

1 Der Ramantensor im Müllerformalismus

Die Beschreibung des Ramanstreuprozesses erfolgt durch elektrische Felder der Lichtwelle vor \underline{E} und nach der Streuung \underline{E}^R und dem Ramantensor $\underline{\alpha}$. Die elektrische Feldkomponente entlang der Ausbreitungsrichtung des Lasers E_z ist null.

$$\begin{pmatrix} E_x^R \\ E_y^R \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{xy} & \alpha_{xz} \\ \alpha_{yx} & \alpha_{yy} & \alpha_{yz} \\ \alpha_{zx} & \alpha_{zy} & \alpha_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Die Beschreibung der Laserpolarisation erfolgt durch Stokes-Parametern \underline{S} . Die Stokesparameter werden ermittelt, indem die Lichtintensität des Lasers $\underline{I} = \underline{E}^2$ hinter verschieden orientierten Linearpolarisatoren gemessen wird. Die Komponente der Zirkularpolarisation S_3 wird vernachlässigt. x' und y' beziehen sich auf ein Koordinatensystem, dass um 45° gedreht ist. Siehe hierfür Abschnitt 1.1.

$$\underline{S} = \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{0^\circ} + I_{90^\circ} \\ I_{0^\circ} - I_{90^\circ} \\ I_{45^\circ} - I_{135^\circ} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_x^2 + E_y^2 \\ E_x^2 - E_y^2 \\ E_{x'}^2 - E_{y'}^2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Folgend werden einige trigonometrische Umformungen gebraucht. Sie sind im Abschnitt 1.5 auf Seite 11 ab Gleichung 36 aufgelistet.

1.1 Die Transformation in Polarkoordinaten

Abbildung 1 auf Seite 3 zeigt die gewählten Koordinatensysteme und die Umrechnung zwischen polaren und kartesischen Koordinaten. Folgende Gleichungen fassen zusammen. Es wird angenommen, dass das betrachtete Licht einen Polarisationsgrad $\Pi = 1$ besitzt und deshalb gilt $S_0^2 = S_1^2 + S_2^2$.

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{E_{x'}^2 + E_{y'}^2} \quad (3)$$

$$E_x = E \cdot \cos(\varepsilon) \quad (4)$$

$$E_y = E \cdot \sin(\varepsilon) \quad (5)$$

$$E_{x'} = E \cdot \cos(\varepsilon') = E \cdot \cos(\varepsilon - \pi/4) \quad (6)$$

$$E_{y'} = E \cdot \sin(\varepsilon') = E \cdot \sin(\varepsilon - \pi/4) \quad (7)$$

$$E_z = 0 \quad (8)$$

$$S_0 = \sqrt{S_1^2 + S_2^2} \quad (9)$$

$$S_1 = S_0 \cdot \cos(\sigma) \quad (10)$$

$$S_2 = S_0 \cdot \sin(\sigma) \quad (11)$$

$$S_3 = 0 \quad (12)$$

Wird nun die Definition des Stokesvektors aus Gleichung 2 in Polarkoordinaten übersetzt, kann die Beziehung zwischen E und S_0 sowie ε und σ ermittelt werden. Für diese Umformungen wurden trigonometrischen Beziehungen in den Gleichungen 36 und 37 verwendet.

$$S_0 = E_x^2 + E_y^2 = E^2[\cos^2(\varepsilon) + \sin^2(\varepsilon)] = E^2 \quad (13)$$

$$S_1 = E_x^2 - E_y^2 = E^2[\cos^2(\varepsilon) - \sin^2(\varepsilon)] = E^2 \cos(2\varepsilon) \quad (14)$$

$$S_2 = E_{x'}^2 - E_{y'}^2 = E^2[\cos^2(\varepsilon - \pi/4) - \sin^2(\varepsilon - \pi/4)] = E^2 \cos(2\varepsilon - \pi/2) \quad (15)$$

Mit $S_1 = S_0 \cdot \cos(\sigma)$, $S_2 = S_0 \cdot \sin(\sigma)$ und der trigonometrischen Beziehung in Gleichung 38 folgt:

$$\begin{aligned} S_1 &= S_1 \\ E^2 \cos(2\varepsilon) &= S_0 \cos(\sigma) \\ \cos(2\varepsilon) &= \cos(\sigma) \\ 2\varepsilon &= \sigma \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} S_2 &= S_2 \\ E^2 \cos(2\varepsilon - \pi/2) &= S_0 \sin(\sigma) \\ \cos(2\varepsilon - \pi/2) &= \cos(\sigma - \pi/2) \\ 2\varepsilon &= \sigma \end{aligned} \quad (17)$$

. Es gilt also folgende Transformation $S_0 = E^2$ und $2\varepsilon = \sigma$ für total polarisiertes Licht.

1.2 Der Ramanstreuprozess

Die elektrische Feldstärke in Gleichung 1 wird mit Hilfe der Erkenntnisse aus Abschnitt 1.1 durch die Stokesparameter σ und S_0 beschrieben.

$$E^R \begin{pmatrix} \cos(\varepsilon^R) \\ \sin(\varepsilon^R) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{xy} & \alpha_{xz} \\ \alpha_{yx} & \alpha_{yy} & \alpha_{yz} \\ \alpha_{zx} & \alpha_{zy} & \alpha_{zz} \end{pmatrix} \cdot E \begin{pmatrix} \cos(\varepsilon) \\ \sin(\varepsilon) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (18)$$

$$\sqrt{S_0^R} \begin{pmatrix} \cos(\sigma^R/2) \\ \sin(\sigma^R/2) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{xy} & \alpha_{xz} \\ \alpha_{yx} & \alpha_{yy} & \alpha_{yz} \\ \alpha_{zx} & \alpha_{zy} & \alpha_{zz} \end{pmatrix} \cdot \sqrt{S_0} \begin{pmatrix} \cos(\sigma/2) \\ \sin(\sigma/2) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} (I) \quad \sqrt{S_0^R} \cos(\sigma^R/2) &= \sqrt{S_0} \alpha_{xx} \cos(\sigma/2) + \sqrt{S_0} \alpha_{xy} \sin(\sigma/2) \\ (II) \quad \sqrt{S_0^R} \sin(\sigma^R/2) &= \sqrt{S_0} \alpha_{yx} \cos(\sigma/2) + \sqrt{S_0} \alpha_{yy} \sin(\sigma/2) \end{aligned} \quad (20)$$

Aus dem Gleichungssystem 20 wird die Matrix hergeleitet, die den Ramantensor im Müllerformalismus beschreibt. Zuerst werden dafür Gleichungen gefunden, die S_0^R , S_1^R und S_2^R beschreiben.

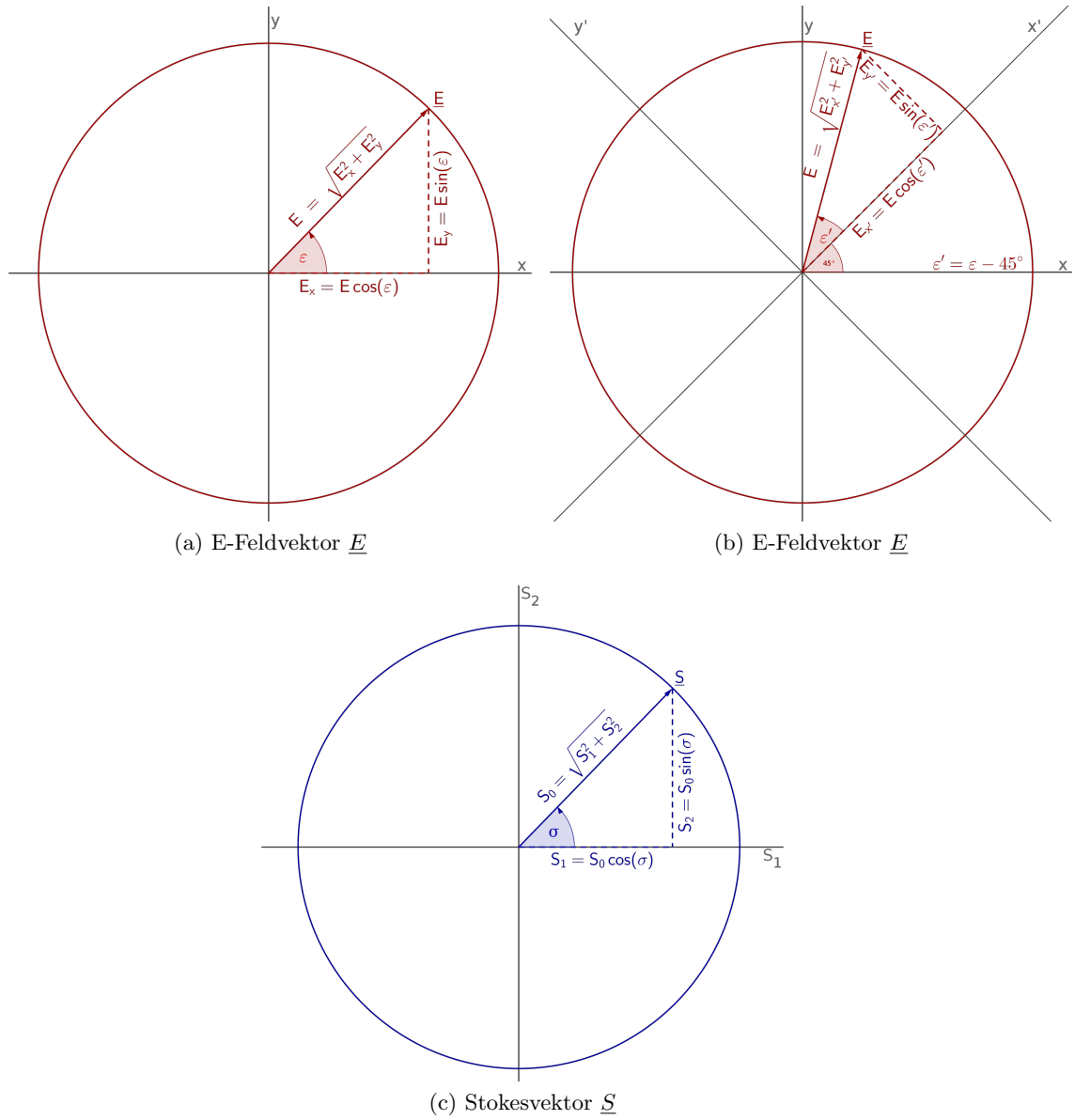


Abbildung 1: Definition von E-Feldvektor und Stokesvektor in polaren und kartesischen Koordinaten. Das elektrische Feld wird sowohl als Projektion auf die x - und y -Achse als auch als Projektion auf die um 45° gedrehten Achsen x' und y' dargestellt. Es wird ein Polarisationsgrad von $\Pi = 1$ angenommen.

Die erste Komponente des gestreuten Stokesvektors S_0^R wird durch die Quadratsumme von Gleichung 20 bestimmt: $(I)^2 + (II)^2$.

$$S_0^R [\cos^2(\sigma/2) + \sin^2(\sigma/2)] = S_0 [\alpha_{xx} \cos(\sigma/2) + \alpha_{xy} \sin(\sigma/2)]^2 + S_0 [\alpha_{yx} \cos(\sigma/2) + \alpha_{yy} \sin(\sigma/2)]^2 \quad (21)$$

Auf der linken Seite wird die Umformung nach Gleichung 36 und rechts die binomische Formel angewandt. Beide Seiten werden der Lesbarkeit halber durch S_0 geteilt.

$$\frac{S_0^R}{S_0} = \alpha_{xx}^2 \cos^2(\sigma/2) + 2\alpha_{xy}\alpha_{xx} \cos(\sigma/2) \sin(\sigma/2) + \alpha_{xy}^2 \sin^2(\sigma/2) + \alpha_{yx}^2 \cos^2(\sigma/2) + 2\alpha_{yx}\alpha_{yy} \cos(\sigma/2) \sin(\sigma/2) + \alpha_{yy}^2 \sin^2(\sigma/2)$$

Die rechte Seite wird zusammengefasst.

$$\frac{S_0^R}{S_0} = (\alpha_{xx}^2 + \alpha_{yx}^2) \cos^2(\sigma/2) + (\alpha_{xy}^2 + \alpha_{yy}^2) \sin^2(\sigma/2) + (\alpha_{xy}\alpha_{xx} + \alpha_{yx}\alpha_{yy}) \cdot 2 \cos(\sigma/2) \sin(\sigma/2)$$

Die Umformungen nach Gleichungen 39, 40 und 41 erreichen, dass der Cosinus und Sinus von σ , nicht von $\sigma/2$, abhängen.

$$\frac{S_0^R}{S_0} = (\alpha_{xx}^2 + \alpha_{yx}^2) \frac{\cos(\sigma) + 1}{2} + (\alpha_{xy}^2 + \alpha_{yy}^2) \frac{1 - \cos(\sigma)}{2} + (\alpha_{xy}\alpha_{xx} + \alpha_{yx}\alpha_{yy}) \sin(\sigma)$$

Die rechte Seite wird umsortiert und nach Sinus und Cosinus zusammengefasst. Anschließend werden beide Seiten mit S_0 multipliziert und die Umwandlung von Polarkoordinaten in kartesische nach Abschnitt 1.1 vorgenommen.

$$\begin{aligned} \frac{S_0^R}{S_0} &= \frac{\alpha_{xx}^2 + \alpha_{yx}^2}{2} + \frac{\alpha_{xy}^2 + \alpha_{yy}^2}{2} + \frac{\alpha_{xx}^2 + \alpha_{yy}^2}{2} \cos(\sigma) - \frac{\alpha_{xy}^2 + \alpha_{yy}^2}{2} \cos(\sigma) + (\alpha_{xy}\alpha_{xx} + \alpha_{yx}\alpha_{yy}) \sin(\sigma) \\ &= \frac{\alpha_{xx}^2 + \alpha_{yx}^2 + \alpha_{xy}^2 + \alpha_{yy}^2}{2} + \frac{\alpha_{xx}^2 + \alpha_{yy}^2 - \alpha_{xy}^2 - \alpha_{yy}^2}{2} \cos(\sigma) + (\alpha_{xy}\alpha_{xx} + \alpha_{yx}\alpha_{yy}) \sin(\sigma) \\ S_0^R &= \frac{\alpha_{xx}^2 + \alpha_{yx}^2 + \alpha_{xy}^2 + \alpha_{yy}^2}{2} S_0 + \frac{\alpha_{xx}^2 + \alpha_{yx}^2 - \alpha_{xy}^2 - \alpha_{yy}^2}{2} S_1 + (\alpha_{xy}\alpha_{xx} + \alpha_{yx}\alpha_{yy}) S_2 \end{aligned} \quad (22)$$

Die zweite Komponente des gestreuten Stokesvektors S_1^R wird durch die Quadratdifferenz von Gleichung 20 bestimmt:
 $(I)^2 - (II)^2$.

$$S_0^R [\cos^2(\sigma^R/2) - \sin^2(\sigma^R/2)] = S_0 [\alpha_{xx} \cos(\sigma/2) + \alpha_{xy} \sin(\sigma/2)]^2 - S_0 [\alpha_{yx} \cos(\sigma/2) + \alpha_{yy} \sin(\sigma/2)]^2 \quad (23)$$

Auf der linken Seite wird die Umformung nach Gleichung 37 und rechts die binomische Formel angewandt. Beide Seiten werden der Lesbarkeit halber durch S_0 geteilt.

$$\frac{S_0^R \cos(\sigma^R)}{S_0} = \alpha_{xx}^2 \cos^2(\sigma/2) + 2\alpha_{xx}\alpha_{xy} \cos(\sigma/2) \sin(\sigma/2) + \alpha_{xy}^2 \sin^2(\sigma/2) - \alpha_{yx}^2 \cos^2(\sigma/2) - 2\alpha_{yx}\alpha_{yy} \cos(\sigma/2) \sin(\sigma/2) - \alpha_{yy}^2 \sin^2(\sigma/2)$$

Die rechte Seite wird nach Abschnitt 1.1 in kartesische Koordinaten umgerechnet und die rechte Seite zusammengefasst.

$$\frac{S_1^R}{S_0} = (\alpha_{xx}^2 - \alpha_{yx}^2) \cos^2(\sigma/2) + (\alpha_{xy}\alpha_{xx} - \alpha_{yx}\alpha_{yy}) \cdot 2 \cos(\sigma/2) \sin(\sigma/2) + (\alpha_{xy}^2 - \alpha_{yy}^2) \sin^2(\sigma/2)$$

57

Die Umformungen nach Gleichungen 39, 40 und 41 erreichen, dass der Cosinus und Sinus von σ , nicht von $\sigma/2$, abhängen.

$$\frac{S_1^R}{S_0} = (\alpha_{xx}^2 - \alpha_{yx}^2) \frac{\cos(\sigma) + 1}{2} + (\alpha_{xy}\alpha_{xx} - \alpha_{yx}\alpha_{yy}) \sin(\sigma) + (\alpha_{xy}^2 - \alpha_{yy}^2) \frac{1 - \cos(\sigma)}{2}$$

Die rechte Seite wird umsortiert und nach Sinus und Cosinus zusammengefasst. Anschließend werden beide Seiten mit S_0 multipliziert und die Umwandlung von Polarkoordinaten in kartesische nach Abschnitt 1.1 vorgenommen.

$$\begin{aligned} \frac{S_1^R}{S_0} &= \frac{\alpha_{xx}^2 - \alpha_{yx}^2 + \alpha_{xy}^2 - \alpha_{yy}^2}{2} + \frac{\alpha_{xx}^2 - \alpha_{yx}^2 - \alpha_{xy}^2 + \alpha_{yy}^2}{2} \cos(\sigma) + (\alpha_{xy}\alpha_{xx} - \alpha_{yx}\alpha_{yy}) \sin(\sigma) \\ S_1^R &= \frac{\alpha_{xx}^2 - \alpha_{yx}^2 + \alpha_{xy}^2 - \alpha_{yy}^2}{2} S_0 + \frac{\alpha_{xx}^2 - \alpha_{yx}^2 - \alpha_{xy}^2 + \alpha_{yy}^2}{2} S_1 + (\alpha_{xy}\alpha_{xx} - \alpha_{yx}\alpha_{yy}) S_2 \end{aligned} \quad (24)$$

Die dritte Komponente des gestreuten Stokesvektors S_2^R wird durch das Produkt von Gleichung 20 bestimmt: $(I) \cdot (II)$.

$$S_0^R \cos(\sigma^R/2) \sin(\sigma^R/2) = S_0 \cdot [\alpha_{xx} \cos(\sigma/2) + \alpha_{xy} \sin(\sigma/2)] \cdot [\alpha_{yx} \cos(\sigma/2) + \alpha_{yy} \sin(\sigma/2)] \quad (25)$$

Links wird die Umformung aus Gleichung 39 angewandt und die rechte Seite wird ausmultipliziert. Beide Seiten werden der Lesbarkeit halber durch S_0 geteilt.

$$\frac{S_0^R \sin(\sigma^R)}{2S_0} = \alpha_{xx}\alpha_{yx} \cos^2(\sigma/2) + \alpha_{xx}\alpha_{yy} \cos(\sigma/2) \sin(\sigma/2) + \alpha_{xy}\alpha_{yx} \cos(\sigma/2) \sin(\sigma/2) + \alpha_{xy}\alpha_{yy} \sin^2(\sigma/2)$$

Die rechte Seite wird zusammengefasst und die linke nach Abschnitt 1.1 in kartesische Koordinaten umgewandelt.

$$\frac{S_2^R}{2S_0} = \alpha_{xx}\alpha_{yx} \cos^2(\sigma/2) + (\alpha_{xx}\alpha_{yy} + \alpha_{xy}\alpha_{yx}) \cos(\sigma/2) \sin(\sigma/2) + \alpha_{xy}\alpha_{yy} \sin^2(\sigma/2)$$

Die Umformungen nach Gleichungen 39, 40 und 41 erreichen, dass der Cosinus und Sinus von σ , nicht von $\sigma/2$, abhängen. Die rechte Seite wird umsortiert und nach Cosinus und Sinus zusammengefasst.

$$\begin{aligned} \frac{S_2^R}{2S_0} &= \alpha_{xx}\alpha_{yx} \frac{\cos(\sigma) + 1}{2} + \frac{\alpha_{xx}\alpha_{yy} + \alpha_{xy}\alpha_{yx}}{2} \sin(\sigma) + \alpha_{xy}\alpha_{yy} \frac{1 - \cos(\sigma)}{2} \\ &= \frac{\alpha_{xx}\alpha_{yx} + \alpha_{xy}\alpha_{yy}}{2} + \frac{\alpha_{xx}\alpha_{yx} - \alpha_{xy}\alpha_{yy}}{2} \cos(\sigma) + \frac{\alpha_{xx}\alpha_{yy} + \alpha_{xy}\alpha_{yx}}{2} \sin(\sigma) \end{aligned}$$

Anschließend wird mit $2S_0$ multipliziert und nach Abschnitt 1.1 die polaren in kartesische Koordinaten umgerechnet.

$$S_2^R = (\alpha_{xx}\alpha_{yx} + \alpha_{xy}\alpha_{yy}) S_0 + (\alpha_{xx}\alpha_{yx} - \alpha_{xy}\alpha_{yy}) S_1 + (\alpha_{xx}\alpha_{yy} + \alpha_{xy}\alpha_{yx}) S_2 \quad (26)$$

1.3 Der Ramanstreuprozess im Müllerformalismus

Aus den Gleichungen 12, 22, 24 und 26 lässt sich die Müllermatrix des Ramantensors formulieren.

$$\begin{aligned}
 S_0^R &= \frac{\alpha_{xx}^2 + \alpha_{yx}^2 + \alpha_{xy}^2 + \alpha_{yy}^2}{2} S_0 + \frac{\alpha_{xx}^2 + \alpha_{yx}^2 - \alpha_{xy}^2 - \alpha_{yy}^2}{2} S_1 + (\alpha_{xy}\alpha_{xx} + \alpha_{yx}\alpha_{yy}) S_2 + 0 S_3 \\
 S_1^R &= \frac{\alpha_{xx}^2 - \alpha_{yx}^2 + \alpha_{xy}^2 - \alpha_{yy}^2}{2} S_0 + \frac{\alpha_{xx}^2 - \alpha_{yx}^2 - \alpha_{xy}^2 + \alpha_{yy}^2}{2} S_1 + (\alpha_{xy}\alpha_{xx} - \alpha_{yx}\alpha_{yy}) S_2 + 0 S_3 \\
 S_2^R &= (\alpha_{xx}\alpha_{yx} + \alpha_{xy}\alpha_{yy}) S_0 + (\alpha_{xx}\alpha_{yx} - \alpha_{xy}\alpha_{yy}) S_1 + (\alpha_{xx}\alpha_{yy} + \alpha_{xy}\alpha_{yx}) S_2 + 0 S_3 \\
 S_3^R &= 0 S_0 + 0 S_1 + 0 S_2 + 0 S_3
 \end{aligned}$$

$$\underline{S}^R = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{xx}^2 + \alpha_{yx}^2 + \alpha_{xy}^2 + \alpha_{yy}^2 & \alpha_{xx}^2 + \alpha_{yx}^2 - \alpha_{xy}^2 - \alpha_{yy}^2 & 2(\alpha_{xy}\alpha_{xx} + \alpha_{yx}\alpha_{yy}) & 0 \\ \alpha_{xx}^2 - \alpha_{yx}^2 + \alpha_{xy}^2 - \alpha_{yy}^2 & \alpha_{xx}^2 - \alpha_{yx}^2 - \alpha_{xy}^2 + \alpha_{yy}^2 & 2(\alpha_{xy}\alpha_{xx} - \alpha_{yx}\alpha_{yy}) & 0 \\ 2(\alpha_{xx}\alpha_{yx} + \alpha_{xy}\alpha_{yy}) & 2(\alpha_{xx}\alpha_{yx} - \alpha_{xy}\alpha_{yy}) & 2(\alpha_{xx}\alpha_{yy} + \alpha_{xy}\alpha_{yx}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \underline{S} \quad (27)$$

1.4 Überprüfung der Berechnung

Um die Herleitung der Müllermatrix zu überprüfen, wird der Ramantensor von der Müllermatrix des Ramantensors hergeleitet. Der polare Stokesvektor \underline{S} wird mit den polaren Koordinaten des elektrischen Feldes \underline{E} nach den Umrechnungen in Abschnitt 1.1 dargestellt.

$$\underline{S} = \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = S_0 \begin{pmatrix} 1 \\ \cos(\sigma) \\ \sin(\sigma) \\ 0 \end{pmatrix} = E^2 \begin{pmatrix} 1 \\ \cos(2\varepsilon) \\ \sin(2\varepsilon) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (28)$$

Mit der Gleichung für den Ramanstreuprozess (Gl. 27) ergibt sich folgendes Gleichungssystem.

$$\begin{aligned}
 (III) \quad E^{R^2} &= 0.5(\alpha_{xx}^2 + \alpha_{yx}^2 + \alpha_{xy}^2 + \alpha_{yy}^2)E^2 + 0.5(\alpha_{xx}^2 + \alpha_{yx}^2 - \alpha_{xy}^2 - \alpha_{yy}^2)E^2 \cos(2\varepsilon) + (\alpha_{xy}\alpha_{xx} + \alpha_{yx}\alpha_{yy})E^2 \sin(2\varepsilon) \\
 (IV) \quad E^{R^2} \cos(2\varepsilon^R) &= 0.5(\alpha_{xx}^2 - \alpha_{yx}^2 + \alpha_{xy}^2 - \alpha_{yy}^2)E^2 + 0.5(\alpha_{xx}^2 - \alpha_{yx}^2 - \alpha_{xy}^2 + \alpha_{yy}^2)E^2 \cos(2\varepsilon) + (\alpha_{xy}\alpha_{xx} - \alpha_{yx}\alpha_{yy})E^2 \sin(2\varepsilon) \\
 (V) \quad E^{R^2} \sin(2\varepsilon^R) &= (\alpha_{xy}\alpha_{xx} + \alpha_{yx}\alpha_{yy})E^2 + (\alpha_{yx}\alpha_{xx} - \alpha_{xy}\alpha_{yy})E^2 \cos(2\varepsilon) + (\alpha_{xy}\alpha_{xx} + \alpha_{yx}\alpha_{yy})E^2 \sin(2\varepsilon)
 \end{aligned} \quad (29)$$

Die Komponenten des elektrischen Feldvektors lassen sich aus den Teilgleichungen (III) und (IV) ableiten.

Die erste Teilgleichung wird in die Form $E_x^{R^2} + E_y^{R^2}$ überführt, indem Gleichung (III) der Übersichtlichkeit halber durch E^2 geteilt wird und die rechte Seite so umsortiert, dass $1 - \cos(2\varepsilon)/2$ und $1 + \cos(2\varepsilon)/2$ ausgeklammert werden können.

$$\frac{E^{R^2}}{E^2} = (\alpha_{xx}^2 + \alpha_{yx}^2) \frac{1 + \cos(2\varepsilon)}{2} + (\alpha_{xy}^2 + \alpha_{yy}^2) \frac{1 - \cos(2\varepsilon)}{2} + (\alpha_{xy}\alpha_{xx} + \alpha_{yx}\alpha_{yy}) \sin(2\varepsilon)$$

Mit den trigonometrischen Umformungen in den Gleichungen 39 bis 41 wird die linke Seite vereinfacht und der Cosinus und Sinus in Funktionen überführt, die von ε , nicht von 2ε , abhängig sind. Die rechte Seite wird mit Gleichung 36 erweitert.

$$\frac{E^{R^2}[\cos^2(\varepsilon^R) + \sin^2(\varepsilon^R)]}{E^2} = (\alpha_{xx}^2 + \alpha_{yx}^2) \cos^2(\varepsilon) + (\alpha_{xy}^2 + \alpha_{yy}^2) \sin^2(2\varepsilon) + (\alpha_{xy}\alpha_{xx} + \alpha_{yx}\alpha_{yy}) \cdot 2 \cos(\varepsilon) \sin(\varepsilon)$$

Beide Seiten werden mit E^2 multipliziert und mit Hilfe der Gleichungen aus Abschnitt 1.1 werden die Polarkoordinaten in kartesische überführt.

$$E_x^{R^2} + E_y^{R^2} = (\alpha_{xx}^2 + \alpha_{yx}^2) E_x^2 + (\alpha_{xy}^2 + \alpha_{yy}^2) E_y^2 + (\alpha_{xy}\alpha_{xx} + \alpha_{yx}\alpha_{yy}) \cdot 2 E_x E_y \quad (30)$$

∞

Die rechte Seite wird umsortiert und mit der Binomischen Formel zusammengefasst.

$$\begin{aligned} E_x^{R^2} + E_y^{R^2} &= \alpha_{xx}^2 E_x^2 + 2\alpha_{xy}\alpha_{xx} E_x E_y + \alpha_{xy}^2 E_y^2 + \alpha_{yx}^2 E_x^2 + 2\alpha_{yx}\alpha_{yy} E_x E_y + \alpha_{yy}^2 E_y^2 \\ E_x^{R^2} + E_y^{R^2} &= (\alpha_{xx} E_x + \alpha_{xy} E_y)^2 + (\alpha_{yx} E_x + \alpha_{yy} E_y)^2 \end{aligned} \quad (31)$$

Die zweite Teilgleichung wird in die Form $E_x^{R^2} - E_y^{R^2}$ überführt, indem Teilgleichung (IV) (Gl. 29) der Übersichtlichkeit halber durch E^2 geteilt wird und die rechte Seite so umsortiert, dass $1 - \cos(2\varepsilon)/2$ und $1 + \cos(2\varepsilon)/2$ ausgeklammert werden können.

$$\frac{E^{R^2} \cos(2\varepsilon^R)}{E^2} = (\alpha_{xx}^2 - \alpha_{yx}^2) \frac{1 + \cos(2\varepsilon)}{2} + (\alpha_{xy}^2 - \alpha_{yy}^2) \frac{1 - \cos(2\varepsilon)}{2} + (\alpha_{xy}\alpha_{xx} - \alpha_{yx}\alpha_{yy}) \sin(2\varepsilon)$$

Die rechte Seite wird mit Gleichung 37 und die linke Seite mit den Gleichungen 39 bis 41 umgeformt. Diese trigonometrischen Beziehungen sorgen dafür, dass Sinus und Cosinus von ε , nicht von 2ε , abhängen. Anschließend wird mit E^2 multipliziert und die polaren Koordinaten nach Abschnitt 1.1 in kartesische überführt.

$$\frac{E^{R^2}[\cos^2(\varepsilon^R) - \sin^2(\varepsilon^R)]}{E^2} = (\alpha_{xx}^2 - \alpha_{yx}^2) \cos^2(\varepsilon) + (\alpha_{xy}^2 - \alpha_{yy}^2) \sin^2(\varepsilon) + (\alpha_{xy}\alpha_{xx} - \alpha_{yx}\alpha_{yy}) \cdot 2 \sin(\varepsilon) \cos(\varepsilon)$$

$$E_x^{R2} - E_y^{R2} = (\alpha_{xx}^2 - \alpha_{yx}^2)E_x^2 + (\alpha_{xy}^2 - \alpha_{yy}^2)E_y^2 + (\alpha_{xy}\alpha_{xx} - \alpha_{yx}\alpha_{yy}) \cdot 2E_yE_x$$

Die rechte Seite wird umsortiert und mit der Binomischen Formel zusammengefasst.

$$\begin{aligned} E_x^{R2} - E_y^{R2} &= \alpha_{xx}^2 E_x^2 + 2\alpha_{xy}\alpha_{xx}E_xE_y + \alpha_{xy}^2 E_y^2 - \alpha_{yx}^2 E_x^2 - 2\alpha_{yx}\alpha_{yy}E_xE_y - \alpha_{yy}^2 E_y^2 \\ E_x^{R2} - E_y^{R2} &= (\alpha_{xx}E_x + \alpha_{xy}E_y)^2 - (\alpha_{yx}E_x + \alpha_{yy}E_y)^2 \end{aligned} \quad (32)$$

Die dritte Teilgleichung wird in die Form $E_x^R \cdot E_y^R$ überführt, indem Teilgleichung (V) (Gl. 29) der Übersichtlichkeit halber durch E^2 dividiert und die rechte Seite so umsortiert wird, dass $1 - \cos(2\varepsilon)$ und $1 + \cos(2\varepsilon)$ ausgeklammert werden können.

$$\frac{E_x^{R2} \sin(2\varepsilon^R)}{E^2} = \alpha_{xx}\alpha_{yx}[1 + \cos(2\varepsilon)] + \alpha_{xy}\alpha_{yy}[1 - \cos(2\varepsilon)] + \alpha_{xx}\alpha_{yy} \sin(2\varepsilon) + \alpha_{xy}\alpha_{yx} \sin(2\varepsilon)$$

Die rechte Seite wird mit Gleichung 39 und die linke Seite mit den Gleichungen 39 bis 41 umgeformt. Diese trigonometrischen Beziehungen sorgen dafür, dass Sinus und Cosinus von ε , nicht von 2ε , abhängen. Anschließend wird mit E^2 multipliziert und die polaren Koordinaten nach Abschnitt 1.1 in kartesische überführt.

$$\begin{aligned} \frac{2E_x^{R2} \sin(\varepsilon^R) \cos(\varepsilon^R)}{E^2} &= \alpha_{xx}\alpha_{yx} \cdot 2\cos^2(\varepsilon) + \alpha_{xy}\alpha_{yy} \cdot 2\sin^2(\varepsilon) + \alpha_{xx}\alpha_{yy} \cdot 2\sin(\varepsilon) \cos(\varepsilon) + \alpha_{xy}\alpha_{yx} \cdot 2\sin(\varepsilon) \cos(\varepsilon) \\ 2E_x^R E_y^R &= 2\alpha_{xx}\alpha_{yx}E_x^2 + 2\alpha_{xx}\alpha_{yy}E_xE_y + 2\alpha_{xy}\alpha_{yx}E_xE_y + 2\alpha_{xy}\alpha_{yy}E_y^2 \end{aligned}$$

Die Summe auf der rechten Seite wird in ein Produkt überführt und beide Seiten halbiert.

$$E_x^R E_y^R = (\alpha_{xx}E_x + \alpha_{xy}E_y) \cdot (\alpha_{yx}E_x + \alpha_{yy}E_y) \quad (33)$$

Die Komponenten des elektrischen Feldvektors werden durch die Addition und Subtraktion von Gleichungen 31 und 32 berechnet. Die Multiplikation der beiden Gleichungen wird zeigen, dass Gleichung 33 wahr ist. Die Summe ergibt folgendes.

$$E_x^{R2} - E_y^{R2} + E_x^{R2} + E_y^{R2} = (\alpha_{xx}E_x + \alpha_{xy}E_y)^2 - (\alpha_{yx}E_x + \alpha_{yy}E_y)^2 + (\alpha_{xx}E_x + \alpha_{xy}E_y)^2 + (\alpha_{yx}E_x + \alpha_{yy}E_y)^2$$

Beide Seiten werden zusammengefasst, halbiert und die Quadratwurzel gezogen.

$$\begin{aligned} 2E_x^{R^2} &= 2(\alpha_{xx}E_x + \alpha_{xy}E_y)^2 \\ E_x^R &= \alpha_{xx}E_x + \alpha_{xy}E_y \quad \text{q.e.d.} \end{aligned} \tag{34}$$

Die Differenz ergibt folgendes.

$$E_x^{R^2} - E_y^{R^2} - E_x^{R^2} = (\alpha_{xx}E_x + \alpha_{xy}E_y)^2 - (\alpha_{yx}E_x + \alpha_{yy}E_y)^2 - (\alpha_{yx}E_x + \alpha_{yy}E_y)^2 - (\alpha_{yx}E_x + \alpha_{yy}E_y)^2$$

Beide Seiten werden zusammengefasst, halbiert, das Vorzeichen umgekehrt und die Quadratwurzel gezogen.

$$\begin{aligned} -2E_y^{R^2} &= -2(\alpha_{yx}E_x + \alpha_{yy}E_y)^2 \\ E_y^R &= \alpha_{yx}E_x + \alpha_{yy}E_y \quad \text{q.e.d.} \end{aligned} \tag{35}$$

Es wurde aus der Ramangleichung im Müllerformalismus die ursprüngliche Ramangleichung hergeleitet. Gleichzeitig ist ersichtlich das die Multiplikation der Gleichungen 34 und 35 die Gleichung 33 ergibt. Somit ist anzunehmen, dass die Ramangleichung im Müllerformalismus korrekt ist.

1.5 Ausgewählte trigonometrische Umformungen

Folgende Umformungen wurden verwendet. [1]

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \quad (36)$$

$$\cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x) \quad (37)$$

$$\sin(x) = \cos(x - \pi/2) \quad (38)$$

$$2 \cos(x) \sin(x) = \sin(2x) \quad (39)$$

$$\cos^2(x/2) = \frac{\cos(x) + 1}{2} \quad (40)$$

$$\sin^2(x/2) = \frac{1 - \cos(x)}{2} \quad (41)$$

2 Anwenden der Raman-Müller-Matrix auf partiell polarisierte Stokesvektoren

Problem:

Herleitung der Raman-Müller-Matrix erlaubt nur total polarisierte Stokesvektoren. Wie lässt sich die Ramanstreuung von partiell polarisierter Strahlung beschreiben?

Idee:

Partiell polarisierte Stokesvektoren \vec{S} in vollständig polarisierten Vektor \vec{P} und vollständig unpolarisierten Vektor \vec{U} zerlegen. Π ist der Polarisationsgrad.

Annahmen: $\Pi < 1$, $S_0 = 1$ und $S_3 = 0$.

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ S_1 \\ S_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (42)$$

$$\Pi = \frac{\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}}{S_0} = \frac{\sqrt{S_1^2 + S_2^2}}{S_0} \quad (43)$$

$$\vec{S} = \vec{P} + \vec{U} = \begin{pmatrix} \Pi \\ S_1 \\ S_2 \\ 0 \end{pmatrix} + (1 - \Pi) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (44)$$

Das total unpolarisierte Licht wird als Überlagerung von vielen total polarisierten Zuständen betrachtet. Jeder dieser Zustände wird einzeln auf die Raman-Müller-Matrix \mathbf{M} angewendet. Am Ende wird über alle gestreuten Vektoren gemittelt, um den gestreuten Vektor des unpolarisierten Lichts zu berechnen. Der Vektor $\vec{Q}(\sigma)$ liefert jeden

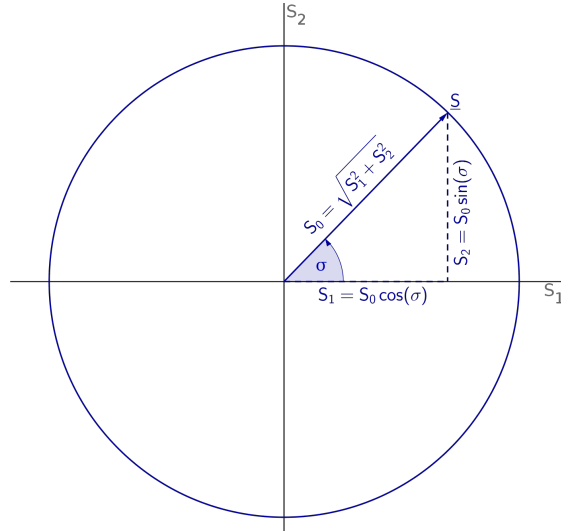


Abbildung 2: Polare Darstellung von vollständig linearpolarisierten Stokesvektoren.

möglichen total linearpolarisierten Stokesvektor (Abb. 2). Der Winkel σ ist die Winkelkomponente der polaren Darstellung von Stokesvektoren (Abb. 2).

$$\vec{Q}(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos(\sigma) \\ \sin(\sigma) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (45)$$

Der Mittelwert über n uniform verteilte Werte im Intervall $\sigma \in [0; 2\pi]$. $n, i \in \mathbb{N}$.

$$\mathbf{M}\vec{U} = \frac{1 - \Pi}{n} \sum_{i=0}^n \mathbf{M}\vec{Q}\left(\frac{i \cdot 2\pi}{n}\right) \quad (46)$$

Frage:

Was ist, wenn der Mittelwert nicht numerisch über einzelne Punkte sonder analytisch durch ein Integral gelöst wird? Die Definition von $\mathbf{M}\vec{U}$ ändert sich damit wie folgt:

$$\mathbf{M}\vec{U} = \frac{1 - \Pi}{n} \sum_{i=0}^n \mathbf{M}\vec{Q}\left(\frac{i \cdot 2\pi}{n}\right) \quad (47)$$

Mit $\int_a^b f(x)dx/b-a$ als Mittelwert einer Funktion im Intervall $[a; b]$.

$$\mathbf{M}\vec{U} = \frac{1 - \Pi}{2\pi - 0} \int_0^{2\pi} \mathbf{M}\vec{Q}(\sigma)d\sigma = \frac{1 - \Pi}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{M}\vec{Q}(\sigma)d\sigma \quad (48)$$

. Lässt sich der Ausdruck durch Lösen der Integrale vereinfachen oder die Gleichung $\vec{S} = \vec{P} + \vec{U}$? Die Müllermatrix besitzt die allgemeine Form

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{pmatrix} \quad (49)$$

. \mathbf{M} und $\vec{Q}(\sigma)$ in $\mathbf{M}\vec{U}$ einsetzen.

$$\mathbf{M}\vec{U} = \frac{1 - \Pi}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{M}\vec{Q}(\sigma) d\sigma \quad (50)$$

$$\mathbf{M}\vec{U} = \frac{1 - \Pi}{2\pi} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \cos(\sigma) \\ \sin(\sigma) \\ 0 \end{pmatrix} d\sigma \quad (51)$$

$$\mathbf{M}\vec{U} = \frac{1 - \Pi}{2\pi} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} m_{11} \cdot 1 + m_{12} \cdot \cos(\sigma) + m_{13} \cdot \sin(\sigma) + m_{14} \cdot 0 \\ m_{21} \cdot 1 + m_{22} \cdot \cos(\sigma) + m_{23} \cdot \sin(\sigma) + m_{24} \cdot 0 \\ m_{31} \cdot 1 + m_{32} \cdot \cos(\sigma) + m_{33} \cdot \sin(\sigma) + m_{34} \cdot 0 \\ m_{41} \cdot 1 + m_{42} \cdot \cos(\sigma) + m_{43} \cdot \sin(\sigma) + m_{44} \cdot 0 \end{pmatrix} d\sigma \quad (52)$$

Das Integral für jede Komponente lösen.

$$\mathbf{M}\vec{U} = \frac{1 - \Pi}{2\pi} \begin{pmatrix} \int_0^{2\pi} m_{11} \cdot 1 + m_{12} \cdot \cos(\sigma) + m_{13} \cdot \sin(\sigma) + m_{14} \cdot 0 d\sigma \\ \int_0^{2\pi} m_{21} \cdot 1 + m_{22} \cdot \cos(\sigma) + m_{23} \cdot \sin(\sigma) + m_{24} \cdot 0 d\sigma \\ \int_0^{2\pi} m_{31} \cdot 1 + m_{32} \cdot \cos(\sigma) + m_{33} \cdot \sin(\sigma) + m_{34} \cdot 0 d\sigma \\ \int_0^{2\pi} m_{41} \cdot 1 + m_{42} \cdot \cos(\sigma) + m_{43} \cdot \sin(\sigma) + m_{44} \cdot 0 d\sigma \end{pmatrix} \quad (53)$$

Da die Müllermatrix \mathbf{M} unabhängig von σ lassen sie sich vor die Integrale ziehen. Summanden werden zuerst integriert und dannach addiert.

$$\mathbf{M}\vec{U} = \frac{1 - \Pi}{2\pi} \begin{pmatrix} m_{11} \int_0^{2\pi} 1 d\sigma + m_{12} \int_0^{2\pi} \cos(\sigma) d\sigma + m_{13} \int_0^{2\pi} \sin(\sigma) d\sigma + m_{14} \int_0^{2\pi} 0 d\sigma \\ m_{21} \int_0^{2\pi} 1 d\sigma + m_{22} \int_0^{2\pi} \cos(\sigma) d\sigma + m_{23} \int_0^{2\pi} \sin(\sigma) d\sigma + m_{24} \int_0^{2\pi} 0 d\sigma \\ m_{31} \int_0^{2\pi} 1 d\sigma + m_{32} \int_0^{2\pi} \cos(\sigma) d\sigma + m_{33} \int_0^{2\pi} \sin(\sigma) d\sigma + m_{34} \int_0^{2\pi} 0 d\sigma \\ m_{41} \int_0^{2\pi} 1 d\sigma + m_{42} \int_0^{2\pi} \cos(\sigma) d\sigma + m_{43} \int_0^{2\pi} \sin(\sigma) d\sigma + m_{44} \int_0^{2\pi} 0 d\sigma \end{pmatrix} \quad (54)$$

Mit $\int_0^{2\pi} 1 dx = 2\pi$, $\int_0^{2\pi} \cos(x) dx = \int_0^{2\pi} \sin(x) dx = \int_0^{2\pi} 0 dx = 0$.

$$\mathbf{M}\vec{U} = \frac{1 - \Pi}{2\pi} \begin{pmatrix} 2\pi \cdot m_{11} + 0 \cdot m_{12} + 0 \cdot m_{13} + 0 \cdot m_{14} \\ 2\pi \cdot m_{21} + 0 \cdot m_{22} + 0 \cdot m_{23} + 0 \cdot m_{24} \\ 2\pi \cdot m_{31} + 0 \cdot m_{32} + 0 \cdot m_{33} + 0 \cdot m_{34} \\ 2\pi \cdot m_{41} + 0 \cdot m_{42} + 0 \cdot m_{43} + 0 \cdot m_{44} \end{pmatrix} = \frac{1 - \Pi}{2\pi} \begin{pmatrix} 2\pi \cdot m_{11} \\ 2\pi \cdot m_{21} \\ 2\pi \cdot m_{31} \\ 2\pi \cdot m_{41} \end{pmatrix} \quad (55)$$

$$\mathbf{M}\vec{U} = (1 - \Pi) \begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{21} \\ m_{31} \\ m_{41} \end{pmatrix} = (1 - \Pi) \cdot \mathbf{M} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (56)$$

Der Mittelwert über alle bzw. viele linear polarisierte Vektoren ist demnach:

$$\mathbf{M}\vec{U} = \frac{1 - \Pi}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{M}\vec{Q}(\sigma) d\sigma = (1 - \Pi) \cdot \mathbf{M} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (57)$$

. Das Anwenden der Raman-Müller-Matrix \mathbf{M} auf den unpolarisierten Teil des Stokesvektors liefert für eine beliebige Raman-Müller-Matrix das selbe Ergebnis wie die Mittelwertmethode.

Folglich muss das auch für das Anwenden der Raman-Müller-Matrix auf den Stokesvektor \vec{S} der Fall sein. das Anwenden von \mathbf{M} auf $\vec{S} = \vec{P} + \vec{U}$ vereinfacht sich damit wie folgt:

$$\mathbf{M}\vec{S} = \mathbf{M}\vec{P} + \mathbf{M}\vec{U} \quad (58)$$

$$\mathbf{M}\vec{S} = \mathbf{M}\vec{P} + (1 - \Pi) \cdot \mathbf{M} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (59)$$

$$\mathbf{M}\vec{S} = \mathbf{M} \left[\vec{P} + (1 - \Pi) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \mathbf{M} \left[\begin{pmatrix} \Pi \\ S_1 \\ S_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - \Pi \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \quad (60)$$

$$\mathbf{M}\vec{S} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} 1 \\ S_1 \\ S_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} \quad (61)$$

. Folglich können Raman-Müller-Matrizen auch auf partiell polarisierte Stokesvektoren angewendet werden.

Weitergedacht:

Das gleiche noch mal für vollständig polarisiertes Licht mit zirkular polarisierter Komponente.

Verallgemeinerung von Polarisationszustand auf Schnittkreis der Poincaré-Sphäre zu Punkt auf der Späre. Annahmen: $\Pi < 1$ und $S_0 = 1$.

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} \quad (62)$$

$$\Pi = \frac{\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}}{S_0} \quad (63)$$

$$\vec{S} = \vec{P} + \vec{U} = \begin{pmatrix} \Pi \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} + (1 - \Pi) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (64)$$

$$\vec{Q}(\sigma, \tau) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sin(\tau) \cos(\sigma) \\ \sin(\tau) \sin(\sigma) \\ \cos(\tau) \end{pmatrix} \quad \sigma \in [0, 2\pi], \tau \in [0, \pi] \quad (65)$$

$$\mathbf{M}\vec{U} = \frac{1 - \Pi}{2\pi^2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \mathbf{M}\vec{Q}(\sigma, \tau) d\sigma d\tau \quad (66)$$

$$(67)$$

Mit $\int_0^\pi \int_0^{2\pi} 1 d\sigma d\tau = 2\pi^2$ und $\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin(\tau) \cos(\sigma) d\sigma d\tau = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin(\tau) \sin(\sigma) d\sigma d\tau = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \cos(\tau) d\sigma d\tau = 0$.

$$\mathbf{M}\vec{U} = \frac{1 - \Pi}{2\pi^2} \begin{pmatrix} 2\pi^2 \cdot m_{11} \\ 2\pi^2 \cdot m_{21} \\ 2\pi^2 \cdot m_{31} \\ 2\pi^2 \cdot m_{41} \end{pmatrix} \quad (68)$$

$$\mathbf{M}\vec{U} = (1 - \Pi) \begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{21} \\ m_{31} \\ m_{41} \end{pmatrix} = (1 - \Pi) \cdot \mathbf{M} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (69)$$

Analog zur Überlegung oben, muss also für den allgemeinen Fall unpolarisierter Strahlung mit zirkularem Polarisationsanteil und einer beliebigen Raman-Müllermatrix die ursprüngliche Herleitung der Raman-Müllermatrix gelten. Hier wurde die Raman-Müllermatrix ohne zirkularem Anteil hergeleitet. Folglich vernichtet die Raman-Müllermatrix den zirkularen Polarisationsanteil der eingestrahnten Strahlung.

Literatur

- [1] I. Bronstein et al., *Taschenbuch der Mathematik*, 5. Auflage, Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt (a.M.), **2000**, S. 1191.