Devoir maison exercice 28 et 29

Etienne Thomas

September 10, 2024

Exercice 28:

1) f est une fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f : x \mapsto x + \frac{1}{x}$. Prouvons que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) \geq 2$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $(x-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + 1 \geq 2x$$

$$\boxed{\Leftrightarrow x + \tfrac{1}{x} \geq 2}$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) \geq 2$.

2) Montrons que $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

On sait que

$$f(\frac{a}{b}) = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$$

et que

$$f(\frac{a}{b}) \geq 2$$

Donc

$$\boxed{\tfrac{a}{b} + \tfrac{b}{a} \geq 2}$$

.

Par conséquent, $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ est verifié.

Exercice 29:

1) On cherche a montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+, x - \frac{1}{2}x^2 \leq ln(1+x) \leq x$. Pour cela, on étudie la fonction $f : x \mapsto ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$.

$ln(x+1)$ est definie et derivable sur $\mathbb{R}_+$, $x - \frac{x^2}{2}$ est un polynome, donc il est défini et dérivable sur $\mathbb{R}$. Par somme, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, de dérivée:

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 + x$$

$$f'(x) = \frac{x^2}{1+x}$$

$x \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow x^2 \geq 0$ et $x+1 > 0$, donc $f'(x) \geq 0$. Par conséquent f est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

$$\Leftrightarrow (a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2, a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$$

Posons $a = 0$ et $b = x$, on a:

$$f(0) = ln(1) - 0 + 0 = 0$$

$$f(0) \leq f(x) \Leftrightarrow 0 \leq f(x)$$

On procède de la même manière pour comparer $ln(1+x)$ et x. Soit $g : x \mapsto x - ln(1+x)$. g estla somme de $ln(x+1)$ et de l'identité, elle donc dérivable sur $\mathbb{R}_+$

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x}$$

$$= \frac{x}{1+x}$$

$x \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow x \geq 0$ et $x+1 > 0$, donc $\boxed{g'(x) \geq 0}$. $g(0) = 0 - ln(1) = 0$, donc $g(0) \leq g(x) \Leftrightarrow 0 \leq g(x)$.

Par conséquent, $\forall x \in \mathbb{R}_+, x - \frac{1}{2}x^2 \leq ln(1+x) \leq x$.

2) Cherchons la limite de $ln((1+\frac{x}{n})^n)$ quand n tend vers $+\infty$.

$$ln((1+\frac{x}{n})^n) = nln(1+\frac{x}{n})$$

En utilisant l'inégualité de la question 1, on a:

$$n(\frac{x}{n} - \frac{(\frac{x}{n})^2}{2}) \leq nln(1+\frac{x}{n}) \leq n\frac{x}{n}$$

$$x - \frac{x^2}{2n} \leq nln(1+\frac{x}{n}) \leq x$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} x - \frac{x^2}{2n} = x$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x = x$ donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} nln(1+\frac{x}{n}) = x$.

donc par composition: $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{nln(1+\frac{x}{n})} = e^x$, donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} (1+\frac{x}{n})^n = e^x}$.