



YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

Mekatronik Mühendisliği Bölümü

MKT4111: Mekatronik Sistem Tasarımı

Helikopter Elektronik Eyleyici Kontrolü ve Modellemesi

Sistem Denklemleri Raporu

Dönem: 2023/2024 Güz

Danışman

Mehmet İŞÇAN

| | |
|---------------------|----------|
| İsmail Altay Ataman | 18067011 |
| Aslınur Bayram | 19067010 |
| Ayşenur Karğa | 19067050 |

Bu raporda sistemin denklemleri çıkarılmış ve daha sonra bu denklemlerden elde edilen ifadeler kontrol çalışmalarına entegre edilmek üzere düzenlenmiştir.

2. Sistem Denklemleri

Euler'in dönme denklemlerine göre bir sistemin ürettiği tork sistemin ataletsel momenti ve açısal ivmesinin çarpımına eşittir.

$$\tau = J * \ddot{\theta}$$

Bu eşitlik her bir dişli için ayrı olarak yazılabilir:

$$\tau_{BLDC} = (J_m + J_{MDD}) * \ddot{\theta}_1 + \tau_{SD}$$

$$\tau_{SD} = \left(\frac{1}{N_1^2} * J_{SD} \right) * \ddot{\theta}_1 + \tau_{DSP}$$

$$n_{SD} * \tau_{DSP} = \left(\frac{1}{N_1^2 * N_2^2} * J_{DSP} \right) * \ddot{\theta}_1 + \left(\frac{c}{N_1 * N_2} \right) * \dot{\theta}_1 + \tau_{DD}$$

$$\tau_{DD} = \left(\frac{1}{N_1^2 * N_2^2 * N_3^2} * J_{DD} \right) * \ddot{\theta}_1 + \left(\frac{k}{N_1 * N_2 * N_3} \right) * \theta_1$$

Dişliler birbirleri ile etkileşim içerisinde oldukları için denklemlerden de görüldüğü üzere dişlilerin denklemleri birbirine bağlıdır. Bu sayede tüm denklemler tek bir denklem üzerinde birleştirilebilir. Ancak bu adımı gerçekleştirilmeden önce denklemi sadeleştirmek amacı ile belirli ifadeler yeni değişkenlerle ifade edilecektir.

$$x_6 = (J_m + J_{MDD})$$

$$x_5 = \left(\frac{1}{N_1^2} * J_{SD} \right)$$

$$x_4 = \left(\frac{1}{N_1^2 * N_2^2} * J_{DSP} \right)$$

$$x_3 = \left(\frac{c}{N_1 * N_2} \right)$$

$$x_2 = \left(\frac{1}{N_1^2 * N_2^2 * N_3^2} * J_{DD} \right)$$

$$x_1 = \left(\frac{k}{N_1 * N_2 * N_3} \right)$$

Atanan yeni değişkenlerin kullanımı ile ifadeler yeni formlarına getirilir:

$$\tau_{BLDC} = x_6 * \ddot{\theta}_1 + \tau_{SD}$$

$$\tau_{SD} = x_5 * \ddot{\theta}_1 + \tau_{DSP}$$

$$R_{SD} * \tau_{DSP} = x_4 * \ddot{\theta}_1 + x_3 * \dot{\theta}_1 + \tau_{CDD}$$

$$\tau_{DD} = x_2 * \ddot{\theta}_1 + x_1 * \theta_1$$

Daha sonra tüm ifadeler tek bir denklem olarak birleştirilir:

$$\begin{aligned} \tau_{BLDC} &= x_6 * \ddot{\theta}_1 + x_5 * \ddot{\theta}_1 + \frac{1}{R_{SD}} (x_4 * \ddot{\theta}_1 + x_3 * \dot{\theta}_1 + x_2 * \ddot{\theta}_1 + x_1 * \theta_1) \\ &= \ddot{\theta}_1 * \left(x_6 + x_5 + \frac{x_4 + x_2}{R_{SD}} \right) + \dot{\theta}_1 * \left(\frac{x_3}{R_{SD}} \right) + \theta_1 * \left(\frac{x_1}{R_{SD}} \right) \end{aligned}$$

Daha sonrasında tekrardan denklemin sadeleştirilmesi için yeni değişkenler ile işlem yapılır:

$$\begin{aligned} y_1 &= \left(x_6 + x_5 + \frac{x_4 + x_2}{R_{SD}} \right) \\ y_2 &= \left(\frac{x_3}{R_{SD}} \right) \\ y_3 &= \left(\frac{x_1}{R_{SD}} \right) \end{aligned}$$

Yapılan değişiklikler sonrası sadeleştirilmiş denklem elde edilir:

$$\tau_{BLDC} = \ddot{\theta}_1 * y_1 + \dot{\theta}_1 * y_2 + \theta_1 * y_3$$

Son değişiklikler ile denklem artık durum-uzay formuna kolayca geçirilebilir hale gelmiştir.

3. Durum-Uzay Gösterimi

$$\tau_{BLDC} = \ddot{\theta}_1 * y_1 + \dot{\theta}_1 * y_2 + \theta_1 * y_3$$

Bir önceki aşama ile elde edilen denklem üzerinden durum değişkenleri seçilir:

$$\begin{aligned} z_1 &= \theta & \dot{z}_1 &= \dot{\theta}_1 \\ z_2 &= \dot{\theta}_1 & \dot{z}_2 &= \ddot{\theta}_1 \end{aligned}$$

Durum uzay gösteriminin elde edilebilmesi için \dot{z}_2 değişkeninin durum değişkenleri ile ifade edilebilir olması gerekmektedir.

$$\tau_{BLDC} = \ddot{\theta} * y_1 + \dot{\theta} * y_2 + \theta * y_3$$

$$\ddot{\theta}_1 = \tau_{BLDC} * \frac{1}{y_1} - \dot{\theta}_1 * \left(\frac{y_2}{y_1}\right) - \theta_1 * \left(\frac{y_3}{y_1}\right)$$

$$\dot{z}_2 = \ddot{\theta}_1 = \tau_{BLDC} * \frac{1}{y_1} - z_2 * \left(\frac{y_2}{y_1}\right) - z_1 * \left(\frac{y_3}{y_1}\right)$$

\dot{z}_2 Değişkeninin durum değişkenleri ile ifade edilmesinden sonra durum-uzay gösterimi elde edilebilir:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = A * \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + B * U$$

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{y_3}{y_1} & -\frac{y_2}{y_1} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{y_1} \end{bmatrix} * \tau_{BLDC}$$

4. Referans Sinyalinin Elde Edilmesi

Sisteme kontrol yapılabilmesi için hata sinyaline ve hata sinyalinin çıkarılabilmesi için de referans sinyaline ihtiyaç vardır. Bu referans sinyali sistemin çıktı elemanının yani çıkış şaftının açısal pozisyonu olmaktadır.

Şu ana kadar denklemlerde ve hesaplamalarda kullanılan θ_1 ifadesi fırçasız DC motorun açısal pozisyonunu göstermekteydi. Çıkış şaftının açısal pozisyonu ise θ_5 ile gösterilecektir.

Referans sinyalinin bulunması:

$$\theta_1 = N_1 * N_2 * N_3 * \theta_5$$

$$\theta_{1,ref} = N_1 * N_2 * N_3 * \theta_{5,ref}$$

Basitleştirmek için işlem yapılır:

$$N_T = N_1 * N_2 * N_3$$

Son denklem elde edilir:

$$\theta_{1,ref} = N_T * \theta_{4,ref}$$

5. Kontrolcü Tasarımında Feedback Lineerizasyonu

Sistemin elde edilen son denklemi ile feedback lineerizasyonu yapılacaktır.

$$\ddot{\theta} = \tau_{BLDC} * \frac{1}{y_1} + \dot{\theta} * \left(-\frac{y_2}{y_1}\right) + \theta * \left(-\frac{y_3}{y_1}\right)$$

Hata değeri tanımlanır:

$$\begin{aligned} e &= \theta_{1ref} - \theta_1 \\ \dot{e} &= \dot{\theta}_{1ref} - \dot{\theta}_1 \\ \ddot{e} &= \ddot{\theta}_{1ref} - \ddot{\theta}_1 \end{aligned}$$

Denklemler birleştirilince:

$$\ddot{e} = \ddot{\theta}_{1ref} - \ddot{\theta}_1 = \ddot{\theta}_{1ref} - \tau_{BLDC} * \frac{1}{y_1} + \dot{\theta}_1 * \left(\frac{y_2}{y_1}\right) + \theta_1 * \left(\frac{y_3}{y_1}\right)$$

Elde edilen denklemi daha da basitleştirmek için işlem yapılır:

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{1}{y_1} \\ z_2 &= \frac{y_2}{y_1} \\ z_3 &= \frac{y_3}{y_1} \end{aligned}$$

Basitleştirme sonrası elde edilen denklem aşağıdaki gibidir:

$$\ddot{e} = \ddot{\theta}_{1ref} - \tau_{BLDC} * z_1 + \dot{\theta}_1 * z_2 + \theta_1 * z_3$$

Elde edilen denklemi sadeleştirmek için aşağıdaki işlemler yapılır:

$$\begin{aligned} \ddot{e} &= \ddot{\theta}_{1ref} - (\tau_{BLDC} * z_1) + (\dot{\theta}_1 * z_2) + (\theta_1 * z_3) + (\dot{\theta}_{1ref} * z_2) - (\dot{\theta}_{1ref} * z_2) + (\theta_{1ref} * z_3) \\ &\quad - (\theta_{1ref} * z_3) \\ &= \ddot{e} = \ddot{\theta}_{1ref} - (\tau_{BLDC} * z_1) + (\dot{\theta}_{1ref} * z_2) + (\theta_{1ref} * z_3) + z_3 (\theta_1 - \theta_{1ref}) + z_2 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_{1ref}) \\ &= \ddot{e} = \ddot{\theta}_{1ref} - (\tau_{BLDC} * z_1) + (\dot{\theta}_{1ref} * z_2) + (\theta_{1ref} * z_3) - z_3 * e - z_2 * \dot{e} \end{aligned}$$

Son olarak lineer forma ulaşmak için τ_{BLDC} girdi olacak şekilde son düzenleme yapılır:

$$\ddot{e} + z_2 * \dot{e} + z_3 * e = \ddot{\theta}_{1ref} + (\dot{\theta}_{1ref} * z_2) + (\theta_{1ref} * z_3) - (\tau_{BLDC} * z_1)$$

Son bir basitleştirme için işlem yapılır:

$$\zeta = \ddot{\theta}_{1ref} + (\dot{\theta}_{1ref} * z_2) + (\theta_{1ref} * z_3)$$

$$\ddot{e} + z_2 * \dot{e} + z_3 * e = \zeta - (\tau_{BLDC} * z_1)$$

$$\tau_{BLDC} = \frac{1}{z_1} * (\zeta + u)$$

Final lineer formu çıkarılır:

$$u = \ddot{e} + z_2 * \dot{e} + z_3 * e$$

6. PID Kontrolcü Tasarımı

Sistemin transfer fonksiyonu aşağıdaki denklemlerden elde edilir:

$$\ddot{\theta}_1 + \left(\frac{Y_2}{Y_1}\right) * \dot{\theta}_1 + \theta_1 * \left(\frac{Y_3}{Y_1}\right) = \left(\frac{\tau_{BLDC}}{Y_1}\right)$$

$$\theta_1(s) s^2 + \theta_1(s) s \left(\frac{Y_2}{Y_1}\right) + \left(\frac{Y_3}{Y_1}\right) \theta_1(s) = \frac{1}{Y_1} \tau_{BLDC}(s)$$

$$\theta_1(s) \left[s^2 + s \left(\frac{Y_2}{Y_1}\right) + \left(\frac{Y_3}{Y_1}\right) \right] = \frac{1}{Y_1} \tau_{BLDC}(s)$$

Sistemin transfer fonksiyonun final denklemi aşağıdaki gibidir:

$$\left(\frac{\theta_1}{\tau_{BLDC}}\right)(s) = \left(\frac{1/Y_1}{s^2 + s \left(\frac{Y_2}{Y_1}\right) + \left(\frac{Y_3}{Y_1}\right)}\right)$$

Aşağıdaki blok diyagramında kapalı çevrim gösterimi verilmiştir:

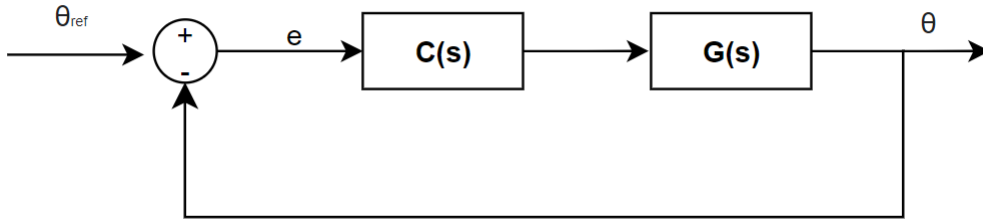


Figure 1: Kapalı çevrim blok diyagramı.

$$\theta(s) = e(s) * C(s) * G(s)$$

$$e(s) = \theta_{1ref}(s) - \theta_1(s)$$

$$\theta_1(s) = [\theta_{1ref}(s) - \theta_1(s)] * C(s) * G(s)$$

$$\left(\frac{\theta_1(s)}{\theta_{1ref}(s)}\right) = \left(\frac{C(s) * G(s)}{1 + C(s) * G(s)}\right)$$

$$C(s) = K_p + K_d * s + \frac{K_I}{s}$$

$$G(s) = \left(\frac{1/Y_1}{s^2 + s \left(\frac{Y_2}{Y_1}\right) + \left(\frac{Y_3}{Y_1}\right)}\right)$$

$$\frac{\theta_1(s)}{\theta_{1ref}(s)} = \frac{\left(K_p + K_d * s + \frac{K_I}{s}\right) * \left(\frac{1/Y_1}{s^2 + s \left(\frac{Y_2}{Y_1}\right) + \left(\frac{Y_3}{Y_1}\right)}\right)}{1 + \left(K_p + K_d * s + \frac{K_I}{s}\right) * \left(\frac{1/Y_1}{s^2 + s \left(\frac{Y_2}{Y_1}\right) + \left(\frac{Y_3}{Y_1}\right)}\right)}$$

Gerekli düzenlemeler yapılırsa elde edilen transfer fonksiyonunun son hali aşağıdaki denklemdedir:

$$\frac{\theta_1(s)}{\theta_{1ref}(s)} = \frac{\left(1/Y_1\right) * [K_d * s^2 + K_p * s + K_I]}{s^3 + \left(\frac{Y_2 + K_d}{Y_1}\right) * s^2 + \left(\frac{Y_3 + K_p}{Y_1}\right) * s + \left(\frac{K_I}{Y_1}\right)}$$

7. Durum Geri Besleme ile Referans Takibi Kontrolcü Tasarımı

PID kontrolcü ile θ_1 açısını ölçerek θ_{1ref} 'e yakınsanır. θ_1 ve $\dot{\theta}_1$ 'i ölçebileceğimiz senör varsa ve durum olarak ifade edebiliyorsak her durumu ölçmek amacıyla durum geri beslemeli kontrolcü tasarımı yapılabilir.

$$\dot{z} = A * z + B * \tau_{BLDC}$$

$$\tau_{BLDC}(s) = -K * z(s)$$

$$s * z(s) = A * z(s) - B * K * z(s)$$

$$\det(sI - [A - B * K]) = 0$$

Hata ifadesi:

$$e = \theta_{1ref} - \theta_1$$

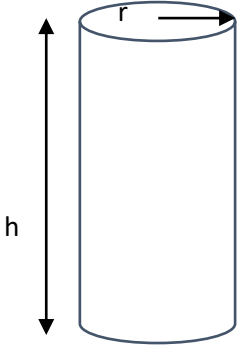
$$\dot{z} = A_{new} * z + B_{new} * \tau_{BLDC} + E_{new} * \vartheta_{1ref}$$

$$A_{new} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{-Y_3}{Y_1} & \frac{-Y_2}{Y_1} & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_{new} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{Y_1} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$E_{new} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

9. Eylemsizlik Momentinin Hesaplanması



$$I_z = \frac{1}{2}mr^2 = \frac{1}{2}[\rho\pi r^2 h]r^2 = \frac{1}{2}\rho\pi hr^2$$

$$J_m = \frac{1}{2}\rho_m\pi h_m r_m^4$$

$$J_{mSG} = \frac{1}{2}\rho_{gm}\pi h_{mSG} r_{mSG}^4$$

$$J_{WG} = \frac{1}{2}\rho_{WG}\pi h_{WG} r_{WG}^4$$

$$J_{DSP} = \frac{1}{2}\rho_{DSP}\pi h_{DSP} r_{DSP}^4$$

$$J_{DSG} = \frac{1}{2}\rho_{DSG}\pi h_{DSG} r_{DSG}^4$$

$$J_{SG} = \frac{1}{2}\rho_{SG}\pi h_{SG} r_{SG}^4$$

10. Ayırık Kontrolcü Tasarımı

Sistemin ayırık zamanda çözümü için Merkezi Farklar Yöntemi (Central Difference Method) kullanılmıştır.

En son elde edilen denklem:

$$\tau_{BLDC} = \ddot{\theta}_1 * y_1 + \dot{\theta}_1 * y_2 + \theta_1 * y_3$$

Merkezi Farklar Yöntemine göre denklem aşağıdaki ifadelerle değiştirilebilir:

$$\ddot{\theta}_1 = [\theta_1(t+1) - 2 * \theta_1(t) + \theta_1(t-1)] * \frac{1}{(dt)^2}$$

$$\dot{\theta}_1 = [\theta_1(t+1) - \theta_1(t-1)] * \frac{1}{2*dt}$$

dt: Ayırık zamanda adım süresi

Elde edilen bu ifadeler ile denklem güncellenir:

$$\tau_{BLDC} = [\theta_1(t+1) - 2 * \theta_1(t) + \theta_1(t-1)] * \frac{1}{(dt)^2} * y_1 + [\theta_1(t+1) - \theta_1(t-1)] * \frac{1}{2 * dt} * y_2 + \theta_1 * y_3$$

$$\tau_{BLDC} = \theta_1(t+1) * \left(\frac{y_1}{(dt)^2} + \frac{y_2}{2 * dt} \right) + \theta_1(t) * \left(\frac{2 * y_1}{(dt)^2} - y_3 \right) + \theta_1(t-1) * \left(\frac{y_1}{(dt)^2} - \frac{y_2}{2 * dt} \right)$$

Elde edilen ifadeyi basitleştirmek için aşağıdaki işlem uygulanır:

$$f_{x,fut} = \left(\frac{y_1}{(dt)^2} + \frac{y_2}{2 * dt} \right)$$

$$f_{x,now} = \left(\frac{2 * y_1}{(dt)^2} - y_3 \right)$$

$$f_{x,prev} = \left(\frac{y_1}{(dt)^2} - \frac{y_2}{2 * dt} \right)$$

En son yapılan basitleştirme ile ayırık zamanda modellenen denklem ortaya çıkmıştır:

$$\tau_{BLDC} = \theta_1(t+1) * f_{x,fut} + \theta_1(t) * f_{x,now} + \theta_1(t-1) * f_{x,prev}$$