Teoremas de Existencia y Unicidad.

### 5. Ecuaciones Diferenciales Estocásticas por caminos rugosos Pruebas de funciones $\alpha$ . Gráficas: Simulaciones de ecuaciones rugosas. $\alpha$ -Hölder. Caminos orden $\alpha$ , ¿Cómo luce?

6. EDP Estocásticas\*
7. Métodos Numéricos y Aplicaciones\*
8. Conclusiones
9. Bibliografía

**Título**

Camino rugoso y soluciones de ecuaciones diferenciales.

**Title**

Rough paths and solutions to differential equations.

**Resumen:****Abstract:****Palabras clave:****Keywords:**

# Índice general

<b>1. Preliminares</b>	<b>7</b>
1.1. Conceptos de Probabilidad. . . . .	7
1.1.1. Espacios de probabilidad. . . . .	7
1.1.2. Variables aleatorias. . . . .	9
<b>2. Movimiento Browniano</b>	<b>13</b>
2.1. Conceptos de Procesos Estocásticos . . . . .	13
2.2. Construcción del Movimiento Browniano . . . . .	13
<b>3. La Integral de Itô</b>	<b>15</b>



# Capítulo 1

## Preliminares

En este capítulo, nos dedicaremos a repasar conceptos de teoría de la probabilidad, teoría de integración y ecuaciones diferenciales estocásticas. Para una mayor información, en cada sección

### 1.1. Conceptos de Probabilidad.

#### 1.1.1. Espacios de probabilidad.

Sea  $\Omega$  un conjunto abstracto. Denotamos por  $2^\Omega$  el conjunto de partes de  $\Omega$ .

Definimos a  $\mathcal{F}$  una  **$\sigma$ -álgebra** es subconjunto de  $2^\Omega$  que cumple las siguientes propiedades:

- $\emptyset, \Omega \in \mathcal{F}$
- Si  $A \in \mathcal{A}$ , luego  $A^c \in \mathcal{A}$
- Dado  $\{A_i\}_{i \in I}$  una sucesión de subconjuntos de  $\Omega$  a lo más contable. Luego, si para todo  $i \in I$ ,  $A_i \in \mathcal{A}$ , entonces  $\cup_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$

El espacio  $(\Omega, \mathcal{A})$  se llama **espacio medible**.

Los elementos en  $\mathcal{A}$  se llamarán *eventos*.

**Ejemplo:**

- Para  $\Omega$  un conjunto abstracto,  $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$  es la  $\sigma$ -álgebra trivial.
- Sea  $A \subset \Omega$ , entonces  $\sigma(A) = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$  también es una  $\sigma$ -álgebra, llamada la **menor  $\sigma$ -álgebra** que contiene a  $A$ , que se genera mediante la intersección de todas las  $\sigma$ -álgebras que contienen a  $A$ .
- Para  $\Omega = \mathbb{R}$ , una  $\sigma$ -álgebra para este conjunto es la  **$\sigma$ -álgebra de Borel**, que se puede generar con intervalos de la forma  $(-\infty, a]$  para todo  $a \in \mathbb{Q}$ . También, es la generada por todos los conjuntos abiertos (O cerrados, o semiabiertos...). Para más información consulte CITAR DONALD COHN Y PROTTER.

□

Una **medida de probabilidad** definida en una  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{A}$  de  $\Omega$ , es una función  $P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$  que cumple:

- $P(\Omega) = 1$
- Para toda colección contable  $\{A_n\}_{n \geq 1}$  de elementos en  $\mathcal{A}$  que son disyuntos par a par, se tiene:

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

Es decir, la función es *contablemente aditiva*. Se llama a  $P(A)$  como la *probabilidad del evento  $A$* .

La tripla  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  se conoce como **espacio de probabilidad**.

De forma general, la medida de probabilidad, es un caso específico de una *función de medida*, en este caso, tendremos un *espacio de medida*. Vea COHN.

Note que, podemos ver una propiedad más débil que el axioma (2) en la anterior definición. Para toda colección  $\{A_k\}_{k=1}^n$  *finita*, de disyuntos par a par, si tenemos:



$$P(\cup_{k=1}^n A_k) = \sum_{k=1}^n P(A_k)$$

entonces la función  $P$  es **aditiva (O finitamente aditiva)**.

Vamos a revisar algunas propiedades de las funciones de probabilidad, sin demostración. Para consultar los detalles, puede consultar PROTTER.

**Teorema 1** Sea  $(\Omega, \mathcal{A})$  un espacio medible, y  $P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$  una función finitamente aditiva y  $P(\Omega) = 1$ . Entonces, tenemos las siguientes equivalencias:

- La función es contablemente aditiva.
- Si  $A_n \in \mathcal{A}$  y  $A_n \downarrow \emptyset$ , luego  $P(A_n) \downarrow 0$ .
- Si  $A_n \in \mathcal{A}$  y  $A_n \downarrow A$ , luego  $P(A_n) \downarrow P(A)$ .
- Si  $A_n \in \mathcal{A}$  y  $A_n \uparrow \Omega$ , luego  $P(A_n) \uparrow 1$ .
- Si  $A_n \in \mathcal{A}$  y  $A_n \uparrow A$ , luego  $P(A_n) \uparrow P(A)$ .

Más aún, si  $P$  es una medida de probabilidad, y dado  $\{A_n\}$  sucesión de eventos que converge a  $A$ . Entonces  $A \in \mathcal{A}$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(A)$

### 1.1.2. Variables aleatorias.

En esta sección, tomamos a  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espacio abstracto, donde  $\Omega$  no es necesariamente contable.

Sean  $(E, \mathcal{E})$  y  $(F, \mathcal{F})$  dos espacios medibles (No necesariamente tienen una medida de probabilidad). Una función  $X : E \rightarrow F$  es una **función medible** si  $X^{-1}(\Lambda) \in \mathcal{E}$  para todo  $\Lambda \in \mathcal{F}$ .

Si  $(E, \mathcal{E}, P)$  es un espacio de probabilidad,  $X$  posee el nombre de **variable aleatoria**.

Nuevamente, tenemos varias propiedades para las funciones medibles, que enunciaremos acá, sin la demostración respectiva. Para esto, consulte, PROTTER.

**Corolario 1** Sea  $(E, \mathcal{E})$  un espacio medible aleatorio, y  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ . Sea  $X, X_n : E \rightarrow \mathbb{R}$  funciones:

- $X$  es medible si y sólo si  $\{X \leq a\} = X^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{E}$ , para todo  $a \in \mathbb{R}$ .
- Si cada  $X_n$  es medible, luego  $\sup X_n$ ,  $\inf X_n$ ,  $\limsup X_n$  y  $\liminf X_n$  son medibles.
- Si cada  $X_n$  es medible, y  $\{X_n\}$  converge puntualmente a  $X$ , luego  $X$  es medible.

**Teorema 2** Sea  $X$  medible de  $(E, \mathcal{E})$  en  $(F, \mathcal{F})$ , y  $Y$  medible de  $(F, \mathcal{F})$  en  $(G, \mathcal{G})$ . Entonces,  $Y \circ X$  es medible de  $(E, \mathcal{E})$  en  $(G, \mathcal{G})$ .

**Teorema 3** Sean  $(E, \mathcal{U})$  y  $(F, \mathcal{V})$  espacios topológicos, y  $\mathcal{E}, \mathcal{F}$  sus  $\sigma$ -álgebras de Borel (generada por los abiertos), respectivamente. Entonces, cada función continua  $X : E \rightarrow F$  es medible (O también llamada, función boreliana).

Recuerde que, la función indicadora,  $f(x) = 1_A(x)$  se define como:

$$1_A(x) = \begin{cases} 0 & x \in A \\ 1 & x \notin A \end{cases}$$

**Teorema 4** Sea  $(F, \mathcal{F}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B})$  y  $(E, \mathcal{E})$  un espacio medible.

- Función indicadora  $1_A$  en  $E$  es medible si y sólo si  $A \in \mathcal{E}$
- Si  $X_1, \dots, X_n$  son funciones medibles de  $(E, \mathcal{E})$  en  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ , y si  $f$  es borel en  $\mathbb{R}^n$ , luego  $f(X_1, \dots, X_n)$ .
- Si  $X, Y$  son medibles, luego  $X + Y$ ,  $XY$ ,  $\max(X, Y)$ ,  $\min X, Y$  y  $X/Y$  con  $Y \neq 0$  son medibles.

Recordemos, para  $X$  una variable aleatoria, será una función entre los espacios medibles  $(\Omega, \mathcal{A})$  y  $(E, \mathcal{E})$ . Si dotamos al primer espacio de una probabilidad,  $P$ , de forma canónica podemos dotar al segundo espacio, de una medida de probabilidad, según  $X$ .

Si  $X$  es una variable aleatoria entre  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , con valores en  $(E, \mathcal{E})$ , la **distribución** (O **medida de distribución**) de  $X$ , está definida por:

$$P^X(B) = P(X^{-1}(B)) = P(\{\omega : X(\omega) \in B\}) = P(X \in B)$$

-



# Capítulo 2

## Movimiento Browniano

En 1828, el botánico Sueco, *Robert Brown*, observó que los granos de polen en un líquido se movían de forma irregular.... más contexto histórico.

### 2.1. Conceptos de Procesos Estocásticos

### 2.2. Construcción del Movimiento Browniano

Primero, damos la definición de un movimiento Browniano, y luego, se hará la construcción. Esta, se puede hacer por dos maneras distintas:

1. Teoremas de existencia y continuidad de Kolmogorov.
2. Teorema de Donsker (Caso más general).

En el presente trabajo, haremos la construcción usando el Teorema de Donsker, y más tarde, se enunciarán los teoremas de Kolmogorov (Sin demostración).

Dado  $\{W_t\}$  un proceso estocástico, en el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . El proceso  $\{W_t\}$  es un **movimiento Browniano** en una dimensión, si se cumplen las siguientes condiciones:

- Para casi todo  $\omega$ , los caminos  $W_t(\omega)$  son continuos (En el sentido de la probabilidad).
- $\{W_t\}$  es un proceso Gaussiano, es decir, para  $k \geq 1$ , y todo  $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k$ , el vector aleatorio,  $Z = (W_{t_1}, \dots, W_{t_k}) \in \mathbb{R}^n$  tiene distribución multinormal (O Gaussiana).

## Capítulo 3

# La Integral de Itô

En este capítulo, comenzaremos la construcción de la integral de Itô. Para cumplir este objetivo, usaremos fuertemente los hechos vistos en el capítulo anterior del movimiento Browniano.

Ahora, ¿Por qué es necesario construir una nueva integral? Veamos el objetivo inicial, solucionar una ecuación diferencial que tiene cierto ruido:

$$\frac{dX}{dt} = b(t, X_t) + \sigma(t, X_t) \cdot W_t$$

Note que el ruido se puede representar como el proceso estocástico  $W_t$ . Bajo experimentación, se interponen las siguientes condiciones sobre el ruido:

- Dos variables del proceso  $W_{t_1}$  y  $W_{t_2}$  con  $t_1 \neq t_2$  son independientes.
- $\{W_t\}$  es un proceso estacionario.
- $\mathbb{E}[W_t] = 0$  para todo  $t$ .

No hay algún proceso estocástico tradicional que cumpla las condiciones dadas. Por ende, lo podemos ver como un proceso estocástico generalizado, un **proceso de ruido blanco**, esto es, un proceso que se puede construir como medida de probabilidad en cierto espacio sutil de funcionales  $\mathcal{C}[0, \infty)$ .

Por ende, se nos sugiere que el proceso  $\{W_t\}$  será el movimiento Browniano. Discretizando la ecuación inicial...

$$\int_0^t f(s, w) dB_s(w)$$