Freitag, den 4. Dezember 2020

1 Anwenden der Raman-Müller-Matrix auf partiell polarisierte Stokesvektoren

Problem:

Herleitung der Raman-Müller-Matrix erlaubt nur total polarisierte Stokesvektoren. Wie lässt sich die Ramanstreuung von partiell polarisierter Strahlung beschreiben?

Idee:

Partiell polarisierte Stokesvektoren $\vec{S}$ in vollständig polarisierten Vektor $\vec{P}$ und vollständig unpolarisierten Vektor $\vec{U}$ zerlegen. Π ist der Polarisationsrgad.

Annahmen: $\Pi < 1$, $S_0 = 1$ und $S_3 = 0$.

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ S_1 \\ S_2 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$\Pi = \frac{\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}}{S_0} = \frac{\sqrt{S_1^2 + S_2^2}}{S_0} \tag{2}$$

$$\vec{S} = \vec{P} + \vec{U} = \begin{pmatrix} \Pi \\ S_1 \\ S_2 \\ 0 \end{pmatrix} + (1 - \Pi) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Das total unpolarisierte Licht wird als Überlagerung von vielen total polarisierten Zuständen betrachtet. Jeder dieser Zustände wird einzeln auf die Raman-Müller-Matrix **M** angewendet. Am Ende wird über alle gestreuten Vektoren gemittelt, um den gestreuten Vektor des unpolarisierten Lichts zu berechnen. Der Vektor $\vec{Q}(\sigma)$ liefert jeden möglichen total linearpolarisierten Stokesvektor (Abb. 1). Der Winkel σ ist die Winkelkomponente der polaren Darstellung von Stokesvektoren (Abb. 1).

$$\vec{Q}(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos(\sigma) \\ \cos(\sigma) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Der Mittelwert über n uniform verteilte Werte im Interval $\sigma \in [0; 2\pi]$. $n, i \in \mathbb{N}$.

$$\mathbf{M}\vec{U} = \frac{1 - \Pi}{n} \sum_{i=0}^{n} \mathbf{M}\vec{Q}\left(\frac{i \cdot 2\pi}{n}\right) \tag{5}$$

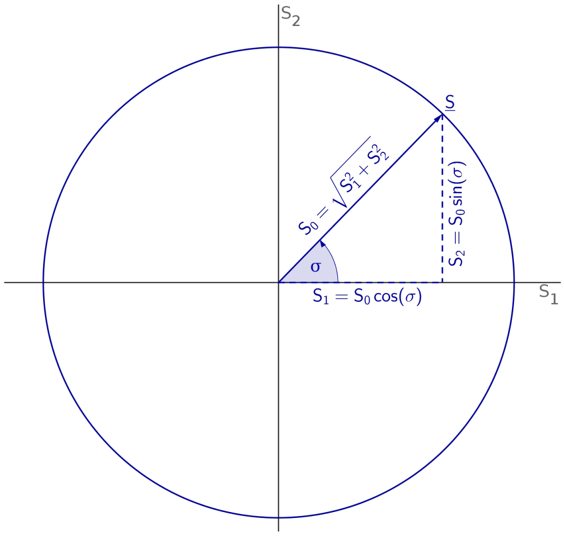

Abbildung 1: Polare Darstellung von vollständig linearpolarisierten Stokesvektoren.

Frage:

Was ist, wenn der Mittelwert nicht numerisch über einzelne Punkte sonder analytisch durch ein Integral gelöst wird? Die Definition von $\mathbf{M}\vec{U}$ ändert sich damit wie folgt:

$$\mathbf{M}\vec{U} = \frac{1-\Pi}{n} \sum_{i=0}^{n} \mathbf{M}\vec{Q}\left(\frac{i \cdot 2\pi}{n}\right) \tag{6}$$

Mit $\int_a^b f(x)dx / _{b-a}$ als Mittelwert einer Funktion im Interval $[a; b]$.

$$\mathbf{M}\vec{U} = \frac{1-\Pi}{2\pi - 0} \int_0^{2\pi} \mathbf{M}\vec{Q}(\sigma) d\sigma = \frac{1-\Pi}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{M}\vec{Q}(\sigma) d\sigma \tag{7}$$

. Lässt sich der Ausdruck durch Lösen der Integrale vereinfachen oder die Gleichung $\vec{S} = \vec{P} + \vec{U}$? Aufgrund der gewählten Messgeometrie sind alle betrachteten Raman-Müller-Matrizen $\mathbf{M}$ diagonalisiert.

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{pmatrix} \tag{8}$$

$\mathbf{M}$ und $\vec{Q}(\sigma)$ in $\mathbf{M}\vec{U}$ einsetzen.

$$\mathbf{M}\vec{U} = \frac{1-\Pi}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathbf{M}\vec{Q}(\sigma)d\sigma \tag{9}$$

$$\mathbf{M}\vec{U} = \frac{1-\Pi}{2\pi}\int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \cos(\sigma) \\ \cos(\sigma) \\ 0 \end{pmatrix} d\sigma \tag{10}$$

$$\mathbf{M}\vec{U} = \frac{1-\Pi}{2\pi}\int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 1 \cdot m_1 \\ m_2 \cdot \cos(\sigma) \\ m_3 \cdot \cos(\sigma) \\ 0 \cdot m_4 \end{pmatrix} d\sigma \tag{11}$$

Das Integral für jede Komponente lösen.

$$\mathbf{M}\vec{U} = \frac{1-\Pi}{2\pi} \begin{pmatrix} \int_0^{2\pi} m_1 d\sigma \\ \int_0^{2\pi} m_2 \cdot \cos(\sigma) d\sigma \\ \int_0^{2\pi} m_3 \cdot \cos(\sigma) d\sigma \\ \int_0^{2\pi} 0 d\sigma \end{pmatrix} \tag{12}$$

Mit $\int_0^{2\pi} 1dx = 2\pi$, $\int_0^{2\pi} \cos(x)dx = \int_0^{2\pi} \sin(x)dx = 0$ und $\int_0^{2\pi} 0dx = 0$.

$$\mathbf{M}\vec{U} = \frac{1-\Pi}{2\pi} \begin{pmatrix} 2\pi \cdot m_1 \\ 0 \cdot m_2 \\ 0 \cdot m_3 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{13}$$

$$\mathbf{M}\vec{U} = (1-\Pi) \begin{pmatrix} m_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{14}$$

Der Mittelwert über alle bzw. viele linearpolarisierte Vektoren ist demnach:

$$\mathbf{M}\vec{U} = \frac{1-\Pi}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathbf{M}\vec{Q}(\sigma)d\sigma = (1-\Pi) \cdot \mathbf{M} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{15}$$

. Das Anwenden der Raman-Müller-Matrix $\mathbf{M}$ auf den unpolarisierten Teil des Stokesvektors liefert für eine diagonalisierte Raman-Müller-Matrix das selbe Ergebnis wie die Mittelwertmethode.

Folglich muss das auch für das Anwenden der Raman-Müller-Matrix auf den Stokesvektor $\vec{S}$ der Fall sein. das Anwenden von $\mathbf{M}$ auf $\vec{S} = \vec{P} + \vec{U}$ vereinfacht sich damit wie folgt:

$$\mathbf{M}\vec{S} = \mathbf{M}\vec{P} + \mathbf{M}\vec{U} \tag{16}$$

$$\mathbf{M}\vec{S} = \mathbf{M}\vec{P} + (1-\Pi)\cdot\mathbf{M}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \tag{17}$$

$$\mathbf{M}\vec{S} = \mathbf{M}\left[\vec{P} + (1-\Pi)\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right] = \mathbf{M}\left[\begin{pmatrix}\Pi\\S_1\\S_2\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1-\Pi\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right] \tag{18}$$

$$\mathbf{M}\vec{S} = \mathbf{M}\begin{pmatrix}1\\S_1\\S_2\\0\end{pmatrix} = \mathbf{M}\begin{pmatrix}S_0\\S_1\\S_2\\S_3\end{pmatrix} \tag{19}$$

. Beweist das, dass ich die diagonalen Raman-Müller-Matrizen auch auf partiell polarisierte Stokesvektoren anwenden kann?