1 Analiza błędów

1.1 Reprezentacja liczb

$x = smB^c$, s - znak, $1 \leqslant m < B$ - mantysa, c - cecha
Def. t - długość mantysy, $u = 2^{-t-1}$ - precyzja arytmetyki
Def. Reguła zaokrąglenia: Jeśli $m = 1.e_{-1}e_{-2}\ldots$ to
$\bar{m} = 1.e_{-1}e_{-2}\ldots e_{-t} + 0.\underbrace{00...0}_{\text{t-1 razy}}e_{-t-1}$. Wtedy:

$$rd(x) = \begin{cases} sB^{c+1} & \text{gdy } e_{-1} = e_{-1} = \cdots = e_{-t} = e_{-t-1} = 1 \\ s\bar{m}B^c, & \text{wpp.} \end{cases}.$$

Błąd zaokrąglenia w górę: $|rd(x) - x| \leqslant 2^{-t-1}2^c$,
$\frac{|rd(x) - x|}{|x|} \leqslant \frac{u}{1+u} < u$
Zbiór reprezentacji arytmetyki: $X_{fl} = rd(X) = \{rd(x) : x \in X\}$

Tw. Jeśli $|\alpha_i| \leqslant u, |\rho_i| = 1, nu < 1$, to $\prod_{i=1}^{n}(1+\alpha_i)^{\rho_i} = 1+\theta_n$, gdzie $|\theta_n| \leqslant \frac{nu}{1-nu}$.

Tw. Jeśli $|\alpha_i| \leqslant u, nu < 0.01$, to $\prod_{i=1}^{n}(1+\alpha_i) = 1+\theta_n$, gdzie $|\theta_n| \leqslant 1.01nu$.

Def. Zadanie jest **źle uwarunkowane**, jeśli niewielkie względne zmiany danych powodują duże względne zmiany wyniku. Wielkości charakteryzujące wpływ zaburzeń danych na zaburzenie wyniku to **wskaźniki uwarunkowania**:
$|\frac{f(x+h) - f(x)}{f(x)}| \approx |\frac{xf'(x)}{f(x)}||\frac{h}{x}|$
Def. Niech $\tilde{y}$ - wynik algorytmu obliczającego $f(x)$. Jeśli dla małych $\Delta x, \Delta y$ mamy $\tilde{y} + \Delta y = f(x + \Delta x)$, tzn. wynik jest lekko zaburzony dla lekko zaburzonych danych, to algorytm jest **numerycznie poprawny**.
Jeśli $\tilde{y} = f(x + \Delta x)$ (wynik dokładny dla lekko zaburzonych danych), to algorytm jest **numerycznie bardzo poprawny**.

2 Interpolacja

2.1 Ilorazy różnicowe

$f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$ jest symetryczną funkcją zmiennych x_i
$f = g + c \cdot h \Rightarrow f[x_0, \ldots, x_k] = g[x_0, \ldots, x_k] + c \cdot h[x_0, \ldots, x_k]$,
$f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \frac{f[x_1, \ldots, x_k] - f[x_0, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$.

2.2 Postacie wielomianów interpolacyjnych

Lagrange'a: $L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k\lambda_k, gdzie \quad \lambda_k = \frac{\prod_{j=0,j\neq k}^{n}(x - x_j)}{\prod_{j=0,j\neq k}^{n}(x_k - x_j)}$

Barycentryczna: Dla $\sigma_k = \prod_{j=0,j\neq k}^{n} \frac{1}{x_k - x_j}$

$$L_n(x) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{n} \frac{\sigma_k}{x - x_k} y_k \Big/ \sum_{k=0}^{n} \frac{\sigma_k}{x - x_k} & \text{gdy } x \notin \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \\ y_k & wpp. \end{cases}$$

Newtona: $L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k p_k(x)$, gdzie $p_k = \prod_{j=0}^{k-1}(x - x_j)$,

$$b_k = \sum_{i=0}^{k} \frac{f(x_i)}{\prod_{j=0,j\neq i}^{k}(x_i - x_j)}$$

2.3 Reszta wielomianu interpolacyjnego

$$f(x) - L_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x)p_{n+1}(x) = p_{n+1}(x)f[x_0, x_1, ..., x_n]$$

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1} |f(x) - L_n(x)| = \frac{1}{(n+1)!} \max_{-1\leqslant x\leqslant 1} |f^{(n+1)}(x)| \max_{-1\leqslant x\leqslant 1} |p_{n+1}(x)|$$

2.4 DFT

`input:` $[x_0, x_1, ..., x_N]$

`output:` $[y_0, y_1, ..., y_N]$ $y_k = \sum_{j=0}^{N-1} x_j e^{\frac{2\pi ijk}{N}}$ gdzie $(0 \leqslant k < N)$

2.5 Spline

naturalna: $s''(a) = 0 \wedge s''(b) = 0$
zupelna: $s'(a) = f'(a) \wedge s'(b) = f'(b)$
okresowa: $s'(a) = s'(b) \wedge s''(a) = s''(b)$
Fakt: $\int_a^b \left(s''(x)\right)^2 dx = \sum_{k=1}^{n-1} \left(f[x_k, x_{k+1}] - f[x_{k-1}, x_k]\right) s''(x_k)$
$\lambda_k M_{k-1} + 2M_k + (1 - \lambda_k)M_{k+1} = 6 * f[x_{k-1}, x_k, x_{k+1}]$
$(k = 1, ..., n-1)$ oraz $\lambda_k = h_k/(h_k + h_{k+1})$ oraz $h_k = x_k - x_{k-1}$

3 Wielomiany Ortogonalne

3.1 Czebyszew I rodzaju

$T_0(x) = 1, \ \ T_1(x) = x$
$T_n(x) = 2x\,T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$
$T_k(x) = \cos(k \arccos x),\ x \in [-1, 1]$
zera T_{n+1} $(k = 0, 1, \ldots n)$: $\ t_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right)$
ekstrema T_n : $\ u_k = \cos\left(\frac{k}{n}\pi\right)$
waga: $p(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$

$$\int_{-1}^{1} p(x)T_k(x)T_l(x)dx = 0 \qquad (k \neq l)$$

$$\int_{-1}^{1} p(x)(T_k(x))^2dx = \begin{cases} \pi & \text{gdy } k = 0 \\ \pi/2 & \text{gdy } k \geqslant 1 \end{cases}$$

3.2 Legendre'a

$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x - c_1, \ \ P_k(x) = (x - c_k)P_{k-1}(x) - d_kP_{k-2}(x)$
$c_k = \frac{\langle xP_{k-1}, P_{k-1}\rangle}{\langle P_{k-1}, P_{k-1}\rangle}, \quad d_k = \frac{\langle P_{k-1}, P_{k-1}\rangle}{\langle P_{k-2}, P_{k-2}\rangle},$

4 Normy

4.1 Wektorowe

$\|\mathbf{x}\|_p = \left(|x_1|^p + |x_2|^p + \ldots + |x_n|^p\right)^{1/p}, \ \|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1\leqslant j\leqslant n}\left\{|x_i|\right\}$
Norma musi spełniać 3 warunki:
$\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$; $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$; $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

4.2 Macierzowe

$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{1\leqslant j\leqslant n} \sum_i |a_{ij}|, \ \|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_j |a_{ij}|,$
$\|\mathbf{A}\|_p = \max_{\mathbf{x}\neq \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_p}{\|\mathbf{x}\|_p}$.
$\|\mathbf{A}\|_E = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{i,j}|^2}$ (euklidesowa/Frobeniusa)
$\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\rho(\mathbf{A}^T\mathbf{A})}$ (spektralna, $\rho(X) = \max|\lambda(X)|$)

5 Aproksymacja

5.1 Normy, iloczyn skalarny, błąd

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|, \ \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b p(x)f^2(x)\,dx}$$

$$\langle f, g\rangle := \int_a^b p(x)\,f(x)\,g(x)\,dx, \ \ \sqrt{\langle f, f\rangle} = \|f\|_2$$

$$E_n(f) := \inf_{W\in\Pi_n} \|f - W_n\|_\infty^T$$

5.2 Wielomian optymalny

$$w_n^* = \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle f, P_k\rangle}{\langle P_k, P_k\rangle}P_k, \ \|f - w_n^*\|_2 = \sqrt{\|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle f, P_k\rangle^2}{\langle P_k, P_k\rangle}}$$

6 Kwadratury interpolacyjne

$$I_p(f) = \int_a^b p(x)f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k),$$

Wiel. węzłowy: $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)..(x - x_n)$

6.1 Kwadratury Newtona-Cotesa

$h = (b - a)/n, \quad x_k = a + kh$

Wzór trapezów: $n = 1,\ A_0 = A_1 = h/2,\ R_1(f) = -\dfrac{h^3}{12} f''(\xi)$

Wzór Simpsona: $n = 2, A_0 = A_2 = h/3,\ A_1 = 4h/3,\ R_2(f) = -\dfrac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)$

Zł. wzór trapezów: $T_n = h \sum_{k=0}^{n}{}'' f(x_k),\ R_n^T(f) = -\dfrac{h^3 n}{12} f''(\xi)$

Zł. wzór Simpsona: $n = 2m, \quad S_n(f) = (4T_n - T_m)/3$

$R_n^S(f) = -(b - a)\dfrac{h^4}{180} f^{(4)}(\xi)$

Metoda Romberga: $h_k = (b - a)/2^k$

$x_i^(k) = a + ih_k, (i = 0, 1, \dots, 2^k), \quad T_{0k} = T_{2^k}(f)$

$T_{mk} = \dfrac{4^m T_{m-1,k+1} - Tm - 1, k}{4^m - 1}$

Reszta Newtona-Cotesa:

$$I_p(f) - Q_n(f) = \begin{cases} \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \displaystyle\int_a^b \omega(x)dx & \text{gdy } n = 1, 3, \dots \\ \dfrac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \displaystyle\int_a^b x\omega(x)dx & \text{gdy } n = 2, 4, \dots \end{cases} \quad \text{gdzie } \xi \in (a, b).$$

6.2 Kwadratury Gaussa

x_k - zera wiel. orto. $P_{n+1}(x), c_k$ wsp. wiod. P_k

$\lambda_k(x) = \omega(x)/[\omega'(x_k)(x - x_k)]$.

$$0 < A_k = \int_a^b p(x)\lambda_k(x)dx = \frac{c_{n+1}}{c_n} \frac{||P_n||^2}{P'_{n+1}(x_k)P_n(x_k)}.$$

$$R_n(f) = \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(2n+2)! c_{n+1}^2} \int_a^b p(x)[P_{n+1}(x)]^2 dx$$

6.3 Gauss-Czebyszew

$$\int_{-1}^{1} p(x)f(x)dx \approx \int_{-1}^{1} p(x)I_n(x)dx$$

$$I_n(x) = \sum_{i=0}^{n}{}' \alpha_i T_i(x), \alpha_i = \frac{2}{n+1} \sum_{i=0}^{n} f(t_k)T_i(t_k)$$

$$Q_n^{QC}(f) = \sum_{k=0}^{n} A_k f(t_k), A_k = \frac{\pi}{n+1}$$

6.4 Gauss-Lobatto

$$x_k = u_k = \cos\left(\frac{k}{n}\pi\right)$$

$$\int_{-1}^{1} p(x)f(x)dx \approx \int_{-1}^{1} p(x)J_n(x)dx$$

$$J_n(x) = \sum_{j=0}^{n}{}'' \beta_j T_j(x), \beta_j = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n}{}'' (u_k)T_j(u_k)$$

$$Q_n^L(f) = \sum_{k=0}^{n}{}'' A_k f(u_k), A_k = \frac{\pi}{n}.$$

7 Algebra numeryczna

7.1 Metody iteracyjne

$x^{(k+1)} = B_\tau x^{(k)} + c \quad (k \geqslant 0)$

Tw. Metoda iter. jest zbieżna dla dowolnego $x^{(0)}$, jeśli $\rho(B) < 1$, gdzie $\rho(B) := \max_{1 \leqslant i \leqslant n} (\lambda_i)$ to promień spektralny macierzy B.

Metoda Richardsona: $B_\tau = I - \tau A, \quad c = \tau b$

Tw. Załóżmy, że wszystkie λ_i spełniają: $0 < \alpha \leqslant \lambda_i \leqslant \beta$.

Wtedy metoda Richardsona jest zbieżna dla $0 < \tau < \dfrac{2}{\beta}$.

Metoda Jacobiego: $B_J = -D^{-1}(L + U)$

Tw. Jeśli A jest macierzą ze ściśle dominującą przekątną, tj.

$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}|$, to wtedy $\|B_J\|_\infty < 1$ i $\|B_S\|_\infty < 1$.

Metoda Gaussa-Seidela: $B_S = -(D + L)^{-1}U$

Tw. Jeśli A jest symetryczna i dodatnio określona, to $\|B_S\|_\infty < 1$.

$B_\omega = (I - \omega M)^{-1}(\omega N + (1 - \omega)I), \quad M = -D^{-1}L, N = -D^{-1}U$

8 Równania nieliniowe

Metoda Newtona: $X_{n+1} = X_n - \dfrac{f(X_n)}{f'(X_n)}$

Metoda siecznych: $X_{n+1} = X_n - \dfrac{X_n - X_{n-1}}{f(X_n) - f(X_{n-1})}$

Regula falsi - metoda siecznych z zachowaniem warunku $f(X_n)f(X_{n-1}) < 0$ Metoda Newtona dla r-krotnego pierwiastka: $X_{n+1} = X_n - r\dfrac{f(X_n)}{f'(X_n)}$

Algortym adaptacyjny: $X_{n+1} = X_n - r_n \dfrac{f(X_n)}{f'(X_n)},\ r_n = \dfrac{X_{n-1} - X_{n-2}}{2X_{n-1} - X_n - X_{n-2}}$

Metoda Newtona dla wielu zmiennych: $J * h = -F,\ X_{n+1} = X_n + h_n$

Metoda Laguerra(zbieżna sześciennie do pojedynczych pierwiastków):

$Z_{k+1} = Z_k - \dfrac{n\omega(Z_k)}{\omega'(Z_k) + / - \sqrt[2]{H(Z_k)}},$

$H(x) = (n - 1)[(n - 1)\omega'^2(x) - n\omega(x)\omega''(x)]$

Metoda Steffensena: $C_{n+1} = C_n - \dfrac{f^2(C_n)}{f(C_n + f(C_n)) - f(C_n)}$

9 Teoretycznie przydatne wzory

Nierówność Cauchy'ego-Schwarza: $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$

Inaczej: $\langle v, w \rangle \leqslant \|v\|_2 \cdot \|w\|_2$

Bairstowa: $p(z) = a_n z^n + \dots + a_0$ **Związek:** $b_k = a_k + ub_{k+1} + vb_{k+2}$

Niech ciąg a_k będzie zbieżny do g. Jeśli istnieją takie liczby rzeczywiste p i C $(C > 0)$, że $\lim_{n \to \inf} \dfrac{|a_{n+1} - g|}{|a_n - g|^p} = C$, to p jest **wykładnikiem zbieżności ciągu**, a C – **stałą asymptotyczną błędu**. Dla $p = 1$ oraz $0 < C < 1$ zbieżność jest liniowa, dla $p = 2$ – kwadratowa, dla $p = 3$ – sześcienna. gdy $p = 1$ i $C = 1$ - zbieżność podliniowa, jeśli $p = 1$, $C = 0$ - nadliniowa.

$\sin x \pm \sin y = 2 \sin \dfrac{x \pm y}{2} \cdot \cos \dfrac{x \mp y}{2}$

$\cos x + \cos y = 2 \cos \dfrac{x + y}{2} \cdot \cos \dfrac{x - y}{2}$

$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$

$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$

$\cos x - \cos y = -2 \sin \dfrac{x + y}{2} \cdot \sin \dfrac{x - y}{2}$

Wzór Taylora : $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(x - a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + R_n(x, a),\ \lim_{x -> a} \dfrac{R_n(x, a)}{(x - a)^n} = 0$ Wzór Taylora dla dwóch zmiennych: $f(a + h) = f(a) + h_1 \dfrac{df}{dx_1}(x_1, x_2) + h_2 \dfrac{df}{dx_2}(x_1, x_2)\dots$