
ANNO ACCADEMICO 2024/2025

Metodi Numerici

Teoria

Altair's Notes



UNIVERSITÀ
DI TORINO



DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

1.1 Che cos'è l'analisi numerica?

5

Buona posizione e Condizionamento — 6 • Algoritmi — 7

Premessa

Licenza

Questi appunti sono rilasciati sotto licenza Creative Commons Attribuzione 4.0 Internazionale (per maggiori informazioni consultare il link: <https://creativecommons.org/version4/>).



Formato utilizzato

Box di "Concetto sbagliato":

Concetto sbagliato 0.1: Testo del concetto sbagliato

Testo contenente il concetto giusto.

Box di "Corollario":

Corollario 0.0.1 Nome del corollario

Testo del corollario. Per corollario si intende una definizione minore, legata a un'altra definizione.

Box di "Definizione":

Definizione 0.0.1: Nome delle definizioni

Testo della definizione.

Box di "Domanda":

Domanda 0.1

Testo della domanda. Le domande sono spesso utilizzate per far riflettere sulle definizioni o sui concetti.

Box di "Esempio":

Esempio 0.0.1 (Nome dell'esempio)

Testo dell'esempio. Gli esempi sono tratti dalle slides del corso.

Box di "Note":

Note:-

Testo della nota. Le note sono spesso utilizzate per chiarire concetti o per dare informazioni aggiuntive.

Box di "Osservazioni":

Osservazioni 0.0.1

Testo delle osservazioni. Le osservazioni sono spesso utilizzate per chiarire concetti o per dare informazioni aggiuntive. A differenza delle note le osservazioni sono più specifiche.

1

Introduzione e complementi di algebra lineare

1.1 Che cos'è l'analisi numerica?

Definizione 1.1.1: Analisi numerica

Sviluppare e analizzare *algoritmi* per risolvere *problemi matematici* (algebra lineare, teoria dei numeri, ottimizzazione, etc.) usando l'*approssimazione numerica*.

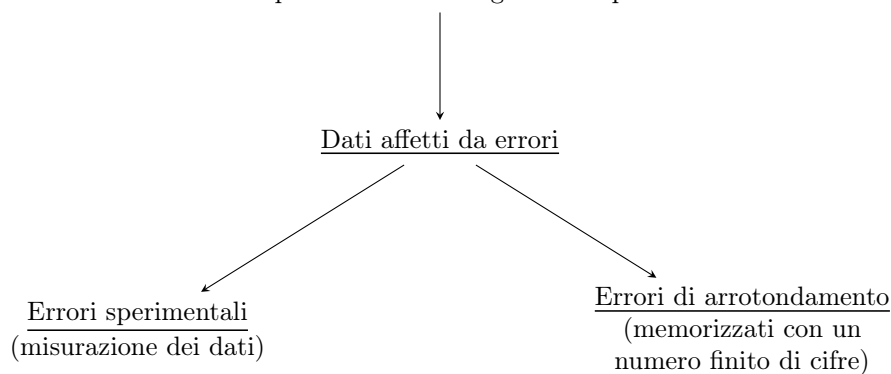
Note:-

In questo corso non si è alla ricerca di soluzioni esatte, ma di soluzioni approssimate.

Definizione 1.1.2: Calcolo scientifico

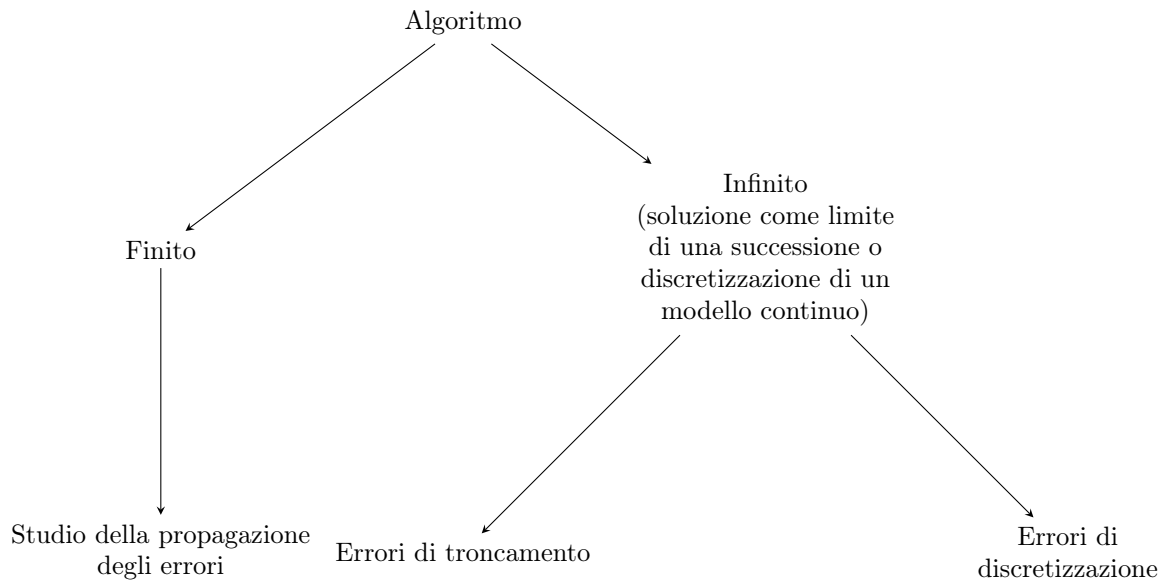
Esplorare l'applicazione dei metodi numerici a problemi concreti delle scienze fisiche, dell'ingegneria, delle scienze sociali e della vita, etc.

Caso: problemi di convergenza complessa



Note:-

Gli errori sperimentali sono dovuti alla strumentazione e a errori di misurazione. Gli errori di arrotondamento sono dovuti al fatto che i calcolatori utilizzano un numero finito di cifre quindi i numeri reali \mathbb{R} vengono approssimati a numeri razionali \mathbb{Q} .



1.1.1 Buona posizione e Condizionamento

Per prevedere l'esito di un fenomeno o simulare l'andamento di un processo si costruisce un *modello matematico*.

Definizione 1.1.3: Modello matematico

Complesso di formule che descrivono il comportamento del fenomeno in esame.

Note:-

Da un modello/problema matematico si vuole passare a un problema numerico.

Definizione 1.1.4: Problema numerico

Non tutti i problemi matematici sono effettivamente risolubili. Si introducono semplificazioni o approssimazioni per rendere il problema risolubile numericamente da un calcolatore.

Note:-

Bisogna notare che si vuole avere a che fare con problemi ben posti^a.

^aVisti in "Metodologie e Tecnologie Didattiche per l'Informatica" e "Storia dell'Informatica".

Definizione 1.1.5: Problema ben posto

Ammette *una e una sola* soluzione che dipende dalla *continuità dei dati*. Il caso opposto è un problema mal posto.

Esempio 1.1.1 (Problemi mal posti)

$$\Rightarrow x^2 + 1 = 0, \nexists \text{ soluzione in } \mathbb{R};$$

$$\Rightarrow x + y = 1, \exists \text{ infinite soluzioni in } \mathbb{R}.$$

Note:-

Un problema è ben posto/mal posto anche in base al tipo di soluzioni che si sta cercando, per esempio il primo esempio ha una soluzione in \mathbb{C} .

Definizione 1.1.6: Problema instabile

La soluzione non dipende dalla continuità dei dati. *Piccole perturbazioni* sui dati in ingresso portano a *errori consistenti* sui dati in uscita. Il caso opposto è un problema stabile.

Note:-

Questo ci porta a parlare di condizionamento di un problema.

Definizione 1.1.7: Condizionamento del problema

Misura qualitativa di come la soluzione viene influenzata dalla perturbazione dei dati. . .

Siano δd una perturbazione dei dati del problema, δx la corrispondente perturbazione sulla sua soluzione e $\|\cdot\|$ una qualsiasi *norma vettoriale*.

- K è il numero di condizionamento assoluto, ossia $\|\delta x\| \leq K \|\delta d\|$;
- K^* è il numero di condizionamento relativo, ossia $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq K^* \frac{\|\delta d\|}{\|d\|}$

Note:-

Le perturbazioni relative tengono conto della dimensione del dato che si sta perturbando.

Esempio 1.1.2 (Perturbazione)

Calcolare il numero di condizionamento (relativo) del prodotto tra 2 numeri x e y con perturbazione.

$$|E_x| \leq T$$

$$|E_y| \leq T$$

Prodotto calcolando con dati perturbati (con $E_x E_y$ molto piccolo):

$$x(1 + E_x)y(1 + E_y) = xy(1 + E_x + E_y + E_x E_y) = xy(1 + E_x + E_y)$$

La perturbazione sul prodotto è $E_{xy} = E_x + E_y$ con $|E_{xy}| = |E_x + E_y| \leq |E_x| + |E_y| \leq 2T$, per cui il numero di condizionamento è 2.

1.1.2 Algoritmi**Definizione 1.1.8: Algoritmo**

Un algoritmo è una *sequenza univoca* di un *numero finito* di *operazioni elementari* che stabilisce come calcolare la soluzione di un problema, assegnati certi dati iniziali.

Corollario 1.1.1 Sequenza univoca

Formule + Ordine con cui eseguire le operazioni.

Corollario 1.1.2 Operazioni elementari

Di semplice comprensione.

Corollario 1.1.3 Numero finito

Se l'algoritmo è iterativo bisogna introdurre almeno un criterio d'arresto.

Corollario 1.1.4 Input/Output

Il numero e il tipo di dati richiesti dall'algoritmo e di dati generati da esso.

Definizione 1.1.9: Algoritmo stabile

Un algoritmo è stabile quando la successione delle operazioni che lo compone non amplifica eccessivamente gli errori presenti sui dati. Il caso opposto è un algoritmo instabile.

Definizione 1.1.10: Complessità computazionale

In analisi numerica è il numero delle operazioni in virgola mobile (flop) necessarie per risolvere il problema mediante l'algoritmo dato.

Note:-

In questo corso tratteremo problemi ben posti, ben condizionati e algoritmi stabili con bassa complessità computazionale e occupazione di memoria.

