

1 Analiza błędów

1.1 Reprezentacja liczb

$x = smB^c$ ,  $s$  - znak,  $1 \leq m < B$  - mantysa,  $c$  - cecha  
Def.  $t$  - długość mantysy,  $u = 2^{-t-1}$  - precyzja arytmetyki  
Błąd zaokrąglenia w górę:  $|rd(x) - x| \leq 2^{-t-1}2^c$ ,  
 $\frac{|rd(x) - x|}{|x|} \leq \frac{u}{1+u} < u$   
Zbiór reprezentacji arytmetyki:  $X_{fl} = rd(X) = \{rd(x) : x \in X\}$  Tw. Jeśli  $|\alpha_i| \leq u, \rho_i = \pm 1, nu < 1$ , to  $\prod_{i=1}^n (1 + \alpha_i)^{\rho_i} = 1 + \theta_n$ , gdzie  $|\theta_n| \leq \frac{nu}{1 - nu}$ .  
Tw. Jeśli  $|\alpha_i| \leq u, nu < 0.01$ , to  $\prod_{i=1}^n (1 + \alpha_i) = 1 + \theta_n$ , gdzie  $|\theta_n| \leq 1.01nu$ .

Def. Zadanie jest **źle uwarunkowane**, jeśli niewielkie względne zmiany danych powodują duże względne zmiany wyniku. Wielkości charakteryzujące wpływ zaburzeń danych na zaburzenie wyniku to **wskaźniki uwarunkowania**:  
 $|\frac{f(x+h) - f(x)}{f(x)}| \approx |\frac{xf'(x)}{f(x)}| |\frac{h}{x}|$   
Def. Niech  $\tilde{y}$  - wynik algorytmu obliczającego  $f(x)$ . Jeśli dla małych  $\Delta x, \Delta y$  mamy  $\tilde{y} + \Delta y = f(x + \Delta x)$ , tzn. wynik jest lekko zaburzony dla lekko zaburzonych danych, to algorytm jest **numerycznie poprawny**.  
Jeśli  $\tilde{y} = f(x + \Delta x)$  (wynik dokładny dla lekko zaburzonych danych), to algorytm jest **numerycznie bardzo poprawny**.

2 Interpolacja

2.1 Postacie wielomianów interpolacyjnych

Lagrange'a:  $L_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k \lambda_k$ , gdzie  $\lambda_k = \frac{\prod_{j=0, j \neq k}^n (x - x_j)}{\prod_{j=0, j \neq k}^n (x_k - x_j)}$   
Barycentryczna:  $\sigma_k = \prod_{j=0, j \neq k}^n \frac{1}{x_k - x_j}$   
 $L_n(x) = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=0}^n \frac{\sigma_k}{x - x_k} y_k \Big/ \sum_{k=0}^n \frac{\sigma_k}{x - x_k} \quad \text{gdy } x \notin \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \\ wpp. \end{array} \right.$

2.2 Reszta wielomianu interpolacyjnego

$f(x) - L_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x) p_{n+1}(x)$   
 $\max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x) - L_n(x)| = \frac{1}{(n+1)!} \max_{-1 \leq x \leq 1} |f^{(n+1)}(x)| \max_{-1 \leq x \leq 1} |p_{n+1}(x)|$

2.3 Spline

naturalna:  $s''(a) = 0 \wedge s''(b) = 0$   
zupelna:  $s'(a) = f'(a) \wedge s'(b) = f'(b)$   
okresowa:  $s'(a) = s'(b) \wedge s''(a) = s''(b)$   
Fakt:  $\int_a^b (s''(x))^2 dx = \sum_{k=1}^{n-1} (f[x_k, x_{k+1}] - f[x_{k-1}, x_k]) s''(x_k)$   
 $\lambda_k M_k + 2M_k + (1 - \lambda_k)M_{k-1} = 6 * f[x_{k-1}, x_k, x_{k+1}]$   
( $k = 1, ..., n - 2$ ) oraz  $\lambda_k = h_k / (h_k + h_{k+1})$  oraz  $h_k = x_k - x_{k-1}$

3 Wielomiany Bernsteina

Def:  $B_i^n(u) = \binom{n}{i} u^i (1 - u)^{n-i}$  Własności:  
1)  $\sum_{i=0}^n B_i^n(u) = 1$   
2)  $B_i^n(u) > 0$   
3)  $B_i^n(u) = (1 - u) * B_i^{n-1}(u) + u B_{i-1}^{n-1}(u)$   
4)  $B_i^n(u) = \frac{n+1-i}{n+1} B_i^{n+1}(u) + \frac{i+1}{n+1} B_{i+1}^{n+1}(u)$   
5)  $(B_i^n(u))' = n (B_{i-1}^{n-1} - B_i^{n-1})$

4 Wielomiany Ortogonalne

4.1 Czebyszew I rodzaju

$T_0(x) = 1, T_1(x) = x$   
 $T_n(x) = 2x T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$   
 $T_k(x) = \cos(k \arccos x), x \in [-1, 1]$   
zera  $T_{n+1}$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ):  $t_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right)$   
ekstrema  $T_n$ :  $u_k = \cos\left(\frac{k}{n}\pi\right)$   
waga:  $p(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$   
 $\int_{-1}^1 p(x) T_k(x) T_l(x) dx = 0 \quad (k \neq l)$   
 $\int_{-1}^1 p(x) (T_k(x))^2 dx = \begin{cases} \pi/2 & \text{gdzy } k = 0 \\ \pi & \text{gdzy } k \geq 1 \end{cases}$

5 Normy

5.1 Wektorowe

$\|\mathbf{x}\|_p = \left(|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_n|^p\right)^{1/p}, \|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} \{|x_i|\}$  Norma musi spełniać 3 warunki:  
 $\|\mathbf{x}\| = 0 \Rightarrow x = 0; \|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha| \|\mathbf{x}\|; \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|.$

5.2 Macierzowe

$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_i |a_{ij}|, \|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_j |a_{ij}|,$   
 $\|\mathbf{A}\|_p = \max_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\|\mathbf{Ax}\|_p}{\|\mathbf{x}\|_p}.$   
 $\|\mathbf{A}\|_E = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{i,j}|^2}$  (euklidesowa/Frobeniusa)  
 $\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\rho(\mathbf{A}^T \mathbf{A})}$  (spektralna,  $\rho(X) = \max |\lambda(X)|$ )

6 Aproksymacja

6.1 Normy, iloczyn skalarny, błąd

$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|, \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b p(x) f^2(x) dx}$   
 $\langle f, g \rangle := \int_a^b p(x) f(x) g(x) dx, \sqrt{\langle f, f \rangle} = \|f\|_2$   
 $E_n(f) := \inf_{W \in \Pi_n} \|f - W_n\|_\infty^T$

6.2 Wielomian optymalny

$w_n^* = \sum_{k=0}^n \frac{\langle f, P_k \rangle}{\langle P_k, P_k \rangle} P_k, \|f - w_n^*\|_2 = \sqrt{\|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^n \frac{\langle f, P_k \rangle^2}{\langle P_k, P_k \rangle}}$

6.3 Wielomiany ortogonalne

$P_0(x) = 1, P_1(x) = x - c_1, P_k(x) = (x - c_k) P_{k-1}(x) - d_k P_{k-2}(x)$   
 $c_k = \frac{\langle x P_{k-1}, P_{k-1} \rangle}{\langle P_{k-1}, P_{k-1} \rangle}, d_k = \frac{\langle P_{k-1}, P_{k-1} \rangle}{\langle P_{k-2}, P_{k-2} \rangle},$

7 Kwadratury interpolacyjne

$I_p(f) = \int_a^b p(x) f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k), \text{ wiel. węzłowy } \omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$

7.1 Kwadratury Newtona-Cotesa

$h = (b - a)/n, \quad x_k = a + kh$   
Wzór trapezów,  $n = 1, A_0 = A_1 = h/2, R_1(f) = -\frac{h^3}{12}f''(\xi)$   
Wzór Simpsona,  $n = 2, A_0 = A_2 = h/3, A_1 = 4h/3, R_2(f) = -\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi)$

Zł. wzór trapezów:  $T_n = h \sum_{k=0}^n f(x_k), R_n^T(f) = -\frac{h^3n}{12}f''(\xi)$

Zł. wzór Simpsona,  $n = 2m, S_n(f) = (4T_n - T_m)/3$

$R_n^S(f) = -(b-a)\frac{h^4}{180}f^{(4)}(\xi)$

Metoda Romberga:  $h_k = (b-a)/2^k$   
 $x_i^{(k)} = a + ih_k, (i = 0, 1, \dots, 2^k), \quad T_{0k} = T_{2^k}(f)$   
 $T_{mk} = \frac{4^m T_{m-1,k+1} - T_{mk-1,k}}{4^m - 1}$

Reszta Newtona-Cotesa:

$$I_p(f) - Q_n(f) = \begin{cases} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_a^b \omega(x) dx & \text{gdy } n = 1, 3, \dots \\ \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \int_a^b x\omega(x) dx & \text{gdy } n = 2, 4, \dots \end{cases} \quad \text{gdzie } \xi \in (a, b).$$

7.2 Kwadratury Gaussa

$x_k$  - zera wiel. orto.  $P_{n+1}(x), c_k$  wsp. wiod.  $P_k$   
 $\lambda_k(x) = \omega(x)/[\omega'(x_k)(x - x_k)]$ .  
 $0 < A_k = \int_a^b p(x)\lambda_k(x)dx = \frac{c_{n+1}}{c_n} \frac{||P_n||^2}{P'_{n+1}(x_k)P_n(x_k)}.$   
 $R_n(f) = \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(2n+2)!c_{n+1}^2} \int_a^b p(x)[P_{n+1}(x)]^2 dx$

7.3 Gauss-Czebyszew

$$\int_{-1}^1 p(x)f(x)dx \approx \int_{-1}^1 p(x)I_n(x)dx$$
$$I_n(x) = \sum_{i=0}^n \iota \alpha_i T_i(x), \alpha_i = \frac{2}{n+1} \sum_{i=0}^n f(t_k)T_i(t_k)$$
$$Q_n^{QC}(f) = \sum_{k=0}^n A_k f(t_k), A_k = \frac{\pi}{n+1}$$

7.4 Gauss-Lobatto

$$x_k = u_k = \cos\left(\frac{k}{n}\pi\right)$$
$$\int_{-1}^1 p(x)f(x)dx \approx \int_{-1}^1 p(x)J_n(x)dx$$
$$J_n(x) = \sum_{j=0}^n \beta_j T_j(x), \beta_j = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^n (u_k)T_j(u_k)$$
$$Q_n^L(f) = \sum_{k=0}^n A_k f(u_k), A_k = \frac{\pi}{n}.$$

8 Algebra numeryczna

8.1 Metody iteracyjne

$x^{(k+1)} = B_\tau x^{(k)} + c \quad (k \geq 0)$   
**Tw.** Metoda iter. jest zbieżna dla dowolnego  $x^{(0)}$ , jeśli  $\rho(B) < 1$ ,  
gdzie  $\rho(B) := \max_{1 \leq i \leq n} (\lambda_i)$  to promień spektralny macierzy B.  
 $B_\tau = I - \tau A, \quad c = \tau b \quad$  (Metoda Richardsona)  
**Tw.** Załóżmy, że wszystkie  $\lambda_i$  spełniają:  $0 < \alpha \leq \lambda_i \leq \beta$ .  
Wtedy metoda Richardsona jest zbieżna dla  $0 < \tau < \frac{2}{\beta}$ .  
 $B_J = -D^{-1}(L + U) \quad$  (Metoda Jacobiego)  
**Tw.** Jeśli A jest macierzą ze ściśle dominującą przekątną, tj.  
 $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$ , to wtedy  $\|B_J\|_\infty < 1$  i  $\|B_S\|_\infty < 1$ .  
 $B_S = -(D + L)^{-1}U \quad$  (Metoda Gaussa-Seidela)  
**Tw.** Jeśli A jest symetryczna i dodatnio określona, to  $\|B_S\|_\infty < 1$ .  
 $B_\omega = (I - \omega M)^{-1}(\omega N + (1 - \omega)I), \quad M = -D^{-1}L, N = -D^{-1}U$

9 Teoretycznie przydatne wzory

Nierówność Cauchy'ego-Schwarza  $\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right)$

Inaczej:  $\langle v, w \rangle \leq \|v\|_2 \cdot \|w\|_2$   
Bairstowa:  $p(z) = a_n z^n + \dots + a_0$  związek:  $b_k = a_k + u b_{k+1} + v b_{k+2}$   
Niech ciąg  $a_k$  będzie zbieżny do g. Jeśli istnieją takie liczby rzeczywiste  $p$  i  $C$  ( $C > 0$ ), że  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1} - g|}{|a_n - g|^p} = C$ , to  $p$  jest wykładnikiem zbieżności ciągu, a  $C$  - stałą asymptotyczną błędu. Dla  $p = 1$  oraz  $0 < C < 1$  zbieżność jest liniowa, dla  $p = 2$  - kwadratowa, dla  $p = 3$  - sześcienna. gdy  $p = 1$  i  $C = 1$  - zbieżność podliniowa, jeśli  $p = 1, C = 0$  - nadliniowa.  
 $\sin x \pm \sin y = 2 \sin \frac{x \pm y}{2} \cdot \cos \frac{x \mp y}{2}$   
 $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$   
 $\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$   
 $\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$   
 $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$