Урок 3

Матрицы и матричные операции. Часть 1

1) Установить, какие произведения матриц AB и BA определены, и найти размерности полученных матриц:

а) A — матрица 4×2 , B — матрица 4×2 ;
б) A — матрица 2×5 , B — матрица 5×3 ;
в) A — матрица 8×3 , B — матрица 3×8 ;
г) A — квадратная матрица 4×4 , B — квадратная матрица 4×4 .

Ответ

а) произведение AB и BA невозможно
б) AB = 2х3, BA произведение невозможно
в) AB = 8×8 , BA = 3×3
г) AB = 4×4 , BA = 4×4

2) Найти сумму и произведение матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Ответ

$$A + B = \begin{matrix} 5 & -3 \\ 3 & 5 \end{matrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1*4+(-2)*0 & 1*(-1)+(-2)*5 \\ 3*4+0*0 & 3*(-1)+0*5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -11 \\ 12 & -3 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 15 & 0 \end{pmatrix}$$

3) Из закономерностей сложения и умножения матриц на число можно сделать вывод, что матрицы одного размера образуют линейное пространство. Вычислить линейную комбинацию 3A−2B+4C для матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ответ

$$3A - 2B + 4C = \begin{pmatrix} 11 & -5 \\ 9 & -12 \end{pmatrix}$$

4) Дана матрица. Вычислить $AA^T и A^T A$.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

.

Решение

$$A^T = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

.

$$AA^T = \begin{pmatrix} 17 & 18 & 11 \\ 18 & 29 & 4 \\ 11 & 4 & 13 \end{pmatrix} A^T A = \begin{pmatrix} 45 & 0 \\ 0 & 14 \end{pmatrix}$$

.

In [1]:

```
from pprint import pprint

def check_size(a):
    sizeax = len(a[0])
    for i in range(len(a)):
        if len(a[i]) != sizeax:
            raise IndexError('Bad size error')


def vec_multiply(a,b):
    return sum([a[i]*b[i] for i in range(len(a))])

def dot(a, b):
    check_size(a)
    check_size(b)
    if len(a[0]) != len(b): raise IndexError('Bad size error')
    res = []
    for i in range(len(a)):
        res.append([])
        for j in range(len(b[0])):
            tmp = [b[k][j] for k in range(len(b))]
            res[i].append(vec_multiply(a[i],tmp))
    return res

res = dot([[4,1],[5,-2],[2,3]], [[4,5,2],[1,-2,3]])

for i in range(len(res)):
    pprint(res[i])
```

```
[17, 18, 11]
[18, 29, 4]
[11, 4, 13]
```

Урок 4

Матрицы и матричные операции. Часть 2

1) Вычислить определитель:

$$а)\begin{vmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix} = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$б)\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 180$$

$$в)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3 + 12 - 9 = 0$$

2) Определитель матрицы A равен 4 . Найти:

а) $det(A^2)$ Если возможно умнодить матрицу саму на себя, то она квадратная, тогда $= det(A)det(A) = 16$
б) $det(A^T)$ Определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной $= det(A) = 4$
в) $det(2A)$ Не понимаю как это доказать, но опыты показывают, что для квадратной матрицы ответ будет: 2*размер стороны матрицы*det(A)$=8*$размер стороны матрицы

3) Доказать, что матрица вырожденная

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 7 & -3 \\ 4 & -14 & 6 \\ -3 & 7 & 13 \end{pmatrix}$$

Решение

Матрица называется вырожденной, если ее определитель равен нулю.

$$det(A) = -2\begin{pmatrix} -14 & 6 \\ 7 & 13 \end{pmatrix} - 7\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & 13 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 4 & -14 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} = 448 - 490 - 42 = 0$$

4) Найти ранг матрицы

$$\text{а)}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix} \text{Ранг} = 2$$

$$\text{б)}\begin{pmatrix}0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 4 & 3\\ 2 & 3 & 5 & 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 3 & 5 & 6\\ 0 & 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 2 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 3 & 5 & 6\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 5 & 6\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 0.5\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \text{Ранг} = 3$$