



# (3) 倒立振子のパラメータ同定と安定化

## 1 実験目的

一般に，制御とは「制御対象があらかじめ与えられた望ましい状態に適合するように適当な操作を加えることである」と定義されている．この操作を完全に装置のみで行うことを自動制御という．自動制御を実現するために必要な素材は，センサ，アクチュエータ，コンピュータである．本実験では，「倒立振子」と呼ばれる実験装置を制御対象とし，自動制御を実現させるための一連の流れを習得することを目的としている．

1 周目の実験では，センサとコンピュータの特性を把握する方法を学ぶ．センサとしては，ロータリエンコーダを用いるが，センサ信号から倒立振子の振り角度や台車位置への変換係数を求める．また，センサ信号から速度算出を行う際に，ローパスフィルタによる処理の効果を調べる．つぎに，アクチュエータとして DC モータを用いるが，電力増幅器の極性を調整する．2 周目の実験では，倒立振子の自動制御を実現するコントローラを設計するコントローラを設計する手順を学ぶ．まず，制御対象のモデリングを行う．倒立振子のモデル（微分方程式）は第一原理により得ることができるが，それに含まれるパラメータの値は未知である．そこで，2 次遅れ系の特性に基づいてパラメータの値を決定する．このような操作をパラメータ同期という．つぎに，倒立振子のモデルを状態空間表現で表し，状態フィードバック形式のコントローラを設計し，倒立振子の安定化を実現する．

## 2 倒立振子実験装置の概要

### 2.1 倒立振子実験装置

倒立振子とは，棒を立てる遊びを自動制御により実現する実験装置である．本実験で用いる倒立振子実験装置のシステム構成図を図 2.1 に示す．

図 2.1 に示すように，倒立振子実験装置では，センサ（ロータリエンコーダ）で検出された振り角度，台車位置を元にコントローラ（パソコン）でアクチュエータ（DC モータ）に加える電圧を計算し，台車を左右に動かすことにより振子が倒れないように制御することができる．

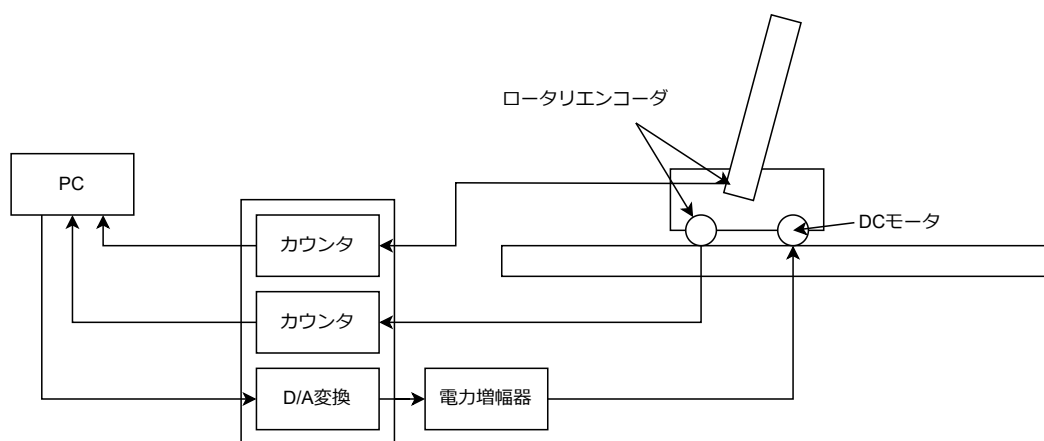


図 2.1 倒立振子実験装置

## 2.2 ロータリエンコーダとカウンタ

本実験装置では、大口径のピニオン軸に台車位置検出用、振子軸に振子角度検出用のロータリエンコーダが取り付けられている。いずれも US digital 社製 (E2-1024) の光学式/インクリメンタル型であり、軸が 1 回転すると 1024 パルスの A, B 信号 (ON/OFF 信号) が生成される。図 2.3 に示すようにロータリエンコーダとパソコンは I/O ボード Q8-USB のカウンタを介して接続されている。使用するソフトウェアは QuaRC は、デフォルトでは 4 通倍で動作するため、1 回転あたり 4096 カウントとなる

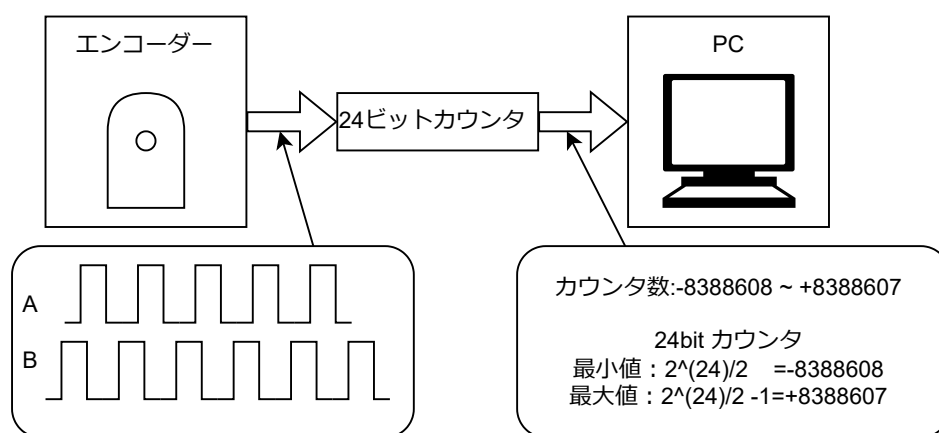


図 2.2 エンコーダーとカウンタ

## 2.3 DC モータと D/A 変換

本実験装置では、台車を左右に動かすために、少口径のピニオン軸に DC モータが取り付けられている。パソコンから D/A 変換を介して出力された指令電圧は小電力であるため、このままでは DC モータを高速回転させることはできない。そこで図 2.3 に示すリニア方式の電力増幅器を介して、指令電圧を DC モータに加える。

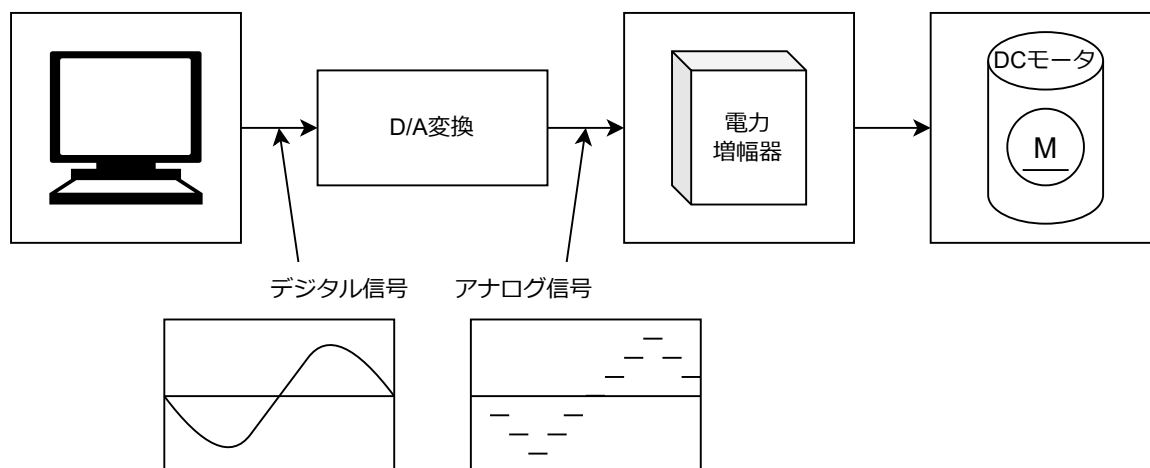


図 2.3 エンコーダーとカウンタ

## 2.4 速度算出

ロータリエンコーダから台車位置  $z(t)$  [m] を検出することができれば、 $h$  が微小であるとき、近似的に速度を

$$\dot{z}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z(t) - z(t-h)}{h} \quad [m/s] \simeq \frac{z(t) - z(t-h)}{h} \quad [m/s] \quad (2.1)$$

により算出することができる。ここで、 $h$  [s] をセンシングのサンプリング周期とすると、 $t = 0, 1, 2, \dots$  であるので、 $k$  番目のサンプリング時刻での位置を  $z[k] = z(kh)$  と記述することにより、(2.1) 式は

$$\dot{z}[k] = \frac{z[k] - z[k-1]}{h} \quad [m/s] \quad (2.2)$$

のように差分式で記述できる。(2.2) 式を後退差分近似 (オイラー近似) という。ロータリエンコーダはデジタルセンサのため、接触ノイズを考えなくて良いが、検出される値は離散値であり、量子化誤差が発生する。この量子化誤差のため、(2.2) 式よりも算出される速度には高周波成分が含まれてしまう (チャタリング)。そこで、ローパスフィルターを利用し

$$\dot{z}_f[k] = G_f(s) \dot{z}(t), \quad G_f(s) = \frac{1}{1 + T_f s} \quad (T_f > 0) \quad (2.3)$$

のようにしてチャタリングを除去する (図 2.8)。

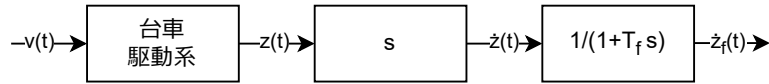


図 2.4 ローパスフィルタ

## 3 実験 1

### 3.1 実験装置のセッティング

以下のことに注意する．

- モータを動かす必要のある実験を行うときのみ，Universal Power Module の電源を ON にすること．
- モータを動かす実験が終了した後は必ず Universal Power Module の電源を OFF にすること．
- モータを動かす実験を行うときには必ず 1 人が Universal Power Module のスイッチに触れておき，暴走した場合にはただちに電源を OFF にすること，

### 3.2 実験 1-1: 振子角度とロータリエンコーダの動作

#### 3.2.1 実験方法

ここでは，図 3.2 に示す振子の角度変位  $\theta(t)$  [rad] とロータリエンコーダのカウント数の関係を調査する．

##### 実験 1-1a

1. 振子側のロータリエンコーダとカウンタの動作確認をする別紙「補足事項:QusRC の使用方法」を参考にして，図 A.1 の Simulink モデル "pend\_count.slx" を作成し，ディレクトリ [D:\experiment\_5S\group01\pend\_encoder] に保存する．また，ビルドしてエラーがないことを確認した後，

```
>> print -dpdf = pend_count.pdf
>> load('pend_count.temp')
```

と入力して pdf ファイル，bmp ファイルを生成する．

2. Universal Power Module の電源が OFF 担っていることを確認する．振子を取り付けて振子がぶら下げた状態に静止させ，Simulink モデルを実行する．振子がぶら下がった状態から時計回り（あるいは反時計回り）に振子を手で回転させたときのロータリエンコーダのカウント数を Display により観測された値を表にまとめる．表 3.1 に記入  
観測を終えたら，Simulink モデルの実行を終了させる．
3. 表 3.1 の関係から，1 カウントあたりの振子の角度変位  $\alpha$  [rad/カウント]（時計回りを正とする）を求める．

##### 実験 1-1b

1. 図 A.2 の Simulink モデル "pend\_count2.slx" を作成し，振子を時計回りに 1 回転したとき測定値が  $2\pi$  [rad] (360 [deg]) となるようにする（"pend\_count2.slx" は [D:\experiment\_5S\group01\pend\pend\_encoder] に保存すること）．ただし，Gain (count to rad) は実験 1-1 で求めた値（ただし，"1000/pi" などのように計算式をそのまま入力する），Gain (rad to deg) は [rad] から [deg] への変換係数 "180/pi" を設定する．また，"pend\_count2.slx" をビルドしてエラーがないこ

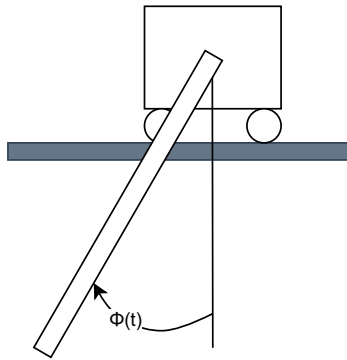


図 3.1 振子の角度変位

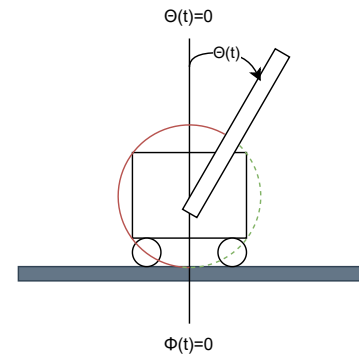


図 3.2  $\theta(t)$  と  $\phi(t)$  との関係

とを確認した後, "pend\_count2.pdf", "pend\_count2.bmp" という名前の pdf ファイル, bmp ファイルを生成する

2. 実験を開始し, Display (count), Display (rad), Display (deg) により運動を知た値を表にまとめる. 観測を終えたら, Simulink モデルの実行を終了させる.

#### 実験 1-1c

1. 振子がぶら下がった状態を基準とした角度変位  $\theta(t)$  と倒立状態を基準とした角度変位  $\phi(t)$  との関係は

$$\theta(t) = \begin{cases} \phi(t) - \pi & (\phi(t) \geq 0 : \text{時計回りに回転}) \\ \phi(t) + \pi & (\phi(t) < 0 : \text{反時計回りに回転}) \end{cases} \quad (3.1)$$

である (図 3.2 参照). ただし,  $\phi(t)$ ,  $\theta(t)$  とともに時計回りを正とする. 振子がぶら下がった状態から時計回り (あるいは反時計回り) に回転させたとき, 振子の倒立点で角度変位が 0 [rad] (0 [deg]) となるように図 A.2 の Simulink モデルを修正し, D:\experiment\_5S\group01\pend\pend\_encoder に "pend\_count3.slx" という名前で保存する. また, "pend\_count3.slx" をビルドしてエラーがないことを確認した後, "pend\_count3.pdf", "pend\_count3.bmp" という名前の pdf ファイル, bmp ファイルを生成する

2. 振子がぶら下がった状態で静止していることを確認した後, 実験を開始し, Display (deg) により振子の角度  $\theta(t)$  [deg] を観測し, その値を表にまとめる. 観測を終えたら, Simulink モデルの実行を終了させる. なお実験では, 手で振子を時計回り (あるいは反時計回り) に回転させたとき, 振子の倒立状態での  $\theta(t)$  が 0[deg] となっていることを確認した後, 振子を右側に水平とすると  $\theta(t)$  が 90[deg], 振子を左側に水平とすると  $\theta(t)$  が -90[deg] となっていることを確認する.

#### 3.2.2 実験結果

実験 1-1a 図 A.1 の Simulink モデルを実行したときに得られた結果を表 3.1 に示す. また, 1 カウントあたりの角度変位は

$$\alpha = \frac{2\pi}{4096} \approx 1.534 \times 10^{-3} [\text{rad/カウント}]$$

である.

実験 1-1b 図 A.2 の Simulink モデルを実行したときに得られた結果を表 3.2 に示す.

表 3.1 ロータリエンコーダとカウンタの動作確認（振子）

回転の方向	測定値 [カウント]
時計回りに 1 回転 (+ 360 [deg])	-4096
反時計回りに 1 回転 (- 360 [deg])	4096

表 3.2 "pend\_count2.slx" の動作確認（カウント数から角度変位への変換）

回転の方向	測定値 [カウント]	測定値 [rad]	測定値 [deg]
時計回りに 1 回転 (+360 [deg])	-4096	6.283	360
反時計回りに 1 回転 (-360 [deg])	4096	-6.283	-360

実験 1-1c Simulink モデルを実行したときに得られた結果を表 3.3 に示す．なお，角度はおおよそその値で良く，0, 90, -90 のいずれかを記入すること．

表 3.3 "pend\_count3.slx" の動作確認（倒立点を基準とした角度  $\theta(t)$ ）

回転方向	振子の状態	測定値 [deg]	回転方向	振子の状態	測定値 [deg]
時計回り	倒立（真上）	0	反時計回り	倒立（真上）	0
	右水平	90		右水平	90
	左水平	-90		左水平	-90

### 3.2.3 実験考察

考察事項 1 エンコーダは，回転や移動を検知するためにスリットと呼ばれる目盛りが設けられている．「4096」という値は，エンコーダの分解能を示す数値で，1 回転あたり 4096 のパルスが検出されることを意味している．通倍とは，エンコーダのパルス信号をさらに細かく分割する技術のことであり，4 通倍の場合は 1 つのスリットに対して 4 つのパルス信号を生成することができる．エンコーダのスリット数が 1024 である場合，基本的な分解能は 1 回転あたり 1024 パルスであるが，この信号を 4 通倍すると  $1024 \times 4 = 4096$  となる．このように，スリット数 1024 に対して 4 通倍を行うことで，実際には 1 回転あたり 4096 パルスの分解能が得られる．つまり  $1.53398... \times 10^{-3} [\text{rad}]$  が認識できる最低角度となる．

考察事項 2 本実験で使用したロータリエンコーダはインクリメント型であり，抵抗値や角度を出力するものではなくパルスを出力している．つまり受取側，例えばマイコンや i/o ボードなどがパルスを元へ角度計算を行う．そのため基準点は処理側のリセットを用いている必要がある．その際，基準点としやすいのが重力を使用した，真下であり，再現性が高い．

考察事項 3 ポテンショメータでは倒立振子の角度を計測するのには向いていない．理由として摩擦が挙げられる．ロータリエンコーダの場合，回転時にほとんど摩擦が発生しないが，ポテンショメータの場合摩擦が発生している．摩擦が発生すると倒立振子の棒に力がかかってしまう．また，ポテンショメータにはロータリエンコーダと異なり，有効角度が存在する．

考察事項 4 振子が基準からどちらに回転したかによって式を変える必要がある．そのためこの Simulink モデルでは，Switch を使用し角度変位からを加減するかを判断している．Switch に入力する際に + であるとき， $\pi$  を引き，- であるとき， $\pi$  を足している．また，角度がラジアンで出力するため，視覚的にわかりやすい度数法に  $\frac{60}{2\pi}$  をかけ，

変換している。

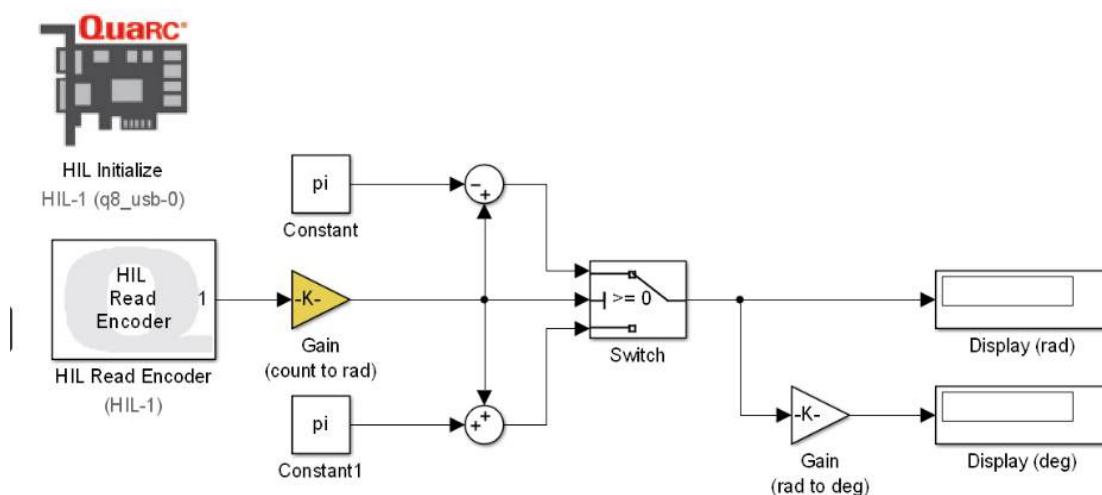


図 3.3 シミュリンクモデル

### 3.3 実験 1-2: 台車位置とロータリエンコーダの動作

#### 3.3.1 実験方法

ここでは，図 3.3 に示す台車の位置変位  $z(t)$  [m] とロータリエンコーダのカウント数の関係を調べる。

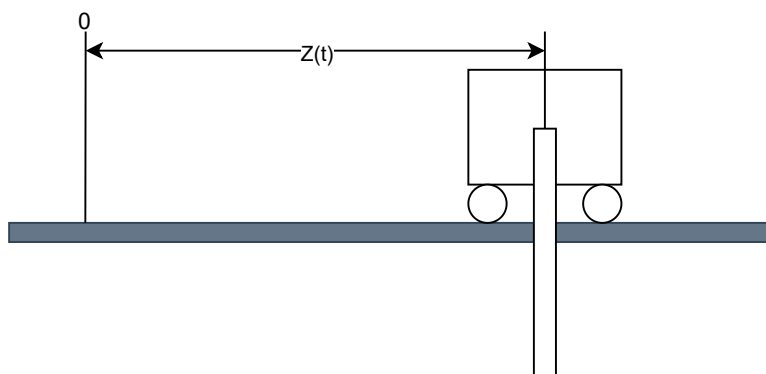


図 3.4 台車の位置変位  $z(t)$

#### 実験 1-2a

1. 台車側のロータリエンコーダとカウンタの動作確認をする図 A.3 の Simulink モデル "cart\_count.slx" を作成し，D:\experiment\_5S\group01\cart\_encoder に保存する．また，ビルドでエラーがないことを確認した後，"cart\_count.pdf"，"cart\_count.bmp" という名前の pdf ファイル，bmp ファイルを生成し，pdf ファイルはデスクトップ上の "bcpdfcrop-multi.bat" により余白を取り除く．
2. Universal Power Module の電源が OFF になっていることを確認し，Simulink モデルの実行を開始する．台車を手で右方向（あるいは左方向）に 0.8 [m] 移動させたときのロータリエンコーダのカウント数を Display



により観測する．これを 4 回，繰り返す．表にまとめる．表 3.4 に記入し，観測を終えたら，Simulink モデルの実行を終了させる．

3. 図 3.4 の結果を利用し，1 カウントあたりの台車の位置変位  $\beta$  [m/カウント] を求める．

#### 実験 1-2b

1. 図 A.4 の Simulink モデル "cart\_count2.slx" を作成し，台車を右方向に 1 [m] 移動させたときに測定値が +1 [m] となるようにする ("cart\_count2.slx" は D:D:\experiment\_5S\group01\pend\pend\_encoder に保存すること)．ただし，Gain は実験 1-2a で求めた  $\beta$  の値に設定する．また，"cart\_count2.slx" をビルドしてエラーがないことを確認し，"cart\_count2.pdf"，"cart\_count2.bmp" という名前の pdf ファイル，bmp ファイルを生成し，pdf ファイルはデスクトップ上の "bcpdfcrop-multi.bat" により余白を取り除く．
2. Simulink モデルの実行を開始し，Display (meter)，Display (count) により観測された値を表にまとめる．表 3.5 に記入し，観測を終えたら，Simulink モデルの実行を終了させる．

### 3.3.2 実験結果

実験 1-2a 図 A.3 の Simulink モデルを実行したときに得られた結果を表 3.4 に示す．これより，1 カウントあたりの位置変位は

$$\beta = \frac{0.8}{35277.75} \approx 2.268 \times 10^{-5} [\text{m/カウント}]$$

である．

表 3.4 ロータリエンコーダとカウンタの動作確認 (台車)

(a) 右方向に 0.8 [m] (+0.8 [m]) 移動		(b) 左方向に 0.8 [m] (-0.8 [m]) 移動	
	測定値 [カウント]		測定値 [カウント]
1 回目	35348	1 回目	-35273
2 回目	35345	2 回目	-35157
3 回目	35277	3 回目	-35273
4 回目	35276	4 回目	-35273

実験 1-2b 図 A.4 の Simulink モデルを実行したときに得られた結果を表 3.5 に示す．

表 3.5 "cart\_count2.slx" の動作確認 (カウント数から位置変位への変換)

移動方向・距離	測定値 [カウント]	測定値 [m]
右方向に 0.5 [m] (+0.5 [m]) 移動	22034	0.4997
左方向に 0.5 [m] (-0.5 [m]) 移動	-21808	-0.4945

### 3.3.3 実験考察

表 3.4 より，0.8[m] 動かしたときに平均 35277.75 カウントを行った．これにより  $\beta = \frac{0.8}{35277.75} \approx 2.268 \times 10^{-5}$  となり 1 カウントあたりの位置変位  $\beta$  を求めることができた．

また，測定時に台車を  $0.1[\text{m}]$  ではなく  $0.8[\text{m}]$  動かした理由としては全体の誤差を少なくするためである．手動で回しているため，停止時に誤差が含まれる．そのときに発生する誤差が全体を占める割合を小さくするために測定値を大きくさせた．実験に一定量誤差が含まれる場合， $0.1$  を  $8$  回計測するより  $0.8$  を  $1$  回測定するほうが誤差が少なくなる．位置検出の精度に関しては計算により最低  $2.268 \times 10^{-5}[\text{m}]$  ピッチで位置推定できる．また，他に  $\beta$  を求める方法としてラックピニオンのモジュールなどの歯車の数を活用できる．

### 3.4 実験 1-3: DC モータと D/A 変換の動作

#### 3.4.1 実験方法

1. 図 A.5 の Simulink モデル "da\_conv.slx" を作成し， $D:\text{experiment\_5S}\backslash\text{group01}\backslash\text{da}$  に保存する．ただし，終了時間を  $1$  秒に設定する．また，ビルドしてエラーがないことを確認した後，"da\_conv.pdf"，"da\_conv.bmp" という名前の pdf ファイル，bmp ファイルを生成し，pdf ファイルはデスクトップ上の "bcpdfcrop-multi.bat" により余白を取り除く．
2. 台車をレールの中央付近に配置する．Universal Power Module の電源を ON にした後，Simulink モデルの実行を開始する．D/A 変換を介して DC モータに一定の電圧が加わり，台車がほぼ一定速度で移動する．正の電圧  $+1 [\text{V}]$ ，負の電圧  $-1 [\text{V}]$  を加えたときに台車が左右どちらの向きに移動するのかを観察し，表 3.6 に記入する．

#### 3.4.2 実験結果

図 A.5 の Simulink モデルを実行したときの実験結果を表 3.6 に示す．

表 3.6 指令電圧と台車の移動方向

指令電圧 $[\text{V}]$	移動方向
$+1$	右
$-1$	左

#### 3.4.3 実験考察

考察事項 1  $+1[\text{V}]$  の指令を与えたときに台車が左方向に移動する場合，このままでは極性が逆である．このように極性を間違えた状態でフィードバック制御を行うと発散してしまう．理由として離れようとするほど出力が上がり，さらに差が大きくなり，より出力を上げようとしてしまう．のようなループに入るからである．このように差が，収束するどころか大きくなり続けてしまう．

考察事項 2 極性を反転させる方法として，ハードウェア側の調整だと DC モータに接続されている線を反転させるかエンコーダーに接続された信号線を反転させる方法が挙げられる．ソフトウェア側での調整は出力する電圧の符号を反転するか，エンコーダーの角度の符号を反転するなどが挙げられる．

### 3.5 実験 1-4: 台車の速度算出

#### 3.5.1 実験方法

1. カレントディレクトリを `D:\experiment_5S\group01\da_encoder` とし, 配布する Simulink モデル `"da_conv_count.slx"` (図 A.6) を開く. そして, Simulink ブロックを
  - Gain (polarity): ゲインに `"1"` もしくは `"-1"` を入力 (3.4 節を参照)
  - Gain (count to meter): ゲインを 1 カウントあたりの台車位置変位 1 に変更 (3.3 節を参照)と設定し, 書き保存する. また, ビルドしてエラーがないことを確認した後, `"da_conv_count.pdf"`, `"da_conv_count.bmp"` という名前の pdf ファイル, bmp ファイルを生成し, pdf ファイルはデスクトップ上の `"bcpdfcrop-multi.bat"` により余白を取り除く.
2. 台車をレールの中央付近に配置する. Universal Power Module の電源を ON にした後, Simulink モデルの実行を開始する. D/A 変換を介して DC モータに一定の電圧  $u(t) = 1$  [V] が加わり, 台車が右方向に移動する. 実行終了後,

```
>> save filter_data = t dz dzf1 dzf2 dzf3
```

と入力し, 実験データを `"filter_data.mat"` という名前の mat ファイルに保存する.

3. 配布する M ファイル `"plot_filter.m"` を実行することによってグラフを描く.

#### 3.5.2 実験結果

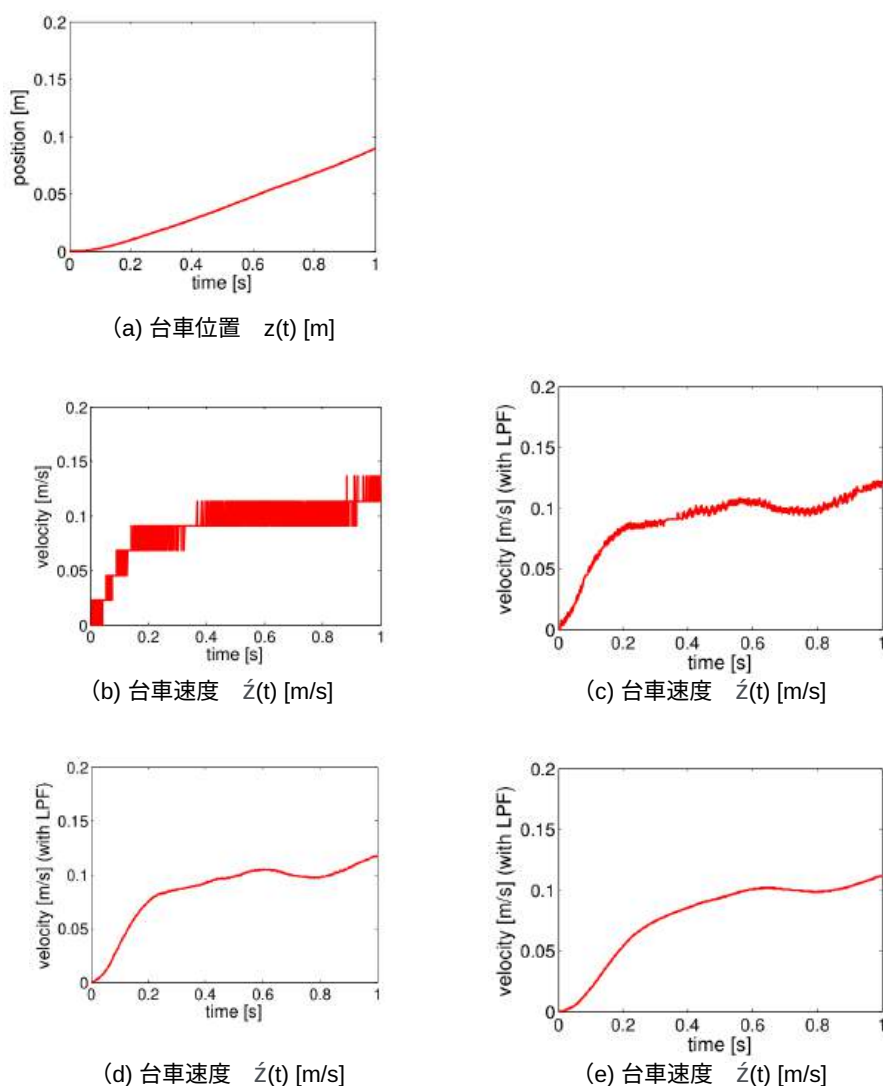


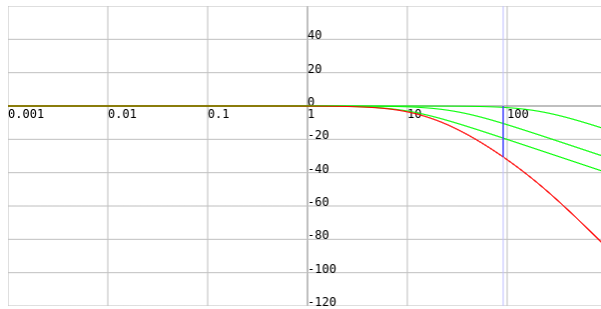
図 3.5 台車の位置と速度

### 3.5.3 実験考察

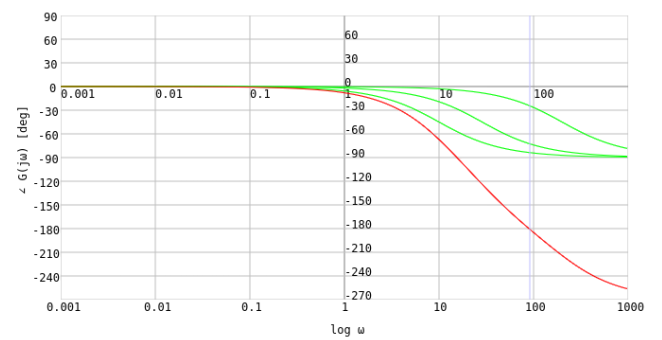
図 3.5 より，台車の速度が一定でないことが確認できる．この理由として，モーターの加速時間と摩擦が関係していると考えられる．モーターが始動すると電流が流れるが，一定速度に到達するまでには少し時間がかかる．また，静止摩擦の影響も重要である．物体が静止しているときには静止摩擦が働くが，動き始めると摩擦が動摩擦に変わり，抵抗が減少するため，動き出し時に抵抗が小さくなる．このため，モーターの起動時に速度が不安定になると考えられる．

量子化については，連続的なアナログ信号を離散的なデジタル値に変換する際に，量子化誤差が発生する．図 3.5(b) のように，チャタリング（微小な振動）が見られるのは，この量子化誤差が原因である．アナログ信号の変動が量子化のレベルを超えると，デジタルデータが急激に変動し，これが不安定なチャタリングを引き起こす．

対策として，ローパスフィルターを適用することでチャタリングの影響を軽減できる．ローパスフィルターは高周波成分やノイズを除去する役割があり，これによりチャタリングを抑制できる．さらに，ローパスフィルターの時定数  $T$  を大きくすることで，フィルターの応答が遅くなり，高周波成分をより効果的に減衰させることが可能になる．これにより，チャタリングのような高速な変動が大幅に抑制されるため，台車の速度変動グラフが滑らかになる．



ゲイン線図(横軸 $\log \omega$ , 縦軸 $20 \log |G(j\omega)|$  [dB])



位相線図(横軸 $\log \omega$ , 縦軸 $\angle G(j\omega)$  [度])

図 3.6 ボード線図

## 4 倒立振子のパラメータ同定と状態フィードバックによる安定化

### 4.1 倒立振子の数学モデル

図 4.1 に示す倒立振子システムの数学モデルは、振子が台車に与える影響が十分小さいと仮定すると、

$$\begin{cases} \ddot{z}(t) = -a\dot{z}(t) + bv(t) \\ ml \cos \theta(t) \ddot{z}(t) + J\ddot{\theta}(t) = -c\dot{\theta}(t) + mgl \sin \theta(t) \end{cases} \quad (4.1)$$

で与えられる。ただし、 $J = J_s + ml^2$  であり、 $z(t)$ ：台車の変位、 $\theta(t)$ ：振子の角度、 $v(t)$ ：電力増幅器に加える指令電圧、 $m$ ：振子の質量、 $l$ ：軸から振子の重心までの距離、 $J[\text{kg} \cdot \text{m}^2]$ ：振子の重心における慣性モーメント、 $c[\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}]$ ：軸の粘性摩擦係数、 $a, b$ ：台車、モータ、電力増幅器の特性により定まる定数、 $g[\text{m}/\text{s}^2]$ ：重力加速度を表す。

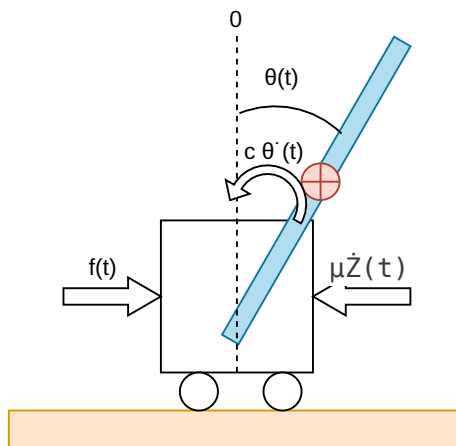


図 4.1 倒立振子システム

### 4.2 台車のパラメータ同定

台車駆動系全体の運動方程式 (4.1) 式の上式) のふるまいはパラメータ  $a, b$  の値により決まる。しかしながら、このパラメータ  $a, b$  を直接的に測定することは困難である。そこで、ここでは図 4.2 に示す台車駆動系の P 制御を

行うことによって，未知パラメータ  $a, b$  を決定する方法について説明する．まず， $v(s)$  から  $z(s)$  への伝達関数  $P(s)$  を求めると，

$$P(s) = \frac{b}{s(s+a)} \quad (4.2)$$

である．台車を P コントローラ

$$v(t) = k_P (r(t) - z(t)) \quad (4.3)$$

により制御したとき，台車位置の目標値  $r(s)$  から制御量  $z(s)$  への伝達関数  $G(s)$  は

$$G(s) = \frac{P(s)k_P}{1 + P(s)k_P} = \frac{\omega_{n1}^2}{s^2 + 2\zeta_1\omega_{n1}s + \omega_{n1}^2}, \quad (4.4)$$

$$\omega_{n1} = \sqrt{\frac{bk_P}{a}}, \quad \zeta_1 = \frac{a}{2\omega_{n1}} = \frac{a}{2\sqrt{bk_P}}$$

となる．ここで，目標値を

$$r(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ z_c & (t \geq 0) \end{cases} \quad (4.5)$$

とした 2 次遅れ要素のステップ応答は  $0 < \zeta_1 < 1$  のとき，

$$z(t) = z_c \left\{ 1 - e^{-\zeta_1\omega_{n1}t} \left( \cos \omega_{d1}t + \frac{\zeta_1}{\sqrt{1-\zeta_1^2}} \sin \omega_{d1}t \right) \right\} \quad (4.6)$$

$$\omega_{d1} = \omega_{n1} \sqrt{1 - \zeta_1^2}$$

であり，オーバーシュート  $A_{\max} = z_{\max} - z_c$  およびそのときの時間  $T_{\text{peak}}$  は

$$A_{\max} = z_c e^{-\zeta_1\omega_{n1}T_{\text{peak}}}, \quad T_{\text{peak}} = \frac{\pi}{\omega_{d1}} \quad (4.7)$$

となる．

したがって，実験データより  $T_{\text{peak}}, A_{\max}$  を求めると，(4.7) 式より  $\omega_{n1}, \zeta_1$  が定まるから，未知パラメータ  $a, b$  が (4.4) 式を逆算することにより計算できる．

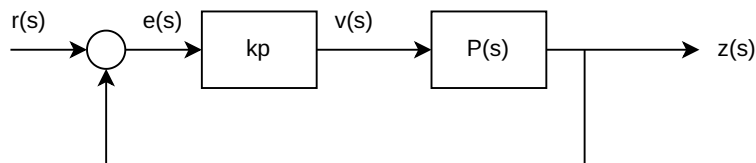


図 4.2 台車駆動系の P 制御

### 4.3 振子のパラメータ同定

台車を固定すると，(4.1) 式より振子の非線形モデルは

$$J\ddot{\theta}(t) = -c\dot{\theta}(t) - mgl \sin \theta(t) \quad (J = J_s + ml^2) \quad (4.8)$$

となる．振子のパラメータ  $m, l, J_s$  である．振子の質量  $m$  と重心位置  $l$  は測定でき，振子の慣性モーメントは床に対して下ろすことによりメジャーで測定できる．しかしながら，慣性モーメント  $J_s$  を台車の動きに関連して測定することは難しい．そこで，ここでは図 4.4 に示す振子の自由振動の測定データより  $J_s$  を決定する方法について説明する．

まず，振子の角度  $\theta(t)$  を振子が床から下への大振幅を持つ  $\theta(t)$  について二乗近似し，(4.8) 式を次のように書き換える：

$$J\ddot{\theta}(t) = -c\dot{\theta}(t) - mgl \sin \theta(t) \quad (4.9)$$

と書き換える．このとき， $\theta(t)$  に近づくと，振子のモデルは

$$J\ddot{\theta}(t) + 2\zeta_2\omega_{n2}\dot{\theta}(t) + \omega_{n2}\theta(t) = 0, \quad \omega_{n2} = \frac{mgl}{J}, \quad \zeta_2 = \frac{c}{2\sqrt{mglJ}} \quad (4.10)$$

という 2 次の微分方程式で表されることがわかる．なお，振子に初期角度  $\theta(0) = \theta_0$ （初期速度は 0）を与えると (4.10) 式の解（自由振動解）は次のように表される：

$$\theta(t) = e^{-\zeta_2\omega_{n2}t} \left( \cos \omega_d t + \frac{\zeta_2}{\sqrt{1-\zeta_2^2}} \sin \omega_d t \right), \quad \omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta_2^2} \quad (4.11)$$

となり，周期  $T$ ，減衰率  $\lambda$  は一定値

$$T = \frac{2\pi}{\omega_d}, \quad \lambda = \frac{A_{k+1}}{A_k} = e^{-\zeta_2\omega_{n2}T} \quad (4.12)$$

である．

以上より，実験データより振動周期  $T = T_1 - T_2$  および減衰率  $A_2/A_1 = A_3/A_2$  を求めると，(4.12) 式をもとに  $\omega_n$  と  $\zeta$  が決定できるから，未知パラメータ  $c, J_s$  が (4.10) 式を逆算することにより計算できる．

### 4.4 状態フィードバックによる倒立振子の安定化

振子が  $\theta(t) = 0$  の近傍であると仮定すると，

$$\cos \theta(t) \approx 1, \quad \sin \theta(t) \approx \theta(t)$$

と近似できるから，(4.1) 式より近似線形化モデル

$$\begin{cases} \ddot{z}(t) = -a\dot{z}(t) + bv(t) \\ ml\ddot{\theta}(t) + J\ddot{\theta}(t) = -c\dot{\theta}(t) + mgl\theta(t) \end{cases} \quad (4.13)$$

が得られる．ここで，

$$\text{状態変数: } \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \\ \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix}$$

$$\text{操作量: } u(t) = v(t)$$

とすると, (4.13) 式は状態方程式と呼ばれる 1 階の微分方程式

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (4.14)$$

で記述することができる. ただし,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b/ml & mgl/J & -c/J \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 0 \\ mlb/J \end{bmatrix}$$

である.

そこで, コントローラとして状態フィードバック

$$u(t) = Kx(t), \quad K = [k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4] \quad (4.15)$$

を用いて倒立振子を安定化することを考える. 状態方程式 (4.14) 式と状態フィードバック (4.15) 式で構成されるシステムは

$$\dot{x}(t) = Mx(t), \quad M = A + BK \quad (4.16)$$

である. (4.16) 式の解は

$$x(t) = e^{Mt}x(0) \quad (4.17)$$

となるので, システムの安定性は  $M$  の固有値により決まり,  $M$  の固有値の実部がすべて負であれば, そのときに限りシステムは安定である. すなわち

- 任意の初期値  $x(0)$  に対して,  $t \rightarrow \infty$  で  $x(t) \rightarrow 0$

となる (注 4). したがって,  $M$  の固有値の実部がすべて負となるように状態フィードバックゲイン  $K$  を決定すれば, 振子は倒立する (倒立振子は安定化される).

本実験では, アッカーマンのアルゴリズムにより  $M$  の固有値が指定した値  $p_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) となるように状態フィードバックゲイン  $K$  を定める. ただし,  $\text{Re}[p_i] < 0$  となるように  $p_i$  を決める.

## 5 実験 2

### 5.1 実験 2-1: 台車のパラメータ同定

#### 5.1.1 実験方法

1. カレントディレクトリを `D:\experiment_5S\group01\cart_ident` とし, 配布する Simulink モデル "ex\_cart\_ident.slx" (図 A.7) を開く. "ex\_cart\_ident.slx" は目標値  $z_c$ , 比例ゲイン  $k_p$  が "kP" に設定



されている．つぎに，Subsystem (Inverted Pendulum) 内の Simulink ブロックを

- Gain (polarity): ゲインに "1" もしくは "-1" を入力 (3.4 節を参照)
- Gain (count to rad): ゲインを 1 カウントあたりの振り角度変位  $\alpha$  に変更 (3.2 節を参照)
- Gain (count to meter): ゲインを 1 カウントあたりの台車位置変位  $\beta$  に変更 (3.3 節を参照)

2. (振り子を台車に取り付けたまま) レールの中央付近に台車を配置する．つぎに，

- 指令電圧  $v(t)$  が制限値  $\pm 10$  [V] を超えない
- オーバーシュートを生じる
- 台車がレールを超えない ( $0 < z_c \leq 0.2$  の範囲で設定)

という制約を満足する比例ゲイン  $k_p > 0$ ，目標値  $z_c > 0$  を 3 種類選ぶ．1 種類目の  $k_p, z_c$  をコマンドウィンドウで

```
>> kP = ***; zc = ***;
```

と入力 ("\*\*\*" には各項で考えた正数) した後，ビルドしてエラーがないことを確認する．Simulink モデルの実行を開始し，オーバーシュートが生じるかどうかを確認する (Scope をダブルクリックして開いておく，リアルタイムで台車位置を観測できる)．実験終了後，コマンドウィンドウで

```
>> save cart_data t z v kP zc
```

と入力し，実験データを "cart\_data.mat" という名前の mat ファイルに保存する．同様に，以下の実験を行う．

- 2 種類目の  $k_p, z_c$  を用いて実験を行い，実験データを "cart\_data2.mat" という名前の mat ファイルに保存する
- 3 種類目の  $k_p, z_c$  を用いて実験を行い，実験データを "cart\_data3.mat" という名前の mat ファイルに保存する

3. 配布する M ファイル "plot\_cart.m" を実行することにより，以下のことを行う．

(a) 1 種類目の実験データからオーバーシュート  $A_{\max}$ ，行き過ぎ時間  $T_{\text{peak}}$  を抽出する．

表 5.1 に記入

(b) (4.7) 式より固有角周波数  $\omega_{n1}$ ，減衰係数  $\zeta_1$  をオーバーシュート  $A_{\max}$ ，行き過ぎ時間  $T_{\text{peak}}$  により表す．

$$\omega_{n1} = \quad , \quad \zeta_1 =$$

この関係を利用し，実験により得られた  $A_{\max}, T_{\text{peak}}$  から  $\omega_{n1}, \zeta_1$  を定める．

(c) 2 種類目の  $z_c, k_p$ : M ファイル "plot\_cart2.m" を実行し，抽出された  $A_{\max}, T_{\text{peak}}$  の値，定められた  $\omega_{n1}, \zeta_1$  の値を表に記入

(d) 3 種類目の  $z_c, k_p$ : M ファイル "plot\_cart3.m" を実行し，抽出された  $A_{\max}, T_{\text{peak}}$  の値，定められた  $\omega_{n1}, \zeta_1$  の値を表に記入

4. 配布する M ファイル "idcart.m" を実行することにより，以下のことを行う．

- (a) 得られた  $\omega_{n1}, \zeta_1$  をコマンドウィンドウに入力することで、実験結果と同定された値を用いたシミュレーション結果を描画し、両者がほぼ一致していることを確認する。
- (b) (4.4) 式より未知パラメータ  $a, b$  を  $\omega_{n1}, \zeta_1$  により表す。

$$a = \quad , \quad b =$$

この関係を利用して未知パラメータ  $a, b$  の値を定める。

- (c) 2 種類目の  $z_c, k_p$ : M ファイル "idcart2.m" を実行し、定められた  $a, b$  の値を表に記入
- (d) 3 種類目の  $z_c, k_p$ : M ファイル "idcart3.m" を実行し、定められた  $a, b$  の値を表に記入

### 5.1.2 実験結果

#### (a) 1 種類目の実験データ

- $k_p, z_c$  を

$$k_p = 100 , \quad z_c = 0.1$$

と選び、図 A.7 の Simulink モデルを実行したときに得られた実験データから抽出された  $A_{\max}, T_{\text{peak}}$  の値を表 5.1 に示す。

- 実験方法 (3) の (ii) で示した関係式により定められた  $\omega_{n1}, \zeta_1$  の値を表 5.2 に、実験結果と同定された値を用いたシミュレーション結果を示す。
- 実験方法 (4) の (ii) で示した関係式により定められた  $a, b$  の値を表 5.3 に示す。

表 5.1 台車のステップ応答における  $A_{\max}, T_{\text{peak}}$

オーバーシュート $A_{\max}$ [m]	行き過ぎ時間 $T_{\text{peak}}$ [s]
$2.71e^{-02}$	$3.20e^{-01}$

表 5.2 台車のステップ応答における  $\omega_{n1}, \zeta_1$

固有角周波数 $\omega_{n1}$	減衰係数 $\zeta_1$
$1.06e^{+01}$	$3.84e^{-01}$

表 5.3 台車駆動系のパラメータ

a	$8.16e^{+00}$
b	$1.13e^{+00}$

#### (b) 2 種類目の実験データ

- $k_p, z_c$  を

$$k_p = 1500 , \quad z_c = 0.1$$

として (a) と同様の実験を行い、結果を表 5.4、表 5.5、図 5.2 および表 5.6 に示す。

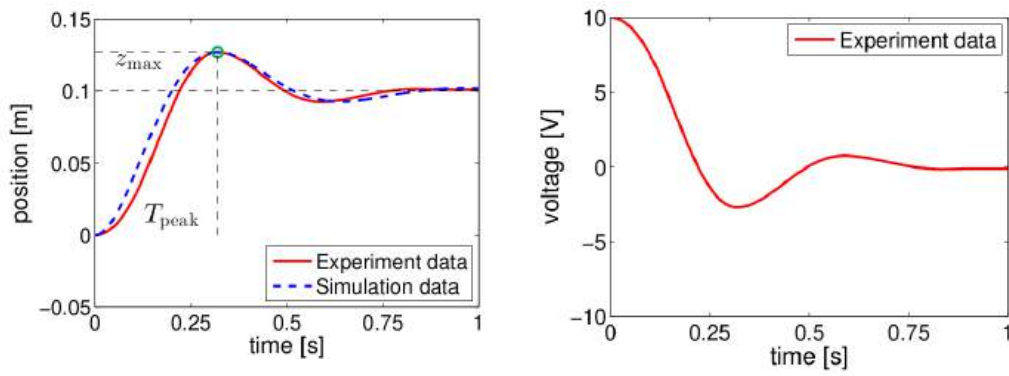


図 5.1 台車の P 制御の実験結果とシュミレーション結果

表 5.4 台車のステップ応答における  $A_{\text{max}}, T_{\text{peak}}$

オーバーシュート $A_{\text{max}}$ [m]	行き過ぎ時間 $T_{\text{peak}}$ [s]
$5.66e^{-02}$	$3.17e^{-01}$

表 5.5 台車のステップ応答における  $\omega_{n1}, \zeta_1$

固有角周波数 $\omega_{n1}$	減衰係数 $\zeta_1$
$1.01e^{+01}$	$1.78e^{-01}$

表 5.6 台車駆動系のパラメータ

a	$3.59e^{+00}$
b	$6.76e^{-02}$

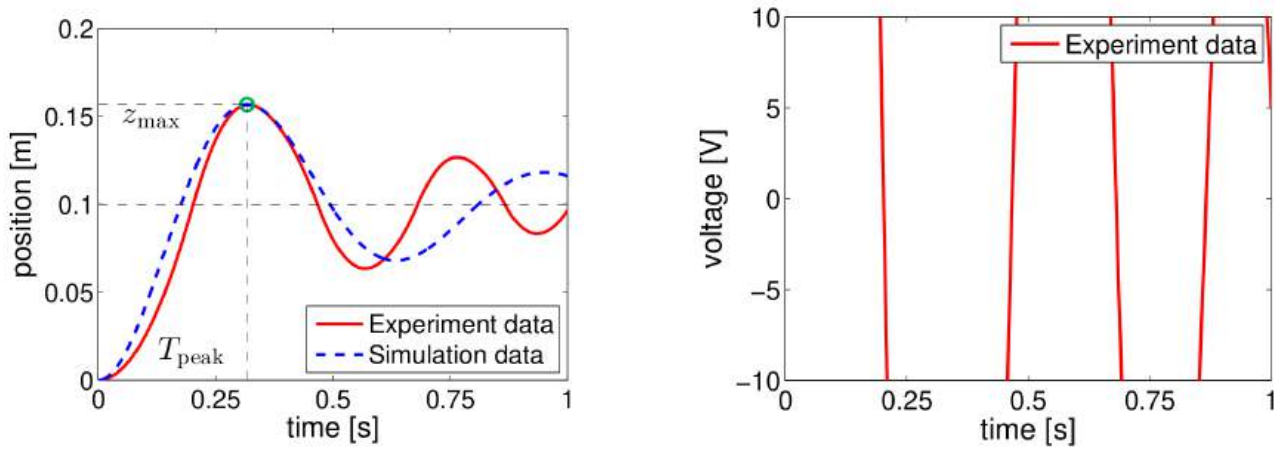


図 5.2 台車の P 制御の実験結果とシュミレーション結果

(c) 3 種類目の実験データ

- $k_p, z_c$  を

$$k_p = 100, \quad z_c = 0.2$$

として (a) と同様の実験を行い, 結果を表 5.7, 表 5.8, 図 5.3 および表 5.9 に示す.

表 5.7 台車のステップ応答における  $A_{\max}, T_{\text{peak}}$

オーバーシュート $A_{\max}$ [m]	行き過ぎ時間 $T_{\text{peak}}$ [s]
$4.36e^{-02}$	$3.92e^{-02}$

表 5.8 台車のステップ応答における  $\omega_{n1}, \zeta_1$

固有角周波数 $\omega_{n1}$	減衰係数 $\zeta_1$
$8.91e^{+00}$	$4.37e^{-01}$

表 5.9 台車駆動系のパラメータ

a	$7.78e^{+00}$
b	$7.93e^{-01}$

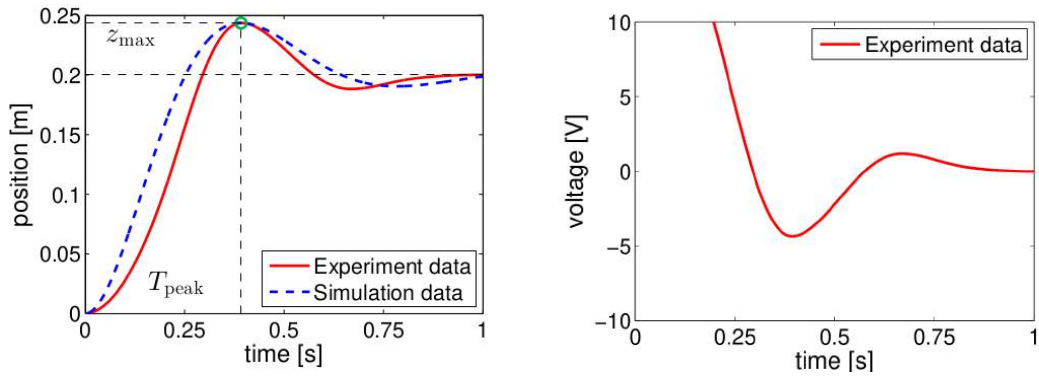


図 5.3 台車の P 制御の実験結果とシュミレーション結果

### 5.1.3 実験考察

3 種類のうち 2 種類は制約を超えてしまっている．これは，式 (3.4)  $v(t) = k_P (r(t) - z(t))$  のため 1 種類目は初期出力は 10V であると考えられ制約は守られている．しかし，2 種類目，3 種類目に関しては計算値がそれぞれ最大 150V, 20V となっており守れていない．図 5.1 より初期値が 10 V であることから正しいことがわかる．実験結果とシュミレーション結果のズレには振子の揺れが関係していると考えられる．動いた際に台車本体に振動が伝わり，台車の移動に影響があったのではないかと考える．他には，モーターの加速時間と摩擦が関係していると考えられる．モーター初期起動時に理論値に比べ速度が上がらなかったことも原因の一つであると考えられる．

## 5.2 実験 2-2: 振子のパラメータ同定

### 5.2.1 実験方法

振子を取り外して，その質量  $m$  をはかりで測定すると  $m = 2.30 \times 10^{-1}$  [kg] であった．また振子をひもでつるして重心位置を調べると  $l = 3.05 \times 10^{-1}$  [m] であった．

1. カレントディレクトリを D:\experiment\_5S\group01\pend\_ident に変更する．Simulink モデル "ex\_pend\_ident.slx" (図 A.8) を開き，5.1 節と同様に Subsystem (Inverted Pendulum) 内の Simulink ブロック (三つの Gain) の設定を変更した後，上書き保存する．また，ビルドしてエラーがないことを確認した後，"ex\_pend\_ident.pdf"，"ex\_pend\_ident.bmp" という名前の pdf ファイル，bmp ファイルを生成し，

pdf ファイルはデスクトップ上の "bcpdfcrop-multi.bat" により余白を取り除く。

2. 台車に振子を取り付け，振子を振ったときに台車が動かないように，手でしっかりと台車を固定する．また，振子をぶら下がった状態で静止させる．
3. ここで，Simulink モデルの実行を開始し，10 秒以内に振子を 90 [deg]（水平）付近まで傾けて静かに手を離し，振子角度  $\theta(t)$  を計測する．30 秒で実行は終了するので，コマンドウィンドウで

```
>> save pend_data t phi
```

と入力し，実験データを "pend\_data.mat" という名前の mat ファイルに保存する．同様に，Simulink モデルの実行を開始し，10 秒以内に振子を 30 [deg] 付近まで傾けて静かに手をはなし，30 秒で実行は終了するので，実験データを "pend\_data2.mat" という名前の mat ファイルに保存する．

t.pdf", "ex\_cart\_ident.bmp" という名前の pdf ファイル，bmp ファイルを生成し，pdf ファイルはデスクトップ上の "bcpdfcrop-multi.bat" により余白を取り除く．

### 5.2.2 実験結果

#### (a) 初期角度を約 90 deg とした場合

図 A.8 の Simulink モデルを実行し，得られた実験データから抽出された周期  $T_1, \dots, T_{10}$  と減衰率  $\lambda_1, \dots, \lambda_{10}$  およびこれらの平均値  $T, \lambda$  を表 5.10 に，グラフ化したものを図 5.4 に示す．実験方法 (3) の (ii) で示した関係式により定められた  $\omega_{n2}, \zeta_2$  の値を表 5.11 に，実験結果と間定された値を用いたシミュレーション結果を図 5.5 に示す．また，実験方法 (3) の (iii) で示した関係式により定められた  $c, J_g$  の値を表 5.12 に示す．

表 5.10 振子の振動周期  $T$  と減衰率  $\lambda$

振動周期 [s]	減衰率
$T_1 = 1.4565 \times 10^0$	$\lambda_1 = 9.6028 \times 10^{-1}$
$T_2 = 1.4435 \times 10^0$	$\lambda_2 = 9.6229 \times 10^{-1}$
$T_3 = 1.4330 \times 10^0$	$\lambda_3 = 9.6334 \times 10^{-1}$
$T_4 = 1.4240 \times 10^0$	$\lambda_4 = 9.6588 \times 10^{-1}$
$T_5 = 1.4150 \times 10^0$	$\lambda_5 = 9.6739 \times 10^{-1}$
$T_6 = 1.4075 \times 10^0$	$\lambda_6 = 9.6770 \times 10^{-1}$
$T_7 = 1.4000 \times 10^0$	$\lambda_7 = 9.6807 \times 10^{-1}$
$T_8 = 1.3950 \times 10^0$	$\lambda_8 = 9.7001 \times 10^{-1}$
$T_9 = 1.3895 \times 10^0$	$\lambda_9 = 9.7063 \times 10^{-1}$
$T_{10} = 1.3850 \times 10^0$	$\lambda_{10} = 9.7293 \times 10^{-1}$
平均 $T = 1.4149 \times 10^0$	平均 $\lambda = 9.6685 \times 10^{-1}$

表 5.11 振子の自由振動における  $\omega_{n2}, \zeta_2$

固有角周波数 $\omega_{n2}$	4.4408e+00
減衰係数 $\zeta_2$	5.3650e-03

表 5.12 振子のパラメータ

$J_g$ [kg·m <sup>2</sup> ]	1.35e-02
$c$ [kg·m <sup>2</sup> /s]	1.66e-03

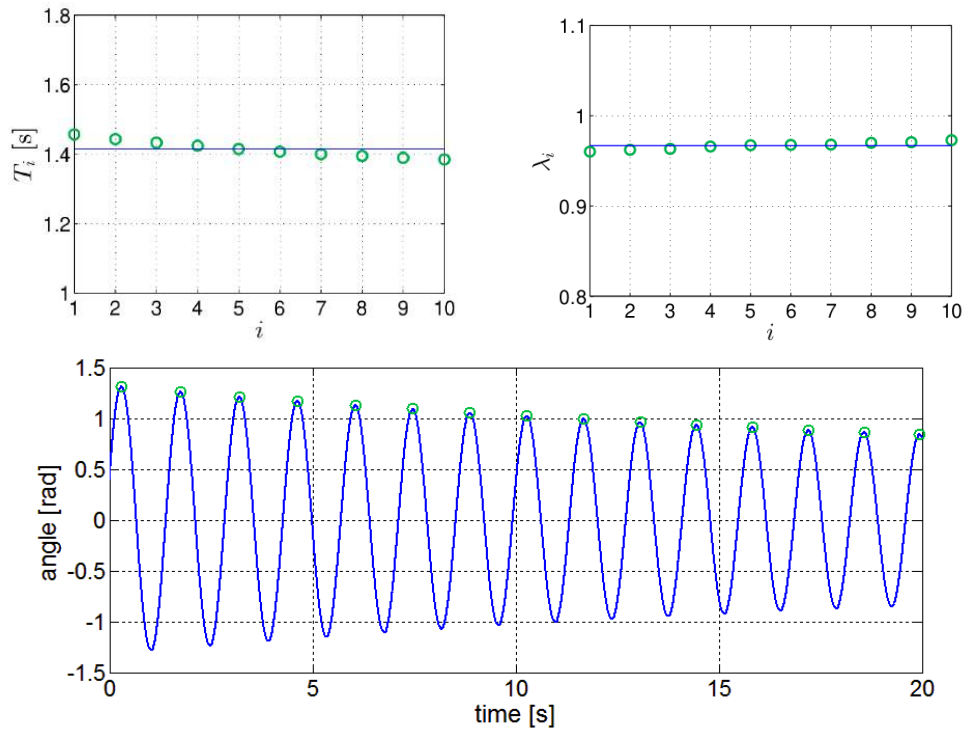


図 5.4 振子の自由振動の実験結果と振動周期，減衰率

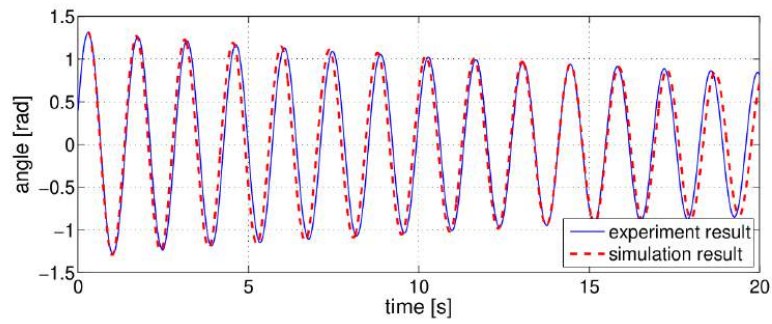


図 5.5 振子の自由振動の実験結果と線形シュミレーション結果との比較

(b) 初期角度を約 30 deg とした場合

初期角度を約 30 deg として (a) と同様の実験を行い，結果を表 5.13，図 5.6，表 5.14 および表 5.15 に示す．

表 5.13 振子の振動周期  $T$  と減衰率  $\lambda$

振動周期 [s]	減衰率
$T_1 = 1.3400e + 00$	$\lambda_1 = 9.8272e - 01$
$T_2 = 1.3365e + 00$	$\lambda_2 = 9.7990e - 01$
$T_3 = 1.3360e + 00$	$\lambda_3 = 9.8205e - 01$
$T_4 = 1.3355e + 00$	$\lambda_4 = 9.8172e - 01$
$T_5 = 1.3335e + 00$	$\lambda_5 = 9.8138e - 01$
$T_6 = 1.3325e + 00$	$\lambda_6 = 9.8374e - 01$
$T_7 = 1.3320e + 00$	$\lambda_7 = 9.8072e - 01$
$T_8 = 1.3315e + 00$	$\lambda_8 = 9.8315e - 01$
$T_9 = 1.3300e + 00$	$\lambda_9 = 9.8286e - 01$
$T_{10} = 1.3300e + 00$	$\lambda_{10} = 9.8547e - 01$
平均 $T = 1.3337e + 00$	平均 $\lambda = 9.8186e - 01$

表 5.14 振子の自由振動における  $\omega_{n2}$ ,  $\zeta_2$

固有角周波数 $\omega_{n2}$	減衰係数 $\zeta_2$
$4.7109e + 00$	$2.8310e - 03$

表 5.15 振子のパラメータ

$J_g$ [kg·m <sup>2</sup> ]	$c$ [kg·m <sup>2</sup> /s]
$9.61e - 03$	$8.27e - 04$

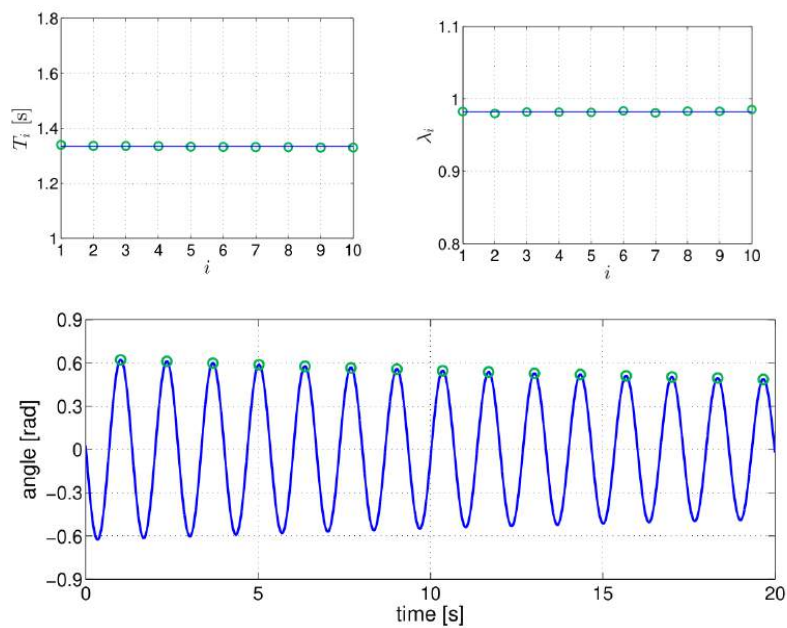


図 5.6 振子の自由振動の実験結果と振動周期，減衰率

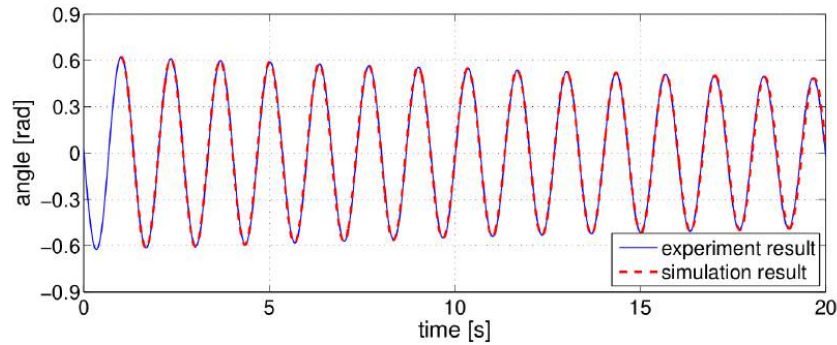


図 5.7 振子の自由振動の実験結果と線形シミュレーション結果との比較

### 5.2.3 実験考察

振子の減衰率や周期が一定ではないことが確認された。実験環境では、振子の動きに軸受けの摩擦や空気抵抗が影響を与えるため、これらの要因が振動に不規則な影響を及ぼし、結果として減衰率や周期にばらつきが生じたと考えられる。これらの外部要因が振子の運動に微妙な変化をもたらし、振動の周期や減衰率が一貫しない原因となっている。

倒立振子の初期角度が大きい場合、線形シミュレーションと実験結果の間にズレが発生する。このズレは、振子の角度が大きくなると、角度の近似が適用できなくなることに起因する。具体的には、線形モデルでは以下の近似が用いられる。

$$\cos \theta(t) \approx 1, \quad \sin \theta(t) \approx \theta(t)$$

しかし、角度  $\theta(t)$  が大きくなると、この近似が成立しなくなり、実際の挙動とシミュレーションの結果にズレが生じる。近似条件が満たされなくなるため、線形モデルでは大きな角度での正確なシミュレーションが困難となる。このため、初期角度が大きい場合に線形シミュレーションと実験結果の間に誤差が生じると考えられる。

## 5.3 実験 2-3: 状態フィードバックによる安定化

### 5.3.1 実験方法

#### 実験 2-3a

1. カレントディレクトリを `D:\experiment_5S\group01\stable` に移動する。配布する M ファイル "ip\_design.m" を実行し、メニューにしたがってパラメータ同定実験で得られたパラメータおよび指定する  $M = A + BK$  の固有値を入力する。ただし、 $M$  の固有値は表 5.16 のように指定する。このとき、極配置法 (MATLAB 関数 "acker") により状態フィードバックゲイン  $K = [k_1, k_2, k_3, k_4]$  が求められる。

表 5.16 に記入

2. `D:\experiment_5S\group01\stable` にある Simulink モデル "ex\_stable.slx" (図 A.9) を開き、5.1 節と同様に Subsystem (Inverted Pendulum) 内の Simulink ブロック (三つの Gain) の設定を変更し、上書き保存する。また、"ex\_stable.pdf", "ex\_stable.bmp" という名前の pdf ファイル, bmp ファイルを生成し、pdf ファイルはデスクトップ上の "bcpdfcrop-multi.bat" により余白を取り除く。つぎに、Simulink モデル "ex\_stable.slx" をビルドしてエラーが生じないことを確認する。そして、



Manual Switch が Constant 側になっている (指令電流を  $u(t) = 0$  [V] とすることになるので, 台車は静止する)

振子がぶら下がった状態で静止していることを確認する.

3. Simulink モデルの実行を開始する. 実行開始後, 振子を手で静かに倒立状態にし, Manual Switch をダブルクリックして Gain 側にする. 状態フィードバックを介して倒立状態が維持され, 振子が倒立状態になったことを確認する. 実験終了後, コマンドウィンドウで

```
>> save stable_data1 t x u dz dtheta
```

と入力し, 実験データを "stable\_data1.mat" という名前の mat ファイルに保存する.

4.  $M$  の固有値  $p_i$  を表 5.17 のように指定し, 同様の実験を行う. また, 振子の先を軽くつついたとき, 表 5.16 のように指定した場合との差異を調べる. また, 必要に応じて

```
>> save stable_data2 t x u dz dtheta
```

と入力し, 実験データを "stable\_data2.mat" という名前の mat ファイルに保存する.

実験 2-3b 実験 2-3a では, 振子が真下で静止している状態で Simulink モデル "ex\_stable.slx" の実行を開始し, 振子が真上にあるときの角度を正確に  $0$  [deg] として検出するようにしている (実験 1-1c を参照).

実験 2-3b では, あえて振子が真下から少しだけずれている状態で Simulink モデル "ex\_stable.slx" の実行を開始し, 図 5.8 のように振子の角度検出にずれがあるときのふるまいを調べる.

### 5.3.2 実験結果

実験 2-3a 設計されたコントローラのゲイン  $K$  を表 5.16 に示す. また, 図 A.8 の Simulink モデルを実行して安定化を実現したときの設計例 1 と設計例 2 のふるまいの違いを表 5.18 に示す.

表 5.16 設計例 1

$M$ の固有値	設計された $K$
$p_1 = -5$	$k_1$ 2.32e+01
$p_2 = -5$	$k_2$ 2.55e+01
$p_3 = -5$	$k_3$ 7.33e+01
$p_4 = -5$	$k_4$ 1.55e+01

実験 2-3b 台車および振子の静止位置がどのようになったのかを, 記述すること.

## 5.4 実験結果

少し初期位置よりずれた.

表 5.17 設計例 2

$M$ の固有値	設計された $K$
$p_1 = -5 + 5j$	$k_1 \ 9.29\text{e}+01$
$p_2 = -5 - 5j$	$k_2 \ 4.42\text{e}+01$
$p_3 = -5 + 5j$	$k_3 \ 1.22\text{e}+02$
$p_4 = -5 - 5j$	$k_4 \ 2.37\text{e}+01$

表 5.18 安定化の様子

設計例	反応の速さ	安定度	収束の速さ	チャタリングの影響
設計例 1	遅い	高い	同じ	小さい
設計例 2	早い	低い	同じ	大きい

## 5.5 実験考察

コントローラの挙動は、固有値  $p_i = a_i + jb_i$  の実部  $a_i$  と虚部  $b_i$  の大きさに密接に関連している。固有値の実部は、システムの減衰特性に影響を与え、負の実部が大きいほどシステムは速く減衰して安定する。一方、虚部  $b_i$  は振動の周波数に影響を与え、振動の速さや周期に関係する。

- 実部が大きい場合: 速やかに減衰し、振動が抑えられるため、システムは早く安定する。
- 虚部が大きい場合: システムは高周波数で振動しやすくなる。

振子の基準が正確に真上に設定されていない場合、システムはバランスをとるために台車がずれた位置で静止することになる。これは、振子が不安定な位置から少しずれた状態で止まってしまうことによって、台車はその位置でバランスを取ろうとするためだと考えられる。

## 6 検討課題

### 課題 1

ロータリエンコーダについて、以下の事項を説明せよ。

- インクリメンタル型のカウントの数え方には、1 通倍、2 通倍、4 通倍がある。図を用いて各通倍を説明せよ。
- アブソリュート型のスリットの配置図を示せ（3 ビットの場合）。また、インクリメンタル型、アブソリュート型の特徴について説明せよ。

アブソリュート型エンコーダは、各位置に固有のコードを持つことによって、絶対的な位置を検出することができる。これにより、電源が切れたり、システムが再起動した場合でも、正確な位置情報を保持することができる。インクリメンタル型エンコーダは、相対位置を基準位置からの変位として検出する。このタイプのエンコーダは、電源が切れた場合や再起動した場合には、基準位置に戻す必要があるが、構造が比較的簡単であり、コストも安価である。

図 6.1 に 4 通倍のときの数え方を示す。4 通倍時はすべての立ち上がり及び落ち下がりを見ることにより精度を増加させる。1 通倍のときは一つに立ち上がり、2 通倍では A,B それぞれの立ち上がりを見る。

以下の図 6.2 に、アブソリュート型エンコーダの 3 ビットの場合のスリット配置を示す。

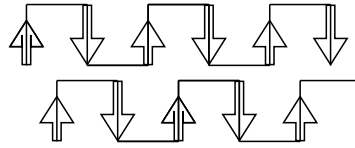


図 6.1 カウントの数え方

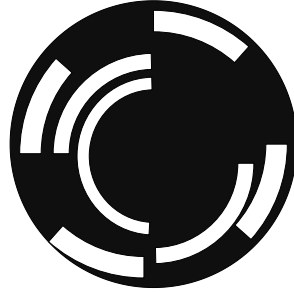


図 6.2 アブソリュート型エンコーダのスリット配置 (3 ビット)

## 課題 2

本実験装置では，リニアホールの電力増幅器が用いられているが，実際の現場では，PWM 方式が用いられることが多い．PWM 方式の電力増幅について調べよ．

PWM 方式の電力増幅器には高効率であり，低発熱である．トランジスタがオンまたはオフの状態のみで動作するため，エネルギー損失が少ない．また，トランジスタが線形動作しないため，発熱が少なく調整できる点が利点である．

## 課題 3

質量  $m$  で長さ  $l$  の均質な直線棒の重心（中心）まわりの慣性モーメントが  $J_g = \frac{1}{3}ml^2$  となることを示せ．また， $m = 2.30 \times 10^{-1} \text{ kg}$ ,  $l = 3.05 \times 10^{-1} \text{ m}$  としたときの  $J_g = \frac{1}{3}ml^2$  と，5.2 節の実験で得られた  $J_g$  の値を比較し，両者に差異が生じている主な要因を述べよ．

質量  $m$  で長さ  $l$  の均質な直線棒の重心周りの慣性モーメントが  $J_g = \frac{1}{3}ml^2$  となることを示す．

直線棒の密度は  $\rho = \frac{m}{2l}$  によって求めることができるので，重心周りの慣性モーメントは次のように表される：

$$J_g = \int_{-l}^l x^2 \rho dx = \frac{m}{2l} \int_{-l}^l x^2 dx$$

ここで， $x^2$  は偶関数であるため，積分の結果は次のように求まる：

$$J_g = \frac{m}{2l} \int_{-l}^l x^2 dx = \frac{m}{2l} \cdot \frac{2}{3} l^3 = \frac{1}{3} ml^2$$

実験条件として，質量  $m = 2.30 \times 10^{-1} \text{ [kg]}$ ，長さ  $l = 3.05 \times 10^{-1} \text{ [m]}$  としたとき，理論的に求まる慣性モーメントの値を計算すると：

$$J_g = \frac{1}{3} ml^2 = \frac{1}{3} \cdot 2.30 \times 10^{-1} \cdot (3.05 \times 10^{-1})^2 = 7.1319 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

となる．

実験で得られた値  $J_g$  は，理論値と比較して若干大きい値が得られた．実世界における空気抵抗などの影響があると考えられる．

#### 課題 4

(4.12) 式より  $\omega_{n2}, \zeta_2$  を  $A_{\max}, T_{\text{peak}}$  により表せ．以下の式で  $\omega_{n2}$  と  $\zeta_2$  が表される：

$$\zeta_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi^2 + \left(\ln \frac{z_c}{A_{\max}}\right)^2}} \ln \frac{z_c}{A_{\max}}$$

$$\omega_{n2} = \frac{\sqrt{\pi^2 + \left(\ln \frac{z_c}{A_{\max}}\right)^2}}{T_{\text{peak}}}$$

#### 課題 5

(4.12) 式に  $\omega_{n2}, \zeta_2$  を  $T, \lambda$  により表せ．

周期  $T$  の式より

$$T = \frac{\pi}{\omega_{d2}} = \frac{\pi}{\omega_{n2}\sqrt{1 - \zeta_2^2}} \quad (1)$$

この式を  $\omega_{n2}$  について解くと，

$$\omega_{n2} = \frac{\pi}{T\sqrt{1 - \zeta_2^2}} \quad (2)$$

次に、式 (4.12) より、減衰率  $\lambda$  の式を用い，

$$\lambda = e^{-\zeta_2\omega_{n2}T} \quad (3)$$

両辺の自然対数を取る．

$$\ln(\lambda) = -\zeta_2\omega_{n2}T \quad (4)$$

式 (2) の  $\omega_{n2}$  の値を代入．

$$\ln(\lambda) = -\zeta_2 \cdot \frac{\pi}{\sqrt{1 - \zeta_2^2}} \quad (5)$$

この式を  $\zeta_2$  について解く．まず、両辺を  $-\pi$  で割る．

$$\frac{\ln(\lambda)}{-\pi} = \frac{\zeta_2}{\sqrt{1 - \zeta_2^2}} \quad (6)$$

次に、両辺を 2 乗

$$\left(\frac{\ln(\lambda)}{-\pi}\right)^2 = \frac{\zeta_2^2}{1 - \zeta_2^2} \quad (7)$$

この式を  $\zeta_2^2$  について解く．

$$\zeta_2^2 = \frac{\left(\frac{\ln(\lambda)}{-\pi}\right)^2}{1 + \left(\frac{\ln(\lambda)}{-\pi}\right)^2} \quad (8)$$

したがって、 $\zeta_2$  は次のように表される．

$$\zeta_2 = \sqrt{\frac{\left(\frac{\ln(\lambda)}{-\pi}\right)^2}{1 + \left(\frac{\ln(\lambda)}{-\pi}\right)^2}} \quad (9)$$

最後に、 $\zeta_2$  の値を式 (2) に代入し、 $\omega_{n2}$  を  $T$  と  $\lambda$  で表す .

$$\omega_{n2} = \frac{\pi}{T\sqrt{1 - \zeta_2^2}} \quad (10)$$

## 参考文献

- 1) 川田 (編著), 東, 市原, 浦久保, 大塚, 甲斐, 國松, 澤田, 永原, 南 : 倒立振子で学ぶ制御工学, 森北出版 (2017)
- 2) 川谷, 外川 : 現代制御理論を使った倒立振子の実験 [1]–[3], トランジスタ技術, No. 5, pp. 315–322, No. 6, pp. 367–373, No. 7, pp. 363–370 (1993)
- 3) 「初学者のための図解でわかる制御工学」特集号 (基礎編), システム/制御/情報, Vol. 56, No. 4 (2012)
- 4) 大山 : たしなみながら学ぶセンサ制御 - フィードバック制御から現代制御理論の応用まで, インターフェース, No. 9, pp. 80–119 (1993)
- 5) 大山, 工藤, 岡本, 藤沢 : 現代制御理論に基づいたデジタル制御系の設計法, インターフェース, No. 12, pp. 215–250 (1986)
- 6) 川田 : MATLAB/Simulink による制御工学入門, 森北出版 (2020)
- 7) 川田 : MATLAB/Simulink による現代制御入門, 森北出版 (2011)
- 8) 川田 : MATLAB/Simulink と実験で学ぶ制御工学 - PID 制御から現代制御まで -, TechShare (2013)