

1 Analiza błędów

1.1 Reprezentacja liczb

$x = smB^c$ ,  $s$  - znak,  $1 \leq m < B$  - mantysa,  $c$  - cecha  
**Def.**  $t$  - długość mantysy,  $u = 2^{-t-1}$  - precyzja arytmetyki  
**Def.** Reguła zaokrąglenia: Jeśli  $m = 1.e_{-1}e_{-2} \dots$  to  
 $\bar{m} = 1.e_{-1}e_{-2} \dots e_{-t} + 0.\underbrace{00\dots 0}_{t-1 \text{ razy}}e_{-t-1}$ . Wtedy:  

$$rd(x) = \begin{cases} sB^{c+1} & \text{gdy } e_{-1} = e_{-1} = \dots = e_{-t} = e_{-t-1} = 1 \\ s\bar{m}B^c & \text{wpp.} \end{cases}$$
Błąd zaokrąglenia w górę:  $|rd(x) - x| \leq 2^{-t-1}2^c$ ,  

$$\frac{|rd(x) - x|}{|x|} \leq \frac{u}{1+u} < u$$
Zbiór reprezentacji arytmetyki:  $X_{fl} = rd(X) = \{rd(x) : x \in X\}$   
**Tw.** Jeśli  $|\alpha_i| \leq u, |\rho_i| = 1, nu < 1$ , to  $\prod_{i=1}^n (1 + \alpha_i)^{\rho_i} = 1 + \theta_n$ , gdzie  $|\theta_n| \leq \frac{nu}{1 - nu}$ .  
**Tw.** Jeśli  $|\alpha_i| \leq u, nu < 0.01$ , to  $\prod_{i=1}^n (1 + \alpha_i) = 1 + \theta_n$ , gdzie  $|\theta_n| \leq 1.01nu$ .

**Def.** Zadanie jest **złe uwarunkowane**, jeśli niewielkie względne zmiany danych powodują duże względne zmiany wyniku. Wielkości charakteryzujące wpływ zaburzeń danych na zaburzenie wyniku to **wskaźniki uwarunkowania**:  

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{f(x)} \right| \approx \left| \frac{xf'(x)}{f(x)} \right| \left| \frac{h}{x} \right|$$
**Def.** Niech  $\tilde{y}$  - wynik algorytmu obliczającego  $f(x)$ . Jeśli dla małych  $\Delta x, \Delta y$  mamy  $\tilde{y} + \Delta y = f(x + \Delta x)$ , tzn. wynik jest lekko zaburzony dla lekko zaburzonych danych, to algorytm jest **numerycznie poprawny**.  
Jeśli  $\tilde{y} = f(x + \Delta x)$  (wynik dokładny dla lekko zaburzonych danych), to algorytm jest **numerycznie bardzo poprawny**.

2 Interpolacja

2.1 Ilorazy różnicowe

$f[x_0, x_1, \dots, x_k]$  jest symetryczną funkcją zmiennych  $x_i$   
 $f = g + c \cdot h \Rightarrow f[x_0, \dots, x_k] = g[x_0, \dots, x_k] + c \cdot h[x_0, \dots, x_k]$ ,  
 $f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$ ,  
 $f[x_0, x_1, \dots, x_{n+1}] = f^{(n+1)}(\xi)/(n+1)!, \xi \in (a, b)$

2.2 Postacie wielomianów interpolacyjnych

**Lagrange’a:**  $L_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k \lambda_k$ , gdzie  $\lambda_k = \frac{\prod_{j=0, j \neq k}^n (x - x_j)}{\prod_{j=0, j \neq k}^n (x_k - x_j)}$   
**Barycentryczna:** Dla  $\sigma_k = \prod_{j=0, j \neq k}^n \frac{1}{x_k - x_j}$   

$$L_n(x) = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=0}^n \frac{\sigma_k}{x - x_k} y_k \Big/ \sum_{k=0}^n \frac{\sigma_k}{x - x_k} \quad \text{gdy } x \notin \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \\ wpp. \end{array} \right.$$
**Newtona:**  $L_n(x) = \sum_{k=0}^n b_k p_k(x)$ , gdzie  $p_k = \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j)$ ,  $p_0 = 1$   

$$b_k = \sum_{i=0}^k \frac{f(x_i)}{\prod_{j=0, j \neq i}^k (x_i - x_j)} = f[x_0, x_1, \dots, x_k]$$
**W bazie Czebyszewa** (tylko dla  $x_i = \text{zera } T_{n+1}$ ):  

$$I_n = \sum_{k=0}^{n'} \alpha_k T_k(x); \alpha_k = \frac{2}{n+1} \langle f, T_k \rangle_D \text{ (zob. 3.1 dla zer } T_{n+1})$$

2.3 Reszta wielomianu interpolacyjnego

$$f(x) - L_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x) p_{n+1}(x) \stackrel{x \neq x_i}{=} p_{n+1}(x) f[x_0, x_1, \dots, x_n]$$

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x) - L_n(x)| = \frac{1}{(n+1)!} \max_{-1 \leq x \leq 1} |f^{(n+1)}(x)| \max_{-1 \leq x \leq 1} |p_{n+1}(x)|$$

2.4 DFT

**input:**  $[x_0, x_1, \dots, x_{N-1}]$ , **output:**  $[y_0, y_1, \dots, y_{N-1}]$   

$$y_k = \sum_{j=0}^{N-1} x_j e^{\frac{2\pi i j k}{N}}$$
 gdzie  $(0 \leq k < N)$

2.5 Spline

**naturalna:**  $s''(a) = 0 \wedge s''(b) = 0$   
**zupelna:**  $s'(a) = f'(a) \wedge s'(b) = f'(b)$   
**okresowa:**  $s'(a) = s'(b) \wedge s''(a) = s''(b)$   
**Fakt:**  $\int_a^b (s''(x))^2 dx = \sum_{k=1}^{n-1} (f[x_k, x_{k+1}] - f[x_{k-1}, x_k]) s''(x_k)$   
 $\lambda_k M_{k-1} + 2M_k + (1 - \lambda_k)M_{k+1} = 6 * f[x_{k-1}, x_k, x_{k+1}]$   
 $(k = 1, \dots, n-1)$  oraz  $\lambda_k = h_k/(h_k + h_{k+1})$  oraz  $h_k = x_k - x_{k-1}$

3 Wielomiany Ortogonalne

3.1 Iloczyn skalarny funkcji

$\langle f, g \rangle \leq 0; \langle f, f \rangle = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0; \langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle; \langle \alpha f, g \rangle = \alpha \langle f, g \rangle;$   
 $\langle f + h, g \rangle = \langle f, g \rangle + \langle h, g \rangle$   

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b p(x) f(x) g(x) dx, \quad \text{gdzie } p(x) \text{ - funkcja wagowa;}$$

$$\langle f, g \rangle_D = \sum_{k=0}^n f(x_k) g(x_k), \text{ (dla ustalonego } x_k)$$

3.2 Czebyszew I rodzaju

$T_0(x) = 1, T_1(x) = x, T_n(x) = 2x T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$   
 $T_k(x) = \cos(k \arccos x), x \in [-1, 1], T_k(-x) = (-1)^k T_k(x),$   
zera  $T_{n+1}$ :  $t_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right)$ , ekstrema  $T_n$ :  $u_k = \cos\left(\frac{k}{n}\pi\right) (k = 0 \dots n)$   
 $\tilde{T}_n = 2^{(1-n)} T_n$  ma min. normę na  $[-1, 1]$  ze wszystkich  $\Pi_n$  o wsp. wiodącym 1  
waga:  $p(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$   

$$\langle T_k, T_l \rangle = \begin{cases} 0 & \text{gdy } k \neq l \\ \pi & \text{gdy } k = l = 0 \\ \pi/2 & \text{gdy } k = l \neq 0 \end{cases}$$

$$\langle T_k, T_l \rangle_D = \begin{cases} 0 & \text{gdy } k \neq l \\ n+1 & \text{gdy } k = l = 0 \\ (n+1)/2 & \text{gdy } k = l \neq 0 \end{cases} \quad (\text{dla } x_i = t_i; k, l \leq n)$$

3.3 Legendre’a

$P_0(x) = 1, P_1(x) = x - c_1, P_k(x) = (x - c_k)P_{k-1}(x) - d_k P_{k-2}(x)$   
 $c_k = \frac{\langle x P_{k-1}, P_{k-1} \rangle}{\langle P_{k-1}, P_{k-1} \rangle}, d_k = \frac{\langle P_{k-1}, P_{k-1} \rangle}{\langle P_{k-2}, P_{k-2} \rangle},$

4 Normy

4.1 Wektorowe

$\|\mathbf{x}\|_p = \left( |x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_n|^p \right)^{1/p}, \|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} \{ |x_i| \}$   
**Warunki:**  
 $\|\mathbf{x}\| \geq 0; \|\mathbf{x}\| = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = 0; \|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha| \|\mathbf{x}\|; \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|.$

4.2 Macierzowe

$\|\mathbf{A}\mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\|$   
**Def.** Norma macierzowa zgodna z wektorową:  $\|\mathbf{A}\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{x}\|$   
 $\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_i |a_{ij}|, \|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_j |a_{ij}|, \|\mathbf{A}\|_p = \max_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_p}{\|\mathbf{x}\|_p}.$   

$$\|\mathbf{A}\|_E = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{i,j}|^2} \text{ (euklidesowa/Frobeniusa)}$$

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\rho(\mathbf{A}^T \mathbf{A})} \text{ (spektralna, } \rho(X) = \max |\lambda(X)|)$$
 $E \in \mathbb{R}^{n \times n}, \|E\| < 1 \Rightarrow I - E \text{ jest nieosobliwa i } \|(I - E)^{-1}\| \leq (1 - \|E\|)^{-1}$

5 Aproksymacja

5.1 Normy, iloczyn skalarny, błąd

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|, \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b p(x) f^2(x) dx}$$
$$\langle f, g \rangle := \int_a^b p(x) f(x) g(x) dx, \quad \sqrt{\langle f, f \rangle} = \|f\|_2$$
$$E_n(f) := \inf_{W \in \Pi_n} \|f - W_n\|_\infty^T$$

5.2 Wielomian optymalny

$$w_n^* = \sum_{k=0}^n \frac{\langle f, P_k \rangle}{\langle P_k, P_k \rangle} P_k, \quad \|f - w_n^*\|_2 = \sqrt{\|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^n \frac{\langle f, P_k \rangle^2}{\langle P_k, P_k \rangle}}$$

6 Kwadratury interpolacyjne

$$I_p(f) = \int_a^b p(x) f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k),$$

**Wiel. węzłowy:**  $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$

6.1 Kwadratury Newtona-Cotesa

$$h = (b - a)/n, \quad x_k = a + kh$$

**Wzór trapezów:**  $n = 1, A_0 = A_1 = h/2, R_1(f) = -\frac{h^3}{12} f''(\xi)$

**Wzór Simpsona:**  $n = 2, A_0 = A_2 = h/3, A_1 = 4h/3, R_2(f) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)$

**Zł. wzór trapezów:**  $T_n = h \sum_{k=0}^n f(x_k), R_n^T(f) = -\frac{h^3 n}{12} f''(\xi)$

**Zł. wzór Simpsona:**  $n = 2m, S_n(f) = (4T_n - T_m)/3$

$$R_n^S(f) = -(b - a) \frac{h^4}{180} f^{(4)}(\xi)$$

**Metoda Romberga:**  $h_k = (b - a)/2^k$

$$x_i^{(k)} = a + i h_k, (i = 0, 1, \dots, 2^k), \quad T_{0k} = T_{2^k}(f)$$

$$T_{mk} = \frac{4^m T_{m-1,k+1} - T_{m-1,k}}{4^m - 1}$$

**Reszta Newtona-Cotesa:**

$$I_p(f) - Q_n(f) = \begin{cases} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_a^b \omega(x) dx & \text{gdy } n = 1, 3, \dots \\ \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \int_a^b x \omega(x) dx & \text{gdy } n = 2, 4, \dots \end{cases}$$
 gdzie  $\xi \in (a, b)$ .

6.2 Kwadratury Gaussa

$x_k$  - zera wiel. orto.  $P_{n+1}(x), c_k$  wsp. wiod.  $P_k$

$\lambda_k(x) = \omega(x)/[\omega'(x_k)(x - x_k)]$ .

$$0 < A_k = \int_a^b p(x) \lambda_k(x) dx = \frac{c_{n+1}}{c_n} \frac{\|P_n\|^2}{P'_{n+1}(x_k) P_n(x_k)}.$$

$$R_n(f) = \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(2n+2)! c_{n+1}^2} \int_a^b p(x) [P_{n+1}(x)]^2 dx$$

6.3 Gauss-Czebyszew

$$\int_{-1}^1 p(x) f(x) dx \approx \int_{-1}^1 p(x) I_n(x) dx$$
$$I_n(x) = \sum_{i=0}^n t_i \alpha_i T_i(x), \alpha_i = \frac{2}{n+1} \sum_{i=0}^n f(t_k) T_i(t_k)$$
$$Q_n^{QC}(f) = \sum_{k=0}^n A_k f(t_k), A_k = \frac{\pi}{n+1}$$

6.4 Gauss-Lobatto

$$x_k = u_k = \cos\left(\frac{k}{n} \pi\right)$$
$$\int_{-1}^1 p(x) f(x) dx \approx \int_{-1}^1 p(x) J_n(x) dx$$
$$J_n(x) = \sum_{j=0}^n \beta_j T_j(x), \beta_j = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^n (u_k) T_j(u_k)$$
$$Q_n^L(f) = \sum_{k=0}^n A_k f(u_k), A_k = \frac{\pi}{n}.$$

7 Algebra numeryczna

7.1 Metody iteracyjne

$x^{(k+1)} = B_\tau x^{(k)} + c \quad (k \geq 0)$

**Tw.** Metoda iter. jest zbieżna dla dowolnego  $x^{(0)}$ , jeśli  $\rho(B) < 1$ , gdzie  $\rho(B) := \max_{1 \leq i \leq n} (\lambda_i)$  to promień spektralny macierzy B.

**Metoda Richardsona:**  $B_\tau = I - \tau A, \quad c = \tau b$

**Tw.** Załóżmy, że wszystkie  $\lambda_i$  spełniają:  $0 < \alpha \leq \lambda_i \leq \beta$ .

Wtedy metoda Richardsona jest zbieżna dla  $0 < \tau < \frac{2}{\beta}$ .

**Metoda Jacobiego:**  $B_J = -D^{-1}(L + U)$

**Tw.** Jeśli A jest macierzą ze ściśle dominującą przekątną, tj.

$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ , to wtedy  $\|B_J\|_\infty < 1$  i  $\|B_S\|_\infty < 1$ .

**Metoda Gaussa-Seidela:**  $B_S = -(D + L)^{-1} U$

**Tw.** Jeśli A jest symetryczna i dodatnio określona, to  $\|B_S\|_\infty < 1$ .

$B_\omega = (I - \omega M)^{-1} (\omega N + (1 - \omega)I), \quad M = -D^{-1}L, N = -D^{-1}U$

8 Równania nieliniowe

Metoda Newtona:  $X_{n+1} = X_n - \frac{f(X_n)}{f'(X_n)}$

Metoda siecznych:  $X_{n+1} = X_n - \frac{X_n - X_{n-1}}{f(X_n) - f(X_{n-1})}$

Reguła fałsi - metoda siecznych z zachowaniem warunku  $f(X_n)f(X_{n-1}) < 0$

Metoda Newtona dla r-krotnego pierwiastka:  $X_{n+1} = X_n - r \frac{f(X_n)}{f'(X_n)}$

Algortym adaptacyjny:  $X_{n+1} = X_n - r_n \frac{f(X_n)}{f'(X_n)}, r_n = \frac{X_{n-1} - X_{n-2}}{2X_{n-1} - X_n - X_{n-2}}$

Metoda Newtona dla wielu zmiennych:  $J * h = -F, X_{n+1} = X_n + h_n$

Metoda Laguerrea(zbieżna sześciennie do pojedynczych pierwiastków):

$$Z_{k+1} = Z_k - \frac{n\omega(Z_k)}{\omega'(Z_k) + \sqrt[2]{H(Z_k)}},$$
$$H(x) = (n-1)[(n-1)\omega'^2(x) - n\omega(x)\omega''(x)]$$

Metoda Steffensena:  $C_{n+1} = C_n - \frac{f^2(C_n)}{f(C_n + f(C_n)) - f(C_n)}$

9 Teoretycznie przydatne wzory

**Nierówność Cauchy’ego-Schwarza:**  $\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right)$

**Inaczej:**  $\langle v, w \rangle \leq \|v\|_2 \cdot \|w\|_2$

**Bairstowa:**  $p(z) = a_n z^n + \dots + a_0$  **Związek:**  $b_k = a_k + u b_{k+1} + v b_{k+2}$

Niech ciąg  $a_k$  będzie zbieżny do g. Jeśli istnieją takie liczby rzeczywiste  $p$  i  $C$  ( $C > 0$ ), że  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1} - g|}{|a_n - g|^p} = C$ , to  $p$  jest **wykładnikiem zbieżności ciągu**, a  $C$  - **stałą asymptotyczną błędu**. Dla  $p = 1$  oraz  $0 < C < 1$  zbieżność jest liniowa, dla  $p = 2$  - kwadratowa, dla  $p = 3$  - sześcienna. gdy  $p = 1$  i  $C = 1$  - zbieżność podliniowa, jeśli  $p = 1, C = 0$  - nadliniowa.

$$\sin x \pm \sin y = 2 \sin \frac{x \pm y}{2} \cdot \cos \frac{x \mp y}{2}$$
$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \cdot \cos \frac{x - y}{2}$$
$$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$$
$$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$$
$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x + y}{2} \cdot \sin \frac{x - y}{2}$$

Wzór Taylora :  $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + R_n(x, a), \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{R_n(x, a)}{(x-a)^n} = 0$  Wzór

Taylora dla dwóch zmiennych:  $f(a+h) = f(a) + h_1 \frac{df}{dx_1}(x_1, x_2) + h_2 \frac{df}{dx_2}(x_1, x_2) \dots$