

5 Aproksymacja

5.1 Normy, iloczyn skalarny, błąd

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|, \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b p(x) f^2(x) \, dx}$$
$$\langle f, g \rangle := \int_a^b p(x) f(x) g(x) \, dx, \quad \sqrt{\langle f, f \rangle} = \|f\|_2$$
$$E_n(f) := \inf_{W \in \Pi_n} \|f - W_n\|_\infty^T$$

5.2 Wielomian optymalny

$$w_n^* = \sum_{k=0}^n \frac{\langle f, P_k \rangle}{\langle P_k, P_k \rangle} P_k, \quad \|f - w_n^*\|_2 = \sqrt{\|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^n \frac{\langle f, P_k \rangle^2}{\langle P_k, P_k \rangle}}$$

6 Kwadratury interpolacyjne

$$I_p(f) = \int_a^b p(x) f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k),$$

Wiel. węzłowy: $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$

6.1 Kwadratury Newtona-Cotesa

$$h = (b - a)/n, \quad x_k = a + kh$$

Wzór trapezów: $n = 1, A_0 = A_1 = h/2, R_1(f) = -\frac{h^3}{12} f''(\xi)$

Wzór Simpsona: $n = 2, A_0 = A_2 = h/3, A_1 = 4h/3, R_2(f) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)$

Zł. wzór trapezów: $T_n = h \sum_{k=0}^n f(x_k), R_n^T(f) = -\frac{h^3 n}{12} f''(\xi)$

Zł. wzór Simpsona: $n = 2m, S_n(f) = (4T_n - T_m)/3$

$$R_n^S(f) = -(b-a) \frac{h^4}{180} f^{(4)}(\xi)$$

Metoda Romberga: $h_k = (b-a)/2^k$

$$x_i^{(k)} = a + i h_k, (i = 0, 1, \dots, 2^k), \quad T_{0k} = T_{2^k}(f)$$

$$T_{mk} = \frac{4^m T_{m-1,k+1} - T_{m-1,k}}{4^m - 1}$$

Reszta Newtona-Cotesa:

$$I_p(f) - Q_n(f) = \begin{cases} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_a^b \omega(x) dx & \text{gdy } n = 1, 3, \dots \\ \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \int_a^b x \omega(x) dx & \text{gdy } n = 2, 4, \dots \end{cases}$$

gdzie $\xi \in (a, b)$.

6.2 Kwadratury Gaussa

x_k - zera wiel. orto. $P_{n+1}(x), c_k$ wsp. wiod. P_k

$\lambda_k(x) = \omega(x)/[\omega'(x_k)(x - x_k)]$.

$$0 < A_k = \int_a^b p(x) \lambda_k(x) dx = \frac{c_{n+1}}{c_n} \frac{\|P_n\|^2}{P'_{n+1}(x_k) P_n(x_k)}.$$

$$R_n(f) = \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(2n+2)! c_{n+1}^2} \int_a^b p(x) [P_{n+1}(x)]^2 dx$$

6.3 Gauss-Czebyszew

$$\int_{-1}^1 p(x) f(x) dx \approx \int_{-1}^1 p(x) I_n(x) dx$$
$$I_n(x) = \sum_{i=0}^n t_i \alpha_i T_i(x), \alpha_i = \frac{2}{n+1} \sum_{i=0}^n f(t_k) T_i(t_k)$$
$$Q_n^{QC}(f) = \sum_{k=0}^n A_k f(t_k), A_k = \frac{\pi}{n+1}$$

6.4 Gauss-Lobatto

$$x_k = u_k = \cos\left(\frac{k}{n} \pi\right)$$
$$\int_{-1}^1 p(x) f(x) dx \approx \int_{-1}^1 p(x) J_n(x) dx$$
$$J_n(x) = \sum_{j=0}^n \beta_j T_j(x), \beta_j = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^n (u_k) T_j(u_k)$$
$$Q_n^L(f) = \sum_{k=0}^n A_k f(u_k), A_k = \frac{\pi}{n}.$$

7 Algebra numeryczna

7.1 Metody iteracyjne

$x^{(k+1)} = B_\tau x^{(k)} + c \quad (k \geq 0)$

Tw. Metoda iter. jest zbieżna dla dowolnego $x^{(0)}$, jeśli $\rho(B) < 1$, gdzie $\rho(B) := \max_{1 \leq i \leq n} (\lambda_i)$ to promień spektralny macierzy B.

Metoda Richardsona: $B_\tau = I - \tau A, \quad c = \tau b$

Tw. Załóżmy, że wszystkie λ_i spełniają: $0 < \alpha \leq \lambda_i \leq \beta$.

Wtedy metoda Richardsona jest zbieżna dla $0 < \tau < \frac{2}{\beta}$.

Metoda Jacobiego: $B_J = -D^{-1}(L + U)$

Tw. Jeśli A jest macierzą ze ściśle dominującą przekątną, tj.

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \text{ to wtedy } \|B_J\|_\infty < 1 \text{ i } \|B_S\|_\infty < 1.$$

Metoda Gaussa-Seidela: $B_S = -(D + L)^{-1} U$

Tw. Jeśli A jest symetryczna i dodatnio określona, to $\|B_S\|_\infty < 1$.

$B_\omega = (I - \omega M)^{-1} (\omega N + (1 - \omega)I), \quad M = -D^{-1}L, N = -D^{-1}U$

8 Równania nieliniowe

Metoda Newtona: $X_{n+1} = X_n - \frac{f(X_n)}{f'(X_n)}$

Metoda siecznych: $X_{n+1} = X_n - \frac{X_n - X_{n-1}}{f(X_n) - f(X_{n-1})}$

Reguła fałsi - metoda siecznych z zachowaniem warunku $f(X_n)f(X_{n-1}) < 0$

Metoda Newtona dla r-krotnego pierwiastka: $X_{n+1} = X_n - r \frac{f(X_n)}{f'(X_n)}$

Algortym adaptacyjny: $X_{n+1} = X_n - r_n \frac{f(X_n)}{f'(X_n)}, r_n = \frac{X_{n-1} - X_{n-2}}{2X_{n-1} - X_n - X_{n-2}}$

Metoda Newtona dla wielu zmiennych: $J * h = -F, X_{n+1} = X_n + h_n$

Metoda Laguerrea(zbieżna sześciennie do pojedynczych pierwiastków):

$$Z_{k+1} = Z_k - \frac{n\omega(Z_k)}{\omega'(Z_k) + \sqrt[2]{H(Z_k)}},$$
$$H(x) = (n-1)[(n-1)\omega'^2(x) - n\omega(x)\omega''(x)]$$

Metoda Steffensena: $C_{n+1} = C_n - \frac{f^2(C_n)}{f(C_n + f(C_n)) - f(C_n)}$

9 Teoretycznie przydatne wzory

Nierówność Cauchy’ego-Schwarza: $\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right)$

Inaczej: $\langle v, w \rangle \leq \|v\|_2 \cdot \|w\|_2$

Bairstowa: $p(z) = a_n z^n + \dots + a_0$ **Związek:** $b_k = a_k + u b_{k+1} + v b_{k+2}$

Niech ciąg a_k będzie zbieżny do g. Jeśli istnieją takie liczby rzeczywiste p i C ($C > 0$), że $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1} - g|}{|a_n - g|^p} = C$, to p jest **wykładnikiem zbieżności ciągu**, a C - **stałą asymptotyczną błędu**. Dla $p = 1$ oraz $0 < C < 1$ zbieżność jest liniowa, dla $p = 2$ - kwadratowa, dla $p = 3$ - sześcienna. gdy $p = 1$ i $C = 1$ - zbieżność podliniowa, jeśli $p = 1, C = 0$ - nadliniowa.

$$\sin x \pm \sin y = 2 \sin \frac{x \pm y}{2} \cdot \cos \frac{x \mp y}{2}$$
$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \cdot \cos \frac{x - y}{2}$$
$$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$$
$$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$$
$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x + y}{2} \cdot \sin \frac{x - y}{2}$$

Wzór Taylora : $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + R_n(x, a), \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{R_n(x, a)}{(x-a)^n} = 0$ Wzór

Taylora dla dwóch zmiennych: $f(a+h) = f(a) + h_1 \frac{df}{dx_1}(x_1, x_2) + h_2 \frac{df}{dx_2}(x_1, x_2) \dots$