

---

ANNO ACCADEMICO 2024/2025

---

# Metodi Numerici

---

## Teoria

Altair's Notes



**UNIVERSITÀ**  
**DI TORINO**



---

DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

---



## 1.1 Che cos'è l'analisi numerica?

5

Buona posizione e Condizionamento — 6 • Algoritmi — 7



# Premessa

## Licenza

Questi appunti sono rilasciati sotto licenza Creative Commons Attribuzione 4.0 Internazionale (per maggiori informazioni consultare il link: <https://creativecommons.org/version4/>).



## Formato utilizzato

Box di "Concetto sbagliato":

### Concetto sbagliato 0.1: Testo del concetto sbagliato

Testo contenente il concetto giusto.

Box di "Corollario":

### Corollario 0.0.1 Nome del corollario

Testo del corollario. Per corollario si intende una definizione minore, legata a un'altra definizione.

Box di "Definizione":

### Definizione 0.0.1: Nome delle definizioni

Testo della definizione.

Box di "Domanda":

### Domanda 0.1

Testo della domanda. Le domande sono spesso utilizzate per far riflettere sulle definizioni o sui concetti.

Box di "Esempio":

### Esempio 0.0.1 (Nome dell'esempio)

Testo dell'esempio. Gli esempi sono tratti dalle slides del corso.

**Box di "Note":**

**Note:-**

Testo della nota. Le note sono spesso utilizzate per chiarire concetti o per dare informazioni aggiuntive.

**Box di "Osservazioni":**

**Osservazioni 0.0.1**

Testo delle osservazioni. Le osservazioni sono spesso utilizzate per chiarire concetti o per dare informazioni aggiuntive. A differenza delle note le osservazioni sono più specifiche.



# 1

## Introduzione e complementi di algebra lineare

### 1.1 Che cos'è l'analisi numerica?

#### Definizione 1.1.1: Analisi numerica

Sviluppare e analizzare *algoritmi* per risolvere *problemi matematici* (algebra lineare, teoria dei numeri, ottimizzazione, etc.) usando l'*approssimazione numerica*.

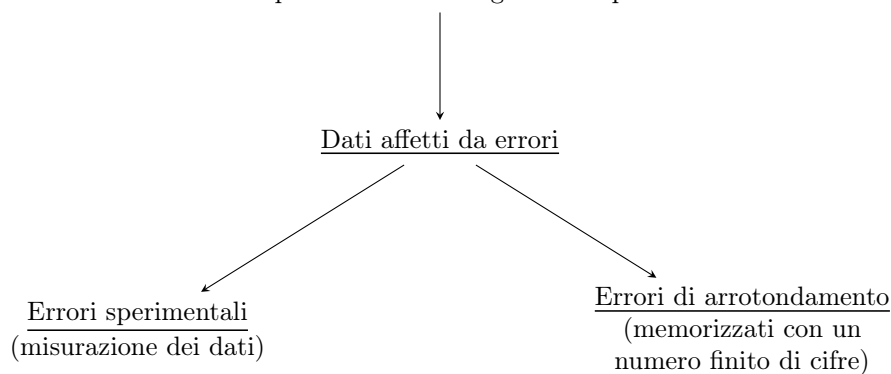
#### Note:-

In questo corso non si è alla ricerca di soluzioni esatte, ma di soluzioni approssimate.

#### Definizione 1.1.2: Calcolo scientifico

Esplorare l'applicazione dei metodi numerici a problemi concreti delle scienze fisiche, dell'ingegneria, delle scienze sociali e della vita, etc.

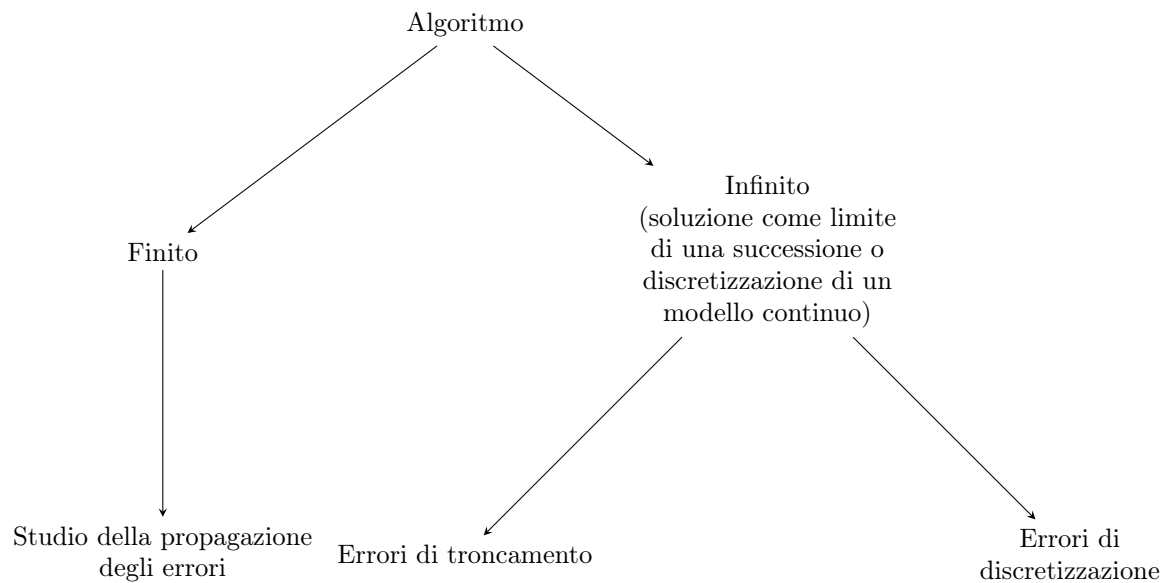
Caso: problemi di convergenza complessa



#### Note:-

Gli errori sperimentali sono dovuti alla strumentazione e a errori di misurazione. Gli errori di arrotondamento sono dovuti al fatto che i calcolatori utilizzano un numero finito di cifre quindi i numeri reali  $\mathbb{R}$  vengono approssimati a numeri razionali  $\mathbb{Q}$ .





### 1.1.1 Buona posizione e Condizionamento

Per prevedere l'esito di un fenomeno o simulare l'andamento di un processo si costruisce un *modello matematico*.

#### Definizione 1.1.3: Modello matematico

Complesso di formule che descrivono il comportamento del fenomeno in esame.

#### Note:-

Da un modello/problema matematico si vuole passare a un problema numerico.

#### Definizione 1.1.4: Problema numerico

Non tutti i problemi matematici sono effettivamente risolubili. Si introducono semplificazioni o approssimazioni per rendere il problema risolubile numericamente da un calcolatore.

#### Note:-

Bisogna notare che si vuole avere a che fare con problemi ben posti<sup>a</sup>.

<sup>a</sup>Visti in "Metodologie e Tecnologie Didattiche per l'Informatica" e "Storia dell'Informatica".

#### Definizione 1.1.5: Problema ben posto

Ammette *una e una sola* soluzione che dipende dalla *continuità dei dati*. Il caso opposto è un problema mal posto.

#### Esempio 1.1.1 (Problemi mal posti)

$$\Rightarrow x^2 + 1 = 0, \nexists \text{ soluzione in } \mathbb{R};$$

$$\Rightarrow x + y = 1, \exists \text{ infinite soluzioni in } \mathbb{R}.$$

#### Note:-

Un problema è ben posto/mal posto anche in base al tipo di soluzioni che si sta cercando, per esempio il primo esempio ha una soluzione in  $\mathbb{C}$ .

**Definizione 1.1.6: Problema instabile**

La soluzione non dipende dalla continuità dei dati. *Piccole perturbazioni* sui dati in ingresso portano a *errori consistenti* sui dati in uscita. Il caso opposto è un problema stabile.

**Note:-**

Questo ci porta a parlare di condizionamento di un problema.

**Definizione 1.1.7: Condizionamento del problema**

Misura qualitativa di come la soluzione viene influenzata dalla perturbazione dei dati. . .

Siano  $\delta d$  una perturbazione dei dati del problema,  $\delta x$  la corrispondente perturbazione sulla sua soluzione e  $\|\cdot\|$  una qualsiasi *norma vettoriale*.

- $K$  è il numero di condizionamento assoluto, ossia  $\|\delta x\| \leq K \|\delta d\|$ ;
- $K^*$  è il numero di condizionamento relativo, ossia  $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq K^* \frac{\|\delta d\|}{\|d\|}$

**Note:-**

Le perturbazioni relative tengono conto della dimensione del dato che si sta perturbando.

**Esempio 1.1.2 (Perturbazione)**

Calcolare il numero di condizionamento (relativo) del prodotto tra 2 numeri  $x$  e  $y$  con perturbazione.

$$|E_x| \leq T$$

$$|E_y| \leq T$$

Prodotto calcolando con dati perturbati (con  $E_x E_y$  molto piccolo):

$$x(1 + E_x)y(1 + E_y) = xy(1 + E_x + E_y + E_x E_y) = xy(1 + E_x + E_y)$$

La perturbazione sul prodotto è  $E_{xy} = E_x + E_y$  con  $|E_{xy}| = |E_x + E_y| \leq |E_x| + |E_y| \leq 2T$ , per cui il numero di condizionamento è 2.

**1.1.2 Algoritmi****Definizione 1.1.8: Algoritmo**

Un algoritmo è una *sequenza univoca* di un *numero finito* di *operazioni elementari* che stabilisce come calcolare la soluzione di un problema, assegnati certi dati iniziali.

**Corollario 1.1.1 Sequenza univoca**

Formule + Ordine con cui eseguire le operazioni.

**Corollario 1.1.2 Operazioni elementari**

Di semplice comprensione.

**Corollario 1.1.3 Numero finito**

Se l'algoritmo è iterativo bisogna introdurre almeno un criterio d'arresto.

**Corollario 1.1.4 Input/Output**

Il numero e il tipo di dati richiesti dall'algoritmo e di dati generati da esso.

**Definizione 1.1.9: Algoritmo stabile**

Un algoritmo è stabile quando la successione delle operazioni che lo compone non amplifica eccessivamente gli errori presenti sui dati. Il caso opposto è un algoritmo instabile.

**Definizione 1.1.10: Complessità computazionale**

In analisi numerica è il numero delle operazioni in virgola mobile (flop) necessarie per risolvere il problema mediante l'algoritmo dato.

**Note:-**

In questo corso tratteremo problemi ben posti, ben condizionati e algoritmi stabili con bassa complessità computazionale e occupazione di memoria.



