

## (1) レーザ変位計によるはりのたわみ測定

### 1 実験目的

精密情報機器や機械要素等の設計において重要となるはりたわみについて、レーザ式変位センサを用いて、両端支持ばりのたわみを計測することによって理解する。

### 2 はりたわみの理論

両端支持ばりのたわみに関する模式図を図 1 に示す。

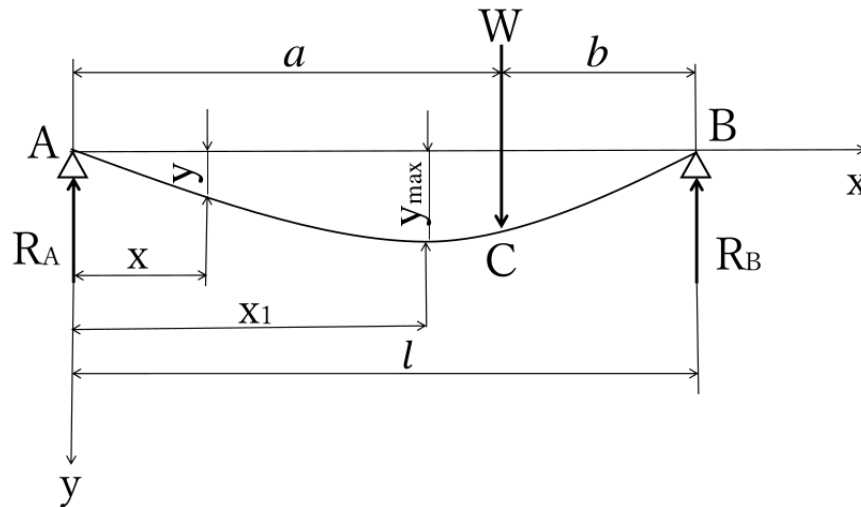


図 1: 両端支持ばりの模式図

スパン  $l$  の両端支持ばり AB が、左支点 A から  $a$ 、右支点 B から  $b$  の距離にある点 C に、集中荷重  $W$  を受ける場合の最大たわみ  $y_{max}$  は、

$$y_{max} = \frac{Wb(l^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}}{9\sqrt{3}EI l} \quad (1)$$

である。ただし、最大たわみを生ずる位置  $x_1$  は次のようになる。

$$x_1 = \sqrt{\frac{a(a + 2b)}{3}} = \sqrt{\frac{l^2 - b^2}{3}} \quad (2)$$

また、荷重点 C ( $x = a$ ) のたわみ  $y_c$  および中央のたわみ  $(y)_{x=\frac{\ell}{2}}$  は、それぞれ

$$y_c = \frac{Wa^2b^2}{3EI l} \quad (3)$$

$$(y)_{x=\frac{\ell}{2}} = \frac{Wb(3l^2 - 4b^2)}{48EI l} \quad (4)$$

である。なお集中荷重  $W$  がスパンの中央に位置する場合は、

$$a = b = \frac{\ell}{2} \quad (5)$$

であるから、

$$x_1 = \frac{\ell}{2} \quad (6)$$

となり, 最大たわみ  $y_{max}$  が求まる .

$$y_{max} = \frac{Wl^3}{48EI} \quad (7)$$

### 3 実験装置

1. はり構造の力学実験装置 ( 青色のアンクルで組まれた装置 )  
はり  
支点  
おもり ( 0.500kg:4 個, 0.200kg:3 個, 0.100kg:1 個, 合計 2.700kg )  
おもり支持金具 ( 0.224kg )
2. CMOS レーザアプリセンサ  
アンプユニット IL-1000  
センサヘッド IL-065  
電源ユニット KZ-U3
3. マイクロメータ ( 最小目盛:0.001mm, 測定範囲 0-25mm )
4. マイクロメータ ( 最小目盛:0.001mm, 測定範囲 25-50mm )

### 4 実験準備

1. CMOS レーザアプリセンサの電源ユニット KZ-U3 の電源コードをテーブルトップに接続して, 電源投入後 30 分以上放置する . センサヘッド IL-065[基準距離:65mm, 測定距離:55-105mm] からレーザ光 ( 赤色半導体レーザ, 可視光, 波長 665nm ) が照射される . なお, レーザ光は直接入らないように注意すること .
2. アンプユニット IL-1000 測定値表示部には, センサヘッドとはり間の距離が小数点以下 3 桁まで表示される ( 単位 mm ). 表示が安定しない場合は, センサヘッドのフィルタガラスが汚れている可能性があるため, 柔らかい布で拭きとる .

### 5 実験方法

1. はりの断面の幅  $b'$ , 高さ  $h$  を左右支点近傍と中央の 3 箇所について, マイクロメータを使って小数点以下 3 桁まで測定する .  
断面二次モーメント  $I$  は, 次式で求められる .

$$I = \frac{b'h^3}{12} \quad (8)$$

2. スパンの長さ  $\ell$  は,  $\ell = 800[\text{mm}]$  である .
3. まずは, 左支点 A から集中荷重  $W$  の作用点 C までの距離を  $a = 500[\text{mm}]$  とする .
4. 左支点 A から最大たわみ  $y_{max}$  を生ずる位置までの距離  $x_1[\text{mm}]$  を式 (2) から求める .
5. 左支点 A から  $x_1$  の位置にセンサヘッド支持台中心を移動させ, はりに対して下側からレーザ光を照射する . センサの動作確認 LED ではりとの距離を調整し, 測定面に対してセンサの投光面が平行になるように設定して固定する . 緑 LED が点灯しているときは, はりがセンサの測定範囲に位置しており, 測定が可能である .
6. 集中荷重  $W$  の作用点 C におもり支持金具を取りつける .
7. アンプユニット IL-1000 の ZERO SHIFT スイッチを押して, 表示を " 0.000 " にする .  
はりにおもり支持金具の重さ ( 0.224kg ) の荷重がかかったところが基準になることに, 注意すべきである .

8. はりに荷重を載せていくと, 荷重の増加とともにはりセンサーヘッド間の距離が減少する．荷重を  $0[\text{kg}]$  から順に  $0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.2, 2.4, 2.6, 2.7[\text{kg}]$  と増加させていき, それぞれの荷重に対応する最大たわみ  $y_{\max}$  を記録する．
9. 荷重を  $2.7[\text{kg}]$  から順に  $2.6, 2.4, 2.2, 2.0, 1.5, 1.0, 0.5, 0[\text{kg}]$  と減少させていき, それぞれの荷重に対応する最大たわみ  $y_{\max}$  を記録する．
10. つぎに,  $a = 600[\text{mm}], 700[\text{mm}]$  のそれぞれの場合について, 4 から 9 までを繰り返す．

## 6 実験結果の整理

- ・ はりのスパン :  $\ell = 800[\text{mm}]$
- ・ 鋼の縦弾性係数 (標準値):

$$E = 2.06 \times 10^5 [\text{MPa}] \quad (9)$$

1. はり断面の幅  $b'$  と高さ  $h$  を表 1 に記録する．
2.  $a = 500[\text{mm}]$  のとき, 最大たわみ  $y_{\max}$  を生ずる位置  $x_1$  は  $428.2[\text{mm}]$  である．荷重を増加させたときの最大たわみ  $(y_{\max})_i$  と, 減少させたときの最大たわみ  $(y_{\max})_d$  を, 表 2 に記録する．最大たわみの理論値  $y_{\max}$  は, 式 (1) から計算する．また, 誤差率  $\delta[\%]$  は,

$$\delta = \frac{\frac{(y_{\max})_i + (y_{\max})_d}{2} - y_{\max}}{y_{\max}} \times 100[\%] \quad (10)$$

から計算する．

3.  $a = 600[\text{mm}]$  のとき, 最大たわみ  $y_{\max}$  を生ずる位置  $x_1$  は  $447.2[\text{mm}]$  である．2 と同様に, 表 3 に最大たわみ  $y_{\max}$  の値を記録する．
4.  $a = 700[\text{mm}]$  のとき, 最大たわみ  $y_{\max}$  を生ずる位置  $x_1$  は  $458.3[\text{mm}]$  である．2 と同様に, 表 4 に最大たわみ  $y_{\max}$  の値を記録する．

ページ 1 の挿入

ページ 2 の挿入

## 7 考察および課題

1. 図 1 の左支点  $A$  から集中荷重  $W$  の作用点  $C$  までの距離  $a$  が  $500, 600, 700[mm]$  と増加するにつれて,  $x_1$  はどのように変化するか．図（横軸を  $a$ , 縦軸を  $x_1$  とする）を描き, 考察せよ．[図 2]

図 2 は, 横軸を  $a$ , 縦軸を  $x_1$  として  $a$  と  $x_1$  の関係を示している．図 2 から明らかのように, 左支点  $A$  から点  $C$  までの距離が増加すると, 最大たわみを生じる  $x_1$  も増加する．式 (2) の  $\ell^2 - b^2$  の  $b$  の値が小さくなると,  $x_1$  が大きくなるからである．また, 変化量が  $a$  が大きくなるに連れ小さくなっている．

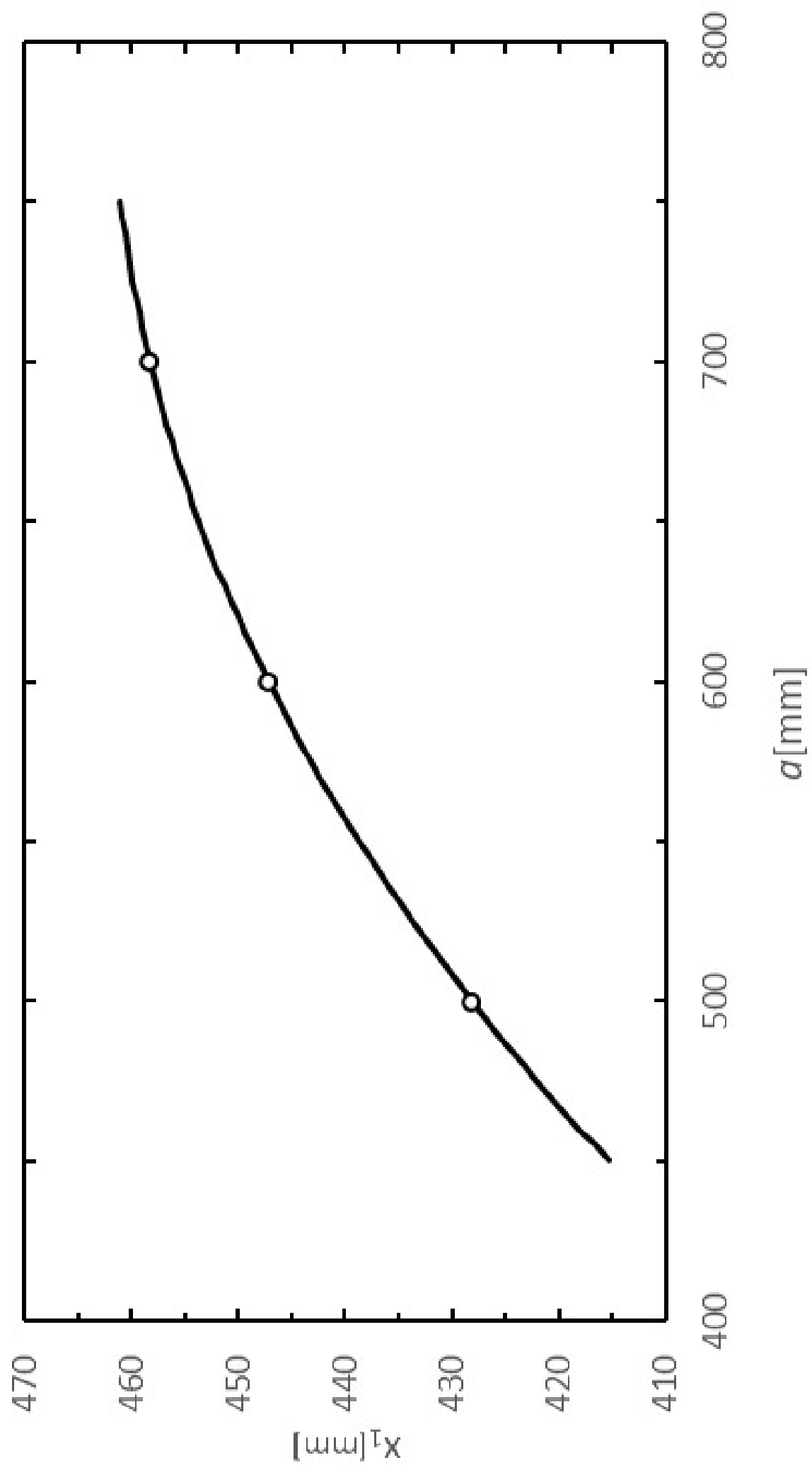


図 2:  $a$  と  $x_1$  の関係

2. 横軸に荷重  $W[N]$  を, 縦軸に最大たわみ  $y_{max}[mm]$  (測定値および理論値) をとり,  $a$  を変化させた図を描け [図3 ~ 5].  
 図3 ~ 5 を 1 つの図にまとめよ [図6].  
 横軸に  $W[N]$  を, 縦軸に誤差率  $\delta[%]$  をとって, 図を描け [図7].  
 実験結果 (図3 ~ 7) について, それぞれ考察せよ.

図3 から 5 に  $a = 500, 600, 700$  のときの, 荷重  $W[N]$  と, 最大たわみ  $y_{max}$  の関係をグラフを示す. 図6 に  $a = 500, 600, 700$  をまとめたものを示す. 図7 に軸に  $W[N]$  を, 縦軸に誤差率  $\delta[%]$  を取ったものを示す. 図3 から 5 より測定値が理論値を大きく外れていないことが確認できる. また荷重  $W[N]$  と最大たわみ  $y_{max}[mm]$  が比例関係にあることも直線であることから読み取れる. 図6 より  $a$  が大きくなればなるほど傾きが小さくなっているのがわかる. これは端によれば寄るほど最大たわみが小さくなることを示している. 誤差の原因として考えられるのは, おもりを置く位置などの過失誤差による影響が大きいと考える. 式(1)の  $b$  を  $l - a$  とすると  $a$  が大きくなれば分母が小さくなり  $y_{max}$  が小さくなることがわかる. 図7 より誤差率は  $a$  が大きいほど高くなっている. これは値が小さくなった影響だと考えられる. 実験結果からもわかるように誤差が発生している. なぜ誤差が発生したのだろうか. 考えられる要因として,  $x_1$  のズレが考えられる. では  $x_1$  の位置にセンサヘッド支持台中心を移動させたときのズレがどれほど結果に影響するか調べる. これは以下の式より求められる. 図1 より垂直方向の力のつり合いと B 点に関するモーメントのつり合いから,

$$R_A + R_B = W, R_A l - W(l - a) = 0 \quad (11)$$

となり, これから

$$R_A = \frac{l - a}{l} W, R_B = \frac{a}{l} W \quad (12)$$

を得る.  $x$  断面における曲げモーメントは, AC 側と CB 側とでは,

$$M_{AC} = R_A x = \frac{W(l - a)}{l} x, M_{CB} = R_A x - W(x - a) = \frac{W a}{l} (l - x) \quad (13)$$

となる. したがって, たわみの基本式より

$$\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_{AC} = -\frac{W(l - a)}{EI l} x, \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_{CB} = -\frac{W a}{EI l} (l - x) \quad (14)$$

となる. これを積分すれば

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{AC} = -\frac{W(l - a)}{2EI l} x^2 + c_1 \quad (15)$$

$$(y)_{AC} = -\frac{W(l - a)}{6EI l} x^3 + c_1 x + c_2 \quad (16)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{CB} = -\frac{W a}{EI l} \left(lx - \frac{1}{2}x^2\right) + c_3 \quad (17)$$

$$(y)_{CB} = -\frac{W a}{EI l} \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3\right) + c_3 x + c_4 \quad (18)$$

となる. しかるに  $x = 0$  で  $y = 0$  だから  $c_2 = 0$ , または  $x = l$  で  $y = 0$  だから

$$-\frac{W a l^2}{3EI} + c_3 l + c_4 = 0 \quad (19)$$



となる．いっぽうで  $x = a$  にオイては両方のたわみ角とたわみが等しいので

$$-\frac{W(l-a)}{2EI}a^2 + c_1 = -\frac{Wa}{2EI}(2la - a^2) + c_3 \quad (20)$$

$$-\frac{W(l-a)}{6EI}a^3 + c_1a = -\frac{Wa}{6EI}(3la^2 - a^3) + c_3a + c_4 \quad (21)$$

を得る．式 (21) - 式 (20)  $\times a$  とすると

$$\frac{W(l-a)}{3EI}a^3 = \frac{Wa}{6EI}(3la^3 - 2a^3) + c_4 \quad (22)$$

$$c_4 = \frac{Wa}{6EI} \quad (23)$$

となる．これを式 (19) に代入すれば

$$c_3 = \frac{Wla}{3EI} + \frac{Wa^3}{6EI} = \frac{Wa}{3EI}(2l^2 + a^2) \quad (24)$$

となる．これを式 (20) に代入すれば

$$c_1 = \frac{W(l-a)}{6EI}(2la - a^2) \quad (25)$$

が求まり，これらの積分定数を式 (16) に代入すると

$$(y)_{AC} = -\frac{W(l-a)}{6EI}(2lax - a^2x - x^3) \quad (26)$$

となり最大たわみの大きさを求めることができる．表 5 に  $a = 500$  のときの  $W = 1[\text{kg}]$  の  $x$  が理想のときと， $0.1\text{mm}, 0.5\text{mm}, 1\text{mm}$  ずれたときの最大たわみと誤差率を示している．

表 5 :  $x$  が変化したときの最大たわみと誤差率

$x_1$ [mm]	$y_{\max}$ [mm]	誤差率 [%]
428.2 [mm]	1.47500351	0
+0.1 [mm]	1.475003333	$1.200 \times 10^{-5}$
+0.5 [mm]	1.474699379	0.0206
+0.8 [mm]	1.474694485	0.0210
+1.0 [mm]	1.474690013	0.0212

以上のように誤差が非常に小さくなっている．これよりおもりを置いたときの誤差はそこまで影響しないと考えられる．他の要因としてはりの自重によるたわみの影響が考えられる．以下に自重によるたわみが測定誤差におよぼす影響についての図を示す．図のように 0 に設定してから測定しているため誤差が発生したと考えられる．誤差の低減策としては実験装置の適切な保管や振動の抑制などが挙げられる<sup>[1]</sup>．

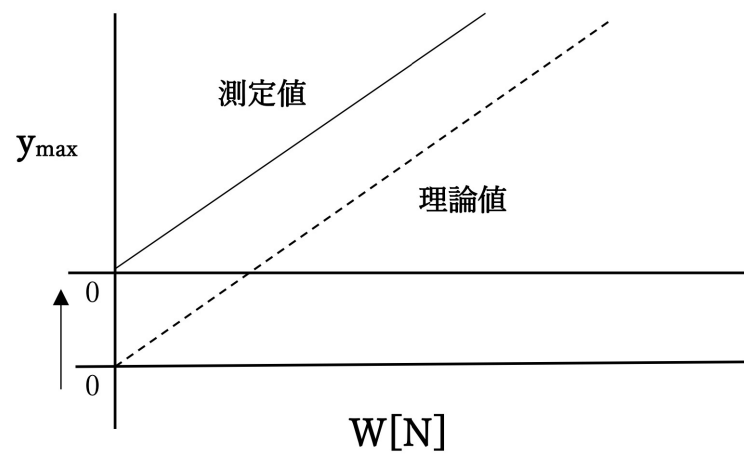


図 3: 自重によるたわみが測定誤差におよぼす影響

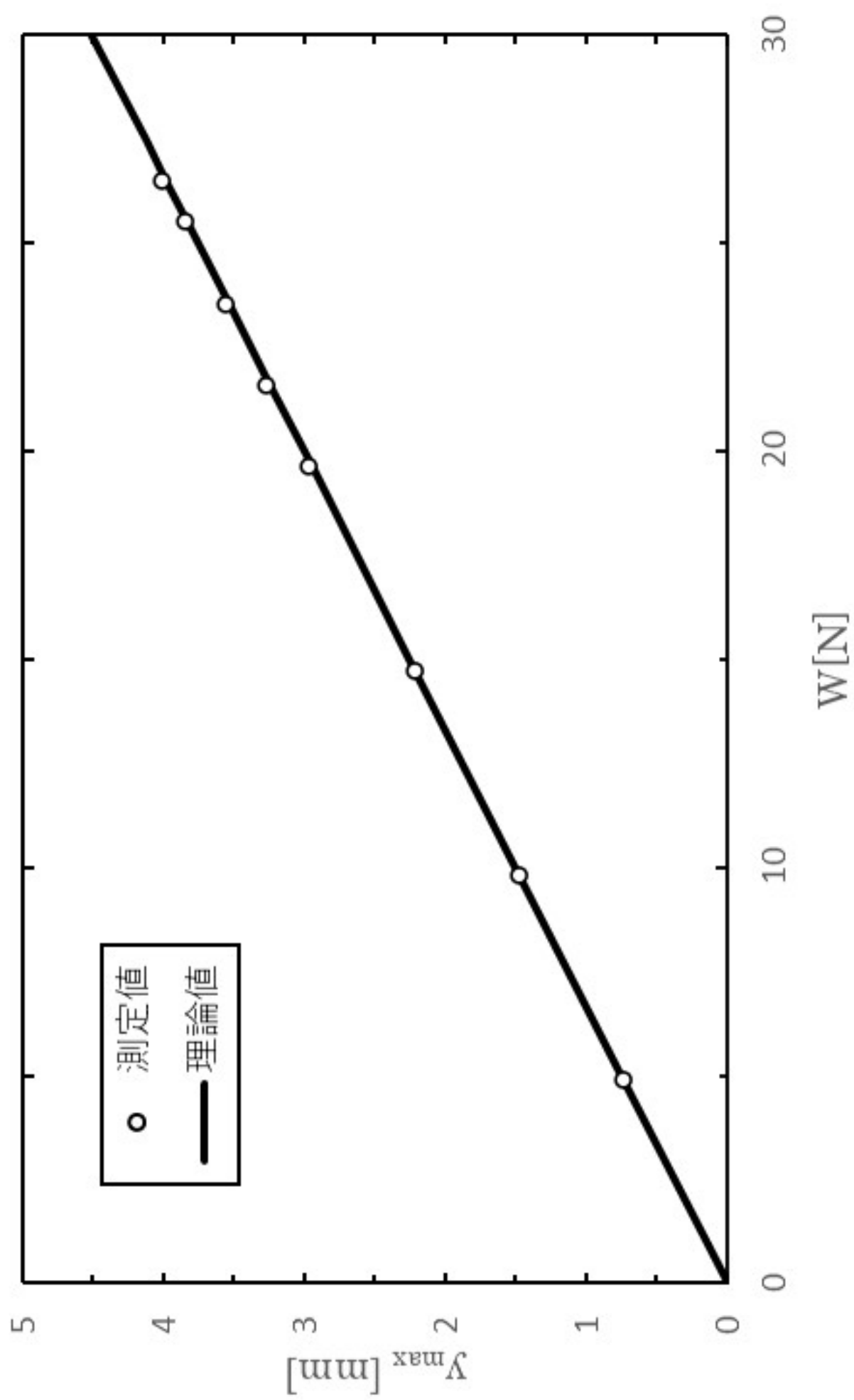


図 4:  $a = 500$

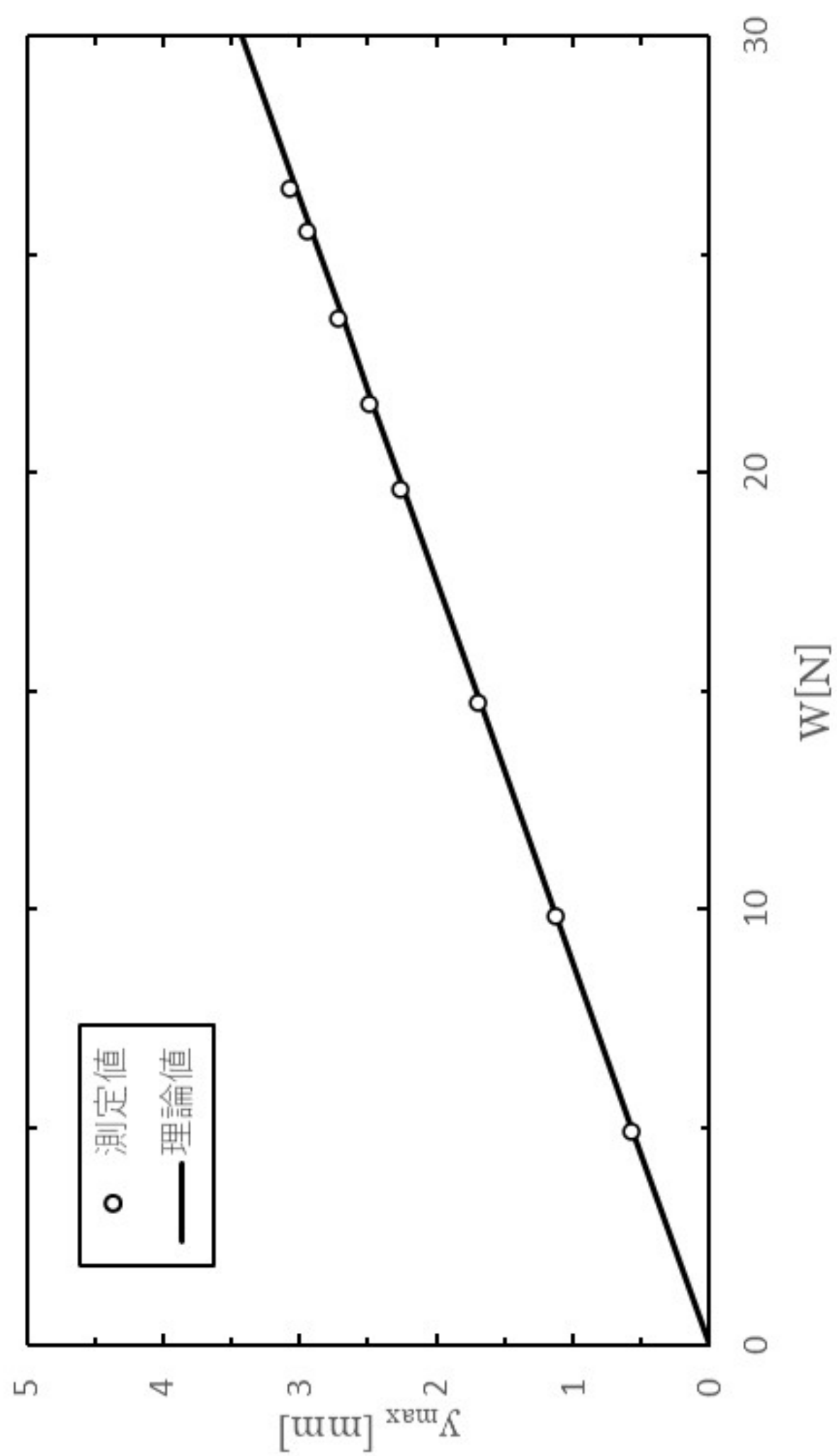


図 5:  $a = 600$

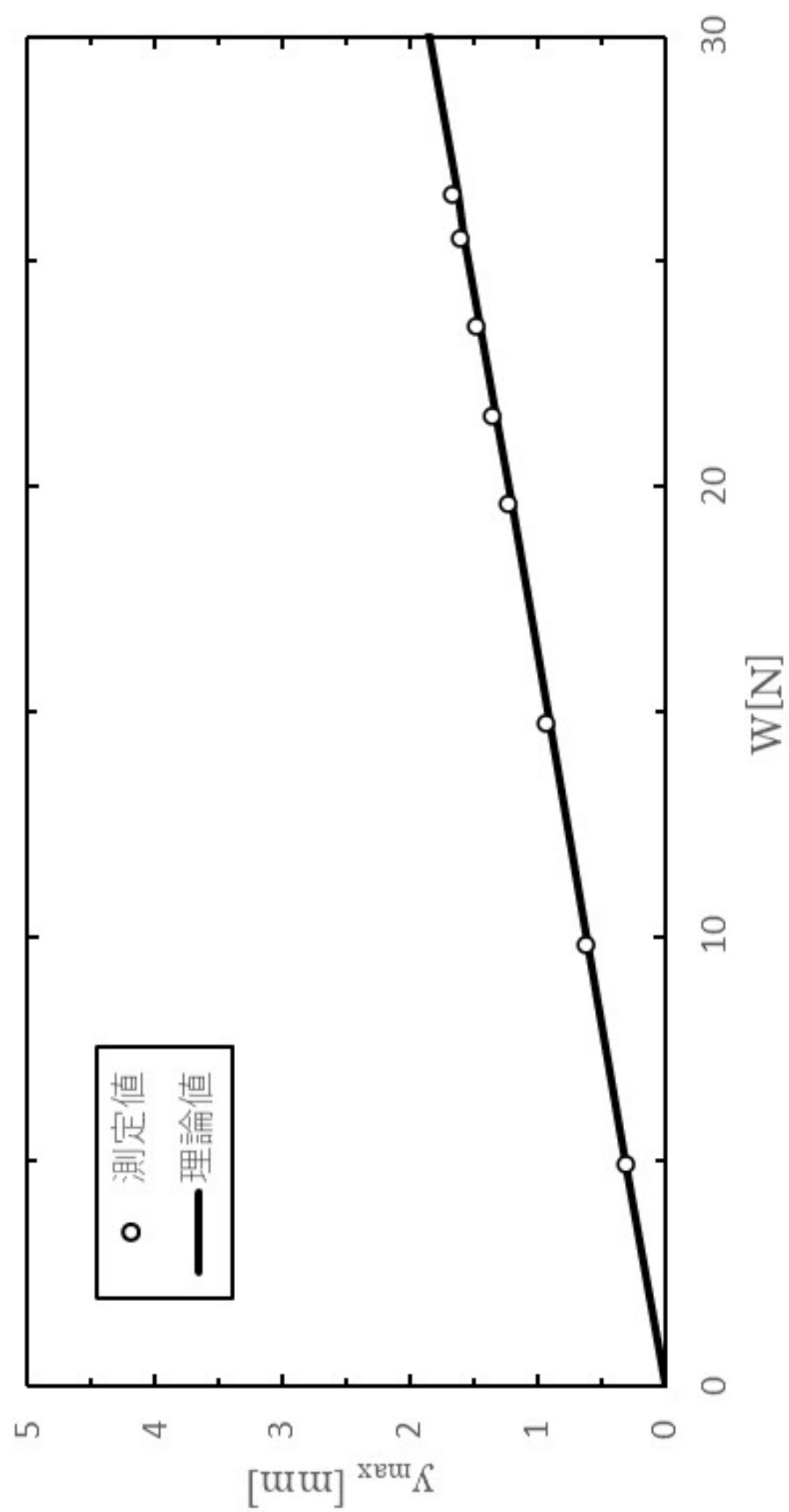


図 6:  $a = 700$

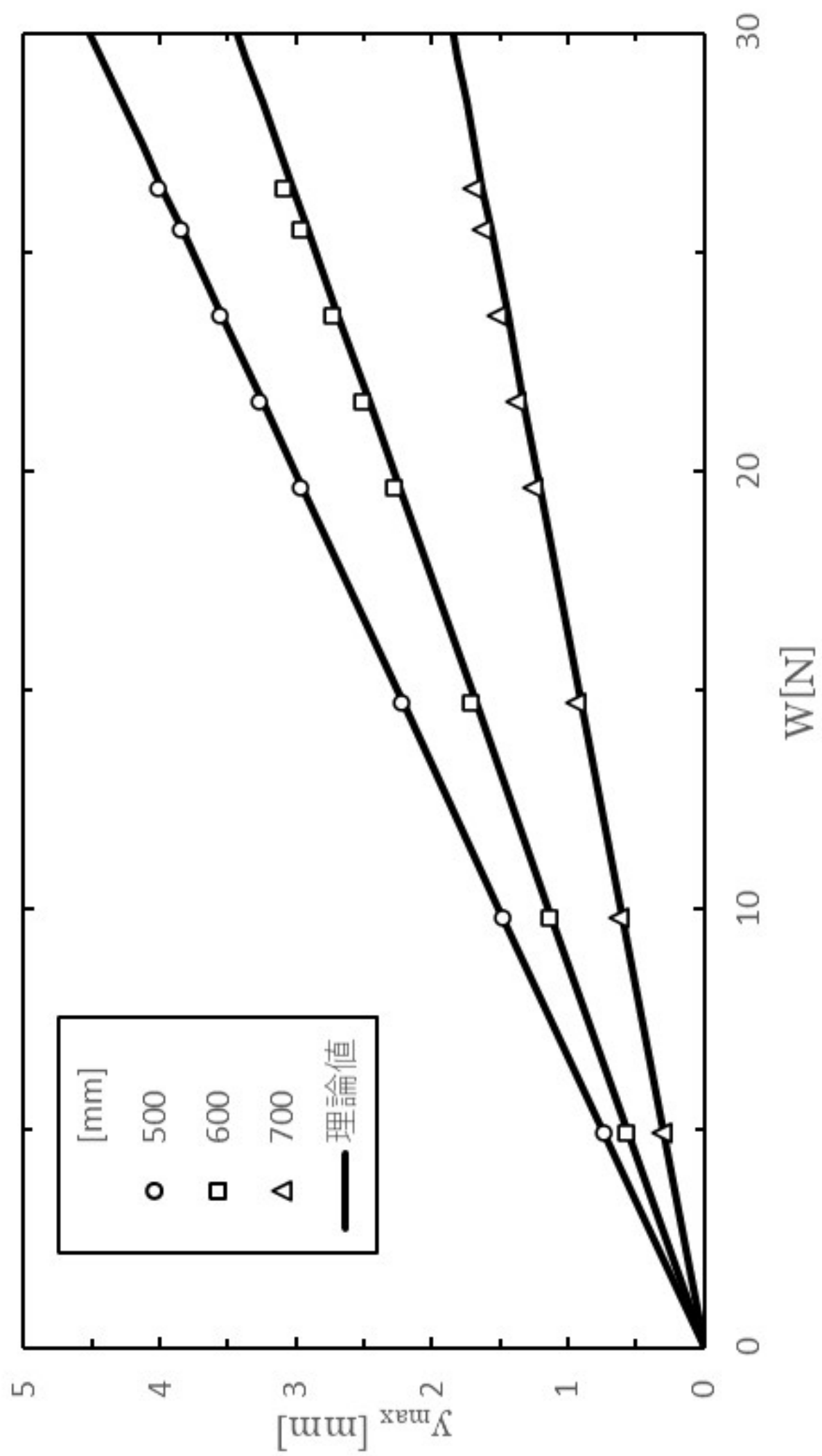


図 7:  $a = 500, 600, 700$

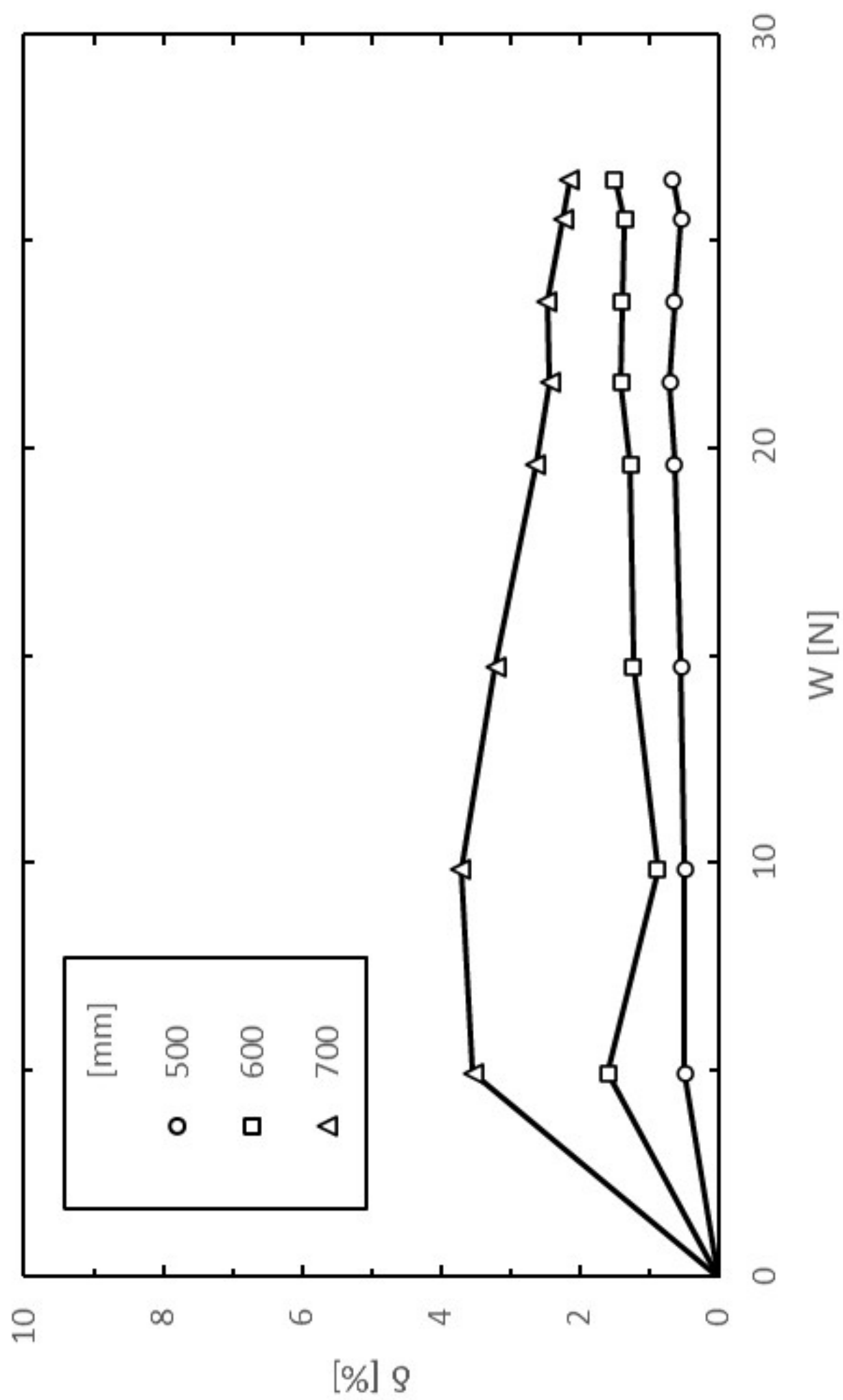


図 8: 荷重と誤差率

### 3. レーザの特徴およびその応用技術について、くわしく説明せよ。

レーザー (LASER) は、"Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation" の略称であり、光の増幅と刺激放射による放射を利用した装置である。レーザーは光子の刺激放射を利用して光を増幅する。レーザー媒質内にエネルギーを供給することで、媒質内の原子や分子の励起状態を作り出す。励起された原子や分子は、外部からの光子の刺激によってエネルギーを放出し、さらに光子を放出する。この放出された光子は、他の励起された原子や分子に対して刺激を与え、同様の光子の放出を引き起こす。このプロセスが連鎖的に繰り返されることで、光が増幅され、高強度・高集束・単色性を持つレーザー光が生成される<sup>[2]</sup>。表 6 にレーザーの種類と特徴を示す<sup>[3]</sup>。レーザー媒質によって波長や特徴が大きく変わるのが確認できる。

表 6：レーザーの種類と特徴

相変化	相変化	レーザー媒質	発振波長	動作モード
気体	混合ガス	CO レーザ, CO <sub>2</sub> レーザ, 色素レーザー	500nm, 10.6μm, 320 ~ 1260nm	CW, パルス
		エキシマレーザー ArF, KrF, XeCl	193, 248, 308nm	パルス
液体	有機系	色素レーザー	320 ~ 1260nm	CW, パルス
個体	結晶体	ルビーレーザー, チタンファイヤレーザー, YVO <sub>4</sub> , YAG	684.3, 800, 1064, 1064nm	パルス, CW
	アモルファス	ガラスレーザー	1060nm	パルス
	半導体	AlGaAsP, InGaAsP, ZnSe	700 ~ 900nm, 1 ~ 1.6μm, 490nm	CW
	ファイバー	Nd <sup>3+</sup> , Er <sup>3+</sup> , Yb <sup>3+</sup>	1060, 1540, 1030 ~ 2200 nm	CW

ではどのようなところでレーザーが使われているのか、応用例をいくつか挙げる。レーザー加工は、レーザーの高いエネルギー密度を利用して、材料の切断だけでなく、溶接、穴あけなどを行う加工技術である。一般的には炭酸ガスレーザーや YAG レーザ、エキシマレーザーなどが使われる。金属を加工する場合は主に炭酸ガスレーザー、YAG レーザが使用される。厚さにもよるが硬いダイヤモンドでもドリルより圧倒的に早く穴を開けることができる。今後、ダイヤモンド半導体などのダイヤモンド加工には必須の技術であると言えるだろう。次に、LIDAR について説明する。LIDAR は、レーザー光を照射して、その反射光の情報をもとに対象物までの距離や対象物の形などを計測する技術のことで自律走行車やロボットなどのセンシング技術として広く使用されている。これはレーザーで対象までの距離を測定し、そのレーザーを回転させることにより点群を作成している。レーザーで測定している関係上安価な LIDAR であれば屈折率が低い物体はスキャンできない。LIDAR は、環境をスキャンして三次元の地図を作成するためにも使用され、この技術は SLAM (Simultaneous Localization and Mapping) などの応用に必要不可欠である。なお、実際の自動運転車や配膳ロボットなどでは、3DLIDAR が使用されることが多い。今後、自動運転や自動ロボットなどで活躍することが期待される。次に、レーザーによる医療について説明する。現在医療業界では、レーザー医療が多く普及している。たとえばレーザーメス、レーザー凝固、ガン細胞の破壊、リュウマチ治療、創傷の熱的治療、結石の破碎、虫歯の永久治療、レーザー内視鏡、視力の矯正手術、美顔、美容などがある。また変わったところではレーザーファイバーによる動脈血栓の治療などにも使われている。レーザー医療には出血が少ない点や非折衝である点、局所的である点が非常に優れており使われる大きな理由となっている。レーザー医療によって感染のリスクが抑えられより医者と患者の負担が軽くなれば助かる命も増えるだろう。最近ではホログラフィ技術というものも存在し、これはレーザー光を用いて物体の三次元像を記録・再生する技術である。ホログラフィ技術は、立体的な映像の再現やディスプレイ技術、防犯・偽造防止のための認証技術などに応用されており今後 IT がより一層加速される現代にとって未来ある技術と言えよう。このようにレーザーはその特異な特性を活かして様々な領域で革新的な技術を生み出しており、今後も



さらなるレーザー技術の進化が期待され、新たな応用領域や産業の発展に重要な役割をもつだろう [2][3][4][5] .

4. 精密情報機器の設計にははりのたわみの概念が重要になっている．具体例を挙げて，くわしく説明せよ．

はりのたわみとは，はりが荷重を受けて変形した状態のとき，初期のはりのラインが湾曲した曲線をいう．はりのたわみは，弾性曲線方程式  $EI \frac{d^4 y}{dx^4} = q(x)$  という微分方程式で表される．精密情報機器の設計においては，はりのたわみを考慮することで，部品の寸法や材料の選定を行う必要がある．具体例として，CD プレーヤーやブルーレイディスクにおけるピックアップヘッドの位置決めにはりのたわみが関係している．ピックアップヘッドは，ディスク上の微細な凹凸をレーザー光で読み取る装置である．ピックアップヘッドは，ディスクと一定の距離を保ちながら，高速で回転するディスクに追従する必要がある．このとき，ピックアップヘッドを支える部品（アームやばねなど）がはりとして振る舞い，荷重や振動によってたわみが生じる．このたわみが大きくなると，ピックアップヘッドとディスクの距離が変化し，読み取りエラーや音飛びなどの不具合が発生する可能性がある．したがって，CD プレーヤーやブルーレイディスクの設計においては，ピックアップヘッドを支える部品のたわみを最小限に抑えることが重要である．また，従来の設計では重心がディスクによっていたが図 10 のように左右のバランスをとって衝撃吸収することで強度が 5 倍になった例もある [6] . 部品の形状や寸法を適切に設計することや，弾性率や密度などの材料特性を考慮することが必要であるといえる [6][7][8][9] .

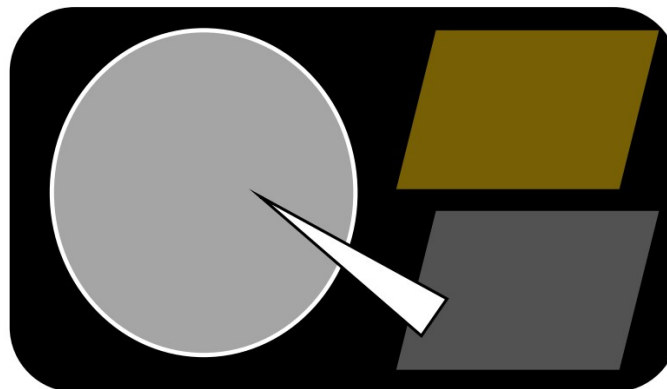


図 9: HDD

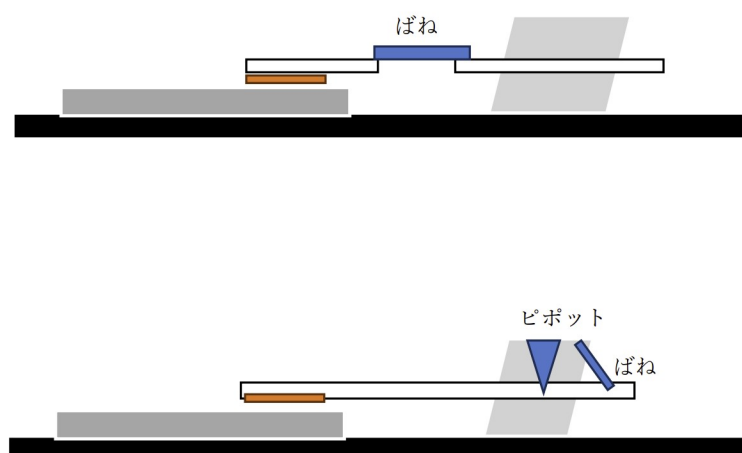


図 10: 左右のバランスをとって衝撃吸収

## 参考文献

- [1] 中山 秀太郎：演習・材料力学入門，大河出版（2007），p.122-124
- [2] 谷腰 欣司：レーザー技術入門講座，電波新聞社（2007），p.51 -63
- [3] 谷腰 欣司：レーザー技術入門講座，電波新聞社（2007），p.88
- [4] 谷腰 欣司：レーザー技術入門講座，電波新聞社（2007），p.161
- [5] 谷腰 欣司：レーザー技術入門講座，電波新聞社（2007），p.142
- [6] <http://www17.plala.or.jp/poppy06/downloadfile/structure/11DefrectionofBeam1.pdf>(2023/07/17)
- [7] ブルーレイディスクのしくみ — ブルーレイディスクとは — ブルーレイディスクレコーダー — ソニー <https://www.sony.jp/bd/about/technology/> (2023/07/17)
- [8] CD プレーヤーの寿命は？何年持つ？ <https://rank-king.jp/article/7648> (2023/07/17)
- [9] 佐藤卓蔵: レーザ [ CD プレーヤから X 線レーザまで ], 電気書院（1997），p.134