Caminos rugosos y soluciones de ecuaciones diferenciales.

David Alejandro Alquichire Rincón

25 de febrero de 2025

Idea: Estudiar ecuaciones diferenciales estocásticas por medio de caminos rugosos.

¿Hasta dónde? Peter Fritz... soluciones a PDE estocásticas... ¿Métodos Numéricos?

Propuesta capítulos:

1. Introducción y Preliminares
   - *a*) Conceptos de Probabilidad y Teoría de la medida (LB, D. Cohn, Protter y el otro libro).
   - *b*) Conceptos en Convergencia de Procesos Estocásticos.
   - *c*) Conceptos de Procesos Estocásticos (Notas de Freddy, apoyo de Capinski)
   - *d*) Integración de Riemann Stieltjes
   - *e*) Teoría de la medida y la integral de Lebesgue
   - *f*) Análisis Funcional
   - *g*) Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (Existencia y Unicidad)
   - *h*) Ecuaciones Diferenciales Parciales
2. Construcción del Movimiento Browniano
   - *a*) a
3. Construcción de la Integral de Itô
   - *a*) a
4. Ecuaciones Diferenciales Estocásticas por Itô -¿Oksendal
   - *a*) Integral de Itô, Cálculo Estocástico
   - *b*) Ecuaciones Diferenciales Estocásticas, Solución clásica de Itô.
   - *c*) Teoremas de Existencia y Unicidad.
5. Ecuaciones Diferenciales Estocásticas por caminos rugosos
6. EDP Estocásticas*

7. Métodos Numéricos y Aplicaciones*

8. Conclusiones

9. Bibliografía

Título
Caminos rugosos y soluciones de ecuaciones diferenciales.

Title
Rough paths and solutions to differential equations.

Resumen:

Abstract:

Palabras clave:

Keywords:

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo, nos dedicaremos a repasar conceptos de teoría de la probabilidad, teoría de integración y ecuaciones diferenciales estocásticas. Para una mayor información, en cada sección

1.1. Conceptos de Probabilidad

Sea Ω un conjunto abstracto. Denotamos por 2^Ω el conjunto de partes de Ω.

> Definimos a $\mathcal{F}$ una σ-**álgebra** es subconjunto de 2^Ω que cumple las siguientes propiedades:
>
> - $\emptyset, \Omega \in \mathcal{F}$
> - Si $A \in \mathcal{F}$, luego $A^c \in \mathcal{F}$
> - Dado $\{A_i\}_{i\in I}$ una sucesión de subconjuntos de Ω a lo más contable. Luego, si para todo $i \in I$, $A_i \in \mathcal{F}$, entonces $\cup_{i\in I} A_i \in \mathcal{F}$

Los elementos en $\mathcal{F}$
Variables aleatorias.
Medida de probabilidad.
Probabilidad Condicional.
Independencia de variables aleatorias.
Inegración respecto a medida de probabilidad.

Variables aleatorias Gaussianas.
Convergencia de esta mondá, Ley de los grandes números.
Esperanza Condicional, L2 y Espacios de Hilbert.
¿Función característica, generadora de momentos, etc...?
INTEGRACIÓN.
Integración usual RS, Integral de Young. Conceptos de p-variación y α-Hölder.
Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. EDO Controladas. ¿EDP?
Teorema de Picard, Teorema de Peano.

Capítulo 2

Movimiento Browniano

En 1828, el botánico Sueco, *Robert Brown*, observó que los granos de polen en un líquido se movian de forma irregular.... más contexto histórico.

2.1. Conceptos de Procesos Estocásticos

2.2. Construcción del Movimiento Browniano

Primero, damos la definición de un movimiento Browniano, y luego, se hará la construcción. Esta, se puede hacer por dos maneras distintas:

1. Teoremas de existencia y continuidad de Kolmogorov.

2. Teorema de Donsker (Caso más general).

En el presente trabajo, haremos la construcción usando el Teorema de Donsker, y más tarde, se enunciarán los teoremas de Kolmogorov (Sin demostración).

Dado $\{W_t\}$ un proceso estocástico, en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. El proceso $\{W_t\}$ es un **movimiento Browniano** en una dimensión, si se cumplen las siguientes condiciones:

- Para casi todo ω, los caminos $W_t(\omega)$ son continuos (En el sentido de la probabilidad).
- $\{W_t\}$ es un proceso Gaussiano, es decir, para $k \geq 1$, y todo $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_k$, el vector aleatorio, $Z = (W_{t_1}, \cdots, W_{t_k}) \in \mathbb{R}^n$ tiene distribución multinormal (O Gaussiana).

Capítulo 3

La Integral de Itô

En este capítulo, comenzaremos la construcción de la integral de Itô. Para cumplir este objetivo, usaremos fuertemente los hechos vistos en el capítulo anterior del movimiento Browniano.

Ahora, ¿Por qué es necesario construir una nueva integral? Veamos el objetivo inicial, solucionar una ecuación diferencial que tiene cierto ruido:

$$\frac{dX}{dt} = b(t, X_t) + \sigma(t, X_t) \cdot W_t$$

Note que el ruido se puede representar como el proceso estocástico W_t. Bajo experimentación, se interponen las siguientes condiciones sobre el ruido:

- Dos variables del proceso W_{t_1} y W_{t_2} con $t_1 \neq t_2$ son independientes.
- $\{W_t\}$ es un proceso estacionario.
- $\mathbb{E}[W_t] = 0$ para todo t.

No hay algún proceso estocástico tradicional que cumpla las condiciones dadas. Por ende, lo podemos ver como un proceso estocástico generalizado, un **proceso de ruido blanco**, esto es, un proceso que se puede construir como medida de probabilidad en cierto espacio sútil de funcionales $\mathcal{C}[0, \infty)$.

Por ende, se nos sugiere que el proceso $\{W_t\}$ será el movimiento Browniano. Discretizando la ecuación inicial...

$$\int_0^t f(s, w) dB_s(w)$$