Урок 1

Линейное пространство. Основные понятия. Часть 1

1. Исследовать на линейную зависимость:
   $f_1(x) = e^x, f_2(x) = 1, f_3(x) = x + 1, f_4(x) = x - e^x$

Решение

$f_3(x) = x + f_2(x)$
$f_4(x) = x - f_1(x)$
$f_3(x) - f_2(x) = -(f_4(x) + f_1(x))$
Ответ: вектора линейно зависимы.

1. Исследовать на линейную зависимость:
   $f_1(x) = 2, f_2(x) = x, f_3(x) = x^2, f_4(x) = (x + 1)^2$

Решение

$f_4(x) = x^2 + 2x + 1$
$f_4(x) = f_3(x) + 2 * f_2(x) + f_1(x)/2$
Ответ: вектора линейно зависимы.

1. Найти координаты вектора
   $x = (2, 3, 5) \in R^3$ в базисе $b_1 = (0, 0, 10), b_2 = (2, 0, 0), b_3 = (0, 1, 0)$

Решение

$x = 0.2b_1 + 1.5b_2 + 0.2b_3$
Ответ: x = (0.2,1.5,0.2)

1. Найти координаты вектора $3x^2 - 2x + 2 \in R3$:
   а) в базисе 1, x, x^2
   б) в базисе x^2, x−1, 1

Решение

$x = (2, -2, 3)$
а) $x = 0.5b_1 - 0.5b_2 + 1/3b_3$
б) $x = 0.5b_1 + 1/3b_3$

1. Установить, является ли линейным подпространством:

а) совокупность всех векторов трехмерного пространства, у которых по крайней мере одна из первых двух координат равна нулю;
б) все векторы, являющиеся линейными комбинациями данных векторов {u1,u2,...,un}.

Решение

а)
$(0, a, b)+(0, \mathrm{c}, d)=(c, a+\mathrm{c}, b+d)$
$\alpha \cdot(0, a, b)=(0, \alpha a, \alpha b)$
Ответ: совокупность векторов является линейным подпространством
б)

Урок 2

Линейное пространство. Основные понятия. Часть 2

1. Найти скалярное произведение векторов $x, y \in R$
   а) $x=(0,-3,6), y=(-4,7,9)$
   б) $x=(7,-4,0,1), y=(-3,1,11,2)$

Решение

а) $(x, y)=0 *-4-3 * 7+6 * 9=33$
б) $(x, y)=-21-4+2=-23$

1. Найти нормы векторов (4,2,4) и (12,3,4) и угол между ними.

$l_1(4,2,4)=10$
$l_2(4,2,4)=6$
$l_1(12,3,4)=19$
$l_1(12,3,4)=13$

$cos\phi=\frac{4*12+2*3+4*4}{6*13}=0.897$

1. Будет ли линейное пространство евклидовым, если за скалярное произведение принять:
   а) произведение длин векторов;
   б) утроенное обычное скалярное произведение векторов?

Решение

1) $(x, y) = (y, x)$
2) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$
3) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$
4) $(x, x) \geq 0, \text{причем} (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

а)
$|x||y| = |y||x|$ выполняется
$|\lambda x||y|! = \lambda|x||y|$ не выполняется

б)
$3(x, y) = 3(y, x)$ выполняется
$3(\lambda x, y) = \lambda 3(x, y)$ выполняется
$3(x_1 + x_2, y) = 3(x_1, y) + 3(x_2, y)$ выполняется
$3(x, x) \geq 0, \text{причем} 3(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ выполняется

1. Какие из нижеперечисленных векторов образуют ортонормированный базис в линейном пространстве R^3
   а) $(1, 0, 0), (0, 0, 1)$
   б) $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0), (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), (0, 0, 1)$
   в) $(1/2, -1/2, 0), (0, 1/2, 1/2), (0, 0, 1)$
   г) $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$

Решение

$(x, y) = 0$
$(ei, ej) = 0 \forall i \neq j \text{и} (ei, ei) = 1 \forall i \in [1, n]$

а) $x = (1, 0, 0), y = (0, 0, 1)$
$(x, y) = 0, |x| = 1, |y| = 1$ +

б)
$x = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0), y = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), z = (0, 0, 1)$
$(x, y, z) = 0, |x| = 1, |y| = 1, |z| = 1$ +

в)
$x = (1/2, -1/2, 0), y = (0, 1/2, 1/2), z = (0, 0, 1)$
$(x, y, z) = 0, |x| = 1/2, |y| = 1/2, |z| = 1$ -

г) $x = (1, 0, 0), y = (0, 1, 0), z = (0, 0, 1)$
$(x, y) = 0, |x| = 1, |y| = 1, |z| = 1$ +