# ANNO ACCADEMICO 2024/2025

# Metodi Numerici

# Teoria

# Altair's Notes



DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

$\bigcap$ $\Lambda$	D.	rт	0	$\Gamma \cap$	1
U / A	N P		v	w	

# Introduzione e complementi di algebra lineare

PAGINA 5

1.1 Che cos'è l'analisi numerica? Buona posizione e Condizionamento — 6 • Algoritmi — 7

5

# Premessa

# Licenza

Questi appunti sono rilasciati sotto licenza Creative Commons Attribuzione 4.0 Internazionale (per maggiori informazioni consultare il link: https://creativecommons.org/version4/).



# Formato utilizzato

Box di "Concetto sbagliato":

Concetto sbagliato 0.1: Testo del concetto sbagliato

Testo contente il concetto giusto.

#### Box di "Corollario":

Corollario 0.0.1 Nome del corollario

Testo del corollario. Per corollario si intende una definizione minore, legata a un'altra definizione.

#### Box di "Definizione":

Definizione 0.0.1: Nome delle definizione

Testo della definizione.

#### Box di "Domanda":

#### Domanda 0.1

Testo della domanda. Le domande sono spesso utilizzate per far riflettere sulle definizioni o sui concetti.

## Box di "Esempio":

Esempio 0.0.1 (Nome dell'esempio)

Testo dell'esempio. Gli esempi sono tratti dalle slides del corso.

## Box di "Note":

Note:-

Testo della nota. Le note sono spesso utilizzate per chiarire concetti o per dare informazioni aggiuntive.

## Box di "Osservazioni":

## Osservazioni 0.0.1

Testo delle osservazioni. Le osservazioni sono spesso utilizzate per chiarire concetti o per dare informazioni aggiuntive. A differenza delle note le osservazioni sono più specifiche.

1

# Introduzione e complementi di algebra lineare

# 1.1 Che cos'è l'analisi numerica?

## Definizione 1.1.1: Analisi numerica

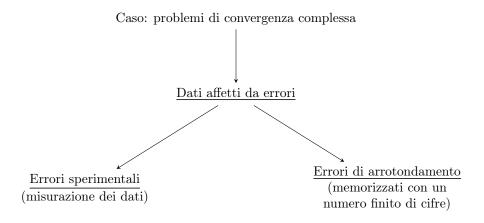
Sviluppare e analizzare algoritmi per risolvere problemi matematici (algebra lineare, teoria dei numeri, ottimizzazione, etc.) usando l'approssimazione numerica.

#### Note:-

In questo corso non si è alla ricerca di soluzioni esatte, ma di soluzioni approssimate.

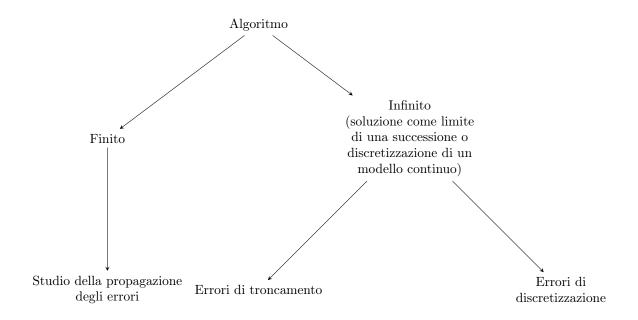
### Definizione 1.1.2: Calcolo scientifico

Esplorare l'applicazione dei metodi numerici a problemi concreti delle scienze fisiche, dell'ingegneria, delle scienze sociali e della vita, etc.



### Note:-

Gli errori sperimentali sono dovuti alla strumentazione e a errori di misurazione. Gli errori di arrotondamento sono dovuti al fatto che i calcolatori utilizzano un numero finito di cifre quindi i numeri reali  $\mathbb R$  vengono approssimati a numeri razionali  $\mathbb Q$ .



# 1.1.1 Buona posizione e Condizionamento

Per prevedere l'esito di un fenomeno o simulare l'andamento di un processo si costruisce un modello matematico.

#### Definizione 1.1.3: Modello matematico

Complesso di formule che descrivono il comportamento del fenomeno in esame.

#### Note:-

Da un modello/problema matematico si vuole passare a un problema numerico.

#### Definizione 1.1.4: Problema numerico

Non tutti i problemi matematici sono effettivamente risolubili. Si introducono semplificazioni o approssimazioni per rendere il problema risolubile numericamente da un calcolatore.

#### Note:-

Bisogna notare che si vuole avere a che fare con problemi ben posti $^a$ .

<sup>a</sup>Visti in "Metodologie e Tecnologie Didattiche per l'Informatica" e "Storia dell'Informatica".

# Definizione 1.1.5: Problema ben posto

Ammette  $una\ e\ una\ sola$  soluzione che dipende dalla  $continuità\ dei\ dati$ . Il caso opposto è un problema mal posto.

#### Esempio 1.1.1 (Problemi mal posti)

- $\Rightarrow x^2 + 1 = 0, \not\exists$  soluzione in  $\mathbb{R}$ ;
- $\Rightarrow x + y = 1$ ,  $\exists$  infinite soluzioni in  $\mathbb{R}$ .

#### Note:-

Un problema e ben posto/mal posto anche in base al tipo di soluzioni che si sta cercando, per esempio il primo esempio ha una soluzione in  $\mathbb{C}$ .

#### Definizione 1.1.6: Problema instabile

La soluzione non dipende dalla continuità dei dati. *Piccole perturbazioni* sui dati in ingresso portano a *errori consistenti* sui dati in uscita. Il caso opposto è un problema stabile.

#### Note:-

Questo ci porta a parlare di condizionamento di un problema.

#### Definizione 1.1.7: Condizionamento del problema

Misura qualitativa di come la soluzione viene influenzata dalla perturbazione dei dati... Siano  $\delta d$  una perturbazione dei dati del problema,  $\delta x$  la corrispondente perturbazione sulla sua soluzione e ||°|| una qualsiasi norma vettoriale.

- K è il numero di condizionamento assoluto, ossia  $||\delta x|| \le K||\delta d||$ ;
- $K^*$  è il numero di condizionamento relativo, ossia  $\frac{||\delta x||}{||x||} \leq K^* \frac{||\delta d||}{||d||}$

#### Note:-

Le perturbazioni relative tengono conto della dimensione del dato che si sta perturbando.

# Esempio 1.1.2 (Perturbazione)

Calcolare il numero di condizionamento (relativo) del prodotto tra 2 numeri x e y con perturbazione.

$$|E_x| \leq T$$

$$|E_{\nu}| \leq T$$

Prodotto calcolando con dati perturbati (con  $E_x E_y$  molto piccolo):

$$x(1+E_x)y(1+E_y) = xy(1+E_x+E_y+E_xE_y) = xy(1+E_x+E_y)$$

La perturbazione sul prodotto è  $E_{xy} = E_x + E_y$  con  $|E_{xy}| = |E_x + E_y| \le |E_x| + |E_y| \le 2T$ , per cui il numero di condizionamento è 2.

# 1.1.2 Algoritmi

#### Definizione 1.1.8: Algoritmo

Un algoritmo è una sequenza univoca di un numero finito di operazioni elementari che stabilisce come calcolare la soluzione di un problema, assegnati certi dati iniziali.

#### Corollario 1.1.1 Sequenza univoca

Formule + Ordine con cui eseguire le operazioni.

#### Corollario 1.1.2 Operazioni elementari

Di semplice comprensione.

#### Corollario 1.1.3 Numero finito

Se l'algoritmo è iterativo bisogna introdurre almeno un criterio d'arresto.

# Corollario 1.1.4 Input/Output

Il numero e il tipo di dati richiesti dall'algoritmo e di dati generati da esso.

# Definizione 1.1.9: Algoritmo stabile

Un algoritmo è stabile quando la successione delle operazioni che lo compone non amplifica eccessivamente gli errori presenti sui dati. Il caso opposto è un algoritmo instabile.

# Definizione 1.1.10: Complessità computazionale

In analisi numerica è il numero delle operazioni in virgola mobile (flop) necessarie per risolvere il problema mediante l'algoritmo dato.

## Note:-

In questo corso tratteremo problemi ben posti, ben condizionati e algoritmi stabili con bassa complessità computazionale e occupazione di memoria.