

Тема “Введение в математических анализ”

1. Как относятся друг к другу множество и последовательность? (в ответе использовать слова типа: часть, целое, общее, частное, родитель, дочерний субъект и т.д.)

Если последовательность это набор элементов множества, то множество и последовательность относятся друг к другу как целое и его часть.

2. Прочитать высказывания математической логики, построить их отрицания и установить истинность.

$$\forall y \in [0; 1] : \operatorname{sgn}(y) = 1$$

$$\forall n \in \mathbb{N} > 2 : \exists x, y, z \in \mathbb{N} : x^n = y^n + z^n$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists X \in \mathbb{R} : X > x$$

$$\forall x \in \mathbb{C} \nexists y \in \mathbb{C} : x > y \mid x < y$$

$$\forall y \in [0; \frac{\pi}{2}] \exists \varepsilon > 0 : \sin y < \sin(y + \varepsilon)$$

$$\forall y \in [0; \pi) \exists \varepsilon > 0 : \cos y > \cos(y + \varepsilon)$$

$$\exists x : x \notin \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$$

- 1) Для любого y принадлежащего интервалу от 0 до 1 включительно, $\operatorname{sgn}(y) = 1$
- 2) Для любого натурального n большего двух, существуют такие натуральные x, y, z , что $x^n = y^n + z^n$
- 3) Для любого действительного x существует такое действительное X , что X больше x
- 4) Для любого комплексного x не существует такого комплексного y , что y больше или меньше x
- 5) Для любого y принадлежащего интервалу от 0 до π включительно, существует такое ε больше 0, что $\sin(y) < \sin(y + \varepsilon)$
- 6) Для любого y принадлежащего интервалу от 0 до π включительно, существует такое ε больше 0, что $\cos(y) > \cos(y + \varepsilon)$
- 7) Существует такое x , что оно не принадлежит множеству множеств натуральных, целых, дробных, действительных и комплексных чисел

Отрицание

$$\exists y \in [0; 1] : \operatorname{sgn}(y) \neq 1$$

$$\exists n \in \mathbb{N} > 2 : \forall x, y, z \in \mathbb{N} : x^n \neq y^n + z^n$$

$$\exists x \in \mathbb{R} \forall X \in \mathbb{R} : X < x$$

$$\exists x, y \in \mathbb{C} : x < y \parallel x > y$$

$$\exists y \in [0; \frac{\pi}{2}] \forall \varepsilon > 0 : \sin y > \sin(y + \varepsilon)$$

$$\exists y \in [0; \pi) \forall \varepsilon > 0 : \cos y < \cos(y + \varepsilon)$$

$$\forall x : x \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$$

Истинность

- 1) Ложь
- 2) Ложь
- 3) Истина
- 4) Истина
- 5) Ложь
- 6) Истина
- 7) Ложь

Тема “Множество”

1) Даны три множества a, b и c . Необходимо выполнить все изученные виды бинарных операций над всеми комбинациями множеств.

$$a = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$b = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$c = \{10\}$$

1) Объединение:

$$a \cup b = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\}$$

$$b \cup c = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$a \cup c = \{1, 2, 3, 4, 5, 10\}$$

2) Пересечение:

$$a \cap b = \{2, 4\}$$

$$b \cap c = \{10\}$$

$$a \cap c = \{\}$$

3) Разность:

$$a \setminus b = \{1, 3, 5\}$$

$$b \setminus c = \{2, 4, 6, 8\}$$

$$a \setminus c = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

4) Симметричная разность:

$$(a \cap b) \setminus (a \cup b) = \{1, 3, 5, 6, 8, 10\}$$

$$(b \cap c) \setminus (b \cup c) = \{2, 4, 6, 8\}$$

$$(a \cap c) \setminus (a \cup c) = \{1, 2, 3, 4, 5, 10\}$$

2) *Выполнить задание 1 на языке Python

```
In [1]: a = {1,2,3,4,5}
b = {2,4,6,8,10}
c = {10}
```

```
In [2]: #Объединение
print(a.union(b))
print(b.union(c))
print(a.union(c))

{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10}
{2, 4, 6, 8, 10}
{1, 2, 3, 4, 5, 10}
```

```
In [3]: #Пересечение
print(a.intersection(b))
print(b.intersection(c))
print(a.intersection(c))

{2, 4}
{10}
set()
```

```
In [4]: #Разность
print(a - b)
print(b - c)
print(a - c)

{1, 3, 5}
{8, 2, 4, 6}
{1, 2, 3, 4, 5}
```

```
In [5]: #Симметричная разность
print(a.symmetric_difference(b))
print(b.symmetric_difference(c))
print(a.symmetric_difference(c))

{1, 3, 5, 6, 8, 10}
{2, 4, 6, 8}
{1, 2, 3, 4, 5, 10}
```

Тема 3 “Последовательность”

1) Даны 4 последовательности. Необходимо:

- а. исследовать их на монотонность;
- б. исследовать на ограниченность;
- с. найти пятый по счету член.

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = 2^n - n$$

$$\{b_n\}_{n=2}^{\infty} = \frac{1}{1-n}$$

$$\{c_n\}_{n=1}^{\infty} = -1^n + \sqrt{2n}$$

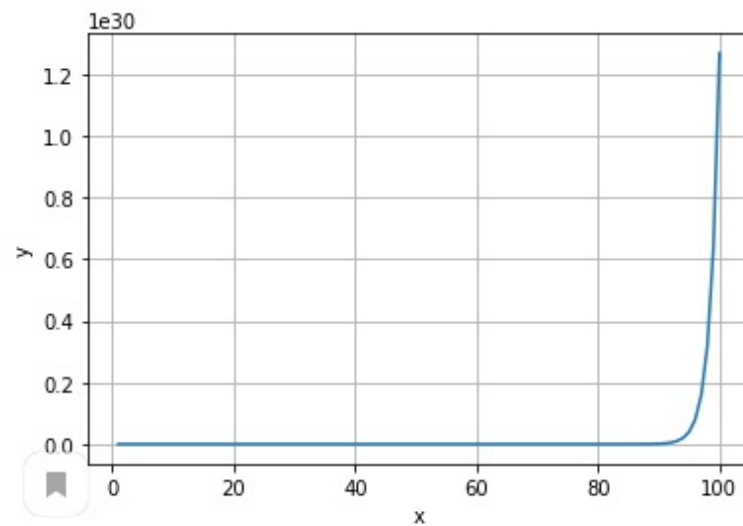
$$\{d_n\}_{n=1}^{\infty} = (-1)^{2n} + \frac{1}{n^2}$$

```
In [6]: from matplotlib import pyplot as plt
import numpy as np
%matplotlib inline
```

```
In [7]: x = np.linspace(1, 100, 100)
y1 = 2**x - x
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("y")
plt.grid()
plt.plot(x, y1)

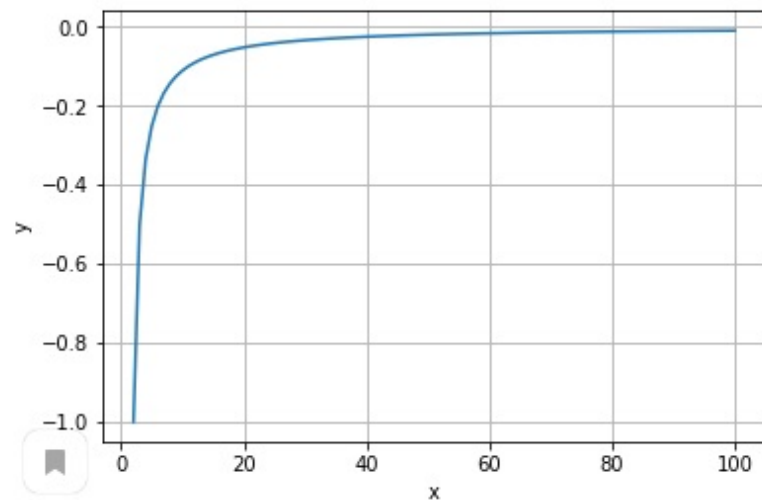
#Функция монотонна
#Ограничена снизу 0
#Пятый член последовательности = 27
```

Out[7]: [



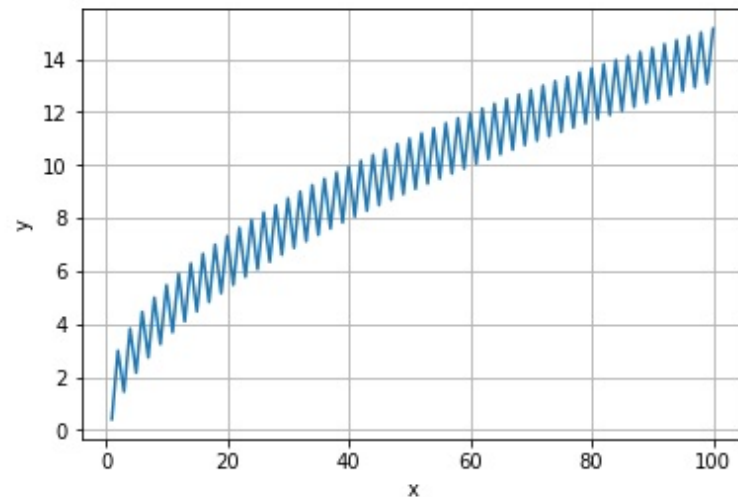
```
In [8]: x = np.linspace(2, 100, 100)
y2 = 1 / (1 - x)
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("y")
plt.grid()
plt.plot(x, y2)
#Функция монотонна
#Ограничена сверху и слева 0
#Пятый член последовательности = - 0.2
```

Out[8]: [



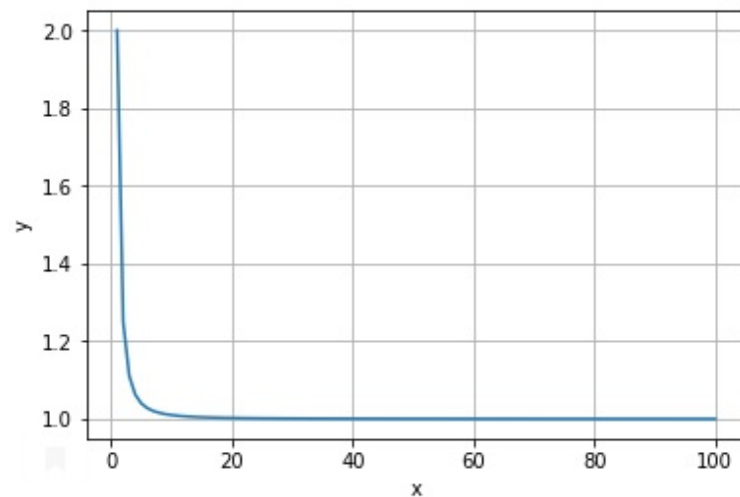

```
In [9]: x = np.linspace(1, 100, 100)
y3 = ((-1)**x) + np.sqrt(2*x)
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("y")
plt.grid()
plt.plot(x, y3)
#Функция монотонна
#Ограничена снизу и слева 0
#Пятый член последовательности = 2.16
```

Out[9]: [




```
In [10]: x = np.linspace(1, 100, 100)
y4 = ((-1)**(2*x)) + 1/(x**2)
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("y")
plt.grid()
plt.plot(x, y4)
#Функция монотонна
#Ограничена слева 0 и снизу 1
#Пятый член последовательности = 1.04
```

Out[10]: [matplotlib.lines.Line2D at 0x2064fe07b70>]



2) Найти 12-й член заданной неявно последовательности

$$a_1 = 128, a_{n+1} - a_n = 6$$

$$a_{12} = a_1 + 6 * 11 = 194$$

3) *На языке Python предложить алгоритм вычисляющий численно предел с точностью

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$$

```
In [11]: import math
def lim(n):
    return n/(math.factorial(n)**(1/n))
eps = 0.001
i = 1
while lim(i+1)-lim(i) > eps:
    i+=1
print(lim(i))
```

2.617701998673183

4)*Предложить оптимизацию алгоритма, полученного в задании 3, ускоряющую его сходимость.

```
In [12]: # Из очевидного, всё тоже самое что и в предыдущем задании, только увеличить шаг. Однако можно будет легко получить переполнение
import math
def lim(n):
    return n/(math.factorial(n)**(1/n))
eps = 0.001
i = 1
while lim(i+1)-lim(i) > eps:
    i+=5
print(lim(i))
```

Вероятно можно как-то преобразовать выражение, или выделить закономерности, которые позволят, не вычислять весь факториал.

2.6206071640168287