1. Найти собственные векторы и собственные значения для линейного оператора, заданного матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Решение

$(-1-\lambda)x_1 - 6x_2 = 0,$
$2x_1 + (6-\lambda)x_2 = 0$

$det = \begin{pmatrix} -1-\lambda & -6 \\ 2 & 6-\lambda \end{pmatrix} = (-1-\lambda)*(6-\lambda)+12 = -6-6\lambda+\lambda+\lambda^2+12 = \lambda^2-5\lambda+6$

$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$
$D = 25 - 4*1*6 = 1$
$\lambda_1 = 2$
$\lambda_2 = 3$

$x_1 + 2x_2 = 0$
$x_1 = -2x_2$
или
$2x_1 + 3x_2 = 0$
$x_1 = -1.5x_2$

Пусть $x_1 = 2$, тогда $x_2 = -1$
$x = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$
Проверим что всё правильно
$2x = Ax = (4, -2)$

2. Дан оператор поворота на 180 градусов, задаваемый матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Показать, что **любой** вектор является для него собственным.

Решение

Пусть вектор $x = (k_1, k_2)$, где $k_1, k_2)$ любые действительные числа

$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} -k_1 = k_1\lambda \\ -k_2 = k_2\lambda \end{cases} \Rightarrow \lambda = -1$

3. Пусть линейный оператор задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Установить, является ли вектор $x = (1, 1)$ собственным вектором этого линейного оператора.

Решение

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} 1 + 1 = \lambda \\ -1 + 3 = \lambda \end{cases} \Rightarrow \lambda = 2$$

$x = (1, 1)$ является собственным вектором линейного оператора, заданного матрицей A.

4. Пусть линейный оператор задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Установить, является ли вектор $x = (3, -3, -4)$ собственным вектором этого линейного оператора.

Решение

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda = -3 \\ \lambda = -3 \\ \lambda = 3 \end{cases}$$

вектор $x = (1, 1, 2)$ не является собственным вектором линейного оператора, заданного матрицей A

In [ ]:

In [ ]: