

(3) 倒立振子のパラメータ同定と安定化

1 実験目的

一般に，制御とは「制御対象があらかじめ与えられた望ましい状態に適合するように適当な操作を加えることである」と定義されている．この操作を完全に装置のみで行うことを自動制御という．自動制御を実現するために必要な素材は，センサ，アクチュエータ，コンピュータである．本実験では，「倒立振子」と呼ばれる実験装置を制御対象とし，自動制御を実現させるための一連の流れを習得することを目的としている．

1 周目の実験では，センサとコンピュータの特性を把握する方法を学ぶ．センサとしては，ロータリエンコーダを用いるが，センサ信号から倒立振子の振り角度や台車位置への変換係数を求める．また，センサ信号から速度算出を行う際に，ローパスフィルタによる処理の効果を調べる．つぎに，アクチュエータとして DC モータを用いるが，電力増幅器の極性を調整する．2 周目の実験では，倒立振子の自動制御を実現するコントローラを設計するコントローラを設計する手順を学ぶ．まず，制御対象のモデリングを行う．倒立振子のモデル（微分方程式）は第一原理により得ることができるが，それに含まれるパラメータの値は未知である．そこで，2 次遅れ系の特性に基づいてパラメータの値を決定する．このような操作をパラメータ同期という．つぎに，倒立振子のモデルを状態空間表現で表し，状態フィードバック形式のコントローラを設計し，倒立振子の安定化を実現する．

2 倒立振子実験装置の概要

2.1 倒立振子実験装置

倒立振子とは，棒を立てる遊びを自動制御により実現する実験装置である．本実験で用いる倒立振子実験装置のシステム構成図を図 2.1 に示す．

図 2.1 に示すように，倒立振子実験装置では，センサ（ロータリエンコーダ）で検出された振り角度，台車位置を元にコントローラ（パソコン）でアクチュエータ（DC モータ）に加える電圧を計算し，台車を左右に動かすことにより振子が倒れないように制御することができる．

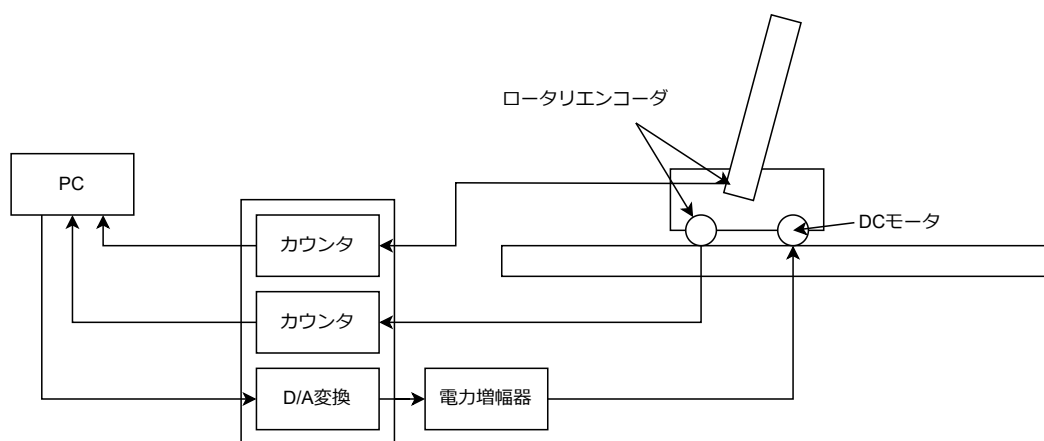


図 2.1 倒立振子実験装置

2.2 ロータリエンコーダとカウンタ

本実験装置では、大口径のピニオン軸に台車位置検出用、振子軸に振子角度検出用のロータリエンコーダが取り付けられている。いずれも US digital 社製 (E2-1024) の光学式/インクリメンタル型であり、軸が 1 回転すると 1024 パルスの A, B 信号 (ON/OFF 信号) が生成される。図 2.3 に示すようにロータリエンコーダとパソコンは I/O ボード Q8-USB のカウンタを介して接続されている。使用するソフトウェアは QuaRC は、デフォルトでは 4 通倍で動作するため、1 回転あたり 4096 カウントとなる

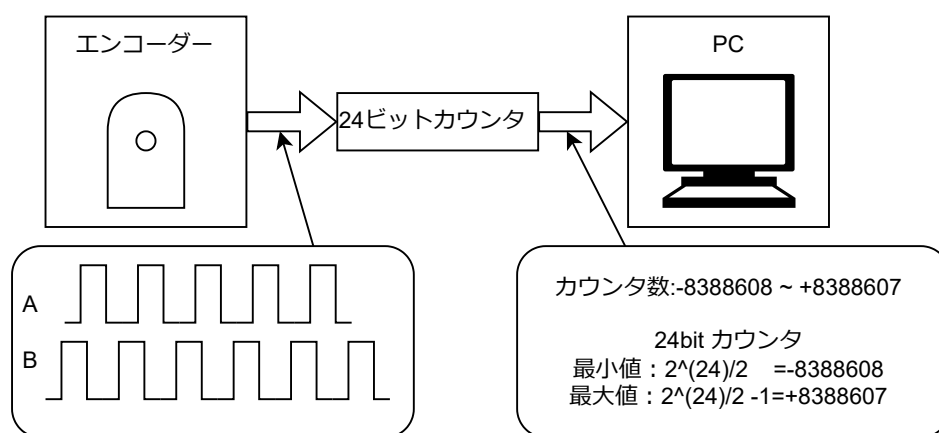


図 2.2 エンコーダーとカウンタ

2.3 DC モータと D/A 変換

本実験装置では、台車を左右に動かすために、少口径のピニオン軸に DC モータが取り付けられている。パソコンから D/A 変換を介して出力された指令電圧は小電力であるため、このままでは DC モータを高速回転させることはできない。そこで図 2.3 に示すリニア方式の電力増幅器を介して、指令電圧を DC モータに加える。

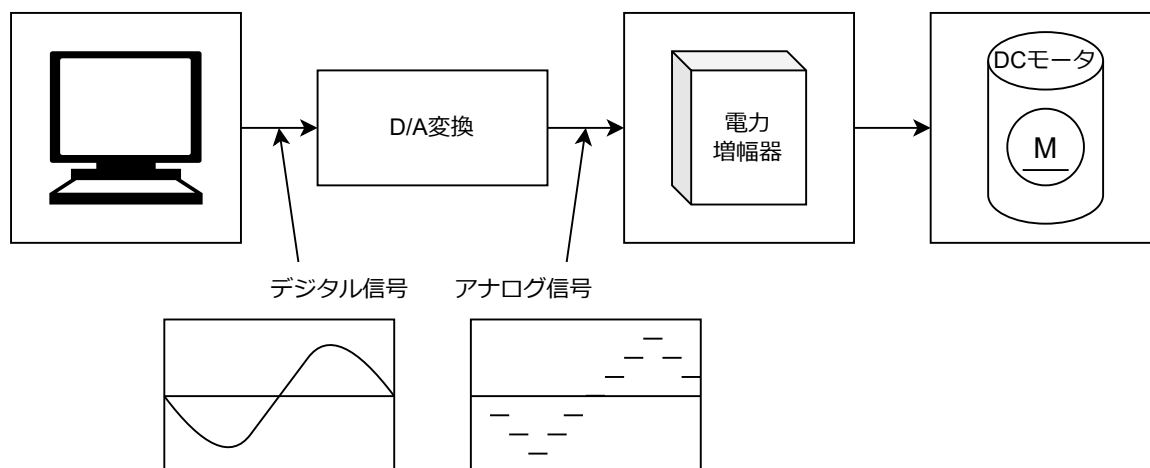


図 2.3 エンコーダーとカウンタ

2.4 速度算出

ロータリエンコーダから台車位置 $z(t)$ [m] を検出することができれば、 h が微小であるとき、近似的に速度を

$$\dot{z}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z(t) - z(t-h)}{h} \quad [m/s] \simeq \frac{z(t) - z(t-h)}{h} \quad [m/s] \quad (2.1)$$

により算出することができる. ここで, h [s] をセンシングのサンプリング周期とすると, $t = 0, 1, 2, \dots$ であるので, k 番目のサンプリング時刻での位置を $z[k] = z(kh)$ と記述することにより, (2.1) 式は

$$\dot{z}[k] = \frac{z[k] - z[k-1]}{h} \quad [m/s] \quad (2.2)$$

のように差分式で記述できる.(2.2) 式を後退差分近似 (オイラー近似) という. ロータリエンコーダはデジタルセンサのため, 接触ノイズを考えなくて良いが, 検出される値は離散値であり, 量子化誤差が発生する. この量子化誤差のため, (2.2) 式よりも算出される速度には高周波成分が含まれてしまう (チャタリング). そこで, ローパスフィルターを利用し

$$\dot{z}_f[k] = G_f(s)\dot{z}(t), \quad G_f(s) = \frac{1}{1 + T_f s} \quad (T_f > 0) \quad (2.3)$$

のようにしてチャタリングを除去する (図 2.8).



図 2.4 ローパスフィルタ

3 実験 1

3.1 実験装置のセッティング

以下のことに注意する．

- モータを動かす必要のある実験を行うときのみ，Universal Power Module の電源を ON にすること．
- モータを動かす実験が終了した後は必ず Universal Power Module の電源を OFF にすること．
- モータを動かす実験を行うときには必ず 1 人が Universal Power Module のスイッチに触れておき，暴走した場合にはただちに電源を OFF にすること，

3.2 実験 1-1: 振子角度とロータリエンコーダの動作

3.2.1 実験方法

ここでは，図 3.2 に示す振子の角度変位 $\theta(t)$ [rad] とロータリエンコーダのカウント数の関係を調査する．

実験 1-1a

1. 振子側のロータリエンコーダとカウンタの動作確認をする別紙「補足事項:QusRC の使用方法」を参考にして，図 A.1 の Simulink モデル "pend_count.slx" を作成し，ディレクトリ [D:\experiment_5S\group01\pend_encoder] に保存する．また，ビルドしてエラーがないことを確認した後，

```
>> print -dpdf = pend_count.pdf
>> load('pend_count.temp')
```

と入力して pdf ファイル，bmp ファイルを生成する．

2. Universal Power Module の電源が OFF 担っていることを確認する．振子を取り付けて振子がぶら下げた状態に静止させ，Simulink モデルを実行する．振子がぶら下がった状態から時計回り（あるいは反時計回り）に振子を手で回転させたときのロータリエンコーダのカウント数を Display により観測された値を表にまとめる．表 3.1 に記入
観測を終えたら，Simulink モデルの実行を終了させる．
3. 表 3.1 の関係から，1 カウントあたりの振子の角度変位 α [rad/カウント]（時計回りを正とする）を求める．

実験 1-1b

1. 図 A.2 の Simulink モデル "pend_count2.slx" を作成し，振子を時計回りに 1 回転したとき測定値が 2π [rad] (360 [deg]) となるようにする（"pend_count2.slx" は [D:\experiment_5S\group01\pend\pend_encoder] に保存すること）．ただし，Gain (count to rad) は実験 1-1 で求めた値（ただし，"1000/pi" などのように計算式をそのまま入力する），Gain (rad to deg) は [rad] から [deg] への変換係数 "180/pi" を設定する．また，"pend_count2.slx" をビルドしてエラーがないこ

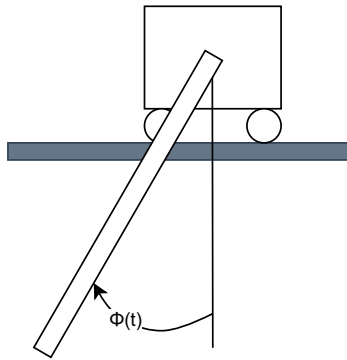


図 3.1 振子の角度変位

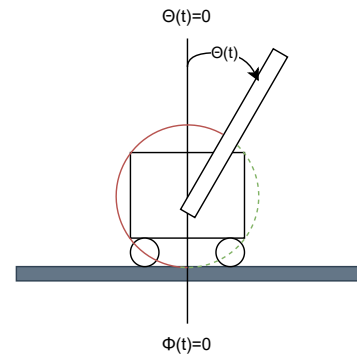


図 3.2 $\theta(t)$ と $\phi(t)$ の関係

とを確認した後, "pend_count2.pdf", "pend_count2.bmp" という名前の pdf ファイル, bmp ファイルを生成する

2. 実験を開始し, Display (count), Display (rad), Display (deg) により運動を知た値を表にまとめる. 観測を終えたら, Simulink モデルの実行を終了させる.

実験 1-1c

1. 振子がぶら下がった状態を基準とした角度変位 $\theta(t)$ と倒立状態を基準とした角度変位 $\phi(t)$ との関係は

$$\theta(t) = \begin{cases} \phi(t) - \pi & (\phi(t) \geq 0 : \text{時計回りに回転}) \\ \phi(t) + \pi & (\phi(t) < 0 : \text{反時計回りに回転}) \end{cases} \quad (3.1)$$

である (図 3.2 参照). ただし, $\phi(t)$, $\theta(t)$ とともに時計回りを正とする. 振子がぶら下がった状態から時計回り (あるいは反時計回り) に回転させたとき, 振子の倒立点で角度変位が 0 [rad] (0 [deg]) となるように図 A.2 の Simulink モデルを修正し, D:\experiment_5S\group01\pend\pend_encoder に "pend_count3.slx" という名前で保存する. また, "pend_count3.slx" をビルドしてエラーがないことを確認した後, "pend_count3.pdf", "pend_count3.bmp" という名前の pdf ファイル, bmp ファイルを生成する

2. 振子がぶら下がった状態で静止していることを確認した後, 実験を開始し, Display (deg) により振子の角度 $\theta(t)$ [deg] を観測し, その値を表にまとめる. 観測を終えたら, Simulink モデルの実行を終了させる. なお実験では, 手で振子を時計回り (あるいは反時計回り) に回転させたとき, 振子の倒立状態での $\theta(t)$ が 0[deg] となっていることを確認した後, 振子を右側に水平とすると $\theta(t)$ が 90[deg], 振子を左側に水平とすると $\theta(t)$ が -90[deg] となっていることを確認する.

3.2.2 実験結果

実験 1-1a 図 A.1 の Simulink モデルを実行したときに得られた結果を表 3.1 に示す. また, 1 カウントあたりの角度変位は

$$\alpha = \quad \quad \quad [\text{rad}/\text{カウント}]$$

である (計算式も記入すること).

実験 1-1b 図 A.2 の Simulink モデルを実行したときに得られた結果を表 3.2 に示す.

表 3.1 ロータリエンコーダとカウンタの動作確認（振子）

回転の方向	測定値 [カウント]
時計回りに 1 回転 (+ 360 [deg])	
反時計回りに 1 回転 (- 360 [deg])	

表 3.2 "pend_count2.slx" の動作確認（カウント数から角度変位への変換）

回転の方向	測定値 [カウント]	測定値 [rad]	測定値 [deg]
時計回りに 1 回転 (+360 [deg])			
反時計回りに 1 回転 (-360 [deg])			

実験 1-1c Simulink モデルを実行したときに得られた結果を表 3.3 に示す．なお，角度はおおよそその値で良く，0, 90, -90 のいずれかを記入すること．

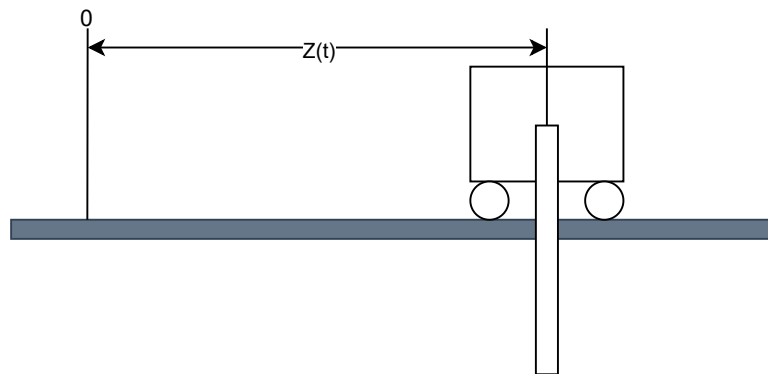
表 3.3 "pend_count3.slx" の動作確認（倒立点を基準とした角度 $\theta(t)$ ）

回転方向	振子の状態	測定値 [deg]	回転方向	振子の状態	測定値 [deg]
時計回り	倒立（真上）		反時計回り	倒立（真上）	
	右水平			右水平	
	左水平			左水平	

3.3 実験 1-2: 台車位置とロータリエンコーダの動作

3.3.1 実験方法

ここでは，図 3.3 に示す台車の位置変位 $z(t)$ [m] とロータリエンコーダのカウント数の関係を調べる．

図 3.3 台車の位置変位 $z(t)$

実験 1-2a

1. 台車側のロータリエンコーダとカウンタの動作確認をする図 A.3 の Simulink モデル"cart_count.slx" を作成し，D:\experiment_5S\group01\cart_encoder に保存する．また，ビルドでエラーがないことを確認した後，"cart_count.pdf"，"cart_count.bmp" という名前の pdf ファイル，bmp ファイルを生成し，pdf ファイルはデスクトップ上の"bcpdfcrop-multi.bat" により余白を取り除く．

2. Universal Power Module の電源が OFF になっていることを確認し，Simulink モデルの実行を開始する．台車を手で右方向（あるいは左方向）に 0.8 [m] 移動させたときのロータリエンコーダのカウント数を Display により観測する．これを 4 回，繰り返す．表にまとめる．表 3.4 に記入し，観測を終えたら，Simulink モデルの実行を終了させる．
3. 図 3.4 の結果を利用し，1 カウントあたりの台車の位置変位 β [m/カウント] を求める．

実験 1-2b

1. 図 A.4 の Simulink モデル "cart_count2.slx" を作成し，台車を右方向に 1 [m] 移動させたときに測定値が +1 [m] となるようにする（"cart_count2.slx" は D:D:\experiment_5S\group01\pend\pend_encoder に保存すること）．ただし，Gain は実験 1-2a で求めた β の値に設定する．また，"cart_count2.slx" をビルドしてエラーがないことを確認し，"cart_count2.pdf"，"cart_count2.bmp" という名前の pdf ファイル，bmp ファイルを生成し，pdf ファイルはデスクトップ上の "bcpdfcrop-multi.bat" により余白を取り除く．
2. Simulink モデルの実行を開始し，Display (meter), Display (count) により観測された値を表にまとめる．表 3.5 に記入し，観測を終えたら，Simulink モデルの実行を終了させる．

3.3.2 実験結果

実験 1-2a 図 A.3 の Simulink モデルを実行したときに得られた結果を表 3.4 に示す．これより，1 カウントあたりの位置変位は

$$\beta = \quad \quad \quad [\text{m/カウント}]$$

である．

表 3.4 ロータリエンコーダとカウンタの動作確認（台車）

(a) 右方向に 0.8 [m] （+0.8 [m]）移動		(b) 左方向に 0.8 [m] （-0.8 [m]）移動	
	測定値 [カウント]		測定値 [カウント]
1 回目		1 回目	
2 回目		2 回目	
3 回目		3 回目	
4 回目		4 回目	

実験 1-2b 図 A.4 の Simulink モデルを実行したときに得られた結果を表 3.5 に示す．

表 3.5 "cart_count2.slx" の動作確認（カウント数から位置変位への変換）

移動方向・距離	測定値 [カウント]	測定値 [m]
右方向に 0.5 [m] （+0.5 [m]）移動		
左方向に 0.5 [m] （-0.5 [m]）移動		

3.4 実験 1-3: DC モータと D/A 変換の動作

3.4.1 実験方法

1. 図 A.5 の Simulink モデル "da_conv.slx" を作成し, D:\experiment_5S\group01\da に保存する. ただし, 終了時間を 1 秒に設定する (絶対に忘れないこと!!). また, ビルドしてエラーがないことを確認した後, "da_conv.pdf", "da_conv.bmp" という名前の pdf ファイル, bmp ファイルを生成し, pdf ファイルはデスクトップ上の "bcpdfcrop-multi.bat" により余白を取り除く.
2. 台車をレールの中央付近に配置する. Universal Power Module の電源を ON にした後, Simulink モデルの実行を開始する. D/A 変換を介して DC モータに一定の電圧が加わり, 台車がほぼ一定速度で移動する. 正の電圧 +1 [V], 負の電圧 -1 [V] を加えたときに台車が左右どちらの向きに移動するのかを観察し, 表 3.6 に記入する.

3.4.2 実験結果

図 A.5 の Simulink モデルを実行したときの実験結果を表 3.6 に示す.

表 3.6 指令電圧と台車の移動方向

指令電圧 [V]	移動方向
+1	
-1	

3.5 実験 1-4: 台車の速度算出

3.5.1 実験方法

1. カレントディレクトリを D:\experiment_5S\group01\da_encoder とし, 配布する Simulink モデル "da_conv_count.slx" (図 A.6) を開く. そして, Simulink ブロックを
 - Gain (polarity): ゲインに "1" もしくは "-1" を入力 (3.4 節を参照)
 - Gain (count to meter): ゲインを 1 カウントあたりの台車位置変位 1 に変更 (3.3 節を参照)と設定し, 書き保存する. また, ビルドしてエラーがないことを確認した後, "da_conv_count.pdf", "da_conv_count.bmp" という名前の pdf ファイル, bmp ファイルを生成し, pdf ファイルはデスクトップ上の "bcpdfcrop-multi.bat" により余白を取り除く.
2. 台車をレールの中央付近に配置する. Universal Power Module の電源を ON にした後, Simulink モデルの実行を開始する. D/A 変換を介して DC モータに一定の電圧 $u(t) = 1$ [V] が加わり, 台車が右方向に移動する. 実行終了後,

```
>> save filter_data = t dz dzf1 dzf2 dzf3
```

と入力し, 実験データを "filter_data.mat" という名前の mat ファイルに保存する.

3. 配布する M ファイル "plot_filter.m" を実行することによってグラフを描く.

4 倒立振子のパラメータ同定と状態フィードバックによる安定化

4.1 倒立振子の数学モデル

図 4.1 に示す倒立振子システムの数学モデルは，振子が台車に与える影響が十分小さいと仮定すると，

$$\begin{cases} \ddot{z}(t) = -a\dot{z}(t) + bv(t) \\ ml \cos \theta(t) \ddot{z}(t) + J\ddot{\theta}(t) = -c\dot{\theta}(t) + mgl \sin \theta(t) \end{cases} \quad (4.1)$$

で与えられる．ただし， $J = J_s + ml^2$ であり， $z(t)$ ：台車の変位， $\theta(t)$ ：振子の角度， $v(t)$ ：電力増幅器に加える指令電圧， m ：振子の質量， l ：軸から振子の重心までの距離， $J[\text{kg} \cdot \text{m}^2]$ ：振子の重心における慣性モーメント， $c[\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}]$ ：軸の粘性摩擦係数， a, b ：台車，モータ，電力増幅器の特性により定まる定数， $g[\text{m}/\text{s}^2]$ ：重力加速度を表す．

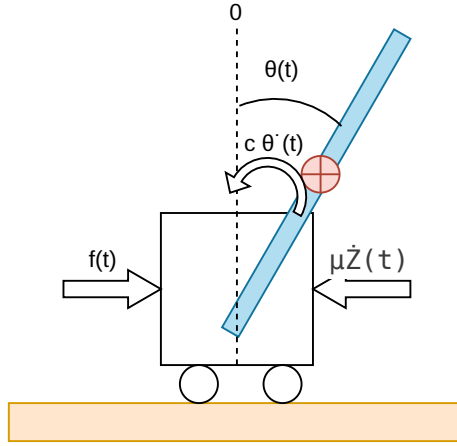


図 4.1 倒立振子システム

4.2 台車のパラメータ同定

台車駆動系全体の運動方程式（(4.1) 式の上式）のふるまいはパラメータ a, b の値により決まる．しかしながら，このパラメータ a, b を直接的に測定することは困難である．そこで，ここでは図 4.2 に示す台車駆動系の P 制御を行うことによって，未知パラメータ a, b を決定する方法について説明する．まず， $v(s)$ から $z(s)$ への伝達関数 $P(s)$ を求めると，

$$P(s) = \frac{b}{s(s+a)} \quad (4.2)$$

である．台車を P コントローラ

$$v(t) = k_P (r(t) - z(t)) \quad (4.3)$$

により制御したとき，台車位置の目標値 $r(s)$ から制御量 $z(s)$ への伝達関数 $G(s)$ は

$$G(s) = \frac{P(s)k_P}{1 + P(s)k_P} = \frac{\omega_{n1}^2}{s^2 + 2\zeta_1\omega_{n1}s + \omega_{n1}^2}, \quad (4.4)$$

$$\omega_{n1} = \sqrt{\frac{bk_P}{a}}, \quad \zeta_1 = \frac{a}{2\omega_{n1}} = \frac{a}{2\sqrt{bk_P}}$$

となる．ここで，目標値を

$$r(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ z_c & (t \geq 0) \end{cases} \quad (4.5)$$

とした 2 次遅れ要素のステップ応答は $0 < \zeta_1 < 1$ のとき，

$$z(t) = z_c \left\{ 1 - e^{-\zeta_1 \omega_{n1} t} \left(\cos \omega_{d1} t + \frac{\zeta_1}{\sqrt{1 - \zeta_1^2}} \sin \omega_{d1} t \right) \right\} \quad (4.6)$$

$$\omega_{d1} = \omega_{n1} \sqrt{1 - \zeta_1^2}$$

であり，オーバーシュート $A_{\max} = z_{\max} - z_c$ およびそのときの時間 T_{peak} は

$$A_{\max} = z_c e^{-\zeta_1 \omega_{n1} T_{\text{peak}}}, \quad T_{\text{peak}} = \frac{\pi}{\omega_{d1}} \quad (4.7)$$

となる．

したがって，実験データより $T_{\text{peak}}, A_{\max}$ を求めると，(4.7) 式より ω_{n1}, ζ_1 が定まるから，未知パラメータ a, b が (4.4) 式を逆算することにより計算できる．

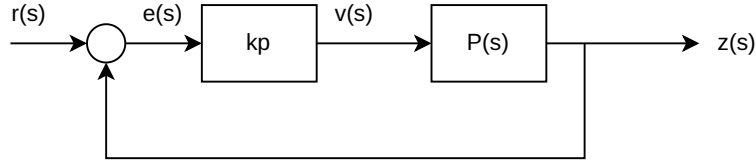


図 4.2 台車駆動系の P 制御

4.3 振子のパラメータ同定

台車を固定すると，(4.1) 式より振子の非線形モデルは

$$J\ddot{\theta}(t) = -c\dot{\theta}(t) - mgl \sin \theta(t) \quad (J = J_s + ml^2) \quad (4.8)$$

となる．振子のパラメータ m, l, J_s である．振子の質量 m と重心位置 l は測定でき，振子の慣性モーメントは床に対して下ろすことによりメジャーで測定できる．しかしながら，慣性モーメント J_s を台車の動きに関連して測定することは難しい．そこで，ここでは図 4.4 に示す振子の自由振動の測定データより J_s を決定する方法について説明する．

まず，振子の角度 $\theta(t)$ を振子が床から下への大振幅を持つ $\theta(t)$ について二乗近似し，(4.8) 式を次のように書き換える：

$$J\ddot{\theta}(t) = -c\dot{\theta}(t) - mgl \sin \theta(t) \quad (4.9)$$

と書き換える．このとき， $\theta(t)$ に近づくと，振子のモデルは

$$J\ddot{\theta}(t) + 2\zeta_2\omega_{n2}\dot{\theta}(t) + \omega_{n2}\theta(t) = 0, \quad \omega_{n2} = \frac{mgl}{J}, \quad \zeta_2 = \frac{c}{2\sqrt{mglJ}} \quad (4.10)$$

という 2 次の微分方程式で表されることがわかる．なお，振子に初期角度 $\theta(0) = \theta_0$ （初期速度は 0）を与えると (4.10) 式の解（自由振動解）は次のように表される：

$$\theta(t) = e^{-\zeta_2\omega_{n2}t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\zeta_2}{\sqrt{1-\zeta_2^2}} \sin \omega_d t \right), \quad \omega_d = \omega_{n2} \sqrt{1-\zeta_2^2} \quad (4.11)$$

となり，周期 T ，減衰率 λ は一定値

$$T = \frac{2\pi}{\omega_d}, \quad \lambda = \frac{A_{k+1}}{A_k} = e^{-\zeta_2\omega_{n2}T} \quad (4.12)$$

である．

以上より，実験データより振動周期 $T = T_1 - T_2$ および減衰率 $A_2/A_1 = A_3/A_2$ を求めると，(4.12) 式をもとに ω_{n2} と ζ_2 が決定できるから，未知パラメータ c, J_s が (4.10) 式を逆算することにより計算できる．

4.4 状態フィードバックによる倒立振子の安定化

振子が $\theta(t) = 0$ の近傍であると仮定すると，

$$\cos \theta(t) \approx 1, \quad \sin \theta(t) \approx \theta(t)$$

と近似できるから，(4.1) 式より近似線形化モデル

$$\begin{cases} \ddot{z}(t) = -a\dot{z}(t) + bv(t) \\ ml\ddot{\theta}(t) + J\ddot{\theta}(t) = -c\dot{\theta}(t) + mgl\theta(t) \end{cases} \quad (4.13)$$

が得られる．ここで，

$$\text{状態変数: } \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \\ \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix}$$

$$\text{操作量: } u(t) = v(t)$$

とすると，(4.13) 式は状態方程式と呼ばれる 1 階の微分方程式

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (4.14)$$

で記述することができる．ただし，

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b/ml & mgl/J & -c/J \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 0 \\ mlb/J \end{bmatrix}$$

である．

そこで，コントローラとして状態フィードバック

$$u(t) = Kx(t), \quad K = [k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4] \quad (4.15)$$

を用いて倒立振子を安定化することを考える．状態方程式 (4.14) 式と状態フィードバック (4.15) 式で構成されるシステムは

$$\dot{x}(t) = Mx(t), \quad M = A + BK \quad (4.16)$$

である．(4.16) 式の解は

$$x(t) = e^{Mt}x(0) \quad (4.17)$$

となるので，システムの安定性は M の固有値により決まり， M の固有値の実部がすべて負であれば，そのときに限りシステムは安定である．すなわち

- 任意の初期値 $x(0)$ に対して， $t \rightarrow \infty$ で $x(t) \rightarrow 0$

となる (注 4)．したがって， M の固有値の実部がすべて負となるように状態フィードバックゲイン K を決定すれば，振子は倒立する (倒立振子は安定化される)．

本実験では，アッカーマンのアルゴリズムにより M の固有値が指定した値 p_i ($i = 1, 2, 3, 4$) となるように状態フィードバックゲイン K を定める．ただし， $\text{Re}[p_i] < 0$ となるように p_i を決める．

5 実験 2

5.1 実験 2-1: 台車のパラメータ同定

5.1.1 実験方法

1. カレントディレクトリを `D:\experiment_5S\group01\cart_ident` とし，配布する Simulink モデル "ex_cart_ident.slx" (図 A.7) を開く．"ex_cart_ident.slx" は目標値 z_c ，比例ゲイン k_p が "kP" に設定されている．つぎに，Subsystem (Inverted Pendulum) 内の Simulink ブロックを
 - Gain (polarity): ゲインに "1" もしくは "-1" を入力 (3.4 節を参照)
 - Gain (count to rad): ゲインを 1 カウントあたりの振子角度変位 α に変更 (3.2 節を参照)
 - Gain (count to meter): ゲインを 1 カウントあたりの台車位置変位 β に変更 (3.3 節を参照)

5.2 実験 2-2: 振子のパラメータ同定

5.2.1 実験方法

振子を取り外して，その質量 m をはかりで測定すると $m = 2.30 \times 10^{-1}$ [kg] であった．また振子をひもでつるして重心位置を調べると $l = 3.05 \times 10^{-1}$ [m] であった．

1. カレントディレクトリを `D:\experiment_5S\group01\pend_ident` に変更する．Simulink モデル "ex_pend_ident.slx" (図 A.8) を開き，5.1 節と同様に Subsystem (Inverted Pendulum) 内の Simulink ブロック (三つの Gain) の設定を変更した後，上書き保存する．また，ビルドしてエラーがないことを確認し

た後, "ex_pend_ident.pdf", "ex_pend_ident.bmp" という名前の pdf ファイル, bmp ファイルを生成し, pdf ファイルはデスクトップ上の "bcpdfcrop-multi.bat" により余白を取り除く.

2. 台車に振子を取り付け, 振子を振ったときに台車が動かないように, 手でしっかりと台車を固定する. また, 振子をぶら下がった状態で静止させる.
3. ここで, Simulink モデルの実行を開始し, 10 秒以内に振子を 90 [deg] (水平) 付近まで傾けて静かに手を離し, 振子角度 $\theta(t)$ を計測する. 30 秒で実行は終了するので, コマンドウィンドウで

```
>> save pend_data t phi
```

と入力し, 実験データを "pend_data.mat" という名前の mat ファイルに保存する. 同様に, Simulink モデルの実行を開始し, 10 秒以内に振子を 30 [deg] 付近まで傾けて静かに手をはなし, 30 秒で実行は終了するので, 実験データを "pend_data2.mat" という名前の mat ファイルに保存する.

t.pdf", "ex_cart_ident.bmp" という名前の pdf ファイル, bmp ファイルを生成し, pdf ファイルはデスクトップ上の "bcpdfcrop-multi.bat" により余白を取り除く.

- (2) (振子を台車に取り付けたまま) レールの中央付近に台車を配置する. つぎに,

- 指令電圧 $v(t)$ が制限値 ± 10 [V] を超えない
- オーバーシュートを生じる
- 台車がレールを超えない ($0 < z_c \leq 0.2$ の範囲で設定)

という制約を満足する比例ゲイン $k_p > 0$, 目標値 $z_c > 0$ を 3 種類選ぶ. 1 種類目の k_p, z_c をコマンドウィンドウで

```
>> kP = ***; zc = ***;
```

と入力 ("***" には各項で考えた正数) した後, ビルドしてエラーがないことを確認する. Simulink モデルの実行を開始し, オーバーシュートが生じるかどうかを確認する (Scope をダブルクリックして開いておくと, リアルタイムで台車位置を観測できる). 実験終了後, コマンドウィンドウで

```
>> save cart_data t z v kP zc
```

と入力し, 実験データを "cart_data.mat" という名前の mat ファイルに保存する. 同様に, 以下の実験を行う.

- 2 種類目の k_p, z_c を用いて実験を行い, 実験データを "cart_data2.mat" という名前の mat ファイルに保存する
- 3 種類目の k_p, z_c を用いて実験を行い, 実験データを "cart_data3.mat" という名前の mat ファイルに保存する

- (3) 配布する M ファイル "plot_cart.m" を実行することにより, 以下のことを行う.

- (a) 1 種類目の実験データからオーバーシュート A_{\max} , 行き過ぎ時間 T_{peak} を抽出する.

表 5.1 に記入

(b) (4.7) 式より固有角周波数 ω_{n1} , 減衰係数 ζ_1 をオーバーシュート A_{\max} , 行き過ぎ時間 T_{peak} により表す .

$$\omega_{n1} = \quad , \quad \zeta_1 =$$

この関係を利用し , 実験により得られた $A_{\max}, T_{\text{peak}}$ から ω_{n1}, ζ_1 を定める .

(c) 2 種類目の z_c, k_p : M ファイル "plot_cart2.m" を実行し , 抽出された $A_{\max}, T_{\text{peak}}$ の値 , 定められた ω_{n1}, ζ_1 の値を表に記入

(d) 3 種類目の z_c, k_p : M ファイル "plot_cart3.m" を実行し , 抽出された $A_{\max}, T_{\text{peak}}$ の値 , 定められた ω_{n1}, ζ_1 の値を表に記入

(4) 配布する M ファイル "idcart.m" を実行することにより , 以下のことを行う .

(a) 得られた ω_{n1}, ζ_1 をコマンドウィンドウに入力することで , 実験結果と同定された値を用いたシミュレーション結果を描画し , 両者がほぼ一致していることを確認する .

(b) (4.4) 式より未知パラメータ a, b を ω_{n1}, ζ_1 により表す .

$$a = \quad , \quad b =$$

この関係を利用して未知パラメータ a, b の値を定める .

(c) 2 種類目の z_c, k_p : M ファイル "idcart2.m" を実行し , 定められた a, b の値を表に記入

(d) 3 種類目の z_c, k_p : M ファイル "idcart3.m" を実行し , 定められた a, b の値を表に記入

5.2.2 実験結果

(a) 1 種類目の実験データ

- k_p, z_c を

$$k_p = \quad , \quad z_c =$$

と選び , 図 A.7 の Simulink モデルを実行したときに得られた実験データから抽出された $A_{\max}, T_{\text{peak}}$ の値を表 5.1 に示す .

- 実験方法 (3) の (ii) で示した関係式により定められた ω_{n1}, ζ_1 の値を表 5.2 に , 実験結果と同定された値を用いたシミュレーション結果を示す .
- 実験方法 (4) の (ii) で示した関係式により定められた a, b の値を表 5.3 に示す .

表 5.1 台車のステップ応答における $A_{\max}, T_{\text{peak}}$

オーバーシュート A_{\max} [m]	行き過ぎ時間 T_{peak} [s]

表 5.2 台車のステップ応答における ω_{n1}, ζ_1

固有角周波数 ω_{n1}	減衰係数 ζ_1

表 5.3 台車駆動系のパラメータ

a	
b	

(b) 2 種類目の実験データ

- k_p, z_c を

$$k_p = \quad , \quad z_c =$$

として (a) と同様の実験を行い，結果を表 5.4，表 5.5，図 5.2 および表 5.6 に示す．

表 5.4 台車のステップ応答における $A_{\max}, T_{\text{peak}}$

オーバーシュート A_{\max} [m]	行き過ぎ時間 T_{peak} [s]

表 5.5 台車のステップ応答における ω_{n1}, ζ_1

固有角周波数 ω_{n1}	減衰係数 ζ_1

表 5.6 台車駆動系のパラメータ

a	
b	

(c) 3 種類目の実験データ

- k_p, z_c を

$$k_p = \quad , \quad z_c =$$

として (a) と同様の実験を行い，結果を表 5.7，表 5.8，図 5.3 および表 5.9 に示す．

表 5.7 台車のステップ応答における $A_{\max}, T_{\text{peak}}$

オーバーシュート A_{\max} [m]	行き過ぎ時間 T_{peak} [s]

表 5.8 台車のステップ応答における ω_{n1}, ζ_1

固有角周波数 ω_{n1}	減衰係数 ζ_1

表 5.9 台車駆動系のパラメータ

a	
b	

5.3 実験 2-3: 状態フィードバックによる安定化

5.3.1 実験方法

実験 2-3a

1. カレントディレクトリを `D:\experiment_5S\group01\stable` に移動する．配布する M ファイル "`ip_design.m`" を実行し，メニューにしたがってパラメータ同定実験で得られたパラメータおよび指定する $M = A + BK$ の固有値を入力する．ただし， M の固有値は表 5.16 のように指定する．このとき，極配置法 (MATLAB 関数 "`acker`") により状態フィードバックゲイン $K = [k_1, k_2, k_3, k_4]$ が求められる．

表 5.16 に記入

2. `D:\experiment_5S\group01\stable` にある Simulink モデル "`ex_stable.slx`" (図 A.9) を開き，5.1 節と同様に Subsystem (Inverted Pendulum) 内の Simulink ブロック (三つの Gain) の設定を変更し，上書き保存する．また，"`ex_stable.pdf`", "`ex_stable.bmp`" という名前の pdf ファイル，bmp ファイルを生成し，pdf ファイルはデスクトップ上の "`bcpdfcrop-multi.bat`" により余白を取り除く．つぎに，Simulink モデル "`ex_stable.slx`" をビルドしてエラーが生じないことを確認する．そして，

Manual Switch が Constant 側になっている (指令電流を $u(t) = 0$ [V] とすることになるので，台車は静止する)

振子がぶら下がった状態で静止していることを確認する．

3. Simulink モデルの実行を開始する．実行開始後，振子を手で静かに倒立状態にし，Manual Switch をダブルクリックして Gain 側にする．状態フィードバックを介して倒立状態が維持され，振子が倒立状態になったことを確認する．実験終了後，コマンドウィンドウで

```
>> save stable_data1 t x u dz dtheta
```

と入力し，実験データを "`stable_data1.mat`" という名前の mat ファイルに保存する．

4. M の固有値 p_i を表 5.17 のように指定し，同様の実験を行う．また，振子の先を軽くつついたとき，表 5.16 のように指定した場合との差異を調べる．また，必要に応じて

```
>> save stable_data2 t x u dz dtheta
```

と入力し，実験データを "`stable_data2.mat`" という名前の mat ファイルに保存する．

実験 2-3b 実験 2-3a では，振子が真下で静止している状態で Simulink モデル "`ex_stable.slx`" の実行を開始し，振子が真上にあるときの角度を正確に 0 [deg] として検出するようにしている (実験 1-1c を参照)．

実験 2-3b では，あえて振子が真下から少しだけずれている状態で Simulink モデル "`ex_stable.slx`" の実行を開始し，図 5.8 のように振子の角度検出にずれがあるときのふるまいを調べる．

5.3.2 実験結果

実験 2-3a 設計されたコントローラのゲイン K を表 5.16 に示す．また，図 A.8 の Simulink モデルを実行して安定化を実現したときの設計例 1 と設計例 2 のふるまいの違いを表 5.18 に示す．

表 5.10 設計例 1

M の固有値	設計された K
$p_1 = -5$	k_1
$p_2 = -5$	k_2
$p_3 = -5$	k_3
$p_4 = -5$	k_4

表 5.11 設計例 2

M の固有値	設計された K
$p_1 = -5 + 5j$	k_1
$p_2 = -5 - 5j$	k_2
$p_3 = -5 + 5j$	k_3
$p_4 = -5 - 5j$	k_4

表 5.12 安定化の様子

反応の速さ	安定度	収束の速さ	チャタリングの影響
設計例 1			
設計例 2			

実験 2-3b 台車および振子の静止位置がどのようになったのかを，記述すること．

参考文献