1 Analiza błędów

1.1 Reprezentacja liczb

$x = smB^c$, s - znak, $1 \leqslant m < B$ - mantysa, c - cecha
Def. t - długość mantysy, $u = 2^{-t-1}$ - precyzja arytmetyki
Def. Reguła zaokrąglenia: Jeśli $m = 1.e_{-1}e_{-2}\dots$ to $\bar{m} = 1.e_{-1}e_{-2}\dots e_{-t} + 0.\underbrace{00...0}_{\text{t-1 razy}}e_{-t-1}$. Wtedy:

$$rd(x) = \begin{cases} sB^{c+1} & \text{gdy } e_{-1} = e_{-1} = \dots = e_{-t} = e_{-t-1} = 1 \\ s\bar{m}B^c, & \text{wpp.} \end{cases}.$$

Błąd zaokrąglenia w górę: $|rd(x) - x| \leqslant 2^{-t-1}2^c$,
$\frac{|rd(x) - x|}{|x|} \leqslant \frac{u}{1+u} < u$
Zbiór reprezentacji arytmetyki: $X_{fl} = rd(X) = \{rd(x) : x \in X\}$

Tw. Jeśli $|\alpha_i| \leqslant u, |\rho_i| = 1, nu < 1$, to $\prod_{i=1}^{n}(1+\alpha_i)^{\rho_i} = 1+\theta_n$, gdzie $|\theta_n| \leqslant \frac{nu}{1-nu}$.

Tw. Jeśli $|\alpha_i| \leqslant u, nu < 0.01$, to $\prod_{i=1}^{n}(1+\alpha_i) = 1+\theta_n$, gdzie $|\theta_n| \leqslant 1.01nu$.

Def. Zadanie jest **źle uwarunkowane**, jeśli niewielkie względne zmiany danych powodują duże względne zmiany wyniku. Wielkości charakteryzujące wpływ zaburzeń danych na zaburzenie wyniku to **wskaźniki uwarunkowania**:
$|\frac{f(x+h) - f(x)}{f(x)}| \approx |\frac{xf'(x)}{f(x)}||\frac{h}{x}|$
Def. Niech $\tilde{y}$ - wynik algorytmu obliczającego $f(x)$. Jeśli dla małych $\Delta x, \Delta y$ mamy $\tilde{y} + \Delta y = f(x + \Delta x)$, tzn. wynik jest lekko zaburzony dla lekko zaburzonych danych, to algorytm jest **numerycznie poprawny**.
Jeśli $\tilde{y} = f(x + \Delta x)$ (wynik dokładny dla lekko zaburzonych danych), to algorytm jest **numerycznie bardzo poprawny**.

2 Interpolacja

2.1 Ilorazy różnicowe

$f[x_0, x_1, \dots, x_k]$ jest symetryczną funkcją zmiennych x_i
$f = g + c \cdot h \Rightarrow f[x_0, \dots, x_k] = g[x_0, \dots, x_k] + c \cdot h[x_0, \dots, x_k]$,
$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$,
$f[x_0, x_1, \dots, x_{n+1}] = f^{(n+1)}(\xi)/(n+1)!$, $\xi \in (a, b)$

2.2 Postacie wielomianów interpolacyjnych

Lagrange'a: $L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k\lambda_k, gdzie \quad \lambda_k = \frac{\prod_{j=0,j\neq k}^{n}(x - x_j)}{\prod_{j=0,j\neq k}^{n}(x_k - x_j)}$

Barycentryczna: Dla $\sigma_k = \prod_{j=0,j\neq k}^{n} \frac{1}{x_k - x_j}$

$$L_n(x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{\sigma_k}{x - x_k}y_k \Bigg/ \sum_{k=0}^{n}\frac{\sigma_k}{x - x_k} & \text{gdy } x \notin \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \\ y_k & wpp. \end{cases}$$

Newtona: $L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k p_k(x)$, gdzie $p_k = \prod_{j=0}^{k-1}(x - x_j)$, $p_0 = 1$

$$b_k = \sum_{i=0}^{k}\frac{f(x_i)}{\prod_{j=0,j\neq i}^{k}(x_i - x_j)} = f[x_0, x_1, \dots, x_k]$$

W bazie Czebyszewa (tylko dla x_i = zera T_{n+1}):

$I_n = {\sum_{k=0}^{n}}' \alpha_k T_k(x)$; $\alpha_k = \frac{2}{n+1}\langle f, T_k\rangle_D$ (zob. 3.1 dla zer T_{n+1})

2.3 Reszta wielomianu interpolacyjnego

$$f(x) - L_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi_x)p_{n+1}(x) \overset{x\neq x_i}{=} p_{n+1}(x)f[x, x_0, x_1, ..., x_n]$$

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|f(x) - L_n(x)| = \frac{1}{(n+1)!}\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|f^{(n+1)}(x)| \max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|p_{n+1}(x)|$$

2.4 DFT

`input`: $[x_0, x_1, ..., x_{N-1}]$, `output`: $[y_0, y_1, ..., y_{N-1}]$

$$y_k = \sum_{j=0}^{N-1} x_j e^{\frac{2\pi ijk}{N}} \quad \text{gdzie } (0 \leqslant k < N)$$

2.5 Spline

naturalna: $s''(a) = 0 \wedge s''(b) = 0$
zupelna: $s'(a) = f'(a) \wedge s'(b) = f'(b)$
okresowa: $s'(a) = s'(b) \wedge s''(a) = s''(b)$

Fakt: $\int_a^b \left(s''(x)\right)^2 dx = \sum_{k=1}^{n-1}\left(f[x_k, x_{k+1}] - f[x_{k-1}, x_k]\right)s''(x_k)$

$\lambda_k M_{k-1} + 2M_k + (1 - \lambda_k)M_{k+1} = 6 * f[x_{k-1}, x_k, x_{k+1}]$
$(k = 1, ..., n-1)$ oraz $\lambda_k = h_k/(h_k + h_{k+1})$ oraz $h_k = x_k - x_{k-1}$

3 Wielomiany Ortogonalne

3.1 Iloczyn skalarny funkcji

$\langle f, g\rangle \leqslant 0; \langle f, f\rangle = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0; \langle f, g\rangle = \langle g, f\rangle; \langle \alpha f, g\rangle = \alpha\langle f, g\rangle;$
$\langle f + h, g\rangle = \langle f, g\rangle + \langle h, g\rangle$

$\langle f, g\rangle = \int_a^b p(x)f(x)g(x)dx$, gdzie $p(x)$ - funkcja wagowa;

$\langle f, g\rangle_D = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)g(x_k)$, (dla ustalonego x_k)

3.2 Czebyszew I rodzaju

$T_0(x) = 1, \;\; T_1(x) = x, \, T_n(x) = 2x\,T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$
$T_k(x) = \cos(k \arccos x)$, $x \in [-1, 1]$, $T_k(-x) = (-1)^k T_k(x)$,
zera T_{n+1}: $t_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right)$, ekstrema T_n : $u_k = \cos\left(\frac{k}{n}\pi\right)$ $(k = 0 \dots n)$
$\tilde{T}_n = 2^{(1-n)}T_n$ ma min. normę na $[-1, 1]$ ze wszystkich Π_n o wsp. wiodącym 1
waga: $p(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$

$$\langle T_k, T_l\rangle = \begin{cases} 0 & \text{gdy } k \neq l \\ \pi & \text{gdy } k = l = 0 \\ \pi/2 & \text{gdy } k = l \neq 0 \end{cases}$$

$$\langle T_k, T_l\rangle_D = \begin{cases} 0 & \text{gdy } k \neq l \\ n+1 & \text{gdy } k = l = 0 \\ (n+1)/2 & \text{gdy } k = l \neq 0 \end{cases} \quad \text{(dla } x_i = t_i; k, l \leqslant n)$$

3.3 Legendre'a

$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x - c_1, \;\; P_k(x) = (x - c_k)P_{k-1}(x) - d_k P_{k-2}(x)$
$c_k = \frac{\langle xP_{k-1}, P_{k-1}\rangle}{\langle P_{k-1}, P_{k-1}\rangle}, \quad d_k = \frac{\langle P_{k-1}, P_{k-1}\rangle}{\langle P_{k-2}, P_{k-2}\rangle}$,

4 Normy

4.1 Wektorowe

$\|\mathbf{x}\|_p = \left(|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_n|^p\right)^{1/p}, \;\; \|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1\leqslant j\leqslant n}\left\{|x_i|\right\}$

Warunki:
$\|x\| \geqslant 0; \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0; \;\; \|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|; \;\; \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

4.2 Macierzowe

$\|\mathbf{AB}\| \leqslant \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\|$
Def. Norma macierzowa zgodna z wektorową: $\|A\mathbf{x}\| \leqslant \|A\|\|\mathbf{x}\|$
$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_i |a_{ij}|, \;\; \|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_j |a_{ij}|, \;\; \|\mathbf{A}\|_p = \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}}\frac{\|\mathbf{Ax}\|_p}{\|\mathbf{x}\|_p}$.

$\|\mathbf{A}\|_E = \sqrt{\sum_{i,j}|a_{i,j}|^2}$ (euklidesowa/Frobeniusa)

$\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\rho(\mathbf{A}^T\mathbf{A})}$ (spektralna, $\rho(X) = \max|\lambda(X)|$)
$E \in \mathbb{R}^{n\times n}, \|E\| < 1 \Rightarrow I - E$ jest nieosobliwa i $\|(I - E)^{-1}\| \leqslant (1 - \|E\|)^{-1}$

5 Aproksymacja

5.1 Normy, iloczyn skalarny, błąd

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|,\ \ \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b p(x)f^2(x)\,dx}$$

$$\langle f,g\rangle := \int_a^b p(x)\,f(x)\,g(x)\,dx,\ \ \sqrt{\langle f,f\rangle} = \|f\|_2$$

$$E_n(f) := \inf_{W\in\Pi_n} \|f-W_n\|_\infty^T$$

5.2 Wielomian optymalny

$$w_n^* = \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle f,P_k\rangle}{\langle P_k,P_k\rangle} P_k,\ \ \|f-w_n^*\|_2 = \sqrt{\|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^{n}\frac{\langle f,P_k\rangle^2}{\langle P_k,P_k\rangle}}$$

6 Kwadratury interpolacyjne

$$I_p(f) = \int_a^b p(x)f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k),$$

Wiel. węzłowy: $\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)..(x-x_n)$

6.1 Kwadratury Newtona-Cotesa

$h = (b-a)/n,\ \ x_k = a+kh$

Wzór trapezów: $n=1$, $A_0 = A_1 = h/2$, $R_1(f) = -\dfrac{h^3}{12}f''(\xi)$

Wzór Simpsona: $n=2$,$A_0 = A_2 = h/3$, $A_1 = 4h/3$, $R_2(f) = -\dfrac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi)$

Zł. wzór trapezów: $T_n = h\displaystyle\sum_{k=0}^{n}{}'' f(x_k)$, $R_n^T(f) = -\dfrac{h^3 n}{12}f''(\xi)$

Zł. wzór Simpsona: $n=2m$, $S_n(f) = (4T_n - T_m)/3$

$R_n^S(f) = -(b-a)\dfrac{h^4}{180}f^{(4)}(\xi)$

Metoda Romberga: $h_k = (b-a)/2^k$

$x_i^(k) = a + ih_k, (i = 0,1,\ldots,2^k)$, $T_{0k} = T_{2^k}(f)$

$T_{mk} = \dfrac{4^m T_{m-1,k+1} - Tm-1,k}{4^m-1}$

Reszta Newtona-Cotesa:

$$I_p(f) - Q_n(f) = \begin{cases} \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\displaystyle\int_a^b \omega(x)dx & \text{gdy } n = 1,3,\ldots \\ \dfrac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!}\displaystyle\int_a^b x\omega(x)dx & \text{gdy } n = 2,4,\ldots \end{cases} \quad \text{gdzie } \xi\in(a,b).$$

6.2 Kwadratury Gaussa

x_k - zera wiel. orto. $P_{n+1}(x), c_k$ wsp. wiod. P_k

$\lambda_k(x) = \omega(x)/[\omega'(x_k)(x-x_k)]$.

$$0 < A_k = \int_a^b p(x)\lambda_k(x)dx = \frac{c_{n+1}}{c_n}\frac{||P_n||^2}{P'_{n+1}(x_k)P_n(x_k)}.$$

$$R_n(f) = \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(2n+2)!c_{n+1}^2}\int_a^b p(x)[P_{n+1}(x)]^2dx$$

6.3 Gauss-Czebyszew

$$\int_{-1}^1 p(x)f(x)dx \approx \int_{-1}^1 p(x)I_n(x)dx$$

$$I_n(x) = \sum_{i=0}^{n}{}'\alpha_i T_i(x), \alpha_i = \frac{2}{n+1}\sum_{i=0}^{n} f(t_k)T_i(t_k)$$

$$Q_n^{QC}(f) = \sum_{k=0}^{n} A_k f(t_k), A_k = \frac{\pi}{n+1}$$

6.4 Gauss-Lobatto

$$x_k = u_k = \cos\left(\frac{k}{n}\pi\right)$$

$$\int_{-1}^1 p(x)f(x)dx \approx \int_{-1}^1 p(x)J_n(x)dx$$

$$J_n(x) = \sum_{j=0}^{n}{}'' \beta_j T_j(x), \beta_j = \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n}{}'' (u_k)T_j(u_k)$$

$$Q_n^L(f) = \sum_{k=0}^{n}{}'' A_k f(u_k), A_k = \frac{\pi}{n}.$$

7 Algebra numeryczna

7.1 Metody iteracyjne

$x^{(k+1)} = B_\tau x^{(k)} + c \quad (k \geqslant 0)$

Tw. Metoda iter. jest zbieżna dla dowolnego $x^{(0)}$, jeśli $\rho(B) < 1$, gdzie $\rho(B) := \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(\lambda_i)$ to promień spektralny macierzy B.

Metoda Richardsona: $B_\tau = I - \tau A, \quad c = \tau b$

Tw. Załóżmy, że wszystkie λ_i spełniają: $0 < \alpha \leqslant \lambda_i \leqslant \beta$.

Wtedy metoda Richardsona jest zbieżna dla $0 < \tau < \dfrac{2}{\beta}$.

Metoda Jacobiego: $B_J = -D^{-1}(L+U)$

Tw. Jeśli A jest macierzą ze ściśle dominującą przekątną, tj.

$|a_{ii}| > \displaystyle\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$, to wtedy $\|B_J\|_\infty < 1$ i $\|B_S\|_\infty < 1$.

Metoda Gaussa-Seidela: $B_S = -(D+L)^{-1}U$

Tw. Jeśli A jest symetryczna i dodatnio określona, to $\|B_S\|_\infty < 1$.

$B_\omega = (I-\omega M)^{-1}(\omega N + (1-\omega)I), \quad M = -D^{-1}L, N = -D^{-1}U$

8 Równania nieliniowe

Metoda Newtona: $X_{n+1} = X_n - \dfrac{f(X_n)}{f'(X_n)}$

Metoda siecznych: $X_{n+1} = X_n - \dfrac{f(X_n)(X_n - X_{n-1})}{f(X_n) - f(X_{n-1})}$

Regula falsi - metoda siecznych z zachowaniem warunku $f(X_n)f(X_{n-1}) < 0$ Metoda Newtona dla r-krotnego pierwiastka: $X_{n+1} = X_n - r\dfrac{f(X_n)}{f'(X_n)}$

Algortym adaptacyjny: $X_{n+1} = X_n - r_n\dfrac{f(X_n)}{f'(X_n)}$, $r_n = \dfrac{X_{n-1} - X_{n-2}}{2X_{n-1} - X_n - X_{n-2}}$

Metoda Newtona dla wielu zmiennych: $J * h = -F$, $X_{n+1} = X_n + h_n$

Metoda Laguerra(zbieżna sześciennie do pojedynczych pierwiastków):

$$Z_{k+1} = Z_k - \frac{n\omega(Z_k)}{\omega'(Z_k) + / - \sqrt[2]{H(Z_k)}},$$

$$H(x) = (n-1)[(n-1)\omega'^2(x) - n\omega(x)\omega''(x)]$$

Metoda Steffensena: $C_{n+1} = C_n - \dfrac{f^2(C_n)}{f(C_n + f(C_n)) - f(C_n)}$

9 Teoretycznie przydatne wzory

Nierówność Cauchy'ego-Schwarza: $\Big(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\Big)^2 \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\Big)$

Inaczej: $\langle v,w\rangle \leqslant \|v\|_2 \cdot \|w\|_2$

Bairstowa: $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$ **Związek:** $b_k = a_k + ub_{k+1} + vb_{k+2}$

Niech ciąg a_k będzie zbieżny do g. Jeśli istnieją takie liczby rzeczywiste p i C $(C > 0)$, że $\lim\limits_{n\to\inf}\dfrac{|a_{n+1} - g|}{|a_n - g|^p} = C$, to p jest **wykładnikiem zbieżności ciągu**, a C – **stałą asymptotyczną błędu**. Dla $p = 1$ oraz $0 < C < 1$ zbieżność jest liniowa, dla $p = 2$ – kwadratowa, dla $p = 3$ – sześcienna. gdy $p = 1$ i $C = 1$ - zbieżność podliniowa, jeśli $p = 1$, $C = 0$ - nadliniowa.

$\sin x \pm \sin y = 2\sin\dfrac{x\pm y}{2}\cdot\cos\dfrac{x\mp y}{2}$

$\cos x + \cos y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\cdot\cos\dfrac{x-y}{2}$

$\sin(x\pm y) = \sin x\cdot\cos y \pm \cos x\cdot\sin y$

$\cos(x\pm y) = \cos x\cdot\cos y \mp \sin x\cdot\sin y$

$\cos x - \cos y = -2\sin\dfrac{x+y}{2}\cdot\sin\dfrac{x-y}{2}$

Wzór Taylora : $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a) + R_n(x,a)$, $\lim\limits_{x->a}\dfrac{R_n(x,a)}{(x-a)^n} = 0$ Wzór Taylora dla dwóch zmiennych: $f(a+h) = f(a) + h_1\dfrac{df}{dx_1}(x_1,x_2) + h_2\dfrac{df}{dx_2}(x_1,x_2)\ldots$