

1 Analiza błędów

1.1 Reprezentacja liczb

$x = smB^c$, s - znak, $1 \leq m < B$ - mantysa, c - cecha
Def. t - długość mantysy, $u = 2^{-t-1}$ - precyzja arytmetyki
Def. Reguła zaokrąglenia: Jeśli $m = 1.e_{-1}e_{-2} \dots$ to $\tilde{m} = 1.e_{-1}e_{-2} \dots e_{-t} + \underbrace{0.00\dots0}_{t-1 \text{ razy}} e_{-t-1}$. Wtedy:

$$rd(x) = \begin{cases} sB^{c+1}, & \text{gd}y \ e_{-1} = e_{-2} = \dots = e_{-t} = e_{-t-1} = 1. \\ s\tilde{m}B^c, & \text{wpp.} \end{cases}$$
Błąd zaokrąglenia w górę: $|rd(x) - x| \leq 2^{-t-1}2^c$,

$$\frac{|rd(x) - x|}{|x|} \leq \frac{u}{1+u} < u$$
Zbiór reprezentacji arytmetyki: $X_{fl} = rd(X) = \{rd(x) : x \in X\}$

Tw. Jeśli $|\alpha_i| \leq u, |\rho_i| = 1, nu < 1$, to $\prod_{i=1}^n (1 + \alpha_i)^{\rho_i} = 1 + \theta_n$, gdzie $|\theta_n| \leq \frac{nu}{1 - nu}$.

Tw. Jeśli $|\alpha_i| \leq u, nu < 0.01$, to $\prod_{i=1}^n (1 + \alpha_i) = 1 + \theta_n$, gdzie $|\theta_n| \leq 1.01nu$.

Def. Zadanie jest **złe uwarunkowane**, jeśli niewielkie względne zmiany danych powodują duże względne zmiany wyniku. Wielkości charakteryzujące wpływ zaburzeń danych na zaburzenie wyniku to **wskaźniki uwarunkowania**:

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{f(x)} \right| \approx \left| \frac{xf'(x)}{f(x)} \right| \left| \frac{h}{x} \right|$$
Def. Niech \tilde{y} - wynik algorytmu obliczającego $f(x)$. Jeśli dla małych $\Delta x, \Delta y$ mamy $\tilde{y} + \Delta y = f(x + \Delta x)$, tzn. wynik jest lekko zaburzony dla lekko zaburzonych danych, to algorytm jest **numerycznie poprawny**.
Jeśli $\tilde{y} = f(x + \Delta x)$ (wynik dokładny dla lekko zaburzonych danych), to algorytm jest **numerycznie bardzo poprawny**.

2 Interpolacja

2.1 Ilorazy różnicowe

$f[x_0, x_1, \dots, x_k]$ jest symetryczną funkcją zmiennych x_i
 $f = g + c \cdot h \Rightarrow f[x_0, \dots, x_k] = g[x_0, \dots, x_k] + c \cdot h[x_0, \dots, x_k]$,

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$
,
 $f[x_0, x_1, \dots, x_{n+1}] = f^{(n+1)}(\xi)/(n+1)!, \xi \in (a, b)$

2.2 Postacie wielomianów interpolacyjnych

Lagrange'a: $L_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k \lambda_k$, gdzie $\lambda_k = \frac{\prod_{j=0, j \neq k}^n (x - x_j)}{\prod_{j=0, j \neq k}^n (x_k - x_j)}$

Barycentryczna: Dla $\sigma_k = \prod_{j=0, j \neq k}^n \frac{1}{x_k - x_j}$

$$L_n(x) = \begin{cases} \sum_{k=0}^n \frac{\sigma_k}{x - x_k} y_k \Big/ \sum_{k=0}^n \frac{\sigma_k}{x - x_k} & \text{gd}y \ x \notin \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \\ wpp. & \end{cases}$$

Newtona: $L_n(x) = \sum_{k=0}^n b_k p_k(x)$, gdzie $p_k = \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j)$, $p_0 = 1$

$$b_k = \sum_{i=0}^k \frac{f(x_i)}{\prod_{j=0, j \neq i}^k (x_i - x_j)} = f[x_0, x_1, \dots, x_k]$$

2.3 Reszta wielomianu interpolacyjnego

$f(x) - L_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) p_{n+1}(x) = p_{n+1}(x) f[x_0, x_1, \dots, x_n]$

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x) - L_n(x)| = \frac{1}{(n+1)!} \max_{-1 \leq x \leq 1} |f^{(n+1)}(x)| \max_{-1 \leq x \leq 1} |p_{n+1}(x)|$$

2.4 DFT

input: $[x_0, x_1, \dots, x_N]$
output: $[y_0, y_1, \dots, y_N]$ $y_k = \sum_{j=0}^{N-1} x_j e^{\frac{2\pi i j k}{N}}$ gdzie $(0 \leq k < N)$

2.5 Spline

naturalna: $s''(a) = 0 \wedge s''(b) = 0$
zupelna: $s'(a) = f'(a) \wedge s'(b) = f'(b)$
okresowa: $s'(a) = s'(b) \wedge s''(a) = s''(b)$
Fakt: $\int_a^b (s''(x))^2 dx = \sum_{k=1}^{n-1} (f[x_k, x_{k+1}] - f[x_{k-1}, x_k]) s''(x_k)$
 $\lambda_k M_{k-1} + 2M_k + (1 - \lambda_k) M_{k+1} = 6 * f[x_{k-1}, x_k, x_{k+1}]$
 $(k = 1, \dots, n-1)$ oraz $\lambda_k = h_k / (h_k + h_{k+1})$ oraz $h_k = x_k - x_{k-1}$

3 Wielomiany Ortogonalne

3.1 Czebyszew I rodzaju

$T_0(x) = 1, T_1(x) = x, T_n(x) = 2x T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$
 $T_k(x) = \cos(k \arccos x), x \in [-1, 1], T_k(-x) = (-1)^k T_k(x)$,
zera T_{n+1} : $t_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right)$, ekstrema T_n : $u_k = \cos\left(\frac{k}{n}\pi\right) (k = 0 \dots n)$
 $\tilde{T}_n = 2^{(1-n)} T_n$ ma min. normę na $[-1, 1]$ ze wszystkich Π_n o wsp. wiodącym 1
waga: $p(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$

$$\int_{-1}^1 p(x) T_k(x) T_l(x) dx = 0 \quad (k \neq l)$$

$$\int_{-1}^1 p(x) (T_k(x))^2 dx = \begin{cases} \pi/2 & \text{gd}y \ k = 0 \\ \pi & \text{gd}y \ k \geq 1 \end{cases}$$

3.2 Legendre'a

$P_0(x) = 1, P_1(x) = x - c_1, P_k(x) = (x - c_k) P_{k-1}(x) - d_k P_{k-2}(x)$
 $c_k = \frac{\langle x P_{k-1}, P_{k-1} \rangle}{\langle P_{k-1}, P_{k-1} \rangle}, d_k = \frac{\langle P_{k-1}, P_{k-1} \rangle}{\langle P_{k-2}, P_{k-2} \rangle}$,

4 Normy

4.1 Wektorowe

$\|\mathbf{x}\|_p = \left(|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_n|^p\right)^{1/p}, \|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} \{|x_i|\}$
Warunki:
 $\|\mathbf{x}\| \geq 0; \|\mathbf{x}\| = 0 \Rightarrow x = 0; \|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha| \|\mathbf{x}\|; \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

4.2 Macierzowe

$\|\mathbf{A}\mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\|$
Def. Norma macierzowa zgodna z wektorową: $\|\mathbf{A}\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{x}\|$
 $\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_i |a_{ij}|, \|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_j |a_{ij}|, \|\mathbf{A}\|_p = \max_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_p}{\|\mathbf{x}\|_p}$.
 $\|\mathbf{A}\|_E = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{i,j}|^2}$ (euklidesowa/Frobeniusa)
 $\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\rho(\mathbf{A}^T \mathbf{A})}$ (spektralna, $\rho(X) = \max |\lambda(X)|$)
 $E \in \mathbb{R}^{n \times n}, \|E\| < 1 \Rightarrow I - E$ jest nieosobliwa i $\|(I - E)^{-1}\| \leq (1 - \|E\|)^{-1}$

5 Aproksymacja

5.1 Normy, iloczyn skalarny, błąd

$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|, \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b p(x) f^2(x) dx}$
 $\langle f, g \rangle := \int_a^b p(x) f(x) g(x) dx, \sqrt{\langle f, f \rangle} = \|f\|_2$
 $E_n(f) := \inf_{W \in \Pi_n} \|f - W_n\|_\infty^T$

5.2 Wielomian optymalny

$w_n^* = \sum_{k=0}^n \frac{\langle f, P_k \rangle}{\langle P_k, P_k \rangle} P_k, \|f - w_n^*\|_2 = \sqrt{\|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^n \frac{\langle f, P_k \rangle^2}{\langle P_k, P_k \rangle}}$

6 Kwadratury interpolacyjne

I_p(f) = \int_a^b p(x)f(x)dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k),

Wiel. węzłowy: \omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)..(x - x_n)

6.1 Kwadratury Newtona-Cotesa

h = (b - a)/n, x_k = a + kh

Wzór trapezów: n = 1, A_0 = A_1 = h/2, R_1(f) = -\frac{h^3}{12} f''(\xi)

Wzór Simpsona: n = 2, A_0 = A_2 = h/3, A_1 = 4h/3, R_2(f) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)

Zł. wzór trapezów: T_n = h \sum_{k=0}^n '' f(x_k), R_n^T(f) = -\frac{h^3 n}{12} f''(\xi)

Zł. wzór Simpsona: n = 2m, S_n(f) = (4T_n - T_m)/3

R_n^S(f) = -(b - a) \frac{h^4}{180} f^{(4)}(\xi)

Metoda Romberga: h_k = (b - a)/2^k

x_i^k = a + ih_k, (i = 0, 1, . . . , 2^k), T_{0k} = T_{2^k}(f)

T_{mk} = \frac{4^m T_{m-1,k+1} - T_{m-1,k}}{4^m - 1}

Reszta Newtona-Cotesa:

I_p(f) - Q_n(f) = \begin{cases} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_a^b \omega(x) dx & \text{gd}y \ n = 1, 3, \dots \\ \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \int_a^{a_b} x \omega(x) dx & \text{gd}y \ n = 2, 4, \dots \end{cases}

gdzie \xi \in (a, b).

6.2 Kwadratury Gaussa

x_k - zera wiel. orto. P_{n+1}(x), c_k wsp. wiod. P_k

\lambda_k(x) = \omega(x)/[\omega'(x_k)(x - x_k)].

0 < A_k = \int_a^b p(x)\lambda_k(x)dx = \frac{c_{n+1}}{c_n} \frac{||P_n||^2}{P'_{n+1}(x_k)P_n(x_k)}.

R_n(f) = \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(2n+2)!c_{n+1}^2} \int_a^b p(x)[P_{n+1}(x)]^2 dx

6.3 Gauss-Czebyszew

\int_{-1}^1 p(x)f(x)dx \approx \int_{-1}^1 p(x)I_n(x)dx

I_n(x) = \sum_{i=0}^n {}^t\alpha_i T_i(x), \alpha_i = \frac{2}{n+1} \sum_{i=0}^n f(t_k)T_i(t_k)

Q_n^{QC}(f) = \sum_{k=0}^n A_k f(t_k), A_k = \frac{\pi}{n+1}

6.4 Gauss-Lobatto

x_k = u_k = \cos\left(\frac{k}{n}\pi\right)

\int_{-1}^1 p(x)f(x)dx \approx \int_{-1}^1 p(x)J_n(x)dx

J_n(x) = \sum_{j=0}^n '' \beta_j T_j(x), \beta_j = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^n '' (u_k)T_j(u_k)

Q_n^L(f) = \sum_{k=0}^n '' A_k f(u_k), A_k = \frac{\pi}{n}.

7 Algebra numeryczna

7.1 Metody iteracyjne

x^{(k+1)} = B_\tau x^{(k)} + c \quad (k \geq 0)

Tw. Metoda iter. jest zbieżna dla dowolnego x^{(0)}, jeśli \rho(B) < 1, gdzie \rho(B) := \max_{1 \leq i \leq n} (\lambda_i) to promień spektralny macierzy B.

Metoda Richardsona: B_\tau = I - \tau A, \quad c = \tau b

Tw. Załóżmy, że wszystkie \lambda_i spełniają: 0 < \alpha \leq \lambda_i \leq \beta.

Wtedy metoda Richardsona jest zbieżna dla 0 < \tau < \frac{2}{\beta}.

Metoda Jacobiego: B_J = -D^{-1}(L + U)

Tw. Jeśli A jest macierzą ze ściśle dominującą przekątną, tj.

|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, to wtedy \|B_J\|_\infty < 1 i \|B_S\|_\infty < 1.

Metoda Gaussa-Seidela: B_S = -(D + L)^{-1}U

Tw. Jeśli A jest symetryczna i dodatnio określona, to \|B_S\|_\infty < 1.

B_\omega = (I - \omega M)^{-1}(\omega N + (1 - \omega)I), \quad M = -D^{-1}L, N = -D^{-1}U

8 Równania nieliniowe

Metoda Newtona: X_{n+1} = X_n - \frac{f(X_n)}{f'(X_n)}

Metoda siecznych: X_{n+1} = X_n - \frac{X_n - X_{n-1}}{\frac{f(X_n) - f(X_{n-1})}{f'(X_n)}}

Regula falsi - metoda siecznych z zachowaniem warunku f(X_n)f(X_{n-1}) < 0 Metoda Newtona dla r-krotnego pierwiastka: X_{n+1} = X_n - r \frac{f(X_n)}{f'(X_n)}

Algortym adaptacyjny: X_{n+1} = X_n - r_n \frac{f(X_n)}{f'(X_n)}, r_n = \frac{X_{n-1} - X_{n-2}}{2X_{n-1} - X_n - X_{n-2}}

Metoda Newtona dla wielu zmiennych: J * h = -F, X_{n+1} = X_n + h_n

Metoda Laguerra(zbieżna sześciennie do pojedynczych pierwiastków):

Z_{k+1} = Z_k - \frac{n\omega(Z_k)}{\omega'(Z_k) + / - \sqrt[2]{H(Z_k)}},

H(x) = (n - 1)[(n - 1)\omega'^2(x) - n\omega(x)\omega''(x)]

Metoda Steffensena: C_{n+1} = C_n - \frac{f^2(C_n)}{f(C_n + f(C_n)) - f(C_n)}

9 Teoretycznie przydatne wzory

Nierówność Cauchy’ego-Schwarza: \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right)

Inaczej: \langle v, w \rangle \leq \|v\|_2 \cdot \|w\|_2

Bairstowa: p(z) = a_n z^n + \dots + a_0 Związek: b_k = a_k + ub_{k+1} + vb_{k+2}

Niech ciąg a_k będzie zbieżny do g. Jeśli istnieją takie liczby rzeczywiste p i C (C > 0), że \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1} - g|}{|a_n - g|^p} = C, to p jest wykładnikiem zbieżności ciągu, a C - stałą asymptotyczną błędu. Dla p = 1 oraz 0 < C < 1 zbieżność jest liniowa, dla p = 2 - kwadratowa, dla p = 3 - sześcienna. gdy p = 1 i C = 1 - zbieżność podliniowa, jeśli p = 1, C = 0 - nadliniowa.

\sin x \pm \sin y = 2 \sin \frac{x \pm y}{2} \cdot \cos \frac{x \mp y}{2}

\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \cdot \cos \frac{x - y}{2}

\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y

\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y

\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x + y}{2} \cdot \sin \frac{x - y}{2}

Wzór Taylora : f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x - a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + R_n(x, a), \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{R_n(x, a)}{(x - a)^n} = 0 Wzór Taylora dla dwóch zmiennych: f(a + h) = f(a) + h_1 \frac{df}{dx_1}(x_1, x_2) + h_2 \frac{df}{dx_2}(x_1, x_2)...