Analiza błędów

Reprezentacja liczb

$x = smB^c$, s - znak, $1 \leqslant m < B$ - mantysa, c - cecha
Def. t - długość mantysy, $u = 2^{-t-1}$ - precyzja arytmetyki
Błąd zaokrąglenia w górę: $|rd(x) - x| \leqslant 2^{-t-1} 2^c$,
$\frac{|rd(x) - x|}{|x|} \leqslant \frac{u}{1+u} < u$
Zbiór reprezentacji arytmetyki: $X_{fl} = rd(X) = \{rd(x) : x \in X\}$ **Tw.** Jeśli $|\alpha_i| \leqslant u, \rho_i = \pm 1, nu < 1$, to $\prod_{i=1}^{n} (1+\alpha_i)^{\rho_i} = 1 + \theta_n$, gdzie $|\theta_n| \leqslant \frac{nu}{1-nu}$.

Tw. Jeśli $|\alpha_i| \leqslant u, nu < 0.01$, to $\prod_{i=1}^{n} (1+\alpha_i) = 1 + \theta_n$, gdzie $|\theta_n| \leqslant 1.01nu$.

Def. Zadanie jest **źle uwarunkowane**, jeśli niewielkie względne zmiany danych powodują duże względne zmiany wyniku. Wielkości charakteryzujące wpływ zaburzeń danych na zaburzenie wyniku to **wskaźniki uwarunkowania**:
$|\frac{f(x+h) - f(x)}{f(x)}| \approx |\frac{xf'(x)}{f(x)}||\frac{h}{x}|$
Def. Niech $\tilde{y}$ - wynik algorytmu obliczającego $f(x)$. Jeśli dla małych $\Delta x, \Delta y$ mamy $\tilde{y} + \Delta y = f(x + \Delta x)$, tzn. wynik jest lekko zaburzony dla lekko zaburzonych danych, to algorytm jest **numerycznie poprawny**.
Jeśli $\tilde{y} = f(x + \Delta x)$ (wynik dokładny dla lekko zaburzonych danych), to algorytm jest **numerycznie bardzo poprawny**.

Interpolacja

Postacie wielomianów interpolacyjnych

Lagrange'a: $L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \lambda_k, gdzie \quad \lambda_k = \frac{\prod_{j=0, j\neq k}^{n} (x - x_j)}{\prod_{j=0, j\neq k}^{n} (x_k - x_j)}$

Barycentryczna: $\sigma_k = \prod_{j=0, j\neq k}^{n} \frac{1}{x_k - x_j}$

$$L_n(x) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{n} \frac{\sigma_k}{x - x_k} y_k \Big/ \sum_{k=0}^{n} \frac{\sigma_k}{x - x_k} & \text{gdy } x \notin \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \\ y_k & wpp. \end{cases}$$

Newtona: $L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k p_k(x)$, gdzie $p_k = \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j)$,

$$b_k = \sum_{i=0}^{k} \frac{f(x_i)}{\prod_{j=0, j\neq i}^{k} (x_i - x_j)}$$

Reszta wielomianu interpolacyjnego

$$f(x) - L_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x) p_{n+1}(x) = p_{n+1}(x) f[x_0, x_1, ..., x_n]$$
$$\max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |f(x) - L_n(x)| = \frac{1}{(n+1)!} \max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |f^{(n+1)}(x)| \max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |p_{n+1}(x)|$$

DFT

`input:` $[x_0, x_1, ..., x_N]$

`output:` $[y_0, y_1, ..., y_N]$ $y_k = \sum_{j=0}^{N-1} x_j e^{\frac{2\pi ijk}{N}}$ gdzie $(0 \leqslant k < N)$

Spline

naturalna: $s''(a) = 0 \wedge s''(b) = 0$
zupelna: $s'(a) = f'(a) \wedge s'(b) = f'(b)$
okresowa: $s'(a) = s'(b) \wedge s''(a) = s''(b)$

Fakt: $\int_a^b \left(s''(x)\right)^2 dx = \sum_{k=1}^{n-1} \left(f\left[x_k, x_{k+1}\right] - f\left[x_{k-1}, x_k\right]\right) s''(x_k)$
$\lambda_k M_k + 2M_k + (1 - \lambda_k) M_{k-1} = 6 * f[x_{k-1}, x_k, x_{k+1}]$
$(k = 1, ..., n-2)$ oraz $\lambda_k = h_k / (h_k + h_{k+1})$ oraz $h_k = x_k - x_{k-1}$

Wielomiany Ortogonalne

Czebyszew I rodzaju

$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x$
$T_n(x) = 2x\, T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$
$T_k(x) = \cos(k \arccos x),\ x \in [-1, 1]$
zera T_{n+1} $(k = 0, 1, \ldots n)$: $\quad t_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right)$
ekstrema T_n : $\; u_k = \cos\left(\frac{k}{n}\pi\right)$
waga: $p(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$

$$\int_{-1}^{1} p(x) T_k(x) T_l(x) dx = 0 \qquad (k \neq l)$$
$$\int_{-1}^{1} p(x) (T_k(x))^2 dx = \begin{cases} \pi & \text{gdy } k = 0 \\ \pi/2 & \text{gdy } k \geqslant 1 \end{cases}$$

Legendre'a

$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x - c_1, \;\; P_k(x) = (x - c_k) P_{k-1}(x) - d_k P_{k-2}(x)$
$c_k = \frac{\langle x P_{k-1}, P_{k-1} \rangle}{\langle P_{k-1}, P_{k-1} \rangle}, \quad d_k = \frac{\langle P_{k-1}, P_{k-1} \rangle}{\langle P_{k-2}, P_{k-2} \rangle},$

Normy

Wektorowe

$\|\mathbf{x}\|_p = \left(|x_1|^p + |x_2|^p + \ldots + |x_n|^p\right)^{1/p}$, $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \left\{|x_i|\right\}$ Norma musi spełniać 3 warunki:
$\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$; $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$; $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Macierzowe

$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum_i |a_{ij}|$, $\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_j |a_{ij}|$,
$\|\mathbf{A}\|_p = \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_p}{\|\mathbf{x}\|_p}$.
$\|\mathbf{A}\|_E = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{i,j}|^2}$ (euklidesowa/Frobeniusa)
$\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\rho(\mathbf{A}^T \mathbf{A})}$ (spektralna, $\rho(X) = \max |\lambda(X)|$)

Aproksymacja

Normy, iloczyn skalarny, błąd

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|, \;\; \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b p(x) f^2(x)\, dx}$$
$$\langle f, g \rangle := \int_a^b p(x)\, f(x)\, g(x)\, dx, \quad \sqrt{\langle f, f \rangle} = \|f\|_2$$
$$E_n(f) := \inf_{W \in \Pi_n} \|f - W_n\|_\infty^T$$

Wielomian optymalny

$$w_n^* = \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle f, P_k \rangle}{\langle P_k, P_k \rangle} P_k, \;\; \|f - w_n^*\|_2 = \sqrt{\|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle f, P_k \rangle^2}{\langle P_k, P_k \rangle}}$$

Kwadratury interpolacyjne

$I_p(f) = \int_a^b p(x) f(x) dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$, wiel. węzłowy $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)..(x - x_n)$

Kwadratury Newtona-Cotesa

$h = (b-a)/n, \quad x_k = a + kh$

Wzór trapezów, $n = 1$, $A_0 = A_1 = h/2$, $R_1(f) = -\frac{h^3}{12} f''(\xi)$

Wzór Simpsona, $n = 2$,$A_0 = A_2 = h/3$, $A_1 = 4h/3$, $R_2(f) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)$

Zł. wzór trapezów: $T_n = h \sum_{k=0}^{n}{}'' f(x_k)$, $R_n^T(f) = -\frac{h^3 n}{12} f''(\xi)$

Zł. wzór Simpsona, $n = 2m$, $\quad S_n(f) = (4T_n - T_m)/3$

$R_n^S(f) = -(b-a)\frac{h^4}{180} f^{(4)}(\xi)$

Metoda Romberga: $h_k = (b-a)/2^k$

$x_i^(k) = a + ih_k, (i = 0, 1, \ldots, 2^k), \quad T_{0k} = T_{2^k}(f)$

$T_{mk} = \frac{4^m T_{m-1,k+1} - Tm - 1, k}{4^m - 1}$

Reszta Newtona-Cotesa:

$$I_p(f) - Q_n(f) = \begin{cases} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_a^b \omega(x)dx & \text{gdy } n = 1, 3, \ldots \\ \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \int_a^b x\omega(x)dx & \text{gdy } n = 2, 4, \ldots \end{cases} \quad \text{gdzie } \xi \in (a, b).$$

Kwadratury Gaussa

x_k - zera wiel. orto. $P_{n+1}(x)$, c_k wsp. wiod. P_k

$\lambda_k(x) = \omega(x)/[\omega'(x_k)(x - x_k)]$.

$$0 < A_k = \int_a^b p(x)\lambda_k(x)dx = \frac{c_{n+1}}{c_n}\frac{||P_n||^2}{P'_{n+1}(x_k)P_n(x_k)}.$$

$$R_n(f) = \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(2n+2)!c_{n+1}^2}\int_a^b p(x)[P_{n+1}(x)]^2 dx$$

Gauss-Czebyszew

$$\int_{-1}^{1} p(x)f(x)dx \approx \int_{-1}^{1} p(x)I_n(x)dx$$

$$I_n(x) = \sum_{i=0}^{n}{}' \alpha_i T_i(x), \alpha_i = \frac{2}{n+1}\sum_{i=0}^{n} f(t_k)T_i(t_k)$$

$$Q_n^{QC}(f) = \sum_{k=0}^{n} A_k f(t_k), A_k = \frac{\pi}{n+1}$$

Gauss-Lobatto

$$x_k = u_k = \cos\left(\frac{k}{n}\pi\right)$$

$$\int_{-1}^{1} p(x)f(x)dx \approx \int_{-1}^{1} p(x)J_n(x)dx$$

$$J_n(x) = \sum_{j=0}^{n}{}'' \beta_j T_j(x), \beta_j = \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n}{}'' (u_k)T_j(u_k)$$

$$Q_n^L(f) = \sum_{k=0}^{n}{}'' A_k f(u_k), A_k = \frac{\pi}{n}.$$

Algebra numeryczna

Metody iteracyjne

$x^{(k+1)} = B_\tau x^{(k)} + c \quad (k \geqslant 0)$

Tw. Metoda iter. jest zbieżna dla dowolnego $x^{(0)}$, jeśli $\rho(B) < 1$,
gdzie $\rho(B) := \max_{1 \leqslant i \leqslant n}(\lambda_i)$ to promień spektralny macierzy B.

$B_\tau = I - \tau A, \quad c = \tau b$ (Metoda Richardsona)

Tw. Załóżmy, że wszystkie λ_i spełniają: $0 < \alpha \leqslant \lambda_i \leqslant \beta$.

Wtedy metoda Richardsona jest zbieżna dla $0 < \tau < \frac{2}{\beta}$.

$B_J = -D^{-1}(L + U)$ (Metoda Jacobiego)

Tw. Jeśli A jest macierzą ze ściśle dominującą przekątną, tj.

$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$, to wtedy $\|B_J\|_\infty < 1$ i $\|B_S\|_\infty < 1$.

$B_S = -(D + L)^{-1}U$ (Metoda Gaussa-Seidela)

Tw. Jeśli A jest symetryczna i dodatnio określona, to $\|B_S\|_\infty < 1$.

$B_\omega = (I - \omega M)^{-1}(\omega N + (1-\omega)I), \quad M = -D^{-1}L, N = -D^{-1}U$

Równania nieliniowe

Metoda Newtona: $X_{n+1} = X_n - \frac{f(X_n)}{f'(X_n)}$

Metoda siecznych: $X_{n+1} = X_n - \frac{X_n - X_{n-1}}{f(X_n) - f(X_{n-1})}$

Regula falsi - metoda siecznych z zachowaniem warunku $f(X_n)f(X_{n-1}) < 0$ Metoda Newtona dla r-krotnego pierwiastka: $X_{n+1} = X_n - r\frac{f(X_n)}{f'(X_n)}$

Algortym adaptacyjny: $X_{n+1} = X_n - r_n\frac{f(X_n)}{f'(X_n)}$, $r_n = \frac{X_{n-1} - X_{n-2}}{2X_{n-1} - X_n - X_{n-2}}$

Metoda Newtona dla wielu zmiennych: $J * h = -F$, $X_{n+1} = X_n + h_n$

Metoda Laguerra(zbieżna sześciennie do pojedynczych pierwiastków):

$Z_{k+1} = Z_k - \frac{n\omega(Z_k)}{\omega'(Z_k) + / - \sqrt[2]{H(Z_k)}}$,

$H(x) = (n-1)[(n-1)\omega'^2(x) - n\omega(x)\omega''(x)]$

Metoda Steffensena: $C_{n+1} = C_n - \frac{f^2(C_n)}{f(C_n + f(C_n)) - f(C_n)}$

Teoretycznie przydatne wzory

Nierówność Cauchy'ego-Schwarza $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$

Inaczej: $\langle v, w \rangle \leqslant \|v\|_2 \cdot \|w\|_2$

Bairstowa: $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$ zwiazek: $b_k = a_k + ub_{k+1} + vb_{k+2}$

Niech ciąg a_k będzie zbieżny do g. Jeśli istnieją takie liczby rzeczywiste p i C $(C > 0)$, że $\lim_{n \to \inf} \frac{|a_{n+1} - g|}{|a_n - g|^p} = C$, to p jest wykładnikiem zbieżności ciągu, a C – stałą asymptotyczną błędu. Dla $p = 1$ oraz $0 < C < 1$ zbieżność jest liniowa, dla $p = 2$ – kwadratowa, dla $p = 3$ – sześcienna. gdy $p = 1$ i $C = 1$ - zbieżność podliniowa, jeśli $p = 1$, $C = 0$ - nadliniowa.

$\sin x \pm \sin y = 2\sin\frac{x \pm y}{2} \cdot \cos\frac{x \mp y}{2}$

$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2}$

$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$

$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$

$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2} \cdot \sin\frac{x-y}{2}$

Wzór Taylora : $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + R_n(x, a)$, $\lim_{x->a} \frac{R_n(x, a)}{(x-a)^n} = 0$ Wzór Taylora dla dwóch zmiennych: $f(a + h) = f(a) + h_1\frac{df}{dx_1}(x_1, x_2) + h_2\frac{df}{dx_2}(x_1, x_2)\ldots$