令和 7 年度 実験レポート

~2 軸ロボットの運動制御実験**~** Quanser 題目 Consulting 社製 2軸ロボット

学		科	電気電子システム工学コース
学籍	鲁番	号	a0527
氏		名	野口 史遠
提	出	日	令和 7 年 5 月 12 日



舞鶴工業高等専門学校

目 次

第 1	章	概要		1
第 2	章	順運動学と逆	動学	2
	2.1	運動方程式		2
	2.2	逆運動学		2
	2.3	順運動学		7
参考	文献		······ 1	1

第1章 概要

図 1.1, 1.2 に示す 4 リンク 2 軸ロボット実験装置は、ギアを介して軸 P_1 , P_5 に取り付けられた 2 つのモータにより手先の位置 P_3 を目標位置に追従させることを目的とした実験装置である.このことを実現するためには、手先位置からモータの回転角度を求める逆動力学とモータの回転角度 から手先位置を求める順動力学を理解する必要がある.

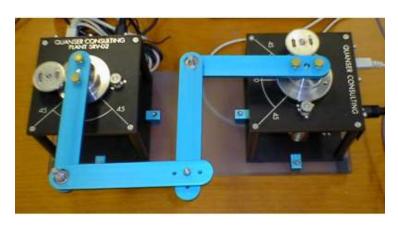


図 1.1: 4リンク 2軸ロボット実験装置(型番:55023)

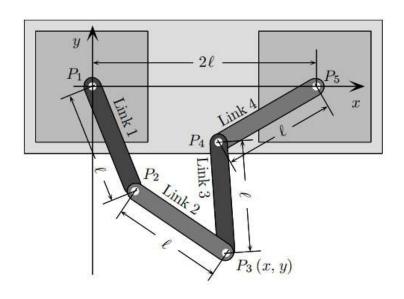


図 1.2: 4つリンクの関係

第2章 順運動学と逆運動学

2.1 運動方程式

リンク 1 を手で基準位置から回転させてリンク 1 の基準位置からの回転角 $\theta_x(t)$ がさほど大きくなければ、リンク 4 は静止したままである。したがって、 P_1 , P_5 の角度 $\theta_x(t)$, $\theta_y(t)$ がその基準角度の近傍で動作するとすると、リンク 1 とリンク 4 との干渉は無視できる(実際、リンク 1 あるいはリンク 4 を手で微小回転させてもリンク 4 あるいはリンク 1 は静止したままである)。このとき、リンク 1、リンク 4 の運動方程式は

$$J_x \ddot{\theta}_x(t) = -c_x \dot{\theta}_x(t) + \tau_x(t)$$

$$J_y \ddot{\theta}_y(t) = -c_y \dot{\theta}_y(t) + \tau_y(t)$$
(2.1)

となる。ただし、 $\tau_x(t)$, $\tau_y(t)$ は軸 P_1 , P_5 に加わるトルク、 J_x , J_y はリンク 1、リンク 4 の慣性モーメントであり、 c_x , c_y は軸 P_1 , P_5 の粘性摩擦係数である。また、モータドライバに加える電圧 $v_x(t)$, $v_y(t)$ とトルク $\tau_x(t)$, $\tau_y(t)$ が比例関係

$$\begin{cases}
\tau_x(t) = k_{fx}v_x(t) \\
\tau_y(t) = k_{fy}v_y(t)
\end{cases}$$
(2.2)

にあると仮定すると、

$$J_x \ddot{\theta}_x(t) = -c_x \dot{\theta}_x(t) + k_{fx} v_x(t)$$

$$J_y \ddot{\theta}_y(t) = -c_y \dot{\theta}_y(t) + k_{fy} v_y(t)$$
(2.3)

であるから、 $v_x(t),\,v_y(t)$ から $\theta_x(t),\,\theta_y(t)$ への伝達関数 $G_x(s),\,G_y(s)$ は

$$\begin{cases}
G_x(s) = \frac{b_x}{s(s+a_x)}, & a_x = \frac{c_x}{J_x}, & b_x = \frac{k_{fx}}{J_x} \\
G_y(s) = \frac{b_y}{s(s+a_y)}, & a_y = \frac{c_y}{J_y}, & b_y = \frac{k_{fy}}{J_y}
\end{cases}$$
(2.4)

となる。

2.2 逆運動学

ここでは、手先にあたる軸 P_3 の座標 (x,y) からモータの回転軸 P_1 , P_5 の角度 θ_x , θ_y を求める. このように、手先の座標から回転角を求めることを逆運動学という.

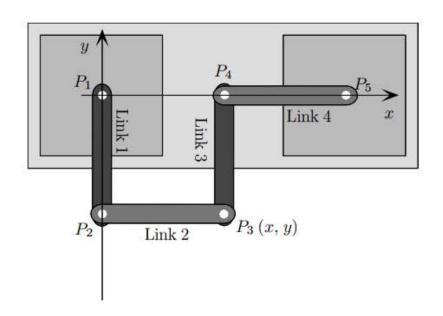


図 2.1:初期位置(基準位置)

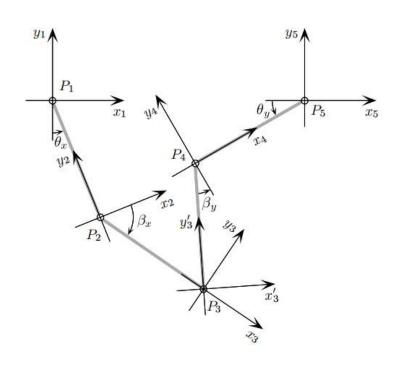


図 2.2: 逆運動学のための各座標系

図 2.2 に示すように,リンク 1,リンク 2 に関しては x_1y_1 座標系と x_2y_2 座標系と x_3y_3 座標系は

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_x & -\sin \theta_x \\ \sin \theta_x & \cos \theta_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \ell \sin \theta_x \\ -\ell \cos \theta_x \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\beta_x) & -\sin(-\beta_x) \\ \sin(-\beta_x) & \cos(-\beta_x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \ell \cos \beta_x \\ -\ell \sin \beta_x \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \beta_x & \sin \beta_x \\ -\sin \beta_x & \cos \beta_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \ell \cos \beta_x \\ -\ell \sin \beta_x \end{bmatrix}$$

$$(2.5)$$

という関係にある. (2.5), (2.6) 式を書き換えると,

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \end{bmatrix}^T = T_{12} \begin{bmatrix} x_2 & y_2 & 1 \end{bmatrix}^T \tag{2.7}$$

$$\begin{bmatrix} x_2 & y_2 & 1 \end{bmatrix}^T = T_{23} \begin{bmatrix} x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}^T \tag{2.8}$$

$$T_{12} = \begin{bmatrix} \cos \theta_x & -\sin \theta_x & \ell \sin \theta_x \\ \sin \theta_x & \cos \theta_x & -\ell \cos \theta_x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_{23} = \begin{bmatrix} \cos \beta_x & \sin \beta_x & -\ell \sin \beta_x \\ -\sin \beta_x & \cos \beta_x & \ell \cos \beta_x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

となるから、 x_1y_1 座標系と x_3y_3 座標系との間に以下の関係式が成立する.

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \end{bmatrix}^T = T_{13} \begin{bmatrix} x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}^T, \quad T_{13} = T_{12} T_{23}$$
 (2.9)

(2.9) 式を利用して, x_3y_3 座標系の原点 P_3 を x_1y_1 座標系で表すと,

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix}^{T} = T_{13} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{T}$$

$$= \begin{bmatrix} \ell \cos \theta_{x} \cos \beta_{x} + \ell \sin \theta_{x} \sin \beta_{x} + \ell \sin \theta_{x}, & -\ell \cos \theta_{x} \sin \beta_{x} + \ell \sin \theta_{x} \cos \beta_{x} - \ell \cos \theta_{x}, & 1 \end{bmatrix}^{T}$$

$$= \begin{bmatrix} \ell \cos(\theta_{x} - \beta_{x}) + \ell \sin \theta_{x}, & \ell \sin(\theta_{x} - \beta_{x}) - \ell \cos \theta_{x}, & 1 \end{bmatrix}^{T}$$
(2.10)

となる. (2.10) 式より

$$\begin{cases} x = \ell \cos(\theta_x - \beta_x) + \ell \sin \theta_x \\ y = \ell \sin(\theta_x - \beta_x) - \ell \cos \theta_x \end{cases}$$
 (2.11)

$$\Rightarrow \begin{cases} x - \ell \sin \theta_x = \ell \cos(\theta_x - \beta_x) \\ y + \ell \cos \theta_x = \ell \sin(\theta_x - \beta_x) \end{cases}$$
$$\Rightarrow (x - \ell \sin \theta_x)^2 + (y + \ell \cos \theta_x)^2 = \ell^2$$
 (2.12)

であるから, P_3 は中心 $(\ell \sin \theta_x, -\ell \cos \theta_x)$,半径 ℓ の円上を移動することがわかる.(2.12) 式を書き換えると

$$x^2 + y^2 - 2\ell(\sin\theta_x x - \cos\theta_x y) = 0$$

$$\implies x^2 + y^2 - 2\ell\sqrt{x^2 + y^2}\sin(\theta_x + \phi_x) = 0 \quad , \quad \begin{cases} \cos\phi_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \sin\phi_x = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}$$

$$\implies \sin(\theta_x + \phi_x) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2\ell} \quad , \quad \theta_x = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2\ell}\right) - \phi_x \tag{2.13}$$

となる. したがって, P_3 の座標 (x,y) からモータの回転軸 P_1 の角度 θ_x が次式により求まる.

$$\theta_x = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2\ell}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \tag{2.14}$$

同様に、リンク 3、リンク 4 に関して考えると、 x_1y_1 座標系と x_5y_5 座標系、 x_5y_5 座標系と x_4y_4 座標系、 x_4y_4 座標系と $x_3'y_3'$ 座標系は

$$\begin{bmatrix} x_5 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_y & -\sin \theta_y \\ \sin \theta_y & \cos \theta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\ell \cos \theta_y \\ -\ell \sin \theta_y \end{bmatrix}$$
(2.16)

$$\begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\beta_y) & -\sin(-\beta_y) \\ \sin(-\beta_y) & \cos(-\beta_y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3' \\ y_3' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\ell \sin \beta_y \\ -\ell \cos \beta_y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \beta_y & \sin \beta_y \\ -\sin \beta_y & \cos \beta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3' \\ y_3' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\ell \sin \beta_y \\ -\ell \cos \beta_y \end{bmatrix}$$
(2.17)

という関係にある. (2.15), (2.16), (2.17) 式を書き換えると,

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \end{bmatrix}^T = T_{15} \begin{bmatrix} x_5 & y_5 & 1 \end{bmatrix}^T \tag{2.18}$$

$$\begin{bmatrix} x_5 & y_5 & 1 \end{bmatrix}^T = T_{54} \begin{bmatrix} x_4 & y_4 & 1 \end{bmatrix}^T \tag{2.19}$$

$$\begin{bmatrix} x_4 & y_4 & 1 \end{bmatrix}^T = T'_{43} \begin{bmatrix} x'_3 & y'_3 & 1 \end{bmatrix}^T$$
 (2.20)

ここで各変換行列は

$$T_{15} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2\ell \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_{54} = \begin{bmatrix} \cos \theta_y & -\sin \theta_y & -\ell \cos \theta_y \\ \sin \theta_y & \cos \theta_y & -\ell \sin \theta_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T'_{43} = \begin{bmatrix} \cos \beta_y & \sin \beta_y & -\ell \sin \beta_y \\ -\sin \beta_y & \cos \beta_y & -\ell \cos \beta_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

となるから, x_1y_1 座標系と $x_3'y_3'$ 座標系との間に以下の関係式が成立する

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \end{bmatrix}^T = T'_{13} \begin{bmatrix} x'_3 & y'_3 & 1 \end{bmatrix}^T, \quad T'_{13} = T_{15}T_{54}T'_{43}$$
 (2.21)

(2.21) 式を利用して、 $x_3'y_3'$ 座標系の原点 P_3 を x_1y_1 座標系で表すと、

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix}^{T} = T'_{13} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\ell \cos \theta_{y} \sin \beta_{y} + \ell \sin \theta_{y} \cos \beta_{y} - \ell \cos \theta_{y} + 2\ell \\ -\ell \cos \theta_{y} \cos \beta_{y} + \ell \sin \theta_{y} \sin \beta_{y} - \ell \sin \theta_{y} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\ell \cos(\theta_{y} + \beta_{y}) - \ell \cos \theta_{y} + 2\ell \\ -\ell \sin(\theta_{y} + \beta_{y}) - \ell \sin \theta_{y} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(2.22)$$

となる. (2.22) 式より

$$\begin{cases} x' = x - 2\ell = -\ell \cos(\theta_y + \beta_y) - \ell \cos \theta_y \\ y = -\ell \sin(\theta_y + \beta_y) - \ell \sin \theta_y \end{cases}$$
 (2.23)

$$\Longrightarrow \begin{cases} x' + \ell \cos \theta_y = -\ell \cos(\theta_y + \beta_y) \\ y + \ell \sin \theta_y = -\ell \sin(\theta_y + \beta_y) \end{cases} \Longrightarrow (x' + \ell \cos \theta_y)^2 + (y + \ell \sin \theta_y)^2 = \ell^2$$
 (2.24)

であるから, P_3 は中心 $(2\ell-\ell\cos\theta_y,\;-\ell\sin\theta_y)$,半径 ℓ の円上を移動することがわかる. (2.24)式を書き換えると

$$x'^{2} + y^{2} + 2\ell(x'\cos\theta_{y} + y\sin\theta_{y}) = 0$$

$$\Rightarrow x'^{2} + y^{2} - 2\ell\sqrt{x'^{2} + y^{2}}\sin(\theta_{y} + \phi_{y}) = 0,$$

$$\begin{cases}
\cos\phi_{y} = -\frac{y}{\sqrt{x'^{2} + y^{2}}}\\
\sin\phi_{y} = -\frac{x'}{\sqrt{x'^{2} + y^{2}}}\\
\Rightarrow \sin(\theta_{y} + \phi_{y}) = \frac{\sqrt{x'^{2} + y^{2}}}{2\ell}\\
\Rightarrow \theta_{y} = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{x'^{2} + y^{2}}}{2\ell}\right) - \phi_{y}
\end{cases} (2.25)$$

したがって、 P_3 の座標 (x,y) からモータの回転軸 P_5 の角度 θ_y が次式により求まる.

$$\theta_y = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{x'^2 + y^2}}{2\ell}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{x'}{y}\right)$$
$$= \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{(x - 2\ell)^2 + y^2}}{2\ell}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{x - 2\ell}{y}\right)$$
(2.26)

2.3 順運動学

ここでは、モータの回転軸 P_1 , P_5 の角度 θ_x , θ_y から手先 P_3 の座標 (x,y) を求める。このように、回転軸から手先の座標を求めることを順運動学という。

軸 P_2 , P_4 の回転角 β_x , β_y が検出可能であれば (2.11) 式や (2.23) 式により手先 P_3 の座標 (x,y) を求めることができるが、本実験装置は軸 P_2 , P_4 にはセンサが取り付けられていない。そこで、 x_1y_1 座標系、 x_2y_2 座標系、 x_3y_3 座標系を考える代わりに、図 2.3 に示す x_1y_1 座標系、 x_2y_2 座標系、 x_3y_3 座標系を考える。

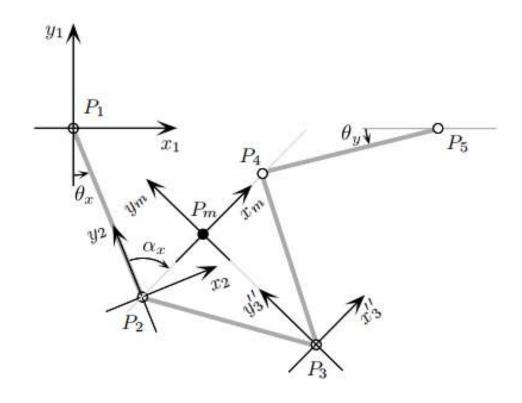


図 2.3:順運動学のための各座標系 1

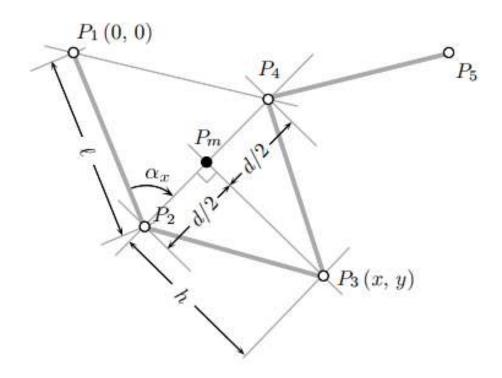


図 2.4:順運動学のための各座標系 2

図 2.3, 2.4 より x_2y_2 座標系と x_my_m 座標系, x_my_m 座標系と $x_3'y_3'$ 座標系は

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_x\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_x\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_x\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_x\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_m \\ y_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{d}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_x\right) \\ \frac{d}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_x\right) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sin\alpha_x & -\cos\alpha_x \\ \cos\alpha_x & \sin\alpha_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_m \\ y_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{d}{2}\sin\alpha_x \\ \frac{d}{2}\cos\alpha_x \end{bmatrix}$$
(2.27)

という関係にある. (2.27), (2.28) 式を書き換えると,

$$\begin{bmatrix} x_2 & y_2 & 1 \end{bmatrix}^T = T_{2m} \begin{bmatrix} x_m & y_m & 1 \end{bmatrix}^T$$
 (2.29)

$$\begin{bmatrix} x_m & y_m & 1 \end{bmatrix}^T = T''_{m3} \begin{bmatrix} x''_3 & y''_3 & 1 \end{bmatrix}^T$$
 (2.30)

$$T_{2m} = \begin{bmatrix} \sin \alpha_x & -\cos \alpha_x & \frac{d}{2} \sin \alpha_x \\ \cos \alpha_x & \sin \alpha_x & \frac{d}{2} \cos \alpha_x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T''_{m3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -h \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

となるから, x_1y_1 座標系と $x_3''y_3''$ 座標系との間に以下の関係式が成立する.

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \end{bmatrix}^T = T_{13}'' \begin{bmatrix} x_3'' & y_3'' & 1 \end{bmatrix}^T, \quad T_{13}'' = T_{12}T_{2m}T_{m3}''$$
(2.31)

(2.31) 式を利用して, $x_3''y_3''$ 座標系の原点 P_3 を x_1y_1 座標系で表すと,

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix}^T = T_{13}'' \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} h(\cos\theta_x \cos\alpha_x + \sin\theta_x \sin\alpha_x) - \frac{d}{2}(\sin\theta_x \cos\alpha_x - \cos\theta_x \sin\alpha_x) + \ell\sin\theta_x \\ h(\sin\theta_x \cos\alpha_x - \cos\theta_x \sin\alpha_x) + \frac{d}{2}(\cos\theta_x \cos\alpha_x + \sin\theta_x \sin\alpha_x) - \ell\cos\theta_x \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} h\cos(\theta_x - \alpha_x) - \frac{d}{2}\sin(\theta_x - \alpha_x) + \ell\sin\theta_x \\ h\sin(\theta_x - \alpha_x) + \frac{d}{2}\cos(\theta_x - \alpha_x) - \ell\cos\theta_x \end{bmatrix}$$

となる. したがって、d、h、 α_x が求まれば手先 P_3 の座標が

$$\begin{cases} x = h\cos(\theta_x - \alpha_x) - \frac{d}{2}\sin(\theta_x - \alpha_x) + \ell\sin\theta_x \\ y = h\sin(\theta_x - \alpha_x) + \frac{d}{2}\cos(\theta_x - \alpha_x) - \ell\cos\theta_x \end{cases}$$
 (2.33)

(2.32)

により求まる.

 x_1y_1 座標系における P_2 , P_4 の座標をそれぞれ (p_{2x},p_{2y}) , (p_{4x},p_{4y}) とすると,

$$\begin{cases}
p_{2x} = \ell \sin \theta_x \\
p_{2y} = -\ell \cos \theta_x
\end{cases}, \quad
\begin{cases}
p_{4x} = 2\ell - \ell \cos \theta_y \\
p_{4y} = -\ell \sin \theta_y
\end{cases}$$
(2.34)

であるから, dは

$$d = P_2 P_4 = \sqrt{(p_{2x} - p_{4x})^2 + (p_{2y} - p_{4y})^2}$$
(2.35)

と定まる.

また,h は三角形 $P_mP_2P_3$ における三平方の定理より

$$h = \sqrt{\ell^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} \tag{2.36}$$

と定まり、 α_x は三角形 $P_1P_2P_4$ における余弦定理より

$$(P_1 P_4)^2 = \ell^2 + d^2 - 2d\ell \cos \alpha_x$$

$$\Rightarrow p_{4x}^2 + p_{4y}^2 = \ell^2 + d^2 - 2d\ell \cos \alpha_x$$

$$\Rightarrow \alpha_x = \cos^{-1} \left(\frac{\ell^2 + d^2 - (p_{4x}^2 + p_{4y}^2)}{2d\ell} \right)$$
(2.37)

と定まる.

参考文献

- 1) 唐橋 需:農業用ロボットへの期待, 農業機械学会誌 57 巻 6 号 pp.145-150 (2021)
- 2) 有山 達也, 伊藤 和寿:農業用搬送台車の自立移動における課題と開発事例,システム/制御/ 情報 Vol.65,No.12,pp.489-494 (2021)
- 3) 佐賀大学プレスリリース: カメラ映像のみで経路を自律走行するロボット車両を開発, https://www.saga-u.ac.jp/koho/press/2021120623170, [Accessed: Dec. 25, 2024].
- 4) 伊藤, 阿部, 今西, 奥野, 辻, 三宅:比例航法を用いた自立移動ロボットの誘導, 学術講演会 前刷集 No.76-10 368-20105161, P13 (2010)
- 5) 出村公成, 萩原 良信, 升谷保博, タン ジェフリートゥ チュアン: ROS2 と Python で作って 学ぶ AI ロボット入門, 講談社 (2018)
- 6) インテル® RealSense™ デプスカメラ D435i / : https://www.intel.co.jp/content/www/jp/ja/products/sku/190004/intel-realsense-depth-camera-d435i/specifications.html, [Accessed: Dec. 25, 2024].
- 7) STM32 Nucleo-64: https://www.st.com/ja/evaluation-tools/nucleo-f446re.html, [Accessed: Dec. 25, 2024].
- 8) AMT102: https://www.sameskydevices.com/product/resource/amt10e-v.pdf, [Accessed: Dec. 25, 2024].
- 9) ROS 2 Design Documents: https://design.ros2.org/, [Accessed: Dec. 25, 2024].
- 10) ROS 2 Documentation: https://docs.ros.org/en/humble/index.html, [Accessed: Dec. 25, 2024].
- 11) ultralytics: https://docs.ultralytics.com/ja/yolov5/, [Accessed: Dec. 25, 2024].