

1 Analiza błędów

1.1 Reprezentacja liczb

$x = smB^c$, s - znak, $1 \leq m < B$ - mantysa, c - cecha
Def. t - długość mantysy, $u = 2^{-t-1}$ - precyzja arytmetyki
Błąd zaokrąglenia w górę: $|rd(x) - x| \leq 2^{-t-1}2^c$,
 $\frac{|rd(x) - x|}{|x|} \leq \frac{u}{1+u} < u$
Zbiór reprezentacji arytmetyki: $X_{fl} = rd(X) = \{rd(x) : x \in X\}$ Tw. Jeśli $|\alpha_i| \leq u, \rho_i = \pm 1, nu < 1$, to $\prod_{i=1}^n (1 + \alpha_i)^{\rho_i} = 1 + \theta_n$, gdzie $|\theta_n| \leq \frac{nu}{1 - nu}$.
Tw. Jeśli $|\alpha_i| \leq u, nu < 0.01$, to $\prod_{i=1}^n (1 + \alpha_i) = 1 + \theta_n$, gdzie $|\theta_n| \leq 1.01nu$.

Def. Zadanie jest **źle uwarunkowane**, jeśli niewielkie względne zmiany danych powodują duże względne zmiany wyniku. Wielkości charakteryzujące wpływ zaburzeń danych na zaburzenie wyniku to **wskaźniki uwarunkowania**:
 $|\frac{f(x+h) - f(x)}{f(x)}| \approx |\frac{xf'(x)}{f(x)}| \cdot \frac{h}{x}$
Def. Niech \tilde{y} - wynik algorytmu obliczającego $f(x)$. Jeśli dla małych $\Delta x, \Delta y$ mamy $\tilde{y} + \Delta y = f(x + \Delta x)$, tzn. wynik jest lekko zaburzony dla lekko zaburzonych danych, to algorytm jest **numerycznie poprawny**.
Jeśli $\tilde{y} = f(x + \Delta x)$ (wynik dokładny dla lekko zaburzonych danych), to algorytm jest **numerycznie bardzo poprawny**.

2 Interpolacja

2.1 Postacie wielomianów interpolacyjnych

Lagrange'a: $L_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k \lambda_k$, gdzie $\lambda_k = \frac{\prod_{j=0, j \neq k}^n (x - x_j)}{\prod_{j=0, j \neq k}^n (x_k - x_j)}$
Barycentryczna: $\sigma_k = \prod_{j=0, j \neq k}^n \frac{1}{x_k - x_j}$
 $L_n(x) = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=0}^n \frac{\sigma_k}{x - x_k} y_k \Big/ \sum_{k=0}^n \frac{\sigma_k}{x - x_k} \quad \text{gdy } x \notin \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \\ wpp. \end{array} \right.$

2.2 Reszta wielomianu interpolacyjnego

$f(x) - L_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x) p_{n+1}(x)$
 $\max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x) - L_n(x)| = \frac{1}{(n+1)!} \max_{-1 \leq x \leq 1} |f^{(n+1)}(x)| \max_{-1 \leq x \leq 1} |p_{n+1}(x)|$

2.3 Spline

naturalna: $s''(a) = 0 \wedge s''(b) = 0$
zupelna: $s'(a) = f'(a) \wedge s'(b) = f'(b)$
okresowa: $s'(a) = s'(b) \wedge s''(a) = s''(b)$
Fakt: $\int_a^b (s''(x))^2 dx = \sum_{k=1}^{n-1} (f[x_k, x_{k+1}] - f[x_{k-1}, x_k]) s''(x_k)$
 $\lambda_k M_k + 2M_k + (1 - \lambda_k)M_{k-1} = 6 * f[x_{k-1}, x_k, x_{k+1}]$
($k = 1, ..., n - 2$) oraz $\lambda_k = h_k / (h_k + h_{k+1})$ oraz $h_k = x_k - x_{k-1}$

3 Wielomiany Bernsteina

Def: $B_i^n(u) = \binom{n}{i} u^i (1 - u)^{n-i}$ Własności:
1) $\sum_{i=0}^n B_i^n(u) = 1$
2) $B_i^n(u) > 0$
3) $B_i^n(u) = (1 - u) * B_i^{n-1}(u) + u B_{i-1}^{n-1}(u)$
4) $B_i^n(u) = \frac{n+1-i}{n+1} B_i^{n+1}(u) + \frac{i+1}{n+1} B_{i+1}^{n+1}(u)$
5) $(B_i^n(u))' = n (B_{i-1}^{n-1} - B_i^{n-1})$

4 Wielomiany Ortogonalne

4.1 Czebyszew I rodzaju

$T_0(x) = 1, T_1(x) = x$
 $T_n(x) = 2x T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$
 $T_k(x) = \cos(k \arccos x), x \in [-1, 1]$
zera $T_{n+1} (k = 0, 1, \dots, n)$: $t_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right)$
ekstrema $T_n : u_k = \cos\left(\frac{k}{n}\pi\right)$
waga: $p(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$
 $\int_{-1}^1 p(x) T_k(x) T_l(x) dx = 0 \quad (k \neq l)$
 $\int_{-1}^1 p(x) (T_k(x))^2 dx = \begin{cases} \pi/2 & \text{gd } k = 0 \\ \pi & \text{gd } k \geq 1 \end{cases}$

5 Normy

5.1 Wektorowe

$\|\mathbf{x}\|_p = \left(|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_n|^p \right)^{1/p}, \|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} \{ |x_i| \}$ Norma musi spełniać 3 warunki:
 $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0; \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|; \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$

5.2 Macierzowe

$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_i |a_{ij}|$ (kolumna) $\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_j |a_{ij}|$, (wiersz)
 $\|\mathbf{A}\|_p = \max_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\|\mathbf{Ax}\|_p}{\|\mathbf{x}\|_p}$. Norma Euklidesa (Frobeniusa) = $\|\mathbf{A}\|_E = \sqrt{\sum_i \sum_j |a_{i,j}|^2}$

6 Aproksymacja

6.1 Normy, iloczyn skalarny, błąd

$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|, \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b p(x) f^2(x) dx}$
 $\langle f, g \rangle := \int_a^b p(x) f(x) g(x) dx, \sqrt{\langle f, f \rangle} = \|f\|_2$
 $E_n(f) := \inf_{W \in \Pi_n} \|f - W_n\|_\infty^T$

6.2 Wielomian optymalny

$w_n^* = \sum_{k=0}^n \frac{\langle f, P_k \rangle}{\langle P_k, P_k \rangle} P_k, \|f - w_n^*\|_2 = \sqrt{\|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^n \frac{\langle f, P_k \rangle^2}{\langle P_k, P_k \rangle}}$

6.3 Wielomiany ortogonalne

$P_0(x) = 1, P_1(x) = x - c_1, P_k(x) = (x - c_k) P_{k-1}(x) - d_k P_{k-2}(x)$
 $c_k = \frac{\langle x P_{k-1}, P_{k-1} \rangle}{\langle P_{k-1}, P_{k-1} \rangle}, d_k = \frac{\langle P_{k-1}, P_{k-1} \rangle}{\langle P_{k-2}, P_{k-2} \rangle},$

7 Kwadratury interpolacyjne

$I_p(f) = \int_a^b p(x) f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$, wiel. węzłowy $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$

7.1 Kwadratury Newtona-Cotesa

$h = (b - a)/n, \quad x_k = a + kh$
Wzór trapezów, $n = 1, A_0 = A_1 = h/2, R_1(f) = -\frac{h^3}{12}f''(\xi)$
Wzór Simpsona, $n = 2, A_0 = A_2 = h/3, A_1 = 4h/3, R_2(f) = -\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi)$

Zł. wzór trapezów: $T_n = h \sum_{k=0}^n f(x_k), R_n^T(f) = -\frac{h^3n}{12}f''(\xi)$

Zł. wzór Simpsona, $n = 2m, S_n(f) = (4T_n - T_m)/3$

$R_n^S(f) = -(b - a) \frac{h^4}{180} f^{(4)}(\xi)$

Metoda Romberga: $h_k = (b - a)/2^k$
 $x_i^{(k)} = a + ih_k, (i = 0, 1, \dots, 2^k), \quad T_{0k} = T_{2^k}(f)$
 $T_{mk} = \frac{4^m T_{m-1,k+1} - T_{mk-1,k}}{4^m - 1}$

Reszta Newtona-Cotesa:

$$I_p(f) - Q_n(f) = \begin{cases} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_a^b \omega(x) dx & \text{gdy } n = 1, 3, \dots \\ \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \int_a^b x\omega(x) dx & \text{gdy } n = 2, 4, \dots \end{cases} \quad \text{gdzie } \xi \in (a, b).$$

7.2 Kwadratury Gaussa

x_k - zera wiel. orto. $P_{n+1}(x), c_k$ wsp. wiod. P_k
 $\lambda_k(x) = \omega(x)/[\omega'(x_k)(x - x_k)]$.
 $0 < A_k = \int_a^b p(x)\lambda_k(x)dx = \frac{c_{n+1}}{c_n} \frac{||P_n||^2}{P'_{n+1}(x_k)P_n(x_k)}.$
 $R_n(f) = \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(2n+2)!c_{n+1}^2} \int_a^b p(x)[P_{n+1}(x)]^2 dx$

7.3 Gauss-Czebyszew

$$\int_{-1}^1 p(x)f(x)dx \approx \int_{-1}^1 p(x)I_n(x)dx$$
$$I_n(x) = \sum_{i=0}^n \iota \alpha_i T_i(x), \alpha_i = \frac{2}{n+1} \sum_{i=0}^n f(t_k)T_i(t_k)$$
$$Q_n^{QC}(f) = \sum_{k=0}^n A_k f(t_k), A_k = \frac{\pi}{n+1}$$

7.4 Gauss-Lobatto

$$x_k = u_k = \cos\left(\frac{k}{n}\pi\right)$$
$$\int_{-1}^1 p(x)f(x)dx \approx \int_{-1}^1 p(x)J_n(x)dx$$
$$J_n(x) = \sum_{j=0}^n \beta_j T_j(x), \beta_j = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^n (u_k)T_j(u_k)$$
$$Q_n^L(f) = \sum_{k=0}^n A_k f(u_k), A_k = \frac{\pi}{n}.$$

8 Algebra numeryczna

8.1 Metody iteracyjne

$x^{(k+1)} = B_\tau x^{(k)} + c \quad (k \geq 0)$
Tw. Metoda iter. jest zbieżna dla dowolnego $x^{(0)}$, jeśli $\rho(B) < 1$,
gdzie $\rho(B) := \max_{1 \leq i \leq n} (\lambda_i)$ to promień spektralny macierzy B.
 $B_\tau = I - \tau A, \quad c = \tau b \quad$ (Metoda Richardsona)
Tw. Załóżmy, że wszystkie λ_i spełniają: $0 < \alpha \leq \lambda_i \leq \beta$.
Wtedy metoda Richardsona jest zbieżna dla $0 < \tau < \frac{2}{\beta}$.
 $B_J = -D^{-1}(L + U) \quad$ (Metoda Jacobiego)
Tw. Jeśli A jest macierzą ze ściśle dominującą przekątną, tj.
 $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$, to wtedy $\|B_J\|_\infty < 1$ i $\|B_S\|_\infty < 1$.
 $B_S = -(D + L)^{-1}U \quad$ (Metoda Gaussa-Seidela)
Tw. Jeśli A jest symetryczna i dodatnio określona, to $\|B_S\|_\infty < 1$.
 $B_\omega = (I - \omega M)^{-1}(\omega N + (1 - \omega)I), \quad M = -D^{-1}L, N = -D^{-1}U$

9 Teoretycznie przydatne wzory

Nierówność Cauchy'ego-Schwarza $\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right)$

Inaczej: $\langle v, w \rangle \leq \|v\|_2 \cdot \|w\|_2$
Bairstowa: $p(z) = a_n z^n + \dots + a_0$ związek: $b_k = a_k + ub_{k+1} + vb_{k+2}$
Niech ciąg a_k będzie zbieżny do g. Jeśli istnieją takie liczby rzeczywiste p i C ($C > 0$), że $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1} - g|}{|a_n - g|^p} = C$, to p jest wykładnikiem zbieżności ciągu, a C - stałą asymptotyczną błędu. Dla $p = 1$ oraz $0 < C < 1$ zbieżność jest liniowa, dla $p = 2$ - kwadratowa, dla $p = 3$ - sześcienna. gdy $p = 1$ i $C = 1$ - zbieżność podliniowa, jeśli $p = 1, C = 0$ - nadliniowa.
 $\sin x \pm \sin y = 2 \sin \frac{x \pm y}{2} \cdot \cos \frac{x \mp y}{2}$
 $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \cdot \cos \frac{x - y}{2}$
 $\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$
 $\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$
 $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x + y}{2} \cdot \sin \frac{x - y}{2}$