Введение

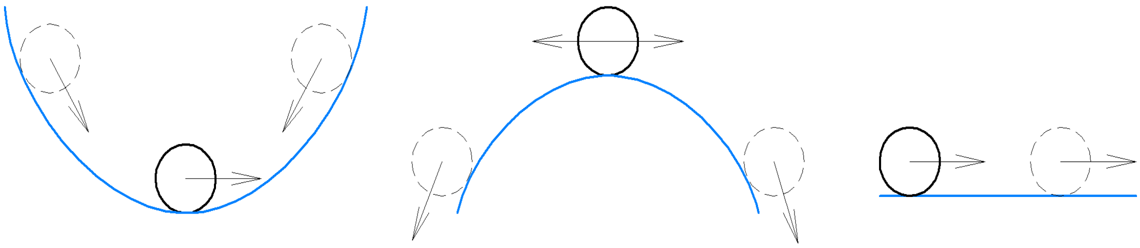
Устойчивость - свойство САР(системы автоматического регулирования) возвращаться к устойчивому установившемуся режиму после оказания внешнего воздействия.

Различают 3 вида устойчивости:

а. Устойчивое

б. Не устойчивое

в. Граница устойчивости



а)

б)

в)

Устойчивость САР оценивается по:

1. Статическим характеристикам
2. По экспериментально полученным переходным процессам
3. По математическому описанию

Условие устойчивости по математическому описанию САР

$$\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = 0$$

$$\lim_{t\to\infty} \omega(t) = 0$$

$$\varphi(t) = C * e^{pt},$$

где p - корни характеристического уравнения.

Характеристическое уравнение САР

$$a(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n$$

В текущей работе будет рассмотрена система 3-го порядка

$$a(p) = A_3 p^3 + A_2 p^2 + A_1 p + A_0$$

Параметры хар.уравнения

$$A_3 = Tp^2 Td$$

$$A_2 = Tp^2 + TkTd$$

$$A_1 = Tk + Td$$

$$A_0 = 1 + Kp1Kd1$$

Оценка устойчивости САР по расположению корней характеристического уравнения.

Для устойчивости САР необходимо и достаточно, чтобы все корни лежали в левой полуплоскости плоскости корней. Условие выполняется если корни отрицательны или комплексно сопряженные с отрицательной вещественной частью

$$\varphi_{\text{пер}}(t) = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} + C_3 e^{p_3 t} = \frac{C_1}{e^t} + \frac{C_2}{e^{2t}} + \frac{C_3}{e^{3t}}$$

Для систем высоких порядков нахождение корней становится трудоемким и желательно знать признаки устойчивости САР без нахождения корней характеристического уравнения.

Критерии устойчивости

1. Критерий устойчивости Рауса-Гурвица
2. Оценка устойчивости и характера переходного процесса по диаграмме Вышнеградского
3. Критерий устойчивости Михайлова
4. Следствие из критерия устойчивости Михайова
5. Критерий устойчивости Найквиста
6. Синтез САР по устойчивости по методу D-разбиения

Исходные данные:

$$Tp = 0.0014$$
$$Tk = 0.23$$
$$Kp1 = 4$$
$$Td = 2$$
$$Kd1 = 1$$
$$\downarrow$$
$$A_3 = 0.0028\,c^3$$
$$A_2 = 0.4614\,c^2$$
$$A_1 = 2.23\,c$$
$$A_0 = 5$$

1. Критерий устойчивости **Рауса-Гурвица**.

Для устойчивости САР необходимо, чтобы все коэффициенты были положительны и достаточно, чтобы были положительны n определителей Гурвица Необходимое условие

$$A_3 > 0, A_2 > 0, A_1 > 0, A_0 > 0$$

Матрица Гурвица Пусть дан полином с вещественными коэффициентами:

$$a(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n$$

Тогда квадратичная матрица n * n

$$H = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_1 & a_3 & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_0 & a_2 & \ddots & & & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & a_1 & & \ddots & & a_n & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & a_0 & & & \ddots & a_{n-1} & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & & & & a_{n-2} & a_n & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & a_{n-3} & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & a_{n-4} & a_{n-2} & a_n \end{pmatrix}$$

Называется **матрицей Гурвица**, соответствующей полиному a(p)
Миноры

$$\Delta_1(p) = \begin{vmatrix} a_1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2(p) = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3(p) = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}$$

вида $\Delta_k(p)$ называются **определителями Гурвица**. Для устойчивости САР достаточно, чтобы первые n определителей Гурвица были положительны Для наших входных параметров имеем:

$$\Delta_1(p) = \begin{vmatrix} 0.4614 \end{vmatrix} = 0.46$$

$$\Delta_2(p) = \begin{vmatrix} 0.4614 & a5 \\ 0.0028 & 2.23 \end{vmatrix} = 1.01$$

$$\Delta_3(p) = \begin{vmatrix} 0.4614 & 5 & 0 \\ 0.0028 & 2.23 & 0 \\ 0 & 0.4614 & 5 \end{vmatrix} = 5.07$$

По критерию Рауса-Гурвица **САР устойчива**.

2. Оценка устойчивости и характера переходного процесса по **диаграмме Вышнеградского**.

Для использования данного метода преобразуем выражение:

$$A_3\frac{d^3\varphi}{dt^3}+A_2\frac{d^2\varphi}{dt^2}+A_1\frac{d\varphi}{dt}+A_0\varphi=0$$

1. Делим все слагаемые на A3:

$$\frac{d^3\varphi}{dt^3}+\frac{A_2}{A_3}\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{A_1}{A_3}\frac{d\varphi}{dt}+\frac{A_0}{A_3}\varphi=0$$

2. Вводим новую переменную:

$$t=q\tau$$

где t - время, q - масштабный коэффициент, τ - время

$$\frac{d^3\varphi}{q^3d\tau^3}+\frac{A_2}{A_3}\frac{d^2\varphi}{q^2d\tau^2}+\frac{A_1}{A_3}\frac{d\varphi}{qdt}+\frac{A_0}{A_3}\varphi=0$$

3. Умножаем на q^3:

$$\frac{d^3\varphi}{d\tau^3}+q\frac{A_2}{A_3}\frac{d^2\varphi}{d\tau^2}+q^2\frac{A_1}{A_3}\frac{d\varphi}{dt}+q^3\frac{A_0}{A_3}\varphi=0$$

При этом подбираем масштабный коэффициент q так, чтобы выполнялось равенство

$$\int\frac{A_0}{A_3}q^3=1\Rightarrow q=\sqrt[3]{\frac{A_3}{A_0}}$$

4. Уравнение в нормированном виде:

$$\frac{d^3\varphi}{d\tau^3}+\sqrt[3]{\frac{A_3}{A_0}}\frac{A_2}{A_3}\frac{d^2\varphi}{d\tau^2}+\sqrt[3]{\frac{A_3^2}{A_0^2}}\frac{A_1}{A_3}\frac{d\varphi}{dt}+\varphi=0$$

Критерии подобия переходного процесса:

$$\chi=\frac{A_2}{\sqrt[3]{A_3^2A_0}},\xi=\frac{A_1}{\sqrt[3]{A_3A_0^2}}$$

Итоговое уравнение

$$p^3+\chi p^2+\xi p+1=0$$

Достаточное условие

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}a1 & a3\\ a0 & a2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\chi & 1\\ 1 & \xi\end{vmatrix}$$

САР устойчива: $\Delta_2>0$

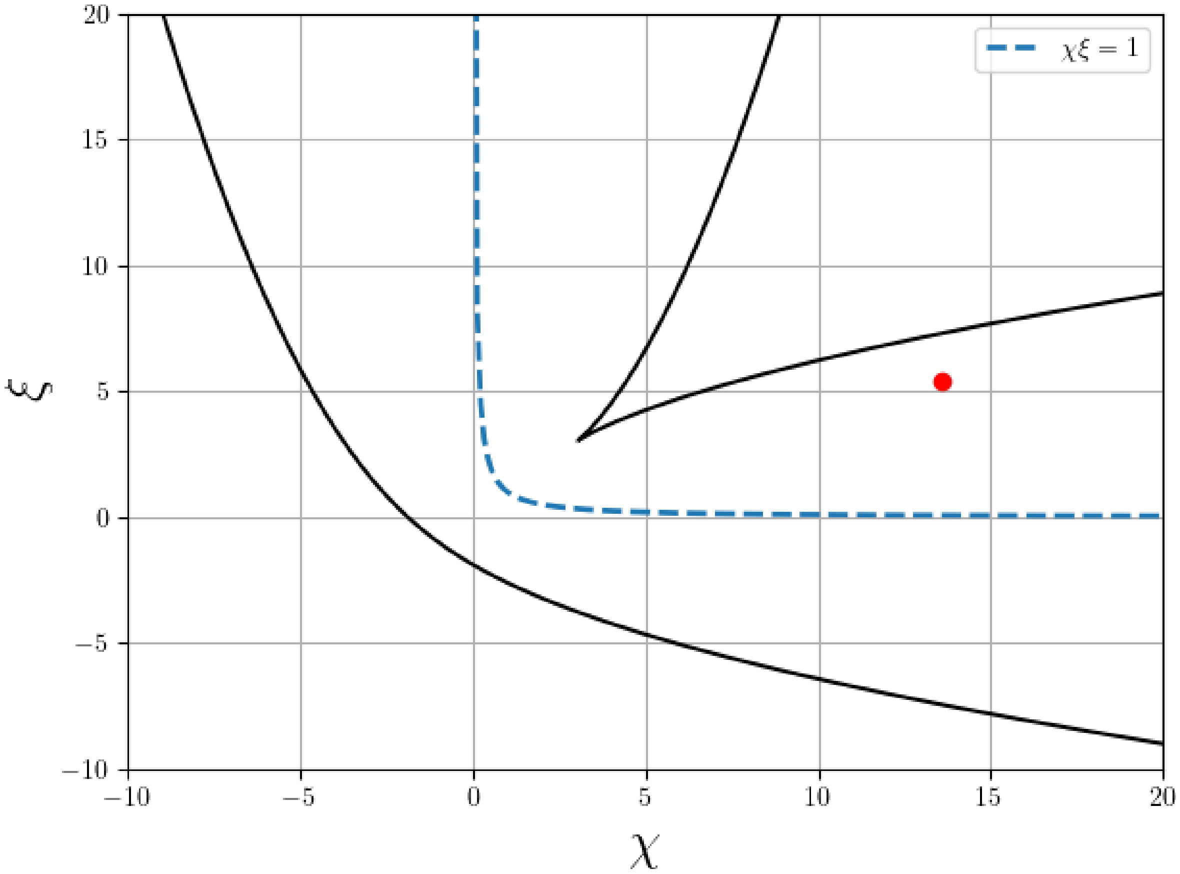
САР на границе устойчивости: $\Delta_2=0$

САР не устойчива: $\Delta_2<0$

Для наших данных получаем:

$$\chi = 5.41$$

$$\xi = 13.58$$



Так как мы находимся выше кривой $\chi\xi = 1$ **САР устойчива**.

3. **Критерий Михайлова**.

Чтобы САР (замкнутая или разомкнутая) была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы годограф $a(i\omega)$ при изменении ω от 0 до ∞ переходил поочередно из квадранта в квадрант против часовой стрелки, совершив при этом поворот на угол $\frac{\pi}{2}\cdot$ n, где n- степень полинома $a(i\omega)$

Для этого в наше уравнение подставим $p = i\omega$

$$a(p) = A_3p^3 + A_2p^2 + A_1p + A_0$$

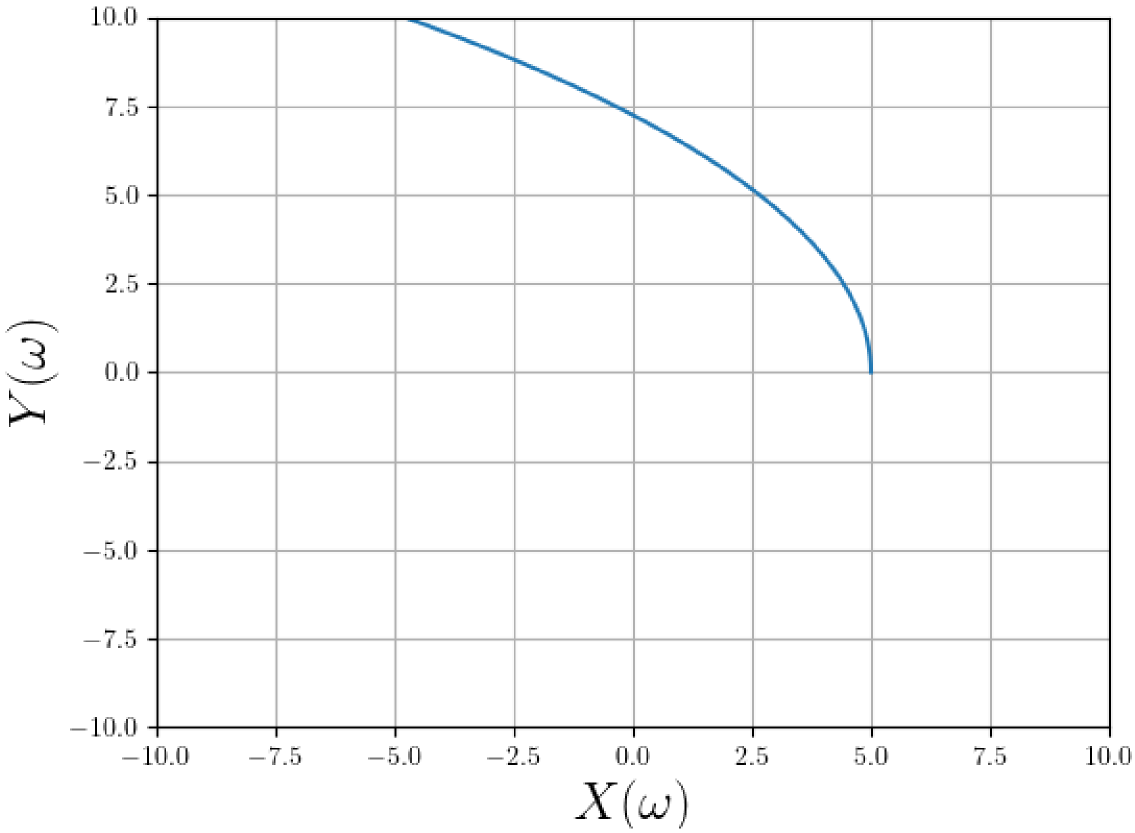
$$a(i\omega) = -iA_3\omega^3 - A_2\omega^2 + iA_1\omega + A_0 = 0$$

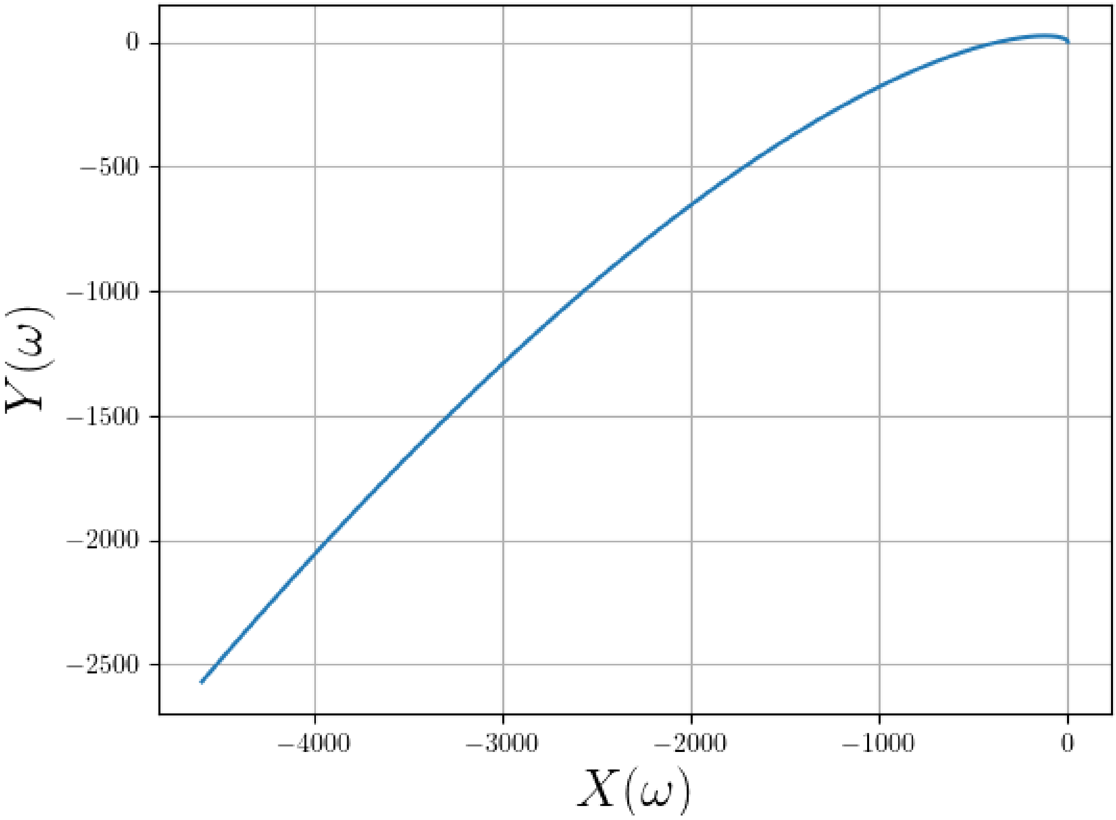
Представим уравнение в виде:

$$a(i\omega) = X(\omega) + iY(\omega)$$

Тогда получим:

$$\begin{cases} X(\omega) = -A_2\omega^2 + A_0 \\ Y(\omega) = -A_3\omega^3 + A_1\omega \end{cases}$$





Наш полином имеет 3 порядок, у которого годограф $a(i\omega)$ проходит через 3 квадранта и совершает поворот на $\frac{3\pi}{2}$.
Соответственно по критерию Михайлова **САР устойчива**.

4. Следствие из критерия Михайлова
Для систем высокого порядка построение кривой Михайлова становится очень трудоёмким. Для устойчивой САР необходимо и достаточно, чтобы при изменении $\omega = 0 \dots \infty$ корни вещественной $X(\omega)$ и мнимой $Y(\omega)$ частей вектора $a(i\omega)$ последовательно чередовались

Следовательно, должно выполнятся соотношение

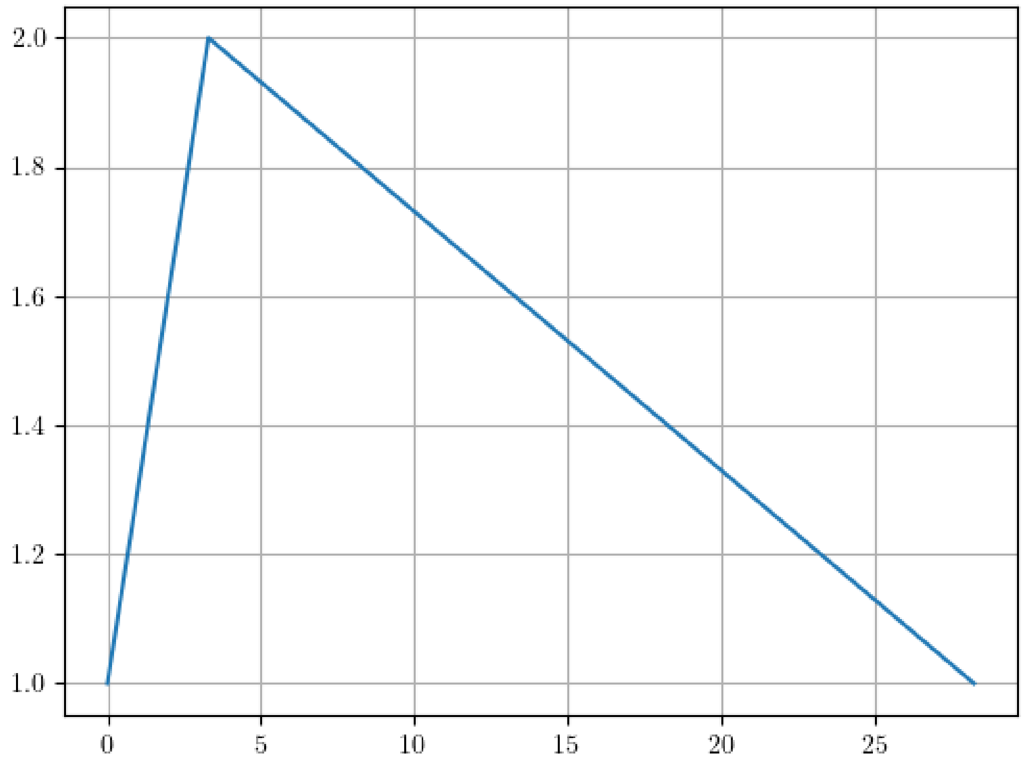
$$\omega_{x1} < \omega_{y1} < \omega_{x2} < \omega_{y2} < \dots$$

Для САР 3-го порядка:

$$a(i\omega) = X(\omega) + iY(\omega)$$

$$\begin{cases} X(\omega) = -A_2\omega^2 + A_0 \\ Y(\omega) = -A_3\omega^3 + A_1\omega \end{cases}$$

Тогда получим: $\omega_{x1} = 0$, $\omega_{y1} = \sqrt[2]{\frac{A_0}{A_2}}$, $\omega_{x2} = \sqrt[2]{\frac{A_1}{A_3}}$



Корни системы вещественной и мнимой частей чередуются.
Соответственно по следствию из критерия Михайлова **САР устойчива**.

5. Критерий устойчивости **Найквиста**.

Позволяет оценить устойчивость замкнутой САР по виду АФЧХ соответствующей ей разомкнутой САР. Для устойчивости замкнутой САР необходимо и достаточно, чтобы при $\omega = 0 \ldots \infty$ ψ_1 вектора $a_1(i\omega)$ составлял $\psi_1 = l_p * \pi$ в положительном направлении(против часовой стрелки), где l_p число корней зарактеристического уравнения разомкнутой САР расположенной в правой полуплоскости на плоскости корней

$$W(p) = \frac{K_1 K_1}{\underbrace{A_3 p^3 + A_2 p^2 + A_1 p + A_0}_{\text{Хар.многочлен замкнутой САР}}}$$

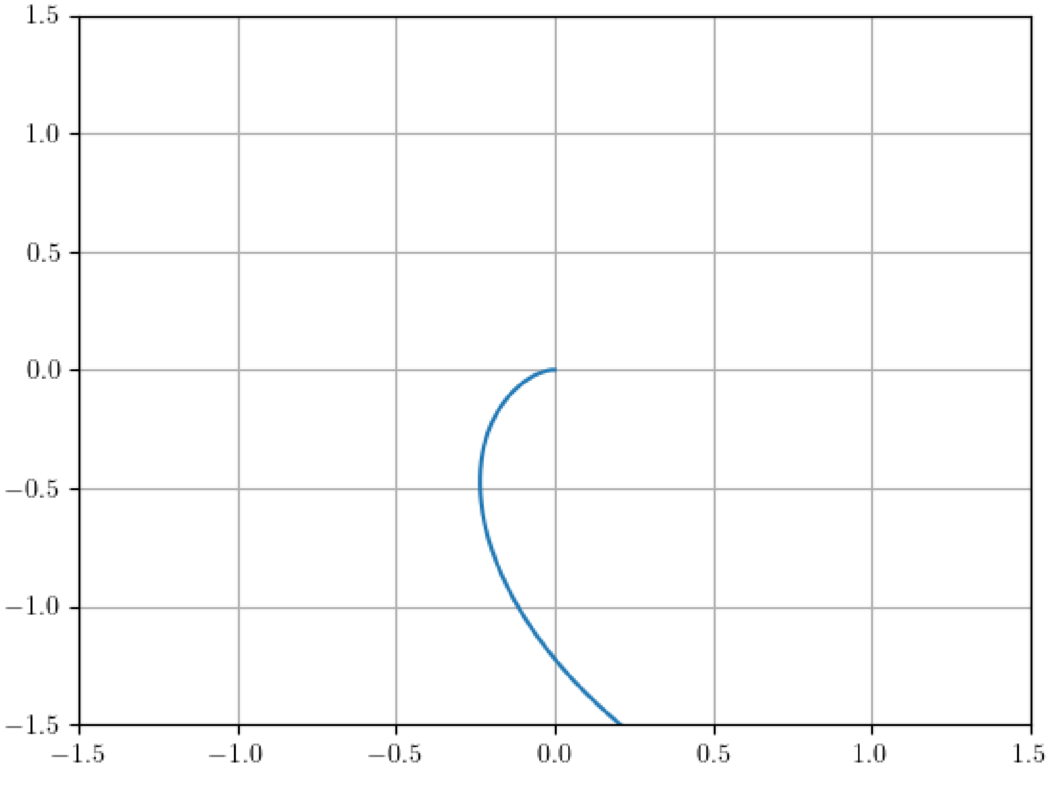
$$W(p) = \frac{K_1 K_1}{\underbrace{A_3 p^3 + A_2 p^2 + A_1 p + 1}_{\text{Хар.многочлен разомкнутой САР}}}$$

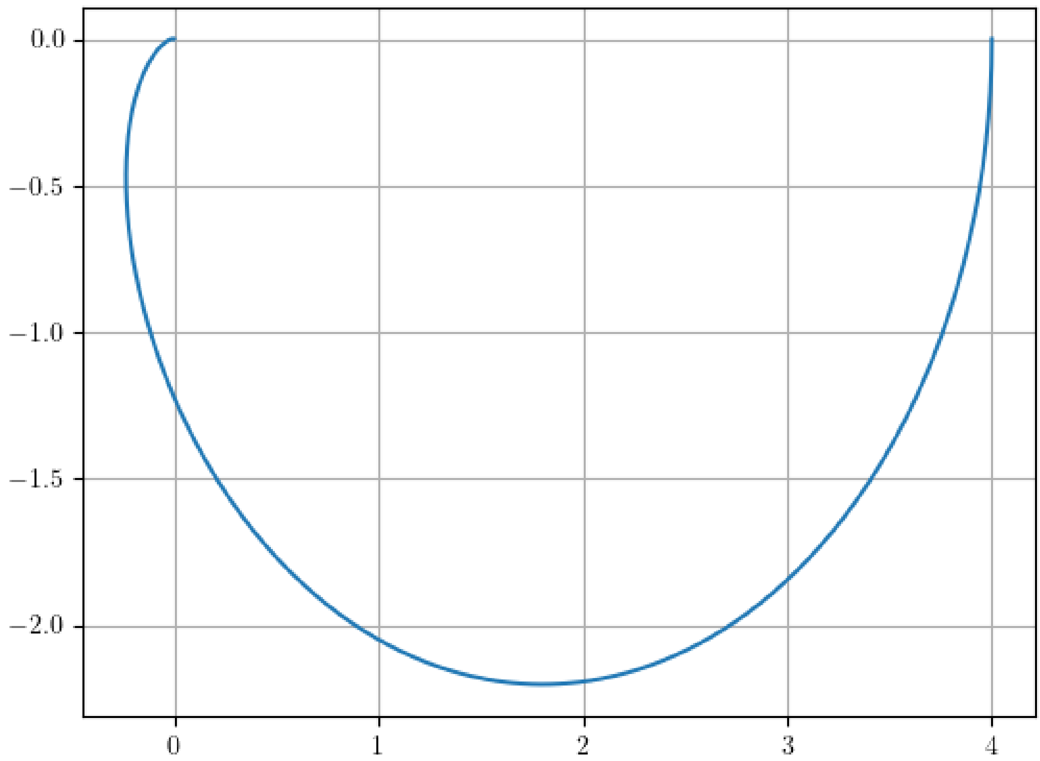
Подставим в уравнение разомкнутой САР $p = i\omega$, домножив на комплексно-сопряжённое

$$W(i\omega) = \frac{K_1 K_1}{-A_3\omega^3 - A_2\omega^2 + iA_1\omega + 1} * \frac{1 - A_2\omega^2 - i(A_1\omega - A_3\omega^3)}{1 - A_2\omega^2 - i(A_1\omega - A_3\omega^3)}$$

Получим

$$W(i\omega) = \underbrace{\frac{K_1 K_1 * (1 - A_2\omega^2)}{(1 - A_2\omega^2)^2 + (A_1\omega - A_3\omega^3)^2}}_{U(\omega)} + i\underbrace{\frac{-K_1 K_1 * (A_1\omega - A_3\omega^3)}{(1 - A_2\omega^2)^2 + (A_1\omega - A_3\omega^3)^2}}_{V(\omega)}$$





В нашем случае можем воспользоваться упрощенной формой для случая устойчивой **разомкнутой САР**.
Для устойчивости САР необходимо и достаточо, чтобы АФЧХ разомкнутой САР не охватывала точку (-1, 0).

В нашем случае АФЧХ не охватывает точку (-1, 0), соответственно **САР устойчива**.

6. Синтез САР по устойчивости по методу **D-разбиения(1 параметр)**.

Данный метод отностистя к методам синтеза, которые нужны для опредления структуры или параметров САР из требований к системе.

Примем $K_{p1} = \lambda$ как неизвестный параметр, необходимо найти диапазон значений, который обеспечит устойчивую работу нашей системы Запишем развернутое характеристической уравнение

$$\underbrace{T_p^2 T_d}_{A_3} p^3 + \underbrace{(T_p^2 + T_k T_d)}_{A_2} p^2 + \underbrace{(T_k T_d)}_{A_1} p + 1 + K_{p1} K_{d1} = 0$$

Подставив λ вместо K_{p1} получим

$$T_p^2 T_d p^3 + (T_p^2 + T_k T_d) p^2 + (T_k T_d) p + 1 + \lambda K_{d1} = 0$$

Выразим $\lambda(p)$

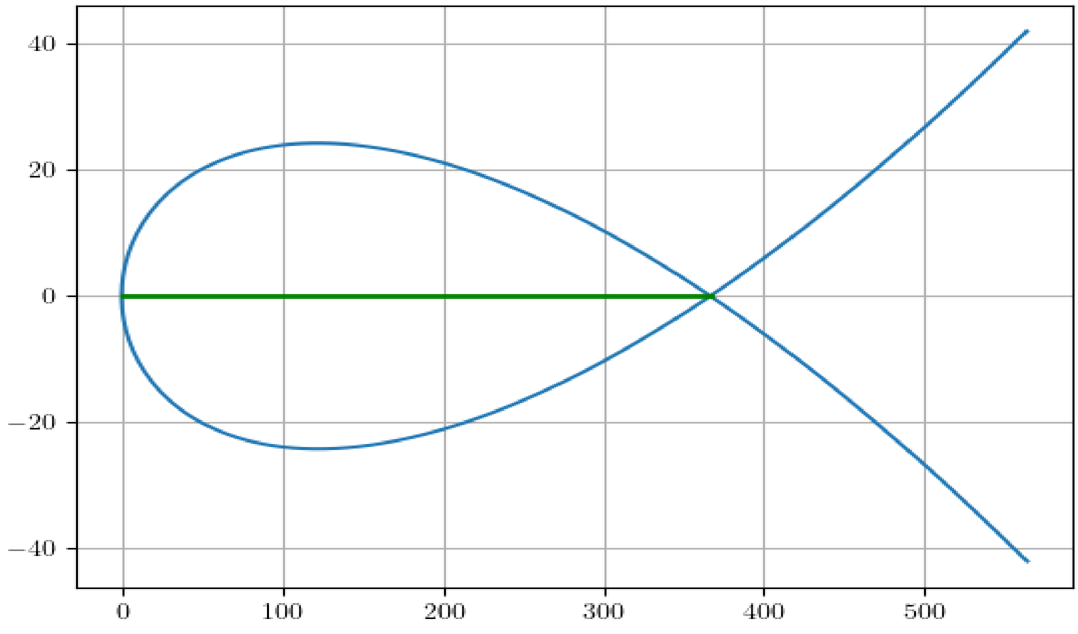
$$\lambda(p) = \frac{-A_3 p^3 - A_2 p^2 - A_1 p - 1}{K_{d1}}$$

Подставим $p = i\omega$ и преобразуем к виду $\lambda(i\omega) = X(\omega) + iY(\omega)$

$$\lambda(i\omega) = \frac{iA_3\omega^3 + A_2\omega^2 - iA_1 p - 1}{K_{d1}}$$

$$\begin{cases} X(\omega) = \frac{A_2\omega^2 - 1}{K_{d1}} \\ Y(\omega) = \frac{A_3\omega^3 - A_1\omega}{K_{d1}} \end{cases}$$

Правило штриховки на плоскости 1-го неизвестного параметра. При движении от точки $\omega = -\infty$ к $\omega = +\infty$ штриховка слева по ходу движения. Область вся заштрихованная изнутри является областью устойчивости. Поскольку искомый параметр является вещественным числом, то из полученной области выделяются только точки, лежащие на вещественной оси.



Для исходный параметров, доступный диапазон имеет вид: -1.0 < Kp1 < 366.47