Consegna 1

Luca Barra

Novembre 2023

1 Esercizi su riscrittura, deduzione naturale e λ-calcolo con tipi semplici

Esercizio 1.1 Si consideri il seguente sistema di regole di riscrittura per il calcolo simbolico della derivata D_X in X per espressioni aritmetiche costruite usando $+, *$ le indeterminate X, Y (trattate come costanti) e le costanti $0, 1$:

$$\begin{array}{lrcl}
(R1) & D_X(X) & \to & 1 \\
(R2) & D_X(Y) & \to & 0 \\
(R3) & D_X(u+v) & \to & D_X(u) + D_X(v) \\
(R4) & D_X(u*v) & \to & (u * D_X(v)) + (D_X(u) + v)
\end{array}$$

Un esempio di riduzione in questo sistema è il seguente:

$$\begin{array}{rcll}
D_X(X+Y) & \to & D_X(X) + D_X(Y) & \text{per } R3 \\
& \to & 1 + D_X(Y) & \text{per } R1 \\
& \to & 1 + 0 & \text{per } R2
\end{array}$$

Si osservi che l'espressione $1+0$ è in *forma normale* in questo sistema in quanto nessuna tra le regole $(R1)$-$(R4)$ si può applicare ad essa.

Si dimostri che:

1. il termine $D_X(X * X)$ ha due diverse riduzioni, confluenti nella stessa forma normale;

2. se si aggiunge la regola

   $$(R5) \qquad u + 0 \to u$$

   esiste un termine che si riduce a due forme normali distinte;

3. si trovi una regola $(R6)$ da aggiungere alle regole $(R1)$-$(R5)$ tale che la confluenza del sistema venga ristabilita.

Esercizio 1.2 Sulla base dell'esempio:

$$\dfrac{\dfrac{[A \to (B \to C)]^2 \quad \dfrac{[A \wedge B]^1}{A} \wedge E_1}{B \to C} \to E \qquad \dfrac{[A \wedge B]^1}{B} \wedge E_2}{\dfrac{\dfrac{C}{A \wedge B \to C} \to I, -1}{(A \to (B \to C)) \to (A \wedge B \to C)} \to I, -2} \to E$$

si producano le dimostrazioni con la deduzione naturale delle seguenti formule:

1. $A \to (\neg A \to B)$
2. $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to B))$
3. $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$
4. $(A \wedge B \to C) \to (A \to (B \to C))$
5. $\forall x(A[x] \to B) \to (\exists x A[x] \to B)$ se $x \notin FV(B)$

dove con $A[x]$ si intende una formula del calcolo dei predicati in cui x possa occorrere libera.

Esercizio 1.3 *Si derivino i seguenti giudizi di tipo utilizzando le regole e l'assioma del λ-calcolo con tipi semplici:*

1. $x : A, y : A \to B \vdash yx : B$
2. $\vdash \lambda x : A \to B\, \lambda y : B \to C\, \lambda z : A.\, y(xz) : C$

2 Svolgimento esercizi

2.1 Svolgimento

1) Si hanno due possibili riduzioni in base a dove si sceglie di applicare prima la regola $R1$.

$$\begin{array}{llll} D_X(X * Y) & \to & (X * D_X(X)) + (D_X(X) + X) & \text{per } R4 \\ & \to & (X * 1) + (D_X(X) + X) & \text{per } R1 \\ & \to & (X * 1) + (1 + X) & \text{per } R1 \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} D_X(X * Y) & \to & (X * D_X(X)) + (D_X(X) + X) & \text{per } R4 \\ & \to & (X * D_X(X)) + (1 + X) & \text{per } R1 \\ & \to & (X * 1) + (1 + X) & \text{per } R1 \end{array}$$

2) Per esempio $D_X(X+0)$ si può ridurre nei seguenti modi.

$$\begin{array}{rcll} D_X(X+0) & \to & D_X(X) & \text{per } R5 \\ & \to & 1 & \text{per } R1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll} D_X(X+0) & \to & D_X(X)+D_X(0) & \text{per } R3 \\ & \to & 1+D_X(0) & \text{per } R1 \end{array}$$

3) Per fare in modo che si abbia una sola forma normale è sufficiente aggiungere la seguente regola.

$$(R6) \qquad D_X(0) \to 0$$

così si ha:

$$\begin{array}{rcll} D_X(X+0) & \to & D_X(X)+D_X(0) & \text{per } R3 \\ & \to & 1+D_X(0) & \text{per } R1 \\ & \to & 1+0 & \text{per } R6 \\ & \to & 1 & \text{per } R5 \end{array}$$

2.2 Svolgimento

1) $A \to (\neg A \to B)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg A]^2 \quad [A]^1}{\bot}\,\neg E}{B}\,\bot\, E}{\neg A \to B}\,\to I, -2}{A \to (\neg A \to B)}\,\to I, -1$$

2) $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to B))$

$$\dfrac{\dfrac{[A \to B]^1}{(B \to C) \to (A \to B)}\,\to I}{(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to B))}\,\to I, -1$$

3) $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^1 \qquad \dfrac{[\neg B \to \neg A]^2 \quad [\neg B]^3}{\neg A}\,\to E}{\bot}\,\neg E}{B}\,RAA, -3}{A \to B}\,\to I, -1}{(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)}\,\to I, -1$$

4) $(A \wedge B \to C) \to (A \to (B \to C))$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \wedge B \to C]^1}{B \to C}\wedge E_2}{A \to (B \to C)} \to I}{(A \wedge B \to C) \to (A \to (B \to C))} \to I, -1$$

5) $\forall x(A[x] \to B) \to (\exists x A[x] \to B)$ **se** $x \notin \boldsymbol{FV}(B)$

2.3 Svolgimento

1) $x : A, y : A \to B \vdash yx : B$**.**

$\Gamma = x : A, y : A \to B$

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash y\ : A \to B}ax \qquad \dfrac{}{\Gamma \vdash x\ : A}ax}{\Gamma \vdash y\,x\ : B} \to E$$

2) $\vdash \lambda x : A \to B\, \lambda y : B \to C\, \lambda z : A.\, y(x\, z) : (A \to B) \to (B \to C) \to A \to C$**.**

$\Gamma = x : A \to B$**,** $y : B \to C$**,** $z : A$**,** $y(xz) : C$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash y\ :\ B \to C}ax \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash x\ :\ A \to B}ax \qquad \dfrac{}{\Gamma \vdash z\ :\ A}ax}{\Gamma \vdash x\,z\ : B} \to E}{\Gamma \vdash y(x\,z)\ :\ C} \to I}{\Gamma \vdash \lambda z\ :\ A.y(x\,z)\ :\ A \to C} \to I}{\Gamma \vdash \lambda y\ :\ B \to C\ \lambda z\ :\ A.y(x\,z)\ :\ (B \to C) \to A \to C} \to I}{\Gamma \vdash \lambda x\ :\ A \to B\ \lambda y\ :\ B \to C\ \lambda z\ :\ A.y(x\,z)\ :\ (A \to B) \to (B \to C) \to A \to C} \to I$$