



Rapor Kodu: YRT-AKU-M1A  
Rapor Tarihi: 10.02.2023  
Revizyon No: #001

# YILDIZ ROKET TAKIMI

*AKU Projesi – Simulink DC Motor Modeli Raporu*

*Hazırlayan: İsmail Altay Ataman*

## Tanım

Bu raporda Simulink ile DC motor modelinin nasıl oluşturulduğu ve modelin çalışma mantığı anlatılmaktadır. Rapor ARTAM – I Roketinde faydalı yük görevi görecek olan AKU – I sisteminin geliştirme aşamasında yazılmıştır.



## İçindekiler

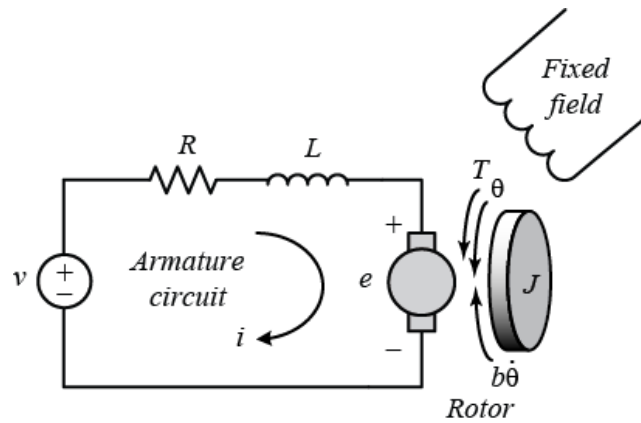
<b>Raporun Amacı.....</b>	<b>3</b>
<b>DC Motor Denklemleri.....</b>	<b>3</b>
<b>DC Motor Modelinin Oluşturulması.....</b>	<b>5</b>
Transfer Fonksiyonu Gösterimi İçermeyen Modelin İncelenmesi.....	6
Transfer Fonksiyonu Gösterimi İçeren Modelin İncelenmesi.....	9
<b>DC Motor Modelinin Çıktılarının İncelenmesi .....</b>	<b>13</b>
<b>Kaynakça .....</b>	<b>15</b>

## Raporun Amacı

Yıldız Roket Takımı tarafından 2022-2023 döneminde geliştirilmekte olan AKU – I aracının içinde iki adet DC ve dört adet servo motor kullanılacaktır. Bu nedenle projenin başarısı için DC motor ve servo motorların dinamiğinin anlaşılması, modellenmesi ve kontrolünün yapılması oldukça önemlidir.

DC motor ile sistemde itki kontrolü (throttle control) yapılacaktır. İtki kontrolü için genelde PID veya PI kontrolü kullanılmaktadır. Bu raporda DC motor sisteminin modellenmesi yapılmaktadır ve PID kontrol uygulaması ile sistemin çıktıları incelenmektedir.

## DC Motor Denklemleri



Şekil 1 – DC Motor Diyagramı

Yukarıda bir DC motorun bileşenleri görülmektedir. Bileşenlerin açıklaması aşağıdaki gibidir:

- $v$ : Motora verilen gerilim
- $i$ : Armatür Akımı
- $R$ : Armatür Direnci
- $L$ : Armatür İndüktansı
- $e$ : Üretilen elektromotor kuvveti
- $T$ : Rotora aktarılan tork
- $J$ : Rotorun Atalet Momenti
- $b$ : Rotorun sürtünme katsayısı
- $\theta$ : Rotorun yaptığı açısal yer değiştirme

Bir DC motorun içinde elektriksel ve mekanik olmak üzere iki ayrı sistem bulunur. Sistemin modellenebilmesi için elektriksel ve mekanik sistemlerin denklemlerinin çıkarılıp, modellemeye önce de birleştirilmesi gerekir. Enerji elektriksel sistemden mekanik sisteme aktarıldığı için iki sistemin denklemleri birbiri ile ilişkili olacaktır.

Kirchhoff Gerilim Kanunu (Kirchhoff Voltage Law) ile elektriksel sistemin modeli aşağıdaki gibidir:

$$L \frac{di}{dt} + Ri = V - e$$

*Denklem 1*

Euler Dönme Denklemleri ile mekanik sistemin denklemi aşağıdaki gibidir:

$$J\ddot{\theta} + b\dot{\theta} = T$$

*Denklem 2*

İki denklemin birleştirilebilmesi için iki eşitliğin kabul edilmesi gerekmektedir. Bu eşitlikler:

$$T = k_T * i$$

*Denklem 3*

$$e = k_e * \dot{\theta}$$

*Denklem 4*

*Denklem 3* ve *denklem 4*; tork ve elektromotor kuvveti değerlerinin sırasıyla akım ve açısal hız değerlerine bağlı olarak, belirli bir oran ile değiştiğini kabul etmektedir. Modelin basit olması için bu kabulün yapılması gerekmektedir.

*Denklem 3* ve *denklem 4* kullanılarak *denklem 1* ve *denklem 2* yeniden düzenlenebilir.

$$L \frac{di}{dt} + Ri = V - k_e \dot{\theta}$$

*Denklem 1.1*

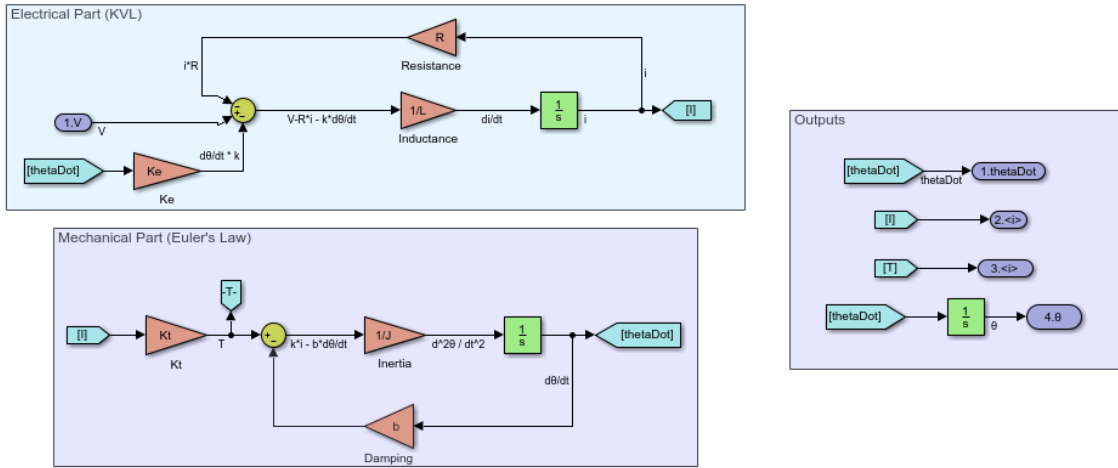
$$J\ddot{\theta} + b\dot{\theta} = k_T i$$

*Denklem 2.1*

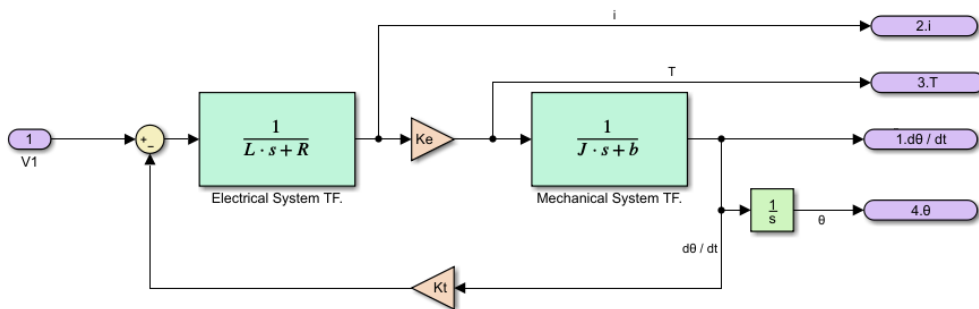
## DC Motor Modelinin Oluşturulması

Modelleme yapılırken çoğunlukla sistemler transfer fonksiyon gösterimi ile gösterilirler. Transfer fonksiyonu gösterimi ile yapılan modeller daha sade olurlar. Ancak bazı sistemlerin transfer fonksiyonları ile gösterilmeleri zor veya imkânsız olabilir. Bu durumlarda da transfer fonksiyonu kullanılmadan modelleme yapılabilir.

Bu raporda hem transfer fonksiyon gösterimi kullanan modelleme hem de transfer fonksiyonu gösterimi içermeyen bir modelleme incelenecektir.



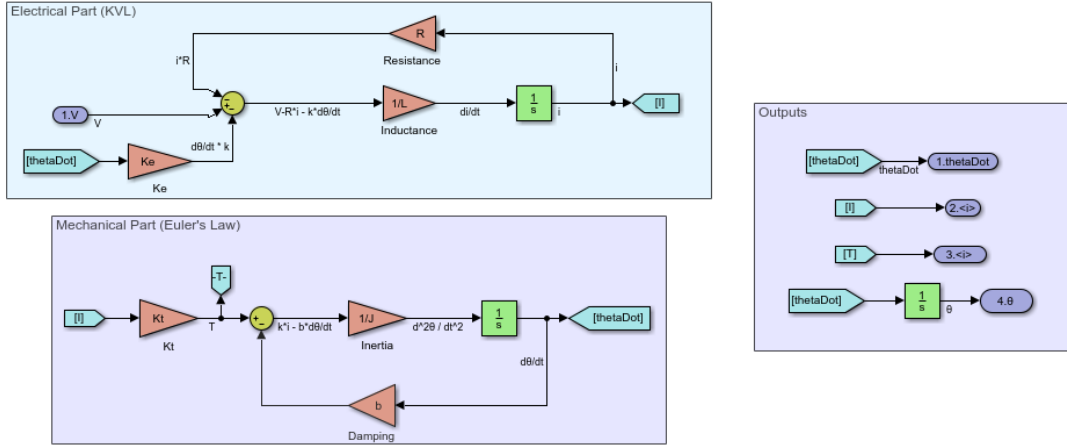
Resim 1 – Transfer Fonksiyon Gösterimi İçermeyen Model



Resim 2 – Transfer Fonksiyonu Gösterimi İçeren Model

Modellere bakıldığı zaman transfer fonksiyonu gösterimi ile modelleme yapmanın daha sade olduğu gözükmemektedir.

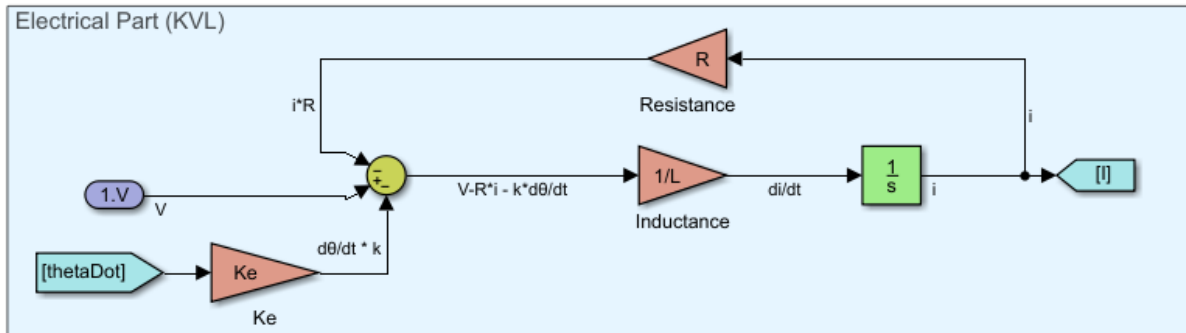
## Transfer Fonksiyonu Gösterimi İçermeyen Modelin İncelenmesi



Resim 3 – Transfer Fonksiyonu İçermeyen DC Motor Modeli

Bir sistemin modellemesi yapılırken yapılması gereken en önemli şey, modelin iyi bir şekilde anlaşılmasıdır. *Resim 3'te* gösterilen şekilde bir modelin oluşturulabilmesi için de modelin iyi anlaşılması gerekmektedir. Raporun bu başlığında yukarıda yapılan bu modelin anlaşılması sağlanacaktır.

Sistemi elektriksel ve mekanik olarak iki bölüme ayırarak inceleyelim. Elektriksel kısım aşağıdaki gibidir:

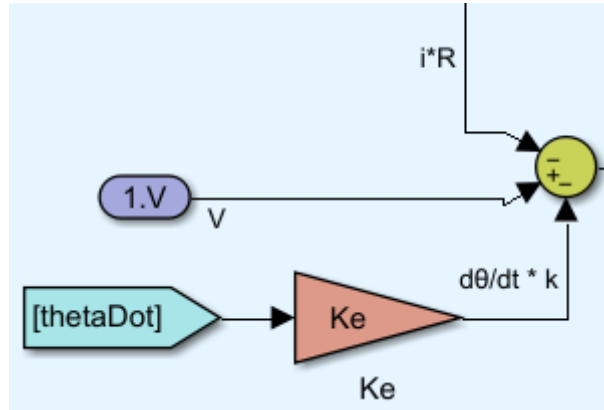


Resim 3.1

Modelin *Resim 3.1'de* görünen kısmında sadece Kirchhoff Gerilim Kanunu kullanılmaktadır ve kullanılmakta olan denklem, raporda Denklem 1.1 olarak verilen denklemdir.

$$L \frac{di}{dt} + Ri = V - k_e \dot{\theta}$$

Denklem 1.1

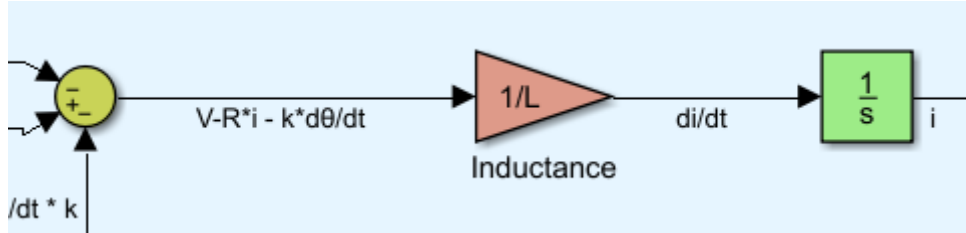


Resim 3.2

Eğer modeli incelersek ilk başta bir toplama/çıkarma işleminin yapıldığını görebiliriz. *Resim 3.2*'de de gözüktüğü gibi sisteme dışarıdan girdi olarak "V" yani gerilim alınmaktadır. Ayrıca iki parametre de sisteme negatif geri-besleme olarak gelmektedir. Bu geri beslemelerden birinin  $i * R$ , diğerinin ise mekanik sistemden gelen  $\dot{\theta} * k_e$  eşitliği yani elektromotor kuvveti olduğunu görmekteyiz. Sonuç olarak buradaki işlemden sonra elde edilen çıktı:

$$V - iR - \dot{\theta} * k_e$$

şeklinde olacaktır.



Resim 3.3

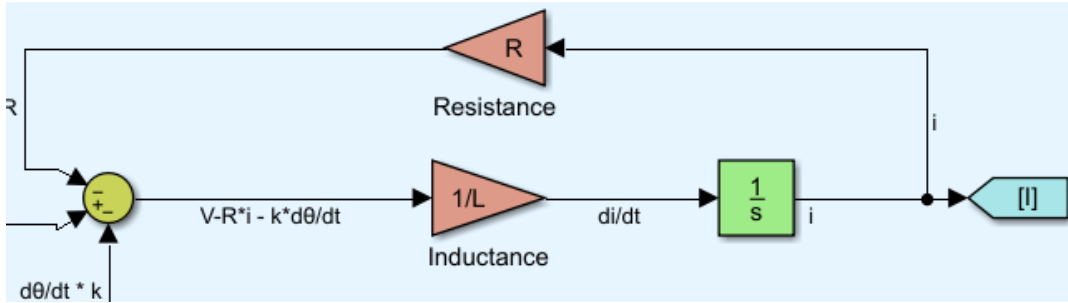
Daha sonra, *Resim 3.3*'te de görüldüğü üzere, elde edilen çıktının  $\frac{1}{L}$  ile çarpıldığını ve integralinin alındığını görmekteyiz. İlk önce bir önceki adımda elde ettiğimiz denkliği  $\frac{1}{L}$  ile çarpalım.

$$\frac{V - iR - \dot{\theta} * k_e}{L}$$

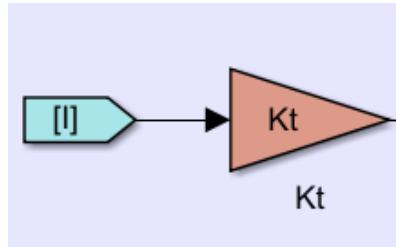
Bu çarpma sonucunda yukarıdaki eşitliği elde etmiş oluruz. Ve Denklem 2.1'den de bildiğimiz gibi bu eşitlik akımın zamana göre türevine eşittir.

$$\begin{aligned} L \frac{di}{dt} + Ri &= V - k_e \dot{\theta} \\ &= L \frac{di}{dt} = V - k_e \dot{\theta} - Ri \\ &= \frac{di}{dt} = \frac{V - iR - \dot{\theta} * k_e}{L} \end{aligned}$$

Çarpma sonrasında sonucun integralinin de alınması ile bu parçada sonuç olarak akımın elde edildiğini görmekteyiz.



Resim 3.3



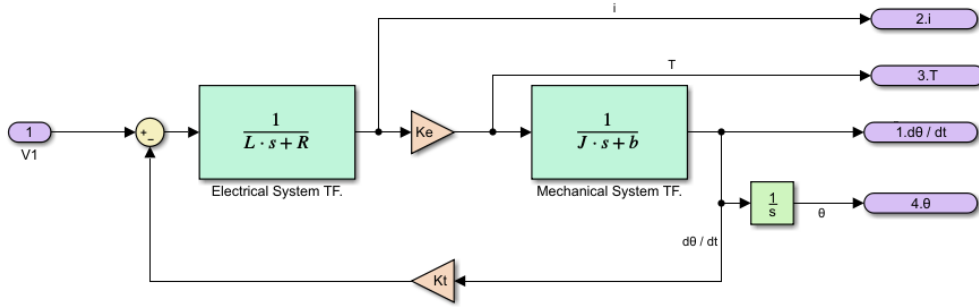
Resim 3.4

Akımın eldesinden sonra akımın direnç ile çarpılıp, elektriksel sisteme (Resim 3.3) ve tork sabiti ile çarpılıp mekaniksel sisteme (Resim 3.4) geri-besleme olarak verildiğini görmekteyiz. Bu parçanın da anlaşılması ile elektriksel sistemin modelinin denklemler ile uyduğunu teyit etmekteyiz.

Mekanik modelin analizinin elektriksel modele benzemesinden dolayı raporda mekanik model hakkında bir inceleme yapılmayacaktır. Elektriksel modelin incelenmesinin okunması ile mekanik sistem de anlaşılabilir.



## Transfer Fonksiyonu Gösterimi İçeren Modelin İncelenmesi



Resim 4.1

Transfer fonksiyonu gösterimi ile yapılan bir modeli oluşturmak veya anlamak için ilk önce sistemin transfer fonksiyonunu çıkarmak gereklidir. Bu modelde çıktı olarak açısal hız, girdi olarak da gerilim alınmıştır. Yani elde edilmesi gereken transfer fonksiyonu  $G(s) = \frac{\dot{\theta}(s)}{V(s)}$  şeklindedir. Bu transfer fonksiyonuna erişmek için hem elektriksel denkleminin hem de mekanik denkleminin Laplace dönüşümünü bulmamız ve bu iki denklemi birleştirmemiz gerekmektedir.

İlk önce elektriksel sistemin Laplace dönüşümünü alalım:

$$\begin{aligned} L \left\{ L \frac{di}{dt} + Ri = V - k_e \dot{\theta} \right\} \\ = Ls * I(s) + R * I(s) = V(s) - k_e s * \theta(s) \end{aligned}$$

Daha sonra mekanik sistemin Laplace dönüşümünü alalım:

$$\begin{aligned} L \{ J \ddot{\theta} + b \dot{\theta} = k_T i \} \\ = Js^2 * \theta(s) + bs * \theta(s) = k_T * I(s) \end{aligned}$$

Bu iki dönüşümü elde ettikten sonra iki denklemi birleştirerek  $I(s)$ 'den kurtulmamız gerekmekte.

$I(s)$  yok olduktan sonra  $\frac{\dot{\theta}(s)}{V(s)}$  oranını bulabilir olacağız.

$$I(s) = \frac{Js^2 * \theta(s) + bs * \theta(s)}{k_T}$$

$$I(s) = \frac{V(s) - k_e s * \theta(s)}{Ls + R}$$

Mekanik ve elektrik sistemlerinin Laplace dönüşümlü denklemlerinden elde ettiğimiz bu iki eşitliği birbirine eşitlersek de transfer fonksiyonuna ulaşabileceğiz.

$$\frac{Js^2 * \theta(s) + bs * \theta(s)}{k_T} = \frac{V(s) - k_e s * \theta(s)}{Ls + R}$$

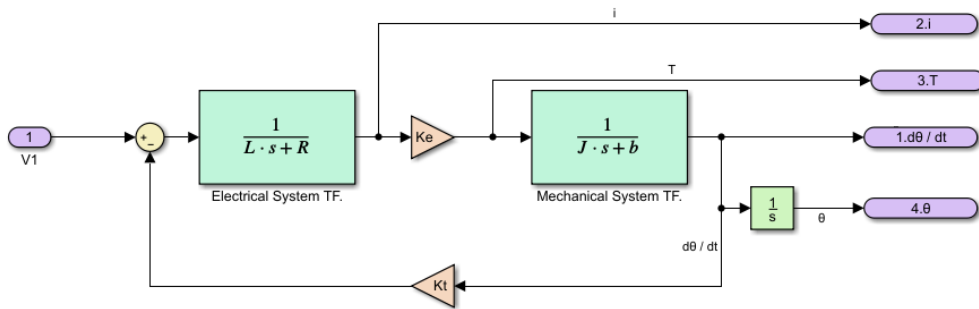
$$G(s) = \frac{\dot{\theta}(s)}{V(s)} = \frac{s\theta(s)}{V(s)} = \frac{k_e}{(Ls + R) * (Js + b) + k_e * k_T}$$

Denklem 5

$$\frac{\theta(s)}{V(s)} = \frac{k_e}{(Ls + R) * (Js + b) + k_e * k_T} * \frac{1}{s}$$

Denklem 6

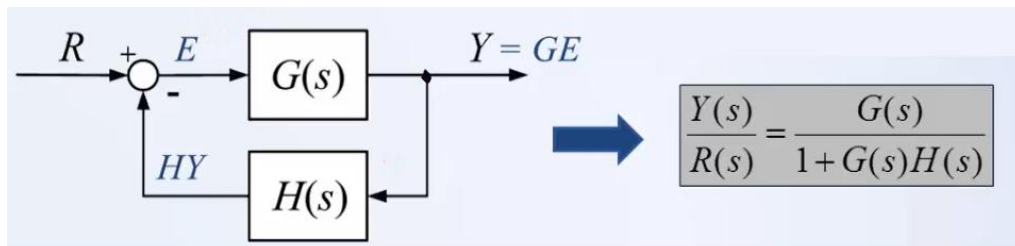
İşlemler yapıldıktan sonra sonuç yukarıdaki gibi bulunur. Yapılan hesaplamalarda *denklem 5* açısal hız çıkışına göre transfer fonksiyonuyken, *denklem 6* ise açısal konuma göre transfer fonksiyonudur. Transfer fonksiyonunu bulduktan sonra modele tekrardan bakabiliriz.



Resim 4.1

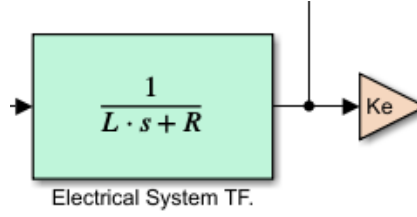
Modeli anlamak için bilmemiz gereken iki blok diyagram kuralı bulunmakta. Bu kuralların ezberlenmesi yerine mantığının anlaşılmasını tavsiye ederim. Raporu kısa tutmak amacı ile raporda kuralların nereden geldiği anlatılmayacaktır.

- 1-) Seri bağlı olan transfer fonksiyonlarının ve blokların çıktısı, iki transfer fonksiyonunun çarpımıdır.
- 2-) Paralel bağlı (geri-besleme) olan transfer fonksiyonlarının ve blokların çıktısı aşağıdaki şekildedir:



Resim 4.2

Bu iki kuralı bildikten ve kavradıktan sonra modelin ne anlam ifade ettiğini inceleyebiliriz.

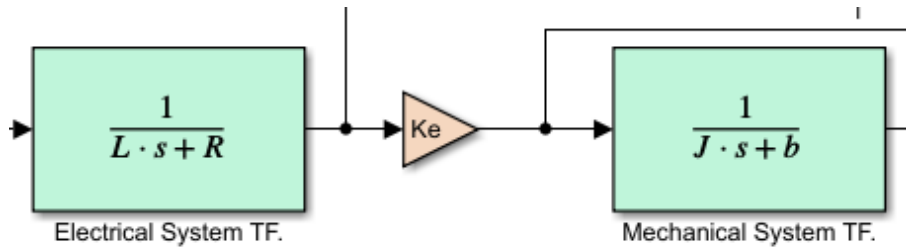


Resim 4.3

Modelin bu kısmında mekanik sistemin transfer fonksiyonu eklenmiş ve  $k_e$  sabiti ile çarpılmıştır. Daha sonra buradan çıkan sonuç elektriksel sistemin transfer fonksiyonu ile seri olarak bağlanmıştır. Kural 1'den bildiğimiz üzere girdi ve çıktıyı çarpmamız gerektiğini biliyoruz.

Kural 1'e göre elektriksel sistemin transfer fonksiyonu ile  $k_e$  çarpanının modelde gösterildiği gibi çarpımından aşağıdaki eşitliği elde edeceğiz:

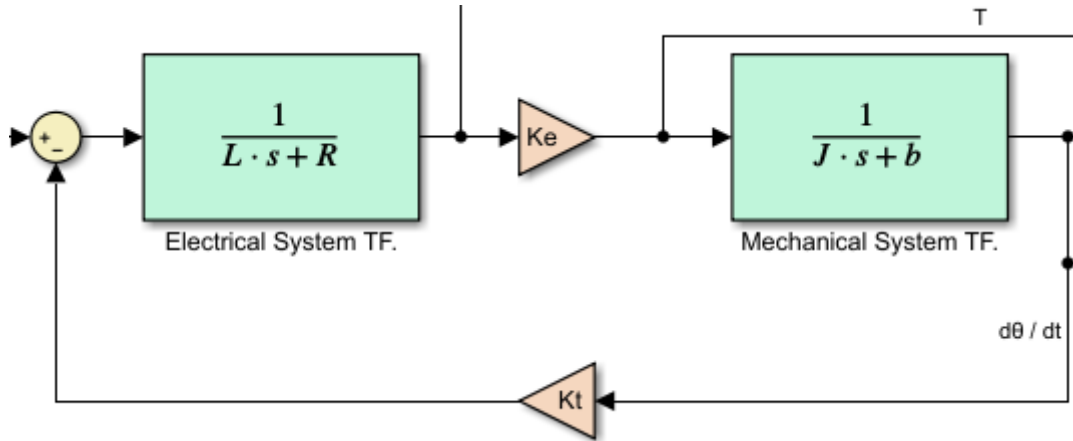
$$\frac{k_e}{Ls + R}$$



Resim 4.4

Daha sonra aldığımız bu çıktı bir başka bir transfer fonksiyonu olan mekanik sistem transfer fonksiyonuna girdi olarak girmekte. Burada da yine seri oldukları için çarpma işlemi uygulayacağız.

$$\frac{k_e}{Ls + R} * \frac{1}{Js + b}$$



Resim 4.5

Daha sonra sistemde bir negatif geri-besleme olduğunu görmekteyiz. Burada da ikinci kuralı kullanarak aşağıdaki çıktıyı elde edeceğiz.

$$\frac{\frac{k_e}{Ls + R} * \frac{1}{Js + b}}{1 + \frac{k_e * k_T}{(Ls + R)(Js + b)}}$$

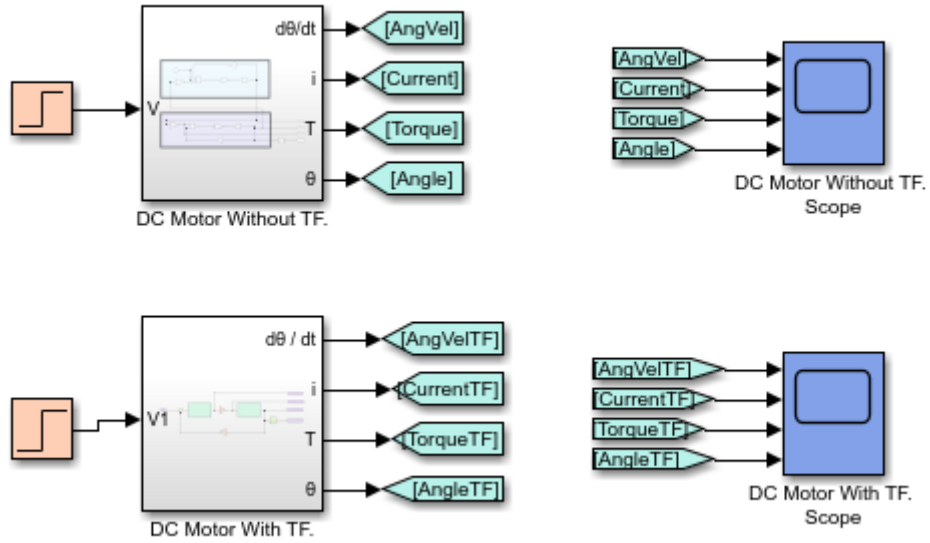
Bu eşitliği sadeleştirdiğimizde ise:

$$\frac{k_e}{(Ls + R) * (Js + b) + k_e * k_T}$$

eşitliğini elde etmiş olacağız. Böylelikle elde edilen transfer fonksiyonu *denklem 5'teki* transfer fonksiyonu ile eşit olacaktır ve bu da modelin çıktısının sistemin transfer fonksiyonu olduğunu doğrulamış olacaktır.

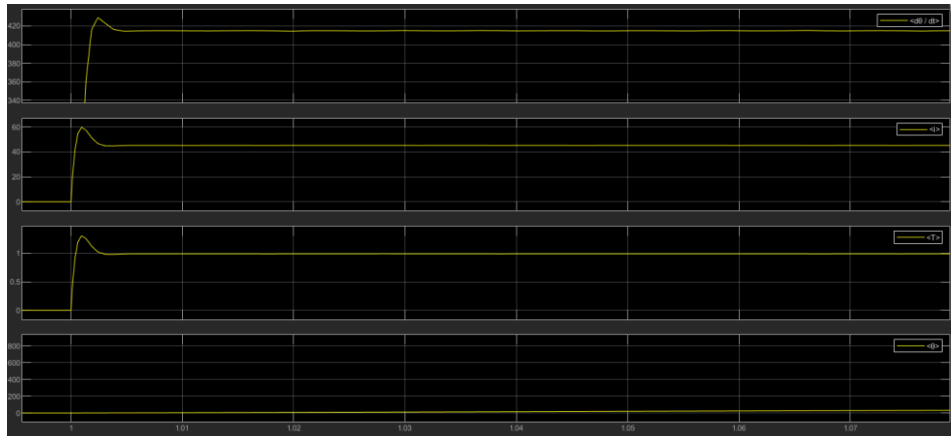
## DC Motor Modelinin Çıktılarının İncelenmesi

Yapılan modelin çıktıların incelenmesi için çıktı tanımlarımızı doğru yaptığımızdan ve “scope” ögesini doğru bağladığımızdan emin olmamız gerekmektedir. Ayrıca okunurluğu iyileştirmek ve kullanımı kolaylaştırmak için yaptığımız modelleri “subsystem” yani alt-sistem olarak da tanımlayalım.



Resim 5

Sistemi alt sistemleri ayırınca görüldüğü gibi model oldukça basit gözükmekte.



Resim 6

Sistemin çıktıları grafiğe döküldüğü zaman da sonuç bu şekilde olmakta.

Çıktı İsmi	Maksimum Değeri	Maks. Değer Zamanı	Kararlı Hal Değeri
Açısal Hız	429.1 rad/s 4097.56 rpm	1.002s	415.1 rad/s 3963.78 rpm
Akım	59.74 A	1.001s	45.21 A
Tork	1.308 Nm	1.001s	0.99 Nm

Tablo 1

Elde edilen bu değerlerin incelenebilmesi için yeterli bilgi birikimi henüz elde edilememiştir. Ancak model için kullanılan motorun datasheet'ine bakıldığı zaman değerlerin yanlış olduğu anlaşılmaktadır.

Motor Data		
Values at nominal voltage		
1 Nominal voltage	V	18
2 No load speed	rpm	7840
3 No load current	mA	448
4 Nominal speed	rpm	6890
5 Nominal torque (max. continuous torque)	mNm	105
6 Nominal current (max. continuous current)	A	4.87
7 Stall torque	mNm	1960
8 Stall current	A	90.4
9 Max. efficiency	%	86
Characteristics		
10 Terminal resistance phase to phase	$\Omega$	0.199
11 Terminal inductance phase to phase	mH	0.113
12 Torque constant	mNm/A	21.7
13 Speed constant	rpm/V	441
14 Speed/torque gradient	rpm/mNm	4.05
15 Mechanical time constant	ms	0.975
16 Rotor inertia	gcm <sup>2</sup>	23

Resim 7

Simülasyon sonucunda çıkan değerler ile motorun çok yüksek bir akım ürettiğini görmekteyiz. Bu mümkün değildir. Ayrıca simülasyon sonucu üretilen tork da çok küçüktür. Bu nedenlerden dolayı simülasyonda bir hata bulunmaktadır.

Bu hata ekibin anlık olarak sahip olduğu bilgi birikiminin yetersiz olmasından dolayı yorumlanamamaktadır.

Eğer bu rapor ileri bir tarihte okuyor iseniz ve hatanın çözümünü öğrenmek istiyorsanız lütfen 2022-2023 dönemi, AKU Projesi üyeleri ile iletişime geçiniz.

## Kaynakça

[http://www.ensatek.com.tr/image/urun/eci/4EC-I40\\_70\\_B.pdf](http://www.ensatek.com.tr/image/urun/eci/4EC-I40_70_B.pdf)

<https://www.electricalengineeringinfo.com/2017/05/transfer-function-armature-controlled-dc-motor.html>

<https://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?example=MotorSpeed&section=SystemModeling>

[https://www.researchgate.net/publication/338568989\\_Control\\_and\\_Simulation\\_of\\_Reaction\\_Wheel\\_DC\\_Motor](https://www.researchgate.net/publication/338568989_Control_and_Simulation_of_Reaction_Wheel_DC_Motor)