# Devoir maison exercice 28 et 29

Etienne Thomas

September 8, 2024

## Exercice 28:

1) $f$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f : x \mapsto x + \frac{1}{x}$. Prouvons que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) \geq 2$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $(x-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + 1 \geq 2x$$

$$\boxed{\Leftrightarrow x + \tfrac{1}{x} \geq 2}$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) \geq 2$.

2) Montrons que $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

On sait que

$$f(\frac{a}{b}) = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$$

et que

$$f(\frac{a}{b}) \geq 2$$

Donc

$$\boxed{\tfrac{a}{b} + \tfrac{b}{a} \geq 2}$$

.

Par conséquent, $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ est verifié.

## Exercice 29:

1) On cherche a montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+, x - \frac{1}{2}x^2 \leq ln(1+x)$. Pour cela, on étudie la fonction $f : x \mapsto ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$.

$ln(x+1)$ est definie et derivable sur $\mathbb{R}_+$, $x - \frac{x^2}{2}$ est un polynome, donc il est défini et dérivable sur $\mathbb{R}$. Par somme, $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, de dérivée:

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 + x$$

$$f'(x) = \frac{x^2}{1+x}$$

$x \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow x^2 \geq 0$ et $x + 1 > 0$, donc $f'(x) \geq 0$. Par conséquent $f$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

$$\Leftrightarrow (a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2, a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$$

Posons $a = 0$ et $b = x$, on a:

$$f(0) = ln(1) - 0 + 0 = 0$$

$$f(0) \leq f(x) \Leftrightarrow 0 \leq f(x)$$

Par conséquent, $\forall x \in \mathbb{R}_+, x - \frac{1}{2}x^2 \leq ln(1 + x)$.