

Devoir maison exercice 28 et 29

Etienne Thomas

September 8, 2024

Exercice 28 :

1) f est une fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par $f : x \mapsto x + \frac{1}{x}$. Prouvons que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) \geq 2$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $(x - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + 1 \geq 2x$$

$$\boxed{\Leftrightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2}$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) \geq 2$.

2) Montrons que $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

On sait que

$$f\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$$

et que

$$f\left(\frac{b}{a}\right) \geq 2$$

Donc

$$\boxed{\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2}$$

· $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ est vérifié.