Analiza błędów

Reprezentacja liczb

$x = smB^c$, s - znak, $1 \leqslant m < B$ - mantysa, c - cecha
Def. t - długość mantysy, $u = 2^{-t-1}$ - precyzja arytmetyki
Błąd zaokrąglenia w górę: $|rd(x) - x| \leqslant 2^{-t-1}2^c$,
$\frac{|rd(x)-x|}{|x|} \leqslant \frac{u}{1+u} < u$
Zbiór reprezentacji arytmetyki: $X_{fl} = rd(X) = \{rd(x) : x \in X\}$

Tw. Jeśli $|\alpha_i| \leqslant u, |\rho_i| = 1, nu < 1$, to $\prod_{i=1}^{n}(1+\alpha_i)^{\rho_i} = 1+\theta_n$, gdzie $|\theta_n| \leqslant \frac{nu}{1-nu}$.

Tw. Jeśli $|\alpha_i| \leqslant u, nu < 0.01$, to $\prod_{i=1}^{n}(1+\alpha_i) = 1+\theta_n$, gdzie $|\theta_n| \leqslant 1.01nu$.

Def. Zadanie jest **źle uwarunkowane**, jeśli niewielkie względne zmiany danych powodują duże względne zmiany wyniku. Wielkości charakteryzujące wpływ zaburzeń danych na zaburzenie wyniku to **wskaźniki uwarunkowania**:
$|\frac{f(x+h)-f(x)}{f(x)}| \approx |\frac{xf'(x)}{f(x)}||\frac{h}{x}|$
Def. Niech $\tilde{y}$ - wynik algorytmu obliczającego $f(x)$. Jeśli dla małych $\Delta x, \Delta y$ mamy $\tilde{y} + \Delta y = f(x + \Delta x)$, tzn. wynik jest lekko zaburzony dla lekko zaburzonych danych, to algorytm jest **numerycznie poprawny**.
Jeśli $\tilde{y} = f(x + \Delta x)$ (wynik dokładny dla lekko zaburzonych danych), to algorytm jest **numerycznie bardzo poprawny**.

Interpolacja

Postacie wielomianów interpolacyjnych

Lagrange'a: $L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k\lambda_k, gdzie \quad \lambda_k = \frac{\prod_{j=0,j\neq k}^{n}(x-x_j)}{\prod_{j=0,j\neq k}^{n}(x_k-x_j)}$

Barycentryczna: Dla $\sigma_k = \prod_{j=0,j\neq k}^{n} \frac{1}{x_k - x_j}$

$$L_n(x) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{n} \frac{\sigma_k}{x-x_k} y_k \Big/ \sum_{k=0}^{n} \frac{\sigma_k}{x-x_k} & \text{gdy } x \notin \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \\ y_k & wpp. \end{cases}$$

Reszta wielomianu interpolacyjnego

$$f(x) - L_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x)p_{n+1}(x)$$
$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1} |f(x) - L_n(x)| = \frac{1}{(n+1)!} \max_{-1\leqslant x\leqslant 1} |f^{(n+1)}(x)| \max_{-1\leqslant x\leqslant 1} |p_{n+1}(x)|$$

Spline

naturalna: $s''(a) = 0 \wedge s''(b) = 0$
zupelna: $s'(a) = f'(a) \wedge s'(b) = f'(b)$
okresowa: $s'(a) = s'(b) \wedge s''(a) = s''(b)$
Fakt: $\int_a^b \left(s''(x)\right)^2 dx = \sum_{k=1}^{n-1} \left(f[x_k, x_{k+1}] - f[x_{k-1}, x_k]\right) s''(x_k)$
$\lambda_k M_k + 2M_k + (1-\lambda_k)M_{k-1} = 6 * f[x_{k-1}, x_k, x_{k+1}]$
$(k = 1, ..., n-2)$ oraz $\lambda_k = h_k/(h_k + h_{k+1})$ oraz $h_k = x_k - x_{k-1}$

Wielomiany Bernsteina

Def. $B_i^n(u) = \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i}$
Własności:
1) $\sum_{i=0}^{n} B_i^n(u) = 1$
2) $B_i^n(u) > 0$
3) $B_i^n(u) = (1-u) * B_i^{n-1}(u) + uB_{i-1}^{n-1}(u)$
4) $B_i^n(u) = \frac{n+1-i}{n+1} B_i^{n+1}(u) + \frac{i+1}{n+1} B_{i+1}^{n+1}(u)$
5) $\left(B_i^n(u)\right)' = n\left(B_{i-1}^{n-1} - B_i^{n-1}\right)$

Wielomiany Ortogonalne

Czebyszew I rodzaju

$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x$
$T_n(x) = 2x\,T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$
$T_k(x) = \cos(k \arccos x),\ x \in [-1, 1]$
zera T_{n+1} $(k = 0, 1, \ldots n)$: $\ t_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right)$
ekstrema T_n : $\ u_k = \cos\left(\frac{k}{n}\pi\right)$
waga: $p(x) = (1-x^2)^{-1/2}$
$$\int_{-1}^{1} p(x)T_k(x)T_l(x)dx = 0 \qquad (k \neq l)$$
$$\int_{-1}^{1} p(x)(T_k(x))^2 dx = \begin{cases} \pi & \text{gdy } k = 0 \\ \pi/2 & \text{gdy } k \geqslant 1 \end{cases}$$

Normy

Wektorowe

$\|\mathbf{x}\|_p = \left(|x_1|^p + |x_2|^p + \ldots + |x_n|^p\right)^{1/p}$, $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1\leqslant j\leqslant n} \left\{|x_i|\right\}$
Norma musi spełniać 3 warunki:
$\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$; $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$; $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Macierzowe

$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{1\leqslant j\leqslant n} \sum_i |a_{ij}|$, $\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_j |a_{ij}|$,
$\|\mathbf{A}\|_p = \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{Ax}\|_p}{\|\mathbf{x}\|_p}$.
$\|\mathbf{A}\|_E = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{i,j}|^2}$ (euklidesowa/Frobeniusa)
$\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\rho(\mathbf{A}^T\mathbf{A})}$ (spektralna, $\rho(X) = \max|\lambda(X)|$)

Aproksymacja

Normy, iloczyn skalarny, błąd

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|, \ \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b p(x)f^2(x)\,dx}$$
$$\langle f, g\rangle := \int_a^b p(x)\,f(x)\,g(x)\,dx, \quad \sqrt{\langle f, f\rangle} = \|f\|_2$$
$$E_n(f) := \inf_{W\in\Pi_n} \|f - W_n\|_\infty^T$$

Wielomian optymalny

$$w_n^* = \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle f, P_k\rangle}{\langle P_k, P_k\rangle} P_k, \ \|f - w_n^*\|_2 = \sqrt{\|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle f, P_k\rangle^2}{\langle P_k, P_k\rangle}}$$

Wielomiany ortogonalne

$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x - c_1, \ P_k(x) = (x - c_k)P_{k-1}(x) - d_kP_{k-2}(x)$
$c_k = \frac{\langle xP_{k-1}, P_{k-1}\rangle}{\langle P_{k-1}, P_{k-1}\rangle}, \quad d_k = \frac{\langle P_{k-1}, P_{k-1}\rangle}{\langle P_{k-2}, P_{k-2}\rangle}$,

Kwadratury interpolacyjne

$$I_p(f) = \int_a^b p(x)f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k),$$
Wiel. węzłowy: $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)..(x - x_n)$

Kwadratury Newtona-Cotesa

$h = (b-a)/n, \quad x_k = a + kh$

Wzór trapezów: $n=1$, $A_0 = A_1 = h/2$, $R_1(f) = -\dfrac{h^3}{12} f''(\xi)$

Wzór Simpsona: $n=2, A_0 = A_2 = h/3$, $A_1 = 4h/3$, $R_2(f) = -\dfrac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)$

Zł. wzór trapezów: $T_n = h \sum_{k=0}^{n}{}'' f(x_k)$, $R_n^T(f) = -\dfrac{h^3 n}{12} f''(\xi)$

Zł. wzór Simpsona: $n = 2m, \quad S_n(f) = (4T_n - T_m)/3$

$R_n^S(f) = -(b-a)\dfrac{h^4}{180} f^{(4)}(\xi)$

Metoda Romberga: $h_k = (b-a)/2^k$

$x_i^(k) = a + ih_k, (i = 0, 1, \ldots, 2^k), \quad T_{0k} = T_{2^k}(f)$

$T_{mk} = \dfrac{4^m T_{m-1,k+1} - Tm - 1, k}{4^m - 1}$

Reszta Newtona-Cotesa:

$$I_p(f) - Q_n(f) = \begin{cases} \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \displaystyle\int_a^b \omega(x)dx & \text{gdy } n = 1, 3, \ldots \\ \dfrac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \displaystyle\int_a^b x\omega(x)dx & \text{gdy } n = 2, 4, \ldots \end{cases} \quad \text{gdzie } \xi \in (a, b).$$

Kwadratury Gaussa

x_k - zera wiel. orto. $P_{n+1}(x), c_k$ wsp. wiod. P_k

$\lambda_k(x) = \omega(x)/[\omega'(x_k)(x - x_k)]$.

$$0 < A_k = \int_a^b p(x)\lambda_k(x)dx = \frac{c_{n+1}}{c_n} \frac{||P_n||^2}{P'_{n+1}(x_k)P_n(x_k)}.$$

$$R_n(f) = \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(2n+2)! c_{n+1}^2} \int_a^b p(x)[P_{n+1}(x)]^2 dx$$

Gauss-Czebyszew

$$\int_{-1}^{1} p(x)f(x)dx \approx \int_{-1}^{1} p(x)I_n(x)dx$$

$$I_n(x) = \sum_{i=0}^{n}{}' \alpha_i T_i(x), \alpha_i = \frac{2}{n+1} \sum_{i=0}^{n} f(t_k)T_i(t_k)$$

$$Q_n^{QC}(f) = \sum_{k=0}^{n} A_k f(t_k), A_k = \frac{\pi}{n+1}$$

Gauss-Lobatto

$$x_k = u_k = \cos\left(\frac{k}{n}\pi\right)$$

$$\int_{-1}^{1} p(x)f(x)dx \approx \int_{-1}^{1} p(x)J_n(x)dx$$

$$J_n(x) = \sum_{j=0}^{n}{}'' \beta_j T_j(x), \beta_j = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n}{}'' (u_k)T_j(u_k)$$

$$Q_n^L(f) = \sum_{k=0}^{n}{}'' A_k f(u_k), A_k = \frac{\pi}{n}.$$

Algebra numeryczna

Metody iteracyjne

$x^{(k+1)} = B_\tau x^{(k)} + c \quad (k \geqslant 0)$

Tw. Metoda iter. jest zbieżna dla dowolnego $x^{(0)}$, jeśli $\rho(B) < 1$, gdzie $\rho(B) := \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} (\lambda_i)$ to promień spektralny macierzy B.

Metoda Richardsona: $B_\tau = I - \tau A, \quad c = \tau b$

Tw. Załóżmy, że wszystkie λ_i spełniają: $0 < \alpha \leqslant \lambda_i \leqslant \beta$.

Wtedy metoda Richardsona jest zbieżna dla $0 < \tau < \dfrac{2}{\beta}$.

Metoda Jacobiego: $B_J = -D^{-1}(L + U)$

Tw. Jeśli A jest macierzą ze ściśle dominującą przekątną, tj.

$|a_{ii}| > \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$, to wtedy $\|B_J\|_\infty < 1$ i $\|B_S\|_\infty < 1$.

Metoda Gaussa-Seidela: $B_S = -(D + L)^{-1}U$

Tw. Jeśli A jest symetryczna i dodatnio określona, to $\|B_S\|_\infty < 1$.

$B_\omega = (I - \omega M)^{-1}(\omega N + (1 - \omega)I), \quad M = -D^{-1}L, N = -D^{-1}U$

Teoretycznie przydatne wzory

Nierówność Cauchy'ego-Schwarza: $\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k\Big)^2 \leqslant \Big(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2\Big)\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} b_k^2\Big)$

Inaczej: $\langle v, w\rangle \leqslant \|v\|_2 \cdot \|w\|_2$

Bairstowa: $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$ **Związek:** $b_k = a_k + ub_{k+1} + vb_{k+2}$

Niech ciąg a_k będzie zbieżny do g. Jeśli istnieją takie liczby rzeczywiste p i C ($C > 0$), że $\lim\limits_{n \to \inf} \dfrac{|a_{n+1} - g|}{|a_n - g|^p} = C$, to p jest **wykładnikiem zbieżności ciągu**, a C – **stałą asymptotyczną błędu**. Dla $p = 1$ oraz $0 < C < 1$ zbieżność jest liniowa, dla $p = 2$ – kwadratowa, dla $p = 3$ – sześcienna. gdy $p = 1$ i $C = 1$ - zbieżność podliniowa, jeśli $p = 1$, $C = 0$ - nadliniowa.

$\sin x \pm \sin y = 2 \sin \dfrac{x \pm y}{2} \cdot \cos \dfrac{x \mp y}{2}$

$\cos x + \cos y = 2 \cos \dfrac{x+y}{2} \cdot \cos \dfrac{x-y}{2}$

$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$

$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$

$\cos x - \cos y = -2 \sin \dfrac{x+y}{2} \cdot \sin \dfrac{x-y}{2}$