曲线曲面

刘世光
天津大学计算机学院

内容

- 参数表示
  - 参数表示的数学原理
  - 参数曲线
  - 参数曲面

内容

- 参数曲面表示
  - 参数表示的数学原理
  - 参数曲线
  - 参数曲面

参数表示的数学原理：直线段

- 考虑直线段 $P_0(x_0, y_0, z_0) \rightarrow P_1(x_1, y_1, z_1)$
  - 参数表示

$$\mathbf{R}(t) = (1-t)\mathbf{P}_0 + t\mathbf{P}_1 \qquad 0 \le t \le 1$$

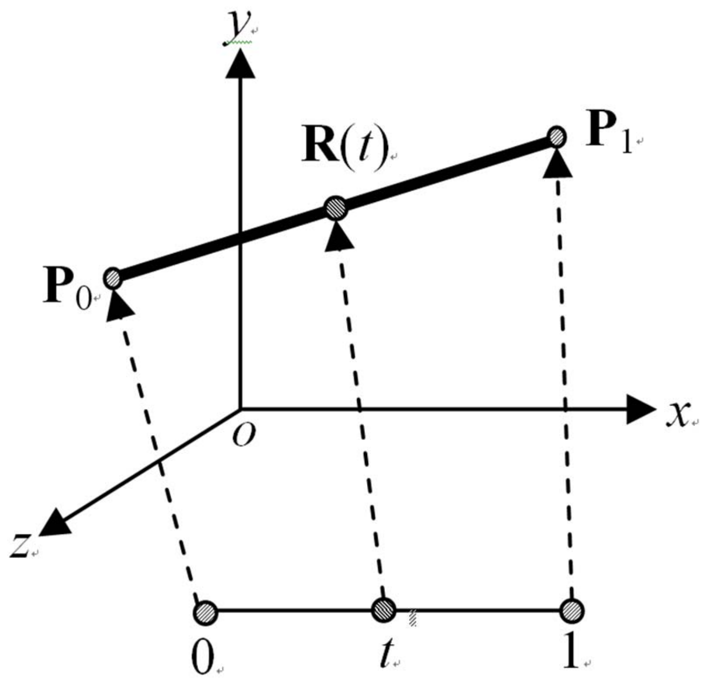
  - 分量表示

$$\begin{cases} x(t) = (1-t)x_0 + tx_1 \\ y(t) = (1-t)y_0 + ty_1 \\ z(t) = (1-t)z_0 + tz_1 \end{cases} \qquad 0 \le t \le 1$$

  - 参数空间：

$$0 \le t \le 1$$

参数表示的数学原理：直线段



- 直线段参数表示的直观几何意义
  - 参数空间中每一个参数(点)都对应于直线段上一个点
  - 参数空间的两个端点对应于直线段的两个端点

$$\mathbf{R}(0) = \mathbf{P}_0$$
$$\mathbf{R}(1) = \mathbf{P}_1$$

参数表示的数学原理：曲线

- 一般三维参数曲线形式：

$$\mathbf{R}(t)=\left(x(t),\ y(t),\ z(t)\right)$$

  - 参数空间中每一个t对应于曲线上一个点$\mathbf{R}(t)$
  - 图形学中，参数空间通常是有限区间，此时参数曲线称为参数曲线段

参数表示的数学原理：平面

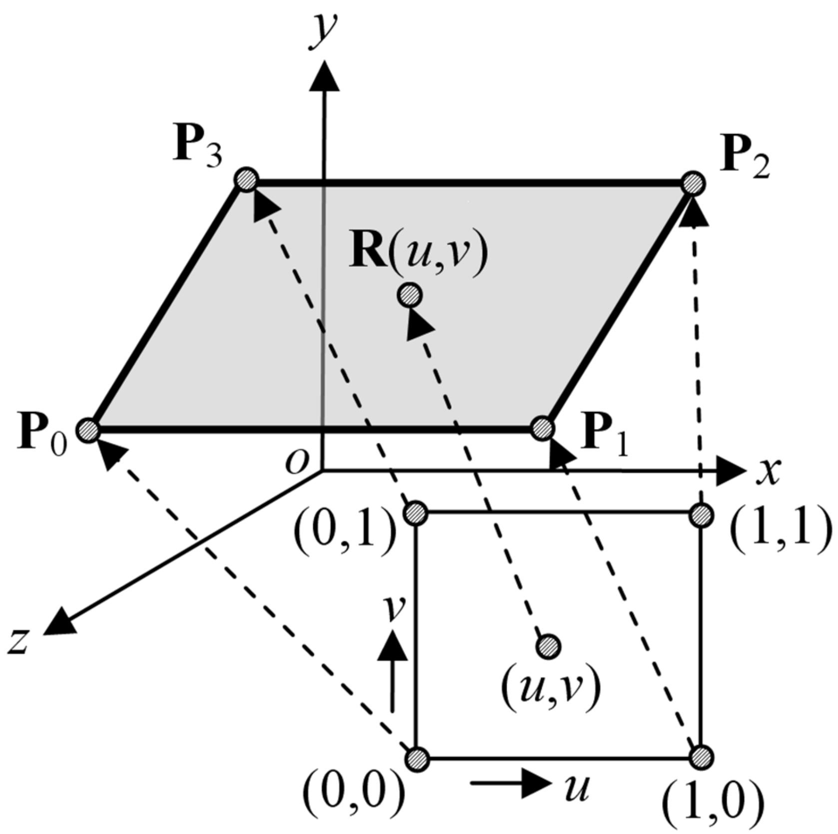
- 双线性四边面片：

$$\mathbf{R}(u,v)=(1-v)\left[(1-u)\mathbf{P}_0+u\mathbf{P}_1\right]+v\left[(1-u)\mathbf{P}_3+u\mathbf{P}_2\right]$$

$$(u,v)\in[0,1]\times[0,1]$$

- 四边面片的四个顶点$\mathbf{P}_0$、$\mathbf{P}_1$、$\mathbf{P}_2$和$\mathbf{P}_3$对应于参数曲面的四个角点$\mathbf{R}(0,0)$、$\mathbf{R}(1,0)$、$\mathbf{R}(1,0)$和$\mathbf{R}(0,1)$

曲面参数表示的数学原理



双线性四边面片

参数表示的数学原理：曲面

- 一般形式的空间参数曲面

$$\mathbf{R}(u,v)=\big(x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)\big)$$

- 参数空间中每一点$(u,\ v)$对应于曲面上一点$\mathbf{R}(u,v)$

- 如果曲面的参数空间是一个有限的定义域(如矩形)，则对应的参数曲面称为参数曲面片

参数表示的优势

- 参数表示是显式的
  - 对每一个参数值，可以直接计算曲面上的对应点
  - 参数表示的物体可以方便地转化为多边形逼近表示
- 曲面上的几何量计算简便(微分几何)：法向、曲率、测地线、曲率线等
- 特殊形式的参数表示的外形控制十分直观
  - Bézier、B-样条、NURBS (Non-Uniform Rational B-Spline, 非均匀有理B-样条)曲线/曲面。

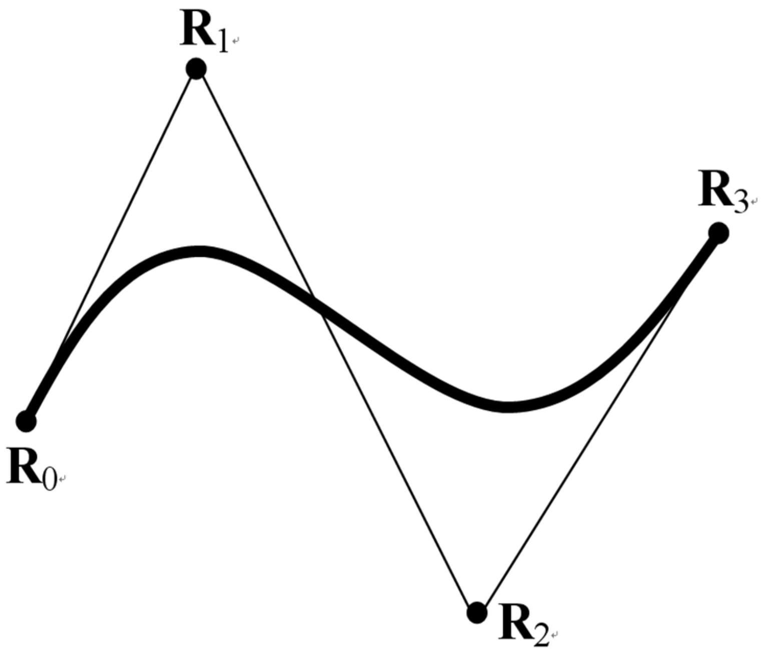
内容

- 参数曲面表示
  - 参数表示的数学原理
  - 参数曲线
    - Bézier曲线
    - B-样条曲线
    - NURBS曲线
  - 参数曲面

Bézier曲线

Pierre Bézier (1910.9.1-1999.11.25)

发音：[BEH zee eh]



Bézier曲线

Bézier曲线定义

- 一条n次Bézier曲线：

$$\mathbf{R}(t)=\sum_{i=0}^{n}\mathbf{R}_i B_{i,n}(t) \qquad 0\le t\le 1$$

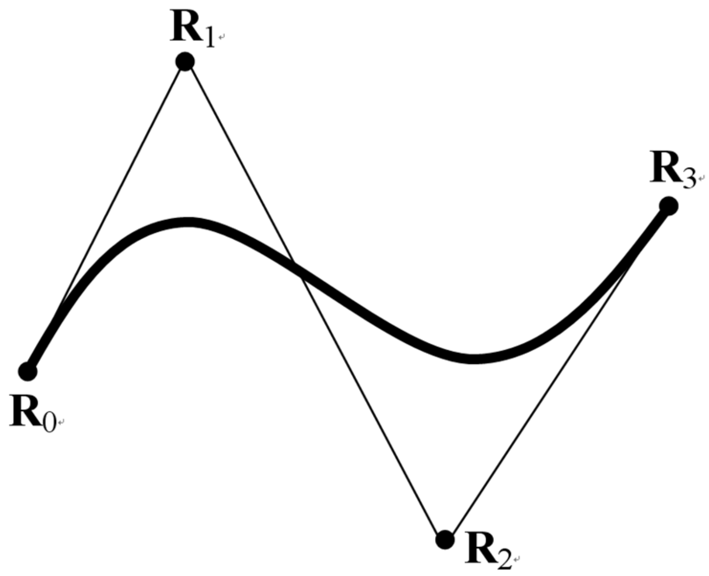
多项式$\{B_{i,n}(t)\}$称为Bernstein基函数：

$$B_{i,n}(t)=C_n^i(1-t)^{n-i}t^i$$

$$C_n^i=n!/(i!(n-i)!)$$

Bézier曲线性质

- 端点插值：
  - $\mathbf{R}(0)=\mathbf{R}_0 \quad \mathbf{R}(1)=\mathbf{R}_n$
- 端点切向：
  - $\mathbf{R}'(0)=n(\mathbf{R}_1-\mathbf{R}_0)$
  - $\mathbf{R}'(1)=n(\mathbf{R}_n-\mathbf{R}_{n-1})$
- 对称性：
  - $\sum_i \mathbf{R}_{n-i} B_{i,n}(t) = \sum_i \mathbf{R}_i B_{i,n}(t)$
  - 曲线的控制顶点的几何地位是对称的

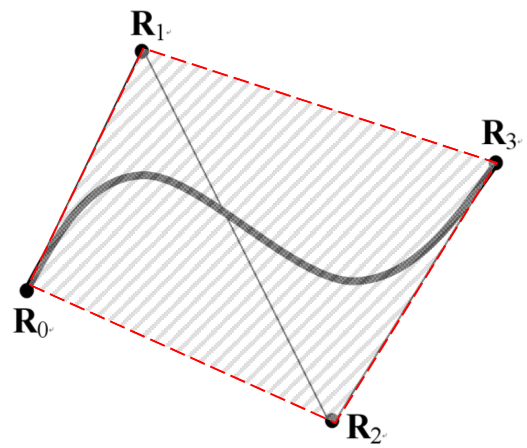


三次Bézier曲线

Bézier曲线性质

- 凸包性：Bézier曲线位于控制多边形的凸包内

- 几何不变性：Bézier曲线的形状仅与控制多边形有关，与坐标系无关



Bézier曲线的凸包性

练习

- Given four control points $P_0(0,0,0)$, $P_1(2,2,-2)$, $P_2(2,-1,-1)$ and $P_3(3,0,0)$. Please compute cubic Bezier curve (n=3) value when u=0, 1/3, 2/3 and 1.

P(0)={0,0,0}
P(1/3)={13/9, 2/3, -10/9}
P(2/3)={20/9, 0, -8/9}
P(1)={3, 0, 0}

参数曲线的剖分绘制算法

- Bezier曲线通常采用递归剖分控制多边形生成.

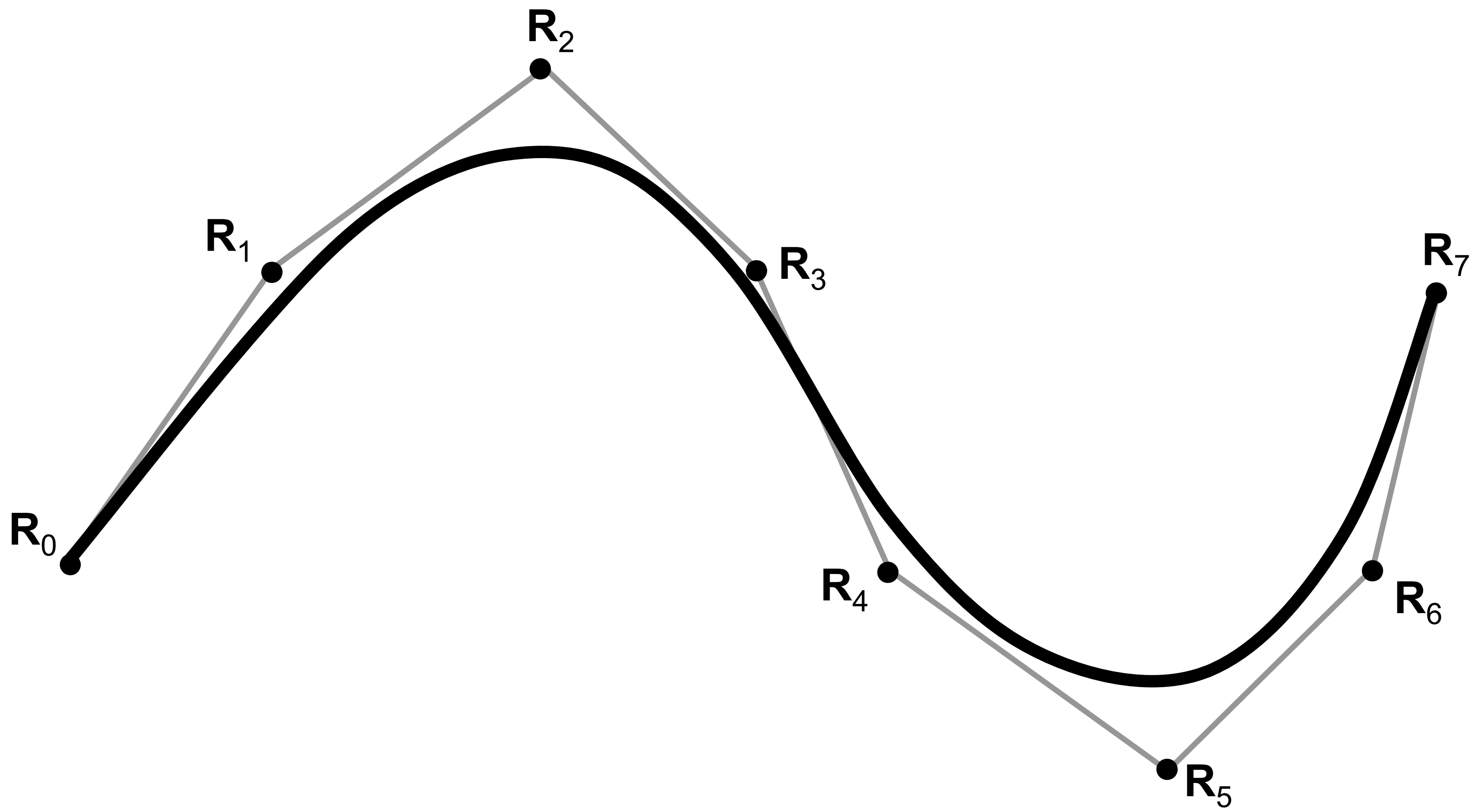
- 每一次剖分均将曲线分为两段,每一段构成一条新的Bezier曲线, 且控制多边形更加靠近对应的Bezier曲线.

Bézier曲线的不足

- 整体性质：当移动曲线的一个控制顶点时，整条曲线的形状都会发生改变

- 表示复杂形状时，需要将多条Bézier 曲线光滑拼接起来。

B-样条曲线实列(了解)



三次(四阶)B-样条曲线

B-样条曲线的定义

- B-样条曲线是分段连续的多项式曲线，其定义与节点向量密切相关
- 定义在节点向量$\mathbf{u}=\{u_0, u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_{n+k+1}\}$上的$k$次($k+1$阶)、具有($n+1$)个控制顶点的B-样条曲线为：

$$\mathbf{R}(u)=\sum_{i=0}^{n}\mathbf{R}_i N_{i,k}(u) \qquad u\in[u_k, u_{n+1}]$$

B-样条曲线的定义

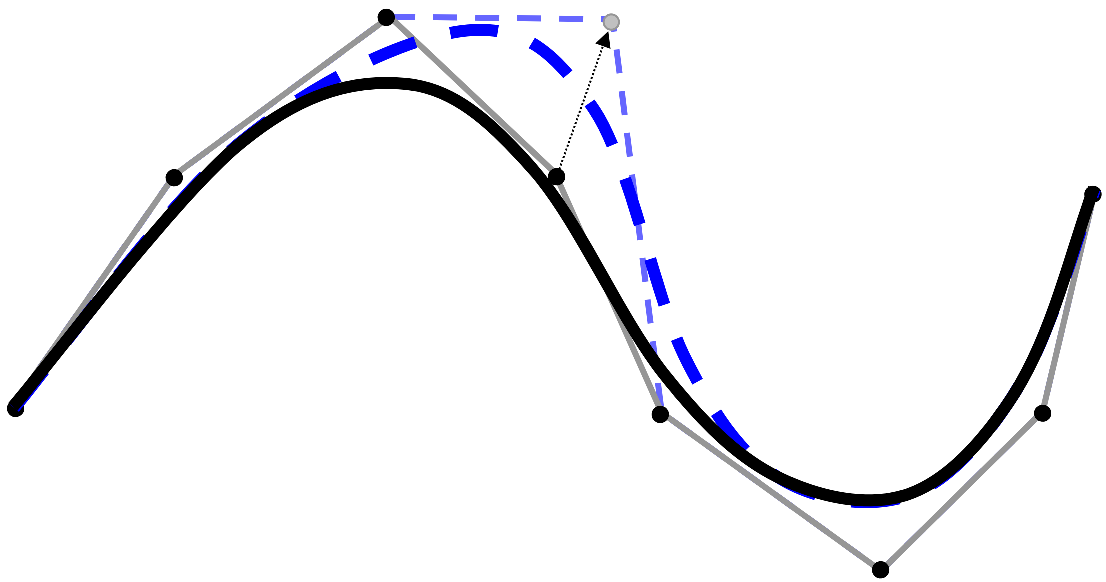
$\mathbf{R}_i$为控制顶点， $\{\mathbf{R}_i\}_{i=0,1,\ldots,n}$顺次连接称为曲线的控制多边形

$N_{i,k}(u)$为单位化的B-样条基函数：

$$\begin{cases} N_{i,0}=\begin{cases}1 & \text{当}u_i \le u < u_{i+1} \\ 0 & \text{其它}\end{cases} \\ N_{i,k}(u)=\dfrac{u-u_i}{u_{i+k}-u_i}N_{i,k-1}(u)+\dfrac{u_{i+k+1}-u}{u_{i+k+1}-u_{i+1}}N_{i+1,k-1}(u) \\ \text{定义}\dfrac{0}{0}=0 \end{cases}$$

B-样条曲线性质

- **局部性**：当移动一个控制顶点时，只会影响曲线的一部分，而不是整条曲线

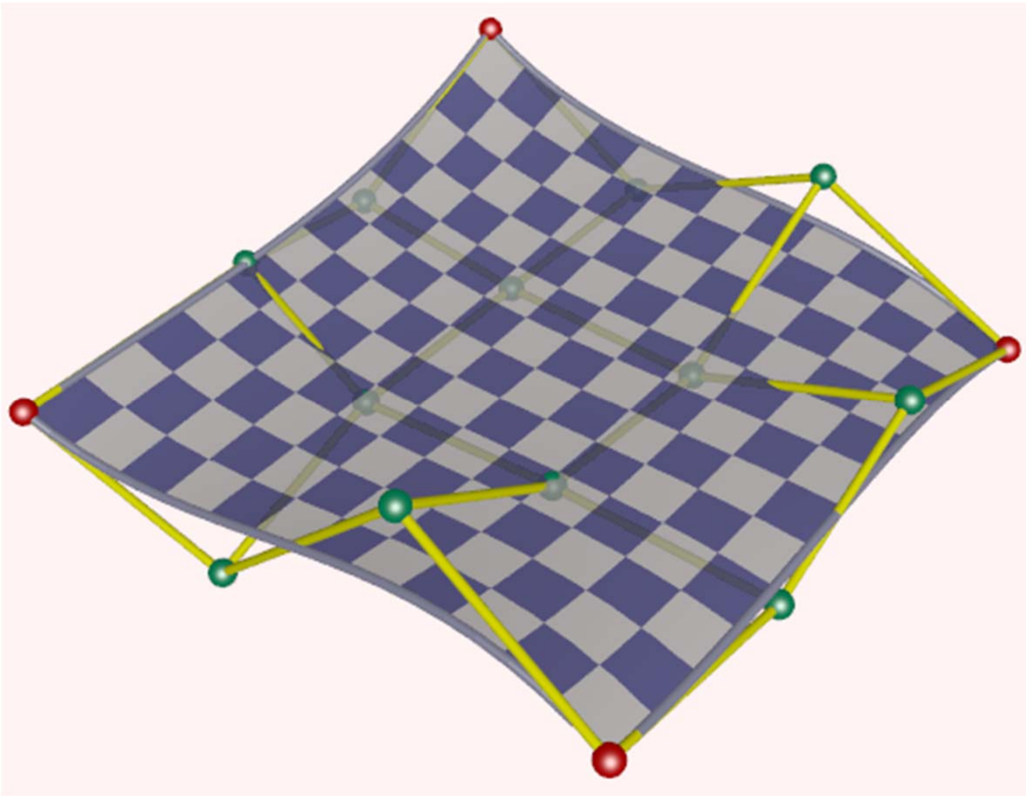


三次B-样条曲线的局部性质

内容

- 参数曲面表示
  - 参数表示的数学原理
  - 参数曲线
  - 参数曲面
    - Bézier曲面
    - B-样条曲面
    - NURBS曲面

双三次Bézier曲面实列



双三次Bézier曲面实例

Bézier曲面

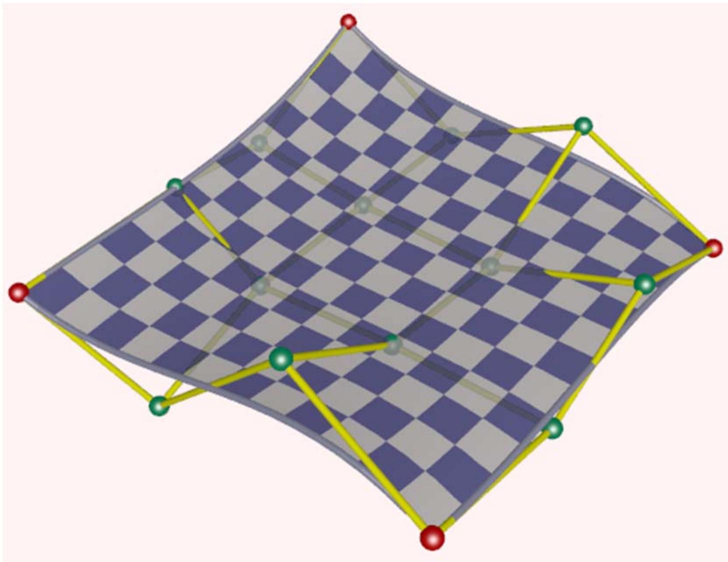
- $m \times n$次Bézier曲面：

$$\mathbf{R}(u,v)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\mathbf{R}_{ij}B_{i,m}(u)B_{j,n}(v)$$

  - $B_{i,m}(u)$和$B_{j,n}(v)$为Bernstein基函数
  - $\{\mathbf{R}_{ij}\}$规则连接形成控制网

Bézier曲面性质

- Bézier曲面的控制顶点所形成的控制网格大致反应了曲面的形状，所以可通过编辑控制顶点的方式来实现对曲面形状的改变

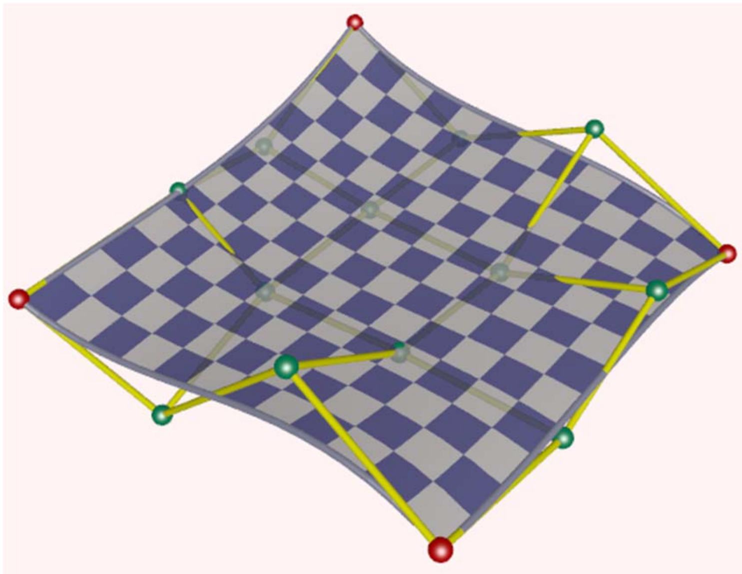


Bézier曲面性质

- Bézier曲面通过四个角点处的控制顶点

$$\mathbf{R}(0,0)=\mathbf{R}_{00} \qquad \mathbf{R}(1,0)=\mathbf{R}_{m0}$$

$$\mathbf{R}(0,1)=\mathbf{R}_{0n} \qquad \mathbf{R}(1,1)=\mathbf{R}_{mn}$$



Bézier曲面性质

- 在角点处曲面与控制多边形相切

$$\mathbf{R}_u(0,0) = m(\mathbf{R}_{10} - \mathbf{R}_{00})$$
$$\mathbf{R}_v(0,0) = n(\mathbf{R}_{01} - \mathbf{R}_{00})$$

- Bézier曲面具有剖分算法：用加密的控制多边形来逼近显示Bézier曲面

Bézier曲面的不足

- 全局性：当移动一个控制顶点的位置时，整个曲面的形状会发生改变，这对于外形设计是很不方便的
- 生成复杂外形需要多个Bézier曲面的光滑拼接，十分复杂