# Kort om kastparabler, projektiler och raketer

Berkant Savas

Många fysikaliska fenomen inom natur och tillämpningar kan beskrivas och modelleras genom ordinära differentialekvationer (ODE). Vi ska i detta dokument undersöka några ekvationer för modellproblem som kommer från Newtons kraft- och rörelselagar.

## 1 Modellering av rörelse

Vi kommer att undersöka tre olika fysikaliska modeller som beskriver rörelsen av ett föremål under inverkan av olika krafter. Vi vet att ett föremål som rör sig följer Newtons lagar. Speciellt intressant för denna uppgift är Newtons andra lag, *accelerationslagen*,

$$\mathbf{F} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt},$$

där kraften $\mathbf{F}$, som verkar på ett föremål, är lika med förändringen i rörelsemängd. Rörelsemängden ges av massan gånger hastigheten, $m\mathbf{v}$, och dess förändring blir tidsderivatan $d(m\mathbf{v})/dt$. Om vi antar att massan $m$ inte förändras över tid får vi

$$\mathbf{F} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a}, \tag{1}$$

där $\mathbf{a}$ är föremålets acceleration. Notera att storheterna $\mathbf{F}$, $\mathbf{v}$, och $\mathbf{a}$ är vektorstorheter. Vi ser vidare att rörelseekvation (1) är en differentialekvation då accelerationen är andraderivatan av positionen.

Vi kommer att undersöka tre olika fall av rörelsekvationen:

1. Rörelse av ett föremål där luftmotstånd försummas, och inga externa krafter verkar på föremålet förutom gravitationen.
2. Sedan kommer vi att introducera luftmotstånd, som är proportionell mot hastigheten.
3. Slutligen kommer vi att betrakta ett variabel-mass system med kvadratiskt luftmotstånd. Detta är ett typiskt fall vid raketuppskjutning eftersom massan av raketen förändras genom att raketbränsle förbränns och skjuts ut från motorn med hög fart.

## 2 Kastparabler—rörelse i gravitationsfält utan luftmotstånd

I det enklaste fallet bortser vi från luftmotståndet, och låter endast tyngdkraften verka på föremålet. Vi får

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\mathbf{g}, \tag{2}$$

där $\mathbf{g}$ är tyngdaccelerationen. Förenkling av (2) ger $\mathbf{a} = \mathbf{g}$ och delar vi upp den i $x$- och $y$-komponenter får vi

$$\mathbf{a} = \mathbf{g} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

där $g \approx 9.82$ m/s$^2$ är vertikalkomponenten av tyngdaccelerationen[1]. Skriver vi ekvationerna i termer av de sökta funktionerna $x(t)$ och $y(t)$ får vi

$$a_x = x''(t) = 0, \tag{3}$$
$$a_y = y''(t) = -g. \tag{4}$$

Analytiska lösningar för (3) och (4) hittas enkelt! Integrera två gånger! I $x$-led får vi

$$x''(t) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x'(t) = k_1 \quad \Longleftrightarrow \quad x(t) = k_1 t + k_2,$$

där $k_1$ och $k_2$ är koefficienter från integrationen som kan bestämmas med hjälp av villkor för någon position och hastighet vid någon tidpunkt. På samma sätt får vi lösningen i $y$-led enligt

$$y''(t) = -g \quad \Longleftrightarrow \quad y'(t) = -gt + k_3 \quad \Longleftrightarrow \quad y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + k_3 t + k_4,$$

där $k_3$ och $k_4$ är nya integrationskoefficienter. Låt oss använda begynnelsevillkoren

$$x(0) = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad x'(0) = v_0\cos(\alpha), \qquad y'(0) = v_0\sin(\alpha). \tag{5}$$

Detta betyder att positionen för kulan vid $t = 0$ är origo, samt kulan har farten[2] $v_0$ m/s i en riktning som bildar vinkeln $\alpha$ från $x$-axeln. Även detta vid $t = 0$. Begynnelsevillkoren (5) ger $k_2 = k_4 = 0$ samt

$$k_1 = v_0\cos(\alpha), \qquad k_3 = v_0\sin(\alpha).$$

Lösningen till ekvation (3) och (4) med begynnelsevillkor (5) blir därmed

$$x(t) = v_0\cos(\alpha)t, \tag{6}$$
$$y(t) = v_0\sin(\alpha)t - \frac{g}{2}t^2. \tag{7}$$

## 3 Projektiler—rörelse i gravitationsfält med luftmotstånd

Det finns två förhållandevis enkla sätt att modellera luftmotståndet och därmed hitta mer realistiska lösningar. Kraften för luftmotståndet kan modelleras som linjärt proportionellt eller

[1] Tyngdacceleration $g$ varierar beroende på var någonstans man är, och i Sverige (Norrköping) är $g = 9.82$ en bra approximation.
[2] Vad är det för skillnad mellan fart och hastighet?

kvadratiskt proportionellt mot hastigheten. I båda fallen verkar kraften från luftmotståndet i motsatt riktning som föremålet rör sig. Med linjärt luftmotstånd får vi ekvationen

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} - k\mathbf{v}, \tag{8}$$

där $\mathbf{v}$ är föremålets hastighet och $k$ är en konstant som modellerar övriga faktorer (t.ex. fluidens densitet, area och ytform av föremålet) i kraften från luftmotståndet. Vi kan återigen skiva om ekvationen komponentvis och får

$$a_x = x''(t) = -\frac{k}{m}x'(t), \tag{9}$$

$$a_y = y''(t) = -\frac{k}{m}y'(t) - g. \tag{10}$$

Notera att differentialekvationerna (9) och (10) är linjära och inte kopplade till varandra. Dessa kan lösas analytiskt för att erhålla explicita uttryck för $x(t)$ och $y(t)$.

# 4 Rörelseekvation för raketer

Låt oss nu betrakta en raket! Eftersom raketmotorer förbränner bränsle, som skjuts ut i någon riktning, kommer massan av raketen inte att vara konstant, utan den kommer att ändras med tiden, alltså $m = m(t)$. Vi får därmed ett variabel-mass system. Genom att använda Newtons tredje lag, *impulslagen*, kan man visa att följande ekvation gäller

$$m(t)\mathbf{a} = \mathbf{F} + m'(t)\mathbf{u}, \tag{11}$$

där $m(t)\mathbf{a}$ beskriver den totala accelerationskraften på raketen, $\mathbf{F}$ anger summan av de externa krafter som verkar på raketen (gravitation och luftmotstånd), och $m'(t)\mathbf{u}$ beskriver kraften raketen utsätts för genom att partiklar (bränsle) skjuts ut från raketen. Hastighetsvektorn

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} u_x(t) \\ u_y(t) \end{pmatrix},$$

är en funktion av $t$ och anger riktning och fart av bränslet som skjuts ut från raketen. $\mathbf{u}(t)$ kan antas vara en känd funktion som piloten kan använda för att styra raketen i en önskad bana. Antag vidare att masspartiklarna har en konstant fart $k_{\mathrm{m}}$ ut från motorn, fysikaliskt innebär detta att raketmotorn går på full kraft. Om vi däremot förutsätter att motorns riktning kan ändras eller styras fritt får vi följande form på $\mathbf{u}(t)$

$$\|\mathbf{u}(t)\| = k_{\mathrm{m}}, \quad \text{samt} \quad \mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} u_x(t) \\ u_y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{\mathrm{m}}\cos(\theta(t)) \\ k_{\mathrm{m}}\sin(\theta(t)) \end{pmatrix}.$$

där $\theta$ anger riktningen[3] för raketmotorn. Notera att $\theta(t)$ anger vinkeln från positiva $x$-axeln och är en funktion som kan ändras med tiden. För att få en kraft uppåt måste partiklarna skjutas rakt ner. Detta ger vinkeln $\theta = -\pi/2$ (eller $\theta = 3\pi/2$ om du vill).

Vi förutsätter vidare att $m(t)$ och dess derivata $m'(t)$ är kända funktioner. Kombinerar vi ekvation (11) med krafter för gravitation och luftmotstånd får vi

$$m(t)\mathbf{a} = m(t)\mathbf{g} - c\|\mathbf{v}\|\mathbf{v} + m'(t)\mathbf{u}, \tag{12}$$

[3] Detta är riktningen som förbränningsgaserna skjuts ut i från raketmotorn.

där $c$ är en ny proportionalitetskonstant. Notera att vi, i detta fall, modellerar luftmotståndet med $c\|\mathbf{v}\|\mathbf{v}$, som är kvadratiskt proportionell mot farten. Division med $m(t)$ och komponentvis uppdelning ger

$$a_x = x''(t) = -\frac{c}{m(t)}\sqrt{(x')^2 + (y')^2}x' + \frac{m'(t)}{m(t)}u_x(t), \tag{13}$$

$$a_y = y''(t) = -\frac{c}{m(t)}\sqrt{(x')^2 + (y')^2}y' + \frac{m'(t)}{m(t)}u_y(t) - g, \tag{14}$$

där vi använder $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}$. Vi ser att ekvationerna är kopplade till varandra på ett ickelinjärt sätt. Jämför även (13) och (14) med ekvationerna i Exempel 14.7 i Jönsson [1].

## Referenser

[1] P. Jönsson. *MATLAB-beräkningar inom teknik och naturvetenskap*. Studentlitteratur, 2010.