

Consegna 1

Luca Barra

Novembre 2023

1 Esercizi su riscrittura, deduzione naturale e λ -calcolo con tipi semplici

Esercizio 1.1 Si consideri il seguente sistema di regole di riscrittura per il calcolo simbolico della derivata D_X in X per espressioni aritmetiche costruite usando $+$, $*$ le indeterminate X, Y (trattate come costanti) e le costanti $0, 1$:

$$\begin{array}{llll} (R1) & D_X(X) & \rightarrow & 1 \\ (R2) & D_X(Y) & \rightarrow & 0 \\ (R3) & D_X(u + v) & \rightarrow & D_X(u) + D_X(v) \\ (R4) & D_X(u * v) & \rightarrow & (u * D_X(v)) + (D_X(u) * v) \end{array}$$

Un esempio di riduzione in questo sistema è il seguente:

$$\begin{array}{llll} D_X(X + Y) & \rightarrow & D_X(X) + D_X(Y) & \text{per } R3 \\ & \rightarrow & 1 + D_X(Y) & \text{per } R1 \\ & \rightarrow & 1 + 0 & \text{per } R2 \end{array}$$

Si osservi che l'espressione $1 + 0$ è in *forma normale* in questo sistema in quanto nessuna tra le regole $(R1)$ - $(R4)$ si può applicare ad essa.

Si dimostri che:

1. il termine $D_X(X * X)$ ha due diverse riduzioni, confluenti nella stessa forma normale;
2. se si aggiunge la regola

$$(R5) \quad u + 0 \rightarrow u$$

esiste un termine che si riduce a due forme normali distinte;

3. si trovi una regola $(R6)$ da aggiungere alle regole $(R1)$ - $(R5)$ tale che la confluenza del sistema venga ristabilita.

Esercizio 1.2 Sulla base dell'esempio:

$$\begin{array}{c}
\frac{\frac{[A \rightarrow (B \rightarrow C)]^2}{B \rightarrow C} \quad \frac{\frac{[A \wedge B]^1}{A} \wedge E_1}{\rightarrow E} \quad \frac{[A \wedge B]^1}{B} \wedge E_2}{C} \rightarrow E \\
\frac{\frac{C}{A \wedge B \rightarrow C} \rightarrow I, -1}{(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \wedge B \rightarrow C)} \rightarrow I, -2
\end{array}$$

si producano le dimostrazioni con la deduzione naturale delle seguenti formule:

1. $A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$
2. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B))$
3. $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$
4. $(A \wedge B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$
5. $\forall x(A[x] \rightarrow B) \rightarrow (\exists x A[x] \rightarrow B)$ se $x \notin FV(B)$

dove con $A[x]$ si intende una formula del calcolo dei predicati in cui x possa occorrere libera.

Esercizio 1.3 Si derivino i seguenti giudizi di tipo utilizzando le regole e l'assioma del λ -calcolo con tipi semplici:

1. $x : A, y : A \rightarrow B \vdash yx : B$
2. $\vdash \lambda x : A \rightarrow B \lambda y : B \rightarrow C \lambda z : A. y(xz) : (A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow A \rightarrow C$

2 Svolgimento esercizi

2.1 Svolgimento

1) Si hanno due possibili riduzioni in base a dove si sceglie di applicare prima la regola $R1$.

$$\begin{array}{lll}
D_X(X * Y) & \rightarrow & (X * D_X(X)) + (D_X(X) + X) \quad \text{per } R4 \\
& \rightarrow & (X * 1) + (D_X(X) + X) \quad \text{per } R1 \\
& \rightarrow & (X * 1) + (1 + X) \quad \text{per } R1
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
D_X(X * Y) & \rightarrow & (X * D_X(X)) + (D_X(X) + X) \quad \text{per } R4 \\
& \rightarrow & (X * D_X(X)) + (1 + X) \quad \text{per } R1 \\
& \rightarrow & (X * 1) + (1 + X) \quad \text{per } R1
\end{array}$$

2) Per esempio $D_X(X + 0)$ si può ridurre nei seguenti modi.

$$\begin{array}{lll} D_X(X + 0) & \rightarrow & D_X(X) \quad \text{per } R5 \\ & \rightarrow & 1 \quad \text{per } R1 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} D_X(X + 0) & \rightarrow & D_X(X) + D_X(0) \quad \text{per } R3 \\ & \rightarrow & 1 + D_X(0) \quad \text{per } R1 \end{array}$$

3) Per fare in modo che si abbia una sola forma normale è sufficiente aggiungere la seguente regola.

$$(R6) \quad D_X(0) \rightarrow 0$$

così si ha:

$$\begin{array}{lll} D_X(X + 0) & \rightarrow & D_X(X) + D_X(0) \quad \text{per } R3 \\ & \rightarrow & 1 + D_X(0) \quad \text{per } R1 \\ & \rightarrow & 1 + 0 \quad \text{per } R6 \\ & \rightarrow & 1 \quad \text{per } R5 \end{array}$$

2.2 Svolgimento

1) $A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$

$$\begin{array}{c} \frac{[\neg A]^2 \quad [A]^1}{\perp} \neg E \\ \frac{\perp}{B} \perp E \\ \frac{}{\neg A \rightarrow B} \rightarrow I, -2 \\ \frac{}{A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)} \rightarrow I, -1 \end{array}$$

2) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B))$

$$\begin{array}{c} \frac{[A \rightarrow B]^1}{(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B)} \rightarrow I \\ \frac{}{(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B))} \rightarrow I, -1 \end{array}$$

3) $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$

$$\begin{array}{c} \frac{[\neg B \rightarrow \neg A]^2 \quad [\neg B]^3}{\neg A} \rightarrow E \\ \frac{[\neg A]^1}{\perp} \neg E \\ \frac{\perp}{B} RAA, -3 \\ \frac{}{A \rightarrow B} \rightarrow I, -1 \\ \frac{}{(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)} \rightarrow I, -1 \end{array}$$

4) $(A \wedge B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$

$$\frac{\frac{\frac{[A \wedge B \rightarrow C]^1}{C} \rightarrow I, -3}{A \rightarrow (B \rightarrow C)} \rightarrow I, -2}{(A \wedge B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))} \rightarrow I, -1$$

5) $\forall x(A[x] \rightarrow B) \rightarrow (\exists x A[x] \rightarrow B)$ se $x \notin \mathbf{FV}(B)$

$$\frac{\frac{\frac{[\forall x(A[x] \rightarrow B)]^1}{A[\alpha] \rightarrow B} \forall E}{\frac{[\exists x A[x]]^2}{B} \exists E, -3} \wedge I}{\frac{(\exists x A[x] \rightarrow B)}{\forall x(A[x] \rightarrow B) \rightarrow (\exists x A[x] \rightarrow B)} \rightarrow I, -1} \rightarrow I, -1$$

2.3 Svolgimento

1) $x : A, y : A \rightarrow B \vdash yx : B$.

$\Gamma = x : A, y : A \rightarrow B$

$$\frac{\frac{\frac{\Gamma \vdash y : A \rightarrow B}{\Gamma \vdash yx : B} ax}{\Gamma \vdash \lambda y : A \rightarrow B. yx : (A \rightarrow B) \rightarrow B} \rightarrow I}{\Gamma \vdash \lambda x : A \lambda y : A \rightarrow B. yx : A \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow B} \rightarrow I$$

2) $\vdash \lambda x : A \rightarrow B \lambda y : B \rightarrow C \lambda z : A. y(xz) : (A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow A \rightarrow C$.

$\Gamma = x : A \rightarrow B, y : B \rightarrow C, z : A, y(xz) : C$

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\Gamma \vdash y : B \rightarrow C}{\Gamma \vdash y(xz) : C} ax}{\Gamma \vdash \lambda z : A. y(xz) : A \rightarrow C} \rightarrow I}{\Gamma \vdash \lambda y : B \rightarrow C \lambda z : A. y(xz) : (B \rightarrow C) \rightarrow A \rightarrow C} \rightarrow I}{\Gamma \vdash \lambda x : A \rightarrow B \lambda y : B \rightarrow C \lambda z : A. y(xz) : (A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow A \rightarrow C} \rightarrow I$$