Consegna 1

Luca Barra

Novembre 2023

1 Esercizi su riscrittura, deduzione naturale e λ-calcolo con tipi semplici

Esercizio 1.1 Si consideri il seguente sistema di regole di riscrittura per il calcolo simbolico della derivata D_X in X per espressioni aritmetiche costruite usando $+$, $*$ le indeterminate X, Y (trattate come costanti) e le costanti $0, 1$:

$$\begin{array}{lrcl} (R1) & D_X(X) & \to & 1 \\ (R2) & D_X(Y) & \to & 0 \\ (R3) & D_X(u+v) & \to & D_X(u) + D_X(v) \\ (R4) & D_X(u*v) & \to & (u * D_X(v)) + (D_X(u) + v) \end{array}$$

Un esempio di riduzione in questo sistema è il seguente:

$$\begin{array}{rcll} D_X(X+Y) & \to & D_X(X) + D_X(Y) & \text{per } R3 \\ & \to & 1 + D_X(Y) & \text{per } R1 \\ & \to & 1 + 0 & \text{per } R2 \end{array}$$

Si osservi che l'espressione $1+0$ è in *forma normale* in questo sistema in quanto nessuna tra le regole $(R1)$-$(R4)$ si può applicare ad essa.

Si dimostri che:

1. il termine $D_X(X * X)$ ha due diverse riduzioni, confluenti nella stessa forma normale;

2. se si aggiunge la regola

$$(R5) \qquad u + 0 \to u$$

   esiste un termine che si riduce a due forme normali distinte;

3. si trovi una regola $(R6)$ da aggiungere alle regole $(R1)$-$(R5)$ tale che la confluenza del sistema venga ristabilita.

Esercizio 1.2 Sulla base dell'esempio:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \to (B \to C)]^2 \quad \dfrac{[A \wedge B]^1}{A} \wedge E_1}{B \to C} \to E \qquad \dfrac{[A \wedge B]^1}{B} \wedge E_2}{\dfrac{C}{A \wedge B \to C} \to I, -1} \to E}{(A \to (B \to C)) \to (A \wedge B \to C)} \to I, -2$$

si producano le dimostrazioni con la deduzione naturale delle seguenti formule:

1. $A \to (\neg A \to B)$
2. $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to B))$
3. $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$
4. $(A \wedge B \to C) \to (A \to (B \to C))$
5. $\forall x(A[x] \to B) \to (\exists x A[x] \to B)$ se $x \notin FV(B)$

dove con $A[x]$ si intende una formula del calcolo dei predicati in cui x possa occorrere libera.

Esercizio 1.3 *Si derivino i seguenti giudizi di tipo utilizzando le regole e l'assioma del λ-calcolo con tipi semplici:*

1. $x : A, y : A \to B \vdash yx : B$
2. $\vdash \lambda x : A \to B\, \lambda y : B \to C\, \lambda z : A.\, y(xz) : (A \to B) \to (B \to C) \to A \to C$

2 Svolgimento esercizi

2.1 Svolgimento

1) Si hanno due possibili riduzioni in base a dove si sceglie di applicare prima la regola $R1$.

$$\begin{array}{rcll} D_X(X * Y) & \to & (X * D_X(X)) + (D_X(X) + X) & \text{per } R4 \\ & \to & (X * 1) + (D_X(X) + X) & \text{per } R1 \\ & \to & (X * 1) + (1 + X) & \text{per } R1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll} D_X(X * Y) & \to & (X * D_X(X)) + (D_X(X) + X) & \text{per } R4 \\ & \to & (X * D_X(X)) + (1 + X) & \text{per } R1 \\ & \to & (X * 1) + (1 + X) & \text{per } R1 \end{array}$$

2) Per esempio $D_X(X+0)$ si può ridurre nei seguenti modi.

$$\begin{array}{rcll} D_X(X+0) & \to & D_X(X) & \text{per } R5 \\ & \to & 1 & \text{per } R1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll} D_X(X+0) & \to & D_X(X)+D_X(0) & \text{per } R3 \\ & \to & 1+D_X(0) & \text{per } R1 \end{array}$$

3) Per fare in modo che si abbia una sola forma normale è sufficiente aggiungere la seguente regola.

$$(R6) \qquad D_X(0) \to 0$$

così si ha:

$$\begin{array}{rcll} D_X(X+0) & \to & D_X(X)+D_X(0) & \text{per } R3 \\ & \to & 1+D_X(0) & \text{per } R1 \\ & \to & 1+0 & \text{per } R6 \\ & \to & 1 & \text{per } R5 \end{array}$$

2.2 Svolgimento

1) $A \to (\neg A \to B)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg A]^2 \quad [A]^1}{\bot}\,\neg E}{B}\,\bot\, E}{\neg A \to B}\,\to I, -2}{A \to (\neg A \to B)}\,\to I, -1$$

2) $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to B))$

$$\dfrac{\dfrac{[A \to B]^1}{(B \to C) \to (A \to B)}\,\to I}{(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to B))}\,\to I, -1$$

3) $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^1 \qquad \dfrac{[\neg B \to \neg A]^2 \quad [\neg B]^3}{\neg A}\,\to E}{\bot}\,\neg E}{B}\,RAA, -3}{A \to B}\,\to I, -1}{(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)}\,\to I, -1$$

4) $(A{\wedge}B \to C) \to (A \to (B \to C))$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \wedge B \to C]^1 \qquad \dfrac{[A]^2 \quad [B]^3}{A \wedge B}\wedge I}{C}\to E}{B \to C}\to I, -3}{A \to (B \to C)}\to I, -2}{(A \wedge B \to C) \to (A \to (B \to C))}\to I, -1$$

5) $\forall x(A[x] \to B) \to (\exists x A[x] \to B)$ **se** $x \notin \boldsymbol{FV}(B)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\exists x A[x]]^2 \qquad \dfrac{\dfrac{[\forall x(A[x] \to B)]^1}{A[\alpha] \to B}\forall E \qquad [A[\alpha]]^3}{B}\to E}{B}\exists E, -3}{\exists x A[x] \to B}\to I, -2}{\forall x(A[x] \to B) \to (\exists x A[x] \to B)}\to I, -1$$

2.3 Svolgimento

1) $x : A, y : A \to B \vdash yx : B$**.**

Γ **=** $x : A, y : A \to B$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash y \ : A \to B}ax \qquad \dfrac{}{\Gamma \vdash x \ : A}ax}{\Gamma \vdash y\,x \ : B}\to E}{\Gamma \vdash \lambda y : A \to B.y\,x \ : (A \to B) \to B}\to I}{\Gamma \vdash \lambda x : A\lambda y : A \to B.y\,x \ : A \to (A \to B) \to B}\to I$$

2) $\vdash \lambda x : A \to B\, \lambda y : B \to C\, \lambda z : A.\, y(x\,z) : (A \to B) \to (B \to C) \to A \to C$**.**

Γ **=** $x : A \to B$**,** $y : B \to C$**,** $z : A$**,** $y(xz) : C$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash y \ : \ B \to C}ax \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash x \ : \ A \to B}ax \qquad \dfrac{}{\Gamma \vdash z \ : \ A}ax}{\Gamma \vdash x\,z \ : B}\to E}{\Gamma \vdash y(x\,z) \ : \ C}\to I}{\Gamma \vdash \lambda z \ : \ A.y(x\,z) \ : \ A \to C}\to I}{\Gamma \vdash \lambda y \ : \ B \to C\,\lambda z \ : \ A.y(x\,z) \ : \ (B \to C) \to A \to C}\to I}{\Gamma \vdash \lambda x \ : \ A \to B\,\lambda y \ : \ B \to C\,\lambda z \ : \ A.y(x\,z) \ : \ (A \to B) \to (B \to C) \to A \to C}\to I$$