Analiza błędów

Reprezentacja liczb

 $x=smB^c$, s - znak, $1\leqslant m < B$ - mantysa, c - cecha Def. t - długość mantysy, $u=2^{-t-1}$ - precyzja arytmetyki Def. Reguła zaokrąglenia: Jeśli $m=1.e_{-1}e_{-2}\dots$ to $\bar{m} = 1.e_{-1}e_{-2}\dots e_{-t} + 0.00\dots e_{-t-1}$. Wtedy:

$$rd(x) = \begin{cases} sB^{c+1} & \text{gdy } e_{-1} = e_{-1} = \cdots = e_{-t} = e_{-t-1} = 1 \\ s\tilde{m}B^c, & \text{wpp.} \end{cases}.$$
 Błąd zaokrąglenia w górę: $|rd(x) - x| \leqslant 2^{-t-1}2^c$,

$$\frac{|rd(x) - x|}{|x|} \leqslant \frac{u}{1+u} < \iota$$

Zbiór reprezentacji arytmetyki: $X_{fl} = rd(X) = \{rd(x) : x \in X\}$

Tw. Jeśli
$$|\alpha_i|\leqslant u, |\rho_i|=1, nu<1,$$
 to $\prod_{i=1}^n (1+\alpha_i)^{\rho_i}=1+\theta_n,$ gdzie $|\theta_n|\leqslant \frac{nu}{1-nu}.$ Tw. Jeśli $|\alpha_i|\leqslant u, nu<0.01,$ to $\prod_{i=1}^n (1+\alpha_i)=1+\theta_n,$ gdzie $|\theta_n|\leqslant 1.01nu.$

Tw. Jeśli
$$|\alpha_i|\leqslant u, nu<0.01$$
, to $\prod_{i=1}^n(1+\alpha_i)=1+\theta_n$, gdzie $|\theta_n|\leqslant 1.01nu$.

Def. Zadanie jest źle uwarunkowane, jeśli niewielkie względne zmiany danych powodują duże względne zmiany wyniku. Wielkości charakteryzujące wpływ zaburzeń danych na zaburzenie wyniku to wskaźniki uwarunkowania:

$$\left|\frac{f(x+h) - f(x)}{f(x)}\right| \approx \left|\frac{xf'(x)}{f(x)}\right| \left|\frac{h}{x}\right|$$

 $|\frac{1}{f(x)}| \approx |\frac{1}{f(x)}| |\frac{1}{x}|$ Def. Niech \tilde{y} - wynik algorytmu obliczającego f(x). Jeśli dla małych $\Delta x, \Delta y$ mamy $\tilde{y}+\Delta y=f(x+\Delta x)$, tzn. wynik jest lekko zaburzony dla lekko zaburzonych danych, to algorytm jest numerycznie poprawny.

Jeśli $\tilde{y}=f(x+\Delta x)$ (wynik dokładny dla lekko zaburzonych danych), to algorytm jest numerycznie bardzo poprawny.

Interpolacja

Ilorazy różnicowe

 $\begin{array}{l} f[x_0,x_1,\ldots,x_k] \text{ jest symetryczną funkcją zmiennych } x_i\\ f=g+c\cdot h\Rightarrow f[x_0,\ldots,x_k]=g[x_0,\ldots,x_k]+c\cdot h[x_0,\ldots,x_k],\\ f[x_0,x_1,\ldots,x_k]=\frac{f[x_1,\ldots,x_k]-f[x_0,\ldots,x_{k-1}]}{x_k-x_0}, \end{array}$ $f[x_0, x_1, \dots, x_{n+1}] = f^{(n+1)}(\xi)/(n+1)!, \xi \in (a, b)$

2.2 Postacie wielomianów interpolacyjnych

$$\text{Lagrange'a: } L_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k \lambda_k, gdzie \quad \lambda_k = \frac{\prod_{j=0, j \neq k}^n (x-x_j)}{\prod_{j=0, j \neq k}^n (x_k-x_j)}$$

Barycentryczna: Dla
$$\sigma_k = \prod_{j=0, j
eq k}^n rac{1}{x_k - x_j}$$

$$L_n(x) = \left\{ \begin{array}{c} \sum_{k=0}^n \frac{\sigma_k}{x - x_k} y_k / \sum_{k=0}^n \frac{\sigma_k}{x - x_k} & \text{gdy } x \notin \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \\ y_k^{-1} & \text{wpp.} \end{array} \right.$$

Newtona:
$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n b_k p_k(x)$$
, gdzie $p_k = \prod_{j=0}^{k-1} (x-x_j)$, $p_0 = 1$

$$b_k = \sum_{i=0}^k \frac{f(x_i)}{\prod_{i=0, i \neq i}^k (x_i - x_j)} = f[x_0, x_1, \dots, x_k]$$

2.3 Reszta wielomianu interpolacyjnego

$$\begin{split} f(x) - L_n(x) &= \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x) p_{n+1}(x) \stackrel{x \neq x_i}{=} p_{n+1}(x) f[x, x_0, x_1, ..., x_n] \\ \max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |f(x) - L_n(x)| &= \frac{1}{(n+1)!} \max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |f^{(n+1)}(x)| \max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |p_{n+1}(x)| \end{split}$$

2.4 DFT

$$\begin{split} & \text{input: } [x_0, x_1, ..., x_{N-1}] \text{, output: } [y_0, y_1, ..., y_{N-1}] \\ & y_k = \sum_{j=0}^{N-1} x_j e^{\frac{2\pi i j k}{N}} \text{ gdzie } (0 \leqslant k < N) \end{split}$$

2.5 Spline

$$\begin{array}{ll} \text{naturalna:} & s''(a) = 0 \wedge s''(b) = 0 \\ \text{zupelna:} & s'(a) = f'(a) \wedge s'(b) = f'(b) \\ \text{okresowa:} & s'(a) = s'(b) \wedge s''(a) = s''(b) \\ \\ \text{Fakt:} & \int_a^b \left(s''(x) \right)^2 dx = \sum_{k=1}^{n-1} \left(f\left[x_k, x_{k+1} \right] - f\left[x_{k-1}, x_k \right] \right) s''(x_k) \\ \lambda_k M_{k-1} + 2M_k + (1 - \lambda_k) M_{k+1} = 6 * f\left[x_{k-1}, x_k, x_{k+1} \right] \\ (k = 1, \dots, n-1) \text{ oraz } \lambda_k = h_k / (h_k + h_{k+1}) \text{ oraz } h_k = x_k - x_{k-1} \end{array}$$

Wielomiany Ortogonalne

3.1 Iloczyn skalarny funkcji

$$\begin{split} \langle f,g\rangle &\leqslant 0; \langle f,f\rangle = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0; \langle f,g\rangle = \langle g,f\rangle; \langle \alpha f,g\rangle = \alpha \langle f,g\rangle; \\ \langle f+h,g\rangle &= \langle f,g\rangle + \langle h,g\rangle \\ & \langle f,g\rangle = \int_a^b p(x)f(x)g(x)dx, \qquad \text{gdzie} \qquad p(x) \qquad \text{-} \qquad \text{funkcja} \qquad \text{wagowa} \\ \langle f,g\rangle_D &= \sum_{k=0}^n f(x_k)g(x_k), \text{ (dla ustalonego } x_k) \end{split}$$

3.2 Czebyszew I rodzaju

$$\begin{split} T_0(x) &= 1, \quad T_1(x) = x, \, T_n(x) = 2x \, T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) \\ T_k(x) &= \cos(k \arccos x), \, x \in [-1,1], \, T_k(-x) = (-1)^k T_k(x), \\ \operatorname{zera} T_{n+1} \colon \ t_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right), \text{ ekstrema } T_n \colon \ u_k = \cos\left(\frac{k}{n}\pi\right) \, (k=0\dots n) \\ \tilde{T}_n &= 2^{(1-n)} T_n \text{ ma min. norme na } [-1,1] \text{ ze wszystkich } \Pi_n \text{ o wsp. wiodącym } 1 \\ \operatorname{waga:} \ p(x) &= (1-x^2)^{-1/2} \\ \langle T_k, T_l \rangle &= \left\{ \begin{array}{cc} 0 & \operatorname{gdy} \ k \neq l \\ \pi/2 & \operatorname{gdy} \ k = l = 0 \\ \pi/2 & \operatorname{gdy} \ k = l = 0 \end{array} \right. \\ \langle T_k, T_l \rangle_D &= \left\{ \begin{array}{cc} 0 & \operatorname{gdy} \ k \neq l \\ n & \operatorname{gdy} \ k = l = 0 \\ (n+1)/2 & \operatorname{gdy} \ k = l \neq 0 \end{array} \right. \\ \left. \left(\operatorname{dla} \ x_i = t_i; k, l \leqslant n \right) \end{split}$$

3.3 Legendre'a

$$\begin{split} P_0(x) &= 1, \quad P_1(x) = x - c_1, \ P_k(x) = (x - c_k) P_{k-1}(x) - d_k P_{k-2}(x) \\ c_k &= \frac{\langle x P_{k-1}, P_{k-1} \rangle}{\langle P_{k-1}, P_{k-1} \rangle}, \quad d_k = \frac{\langle P_{k-1}, P_{k-1} \rangle}{\langle P_{k-2}, P_{k-2} \rangle}, \end{split}$$

Normy

4.1 Wektorowe

$$\begin{split} \|\mathbf{x}\|_p &= \left(|x_1|^p + |x_2|^p + \ldots + |x_n|^p \right)^{1/p}, \ \|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \left\{ |x_i| \right\} \\ \text{Warunki:} \\ \|x\| \geqslant 0; \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0; \ \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|; \ \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|. \end{split}$$

4.2 Macierzowe

$$\begin{split} \|\mathbf{A}\mathbf{B}\| &\leqslant \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\| \\ \mathbf{Def.} \quad \text{Norma} \quad \text{macierzowa} \quad \text{zgodna} \quad \mathbf{z} \quad \text{wektorowa:} \quad \|A\mathbf{x}\| \leqslant \|A\| \|\mathbf{x}\| \\ \|\mathbf{A}\|_1 &= \max_{1\leqslant j\leqslant n} \sum_i |a_{ij}|, \ \|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_j |a_{ij}|, \ \|\mathbf{A}\|_p = \max_{\mathbf{x}\neq \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_p}{\|\mathbf{x}\|_p}. \\ \|\mathbf{A}\|_E &= \sqrt{\sum_{i,j} |a_{i,j}|^2} \text{ (euklidesowa/Frobeniusa)} \\ \|\mathbf{A}\|_2 &= \sqrt{\rho(\mathbf{A}^T\mathbf{A})} \text{ (spektralna, } \rho(X) = \max |\lambda(X)|) \\ E &\in \mathbb{R}^{n\times n}, \|E\| < 1 \Rightarrow I - E \text{ jest nieosobliwa i } \|(I-E)^{-1}\| \leqslant (1-\|E\|)^{-1} \end{split}$$

5 **Aproksymacja**

Normy, iloczyn skalarny, błąd

$$||f||_{\infty} = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|, ||f||_{2} = \sqrt{\int_{a}^{b} p(x)f^{2}(x) dx}$$
$$\langle f, g \rangle := \int_{a}^{b} p(x) f(x) g(x) dx, \sqrt{\langle f, f \rangle} = ||f||_{2}$$
$$E_{n}(f) := \inf_{W \in \Pi_{n}} ||f - W_{n}||_{\infty}^{T}$$

5.2 Wielomian optymalny

$$w_n^* = \sum_{k=0}^n \frac{\langle f, P_k \rangle}{\langle P_k, P_k \rangle} P_k, \ \|f - w_n^*\|_2 = \sqrt{\|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^n \frac{\langle f, P_k \rangle^2}{\langle P_k, P_k \rangle}}$$

Kwadratury interpolacyjne

$$I_p(f)=\int_a^b p(x)f(x)dx\approx \sum_{k=0}^n A_kf(x_k),$$
 Wiel. węzłowy: $\omega(x)=(x-x_0)(x-x_1)..(x-x_n)$

6.1 Kwadratury Newtona-Cotesa

$$\begin{split} h &= (b-a)/n, \quad x_k = a + kh \\ \text{Wz\'or trapez\'ow: } n &= 1, \ A_0 = A_1 = h/2, \ R_1(f) = -\frac{h^3}{12} f''(\xi) \\ \text{Wz\'or Simpsona: } n &= 2, A_0 = A_2 = h/3, \ A_1 = 4h/3, \ R_2(f) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi) \\ \text{Z\'t. wz\'or trapez\'ow: } T_n &= h \sum_{k=0}^n {''} \ f(x_k), \ R_n^T(f) = -\frac{h^3n}{12} f''(\xi) \\ \text{Z\'t. wz\'or Simpsona: } n &= 2m, \quad S_n(f) = (4T_n - T_m)/3 \\ R_n^S(f) &= -(b-a)\frac{h^4}{180} f^{(4)}(\xi) \\ \text{Metoda Romberga: } h_k &= (b-a)/2^k \end{split}$$

Metoda Romberga:
$$h_k = (b-a)/2^k$$
 $x_i^(k) = a + ih_k, (i = 0, 1, \dots, 2^k), \quad T_{0k} = T_{2k}(f)$ $T_{mk} = \frac{4^m T_{m-1,k+1} - T_{m-1,k}}{4^m - 1}$ Reszta Newtona-Cotesa:

$$I_p(f) - Q_n(f) = \begin{cases} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_a^b \omega(x) dx & \text{gdy } n = 1, 3, \dots \\ \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \int_a^b x \omega(x) dx & \text{gdy } n = 2, 4, \dots \end{cases}$$

6.2 Kwadratury Gaussa

$$\begin{split} x_k &- \text{zera wiel. orto. } P_{n+1}(x), c_k \text{ wsp. wiod. } P_k \\ \lambda_k(x) &= \omega(x)/[\omega'(x_k)(x-x_k)]. \\ 0 &< A_k = \int_a^b p(x)\lambda_k(x)dx = \frac{c_{n+1}}{c_n} \frac{||P_n||^2}{P'_{n+1}(x_k)P_n(x_k)}. \\ R_n(f) &= \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(2n+2)!c_{n+1}^2} \int_a^b p(x)[P_{n+1}(x)]^2 dx \end{split}$$

6.3 Gauss-Czebyszew

$$\begin{split} & \int_{-1}^{1} p(x)f(x)dx \approx \int_{-1}^{1} p(x)I_{n}(x)dx \\ & I_{n}(x) = \sum_{i=0}^{n} \prime \alpha_{i}T_{i}(x), \alpha_{i} = \frac{2}{n+1} \sum_{i=0}^{n} f(t_{k})T_{i}(t_{k}) \\ & Q_{n}^{QC}(f) = \sum_{k=0}^{n} A_{k}f(t_{k}), A_{k} = \frac{\pi}{n+1} \end{split}$$

6.4 Gauss-Lobatto

$$\begin{split} x_k &= u_k = \cos\left(\frac{k}{n}\pi\right) \\ \int_{-1}^1 p(x)f(x)dx &\approx \int_{-1}^1 p(x)J_n(x)dx \\ J_n(x) &= \sum_{j=0}^n \ '' \ \beta_j T_j(x), \beta_j = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^n \ '' \ (u_k)T_j(u_k) \\ Q_n^L(f) &= \sum_{k=0}^n \ '' \ A_k f(u_k), A_k = \frac{\pi}{n}. \end{split}$$

Algebra numeryczna

7.1 Metody iteracyjne

$$x^{(k+1)}=B_{\tau}x^{(k)}+c\quad (k\geqslant 0)$$
 Tw. Metoda iter. jest zbieżna dla dowolnego $x^{(0)}$, jeśli $\rho(B)<1$, gdzie $\rho(B):=\max_{1\leq i\leq n}(\lambda_i)$ to promień spektralny macierzy B.

gdzie $\rho(B):=\max_{1\leqslant i\leqslant n}(\lambda_i)$ to promień spektralny macierzy B. Metoda Richardsona: $B_{\tau}=I-\tau A, \quad c=\tau b$ Tw. Załóżmy, że wszystkie λ_i spełniają: $0<\alpha\leqslant\lambda_i\leqslant\beta$. Wtedy metoda Richardsona jest zbieżna dla $0 < \tau < \frac{2}{\beta}$

Metoda Jacobiego: $B_J=-D^{-1}(L+U)$ Tw. Jeśli A jest macierzą ze ściśle dominującą przekątną, tj.

$$|a_{ii}|>\sum_{\substack{j=1\j
eq i}}^n|a_{ij}|$$
 , to wtedy $\|B_J\|_\infty<1$ i $\|B_S\|_\infty<1$.

Metoda Gaussa-Seidela: $B_S = -(D+L)^{-1}U$ Tw. Jeśli A jest symetryczna i dodatnio określona, to $||B_S||_{\infty} < 1$. $B_{\omega} = (I - \omega M)^{-1} (\omega N + (1 - \omega)I), \quad M = -D^{-1} L, N = -D^{-1} U$

Równania nieliniowe

Metoda Newtona:
$$X_{n+1}=X_n-\frac{f(X_n)}{f'(X_n)}$$
 Metoda siecznych: $X_{n+1}=X_n-\frac{X_n-X_{n-1}}{f(X_n)-f(X_{n-1})}$

Regula falsi - metoda siecznych z zachowaniem warunku $f(X_n)f(X_{n-1})<0$ Metoda Newtona dla r-krotnego pierwiastka: $X_{n+1}=X_n-r\frac{f(X_n)}{f'(X_n)}$ Algortym adaptacyjny: $X_{n+1}=X_n-r_n\frac{f(X_n)}{f'(X_n)}$, $r_n=\frac{X_{n-1}-X_{n-2}}{2X_{n-1}-X_n-X_{n-2}}$ Metoda Newtona dla wielu zmiennych: J*h=-F, $X_{n+1}=X_n+h_n$ Metoda Laguerra(zbieżna sześciennie do pojedynczych pierwiastków): $\lim_{n\to \infty} (Z_n)$

Metoda Laguerra(zbieżna sześciennie do pojedynczych pierwiastko
$$Z_{k+1} = Z_k - \frac{n\omega(Z_k)}{\omega'(Z_k) + / - \sqrt[2]{H(Z_k)}},$$

$$H(x) = (n-1)[(n-1)\omega'^2(x) - n\omega(x)\omega''(x)]$$
 Metoda Steffensena:
$$C_{n+1} = C_n - \frac{f^2(C_n)}{f(C_n + f(C_n)) - f(C_n)}$$

9 Teoretycznie przydatne wzory

Nierówność Cauchy'ego-Schwarza:
$$\Big(\sum_{k=1}^n a_k b_k\Big)^2 \leqslant \Big(\sum_{k=1}^n a_k^2\Big) \Big(\sum_{k=1}^n b_k^2\Big)$$

Inaczej: $\langle v,w \rangle \leqslant \|v\|_2 \cdot \|w\|_2$ Bairstowa: $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$ Związek: $b_k = a_k + ub_{k+1} + vb_{k+2}$ Niech ciąg a_k będzie zbieżny do g. Jeśli istnieją takie liczby rzeczywiste p i C (C>0), że $\lim \frac{|a_{n+1}-g|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{1-\frac{|a_n|}{$

ze $\lim_{n \to \inf} \frac{1}{|a_n - g|^p} = C$, to p jest wykładnikiem zbieżności ciągu, a C – stałą asymptotyczną błędu. Dla p=1 oraz 0 < C < 1 zbieżność jest liniowa, dla p=2 – kwadratowa, dla p=3 – sześcienna. gdy p=1 i C=1 - zbieżność podliniowa, jeśli p=1, C=0 - nadliniowa.

$$\sin x \pm \sin y = 2\sin \frac{x \pm y}{2} \cdot \cos \frac{x \mp y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos \frac{x + y}{2} \cdot \cos \frac{x - y}{2}$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \pm \sin x \cdot \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$$
$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2} \cdot \sin\frac{x-y}{2}$$

$$\text{Wz\'or Taylora}: f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + R_n(x,a), \\ \lim_{x->a} \frac{R_n(x,a)}{(x-a)^n} = 0 \text{ Wz\'or Taylora}.$$

Taylora dla dwóch zmiennych: $f(a+h)=f(a)+h_1\frac{df}{dx_1}(x_1,x_2)+h_2\frac{df}{dx_2}(x_1,x_2)...$