# Курсовая Работа по ТПР

Терешков Алексей, Алимов Исмаил, Мамченков Дмитрий

## 1 Задача

Рассмотрим алгоритм экспоненциального взвешивания на основе градиента с переменным шагом обучения. Приведите исчерпывающие выкладки и получите оценку на кумулятивный регрет. Как следует выбирать параметр обучения на каждом шаге?

## 2 Решение

В алгоритме экспоненциального взвешивания экспертных решений оптимальная оценка на кумулятивный регрет имеет вид

$$R_{k,t} \leq \frac{\ln N}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon t}{8} = O(t)$$

а выбор оптимального параметра $\varepsilon$ возможен только при априорном знании количества раундов $T$.

Для решения этой проблемы параметр $\varepsilon$ можно выбирать в зависимости от раунда $t$, т. е. $\varepsilon = \varepsilon_t$. В такой постановке предсказание алгоритмом экспоненциального взвешивания экспертных решений с переменным параметром $\varepsilon_t$ осуществляется по формуле:

$$\hat{p_t} = \frac{\sum_{k=1}^{N} e^{-\varepsilon_t L_{k,t-1}} f_{k,t}}{\sum_{k=1}^{N} e^{-\varepsilon_t L_{k,t-1}}}$$

Предположим, что функция потерь $l(\cdot,\cdot)$ является выпуклой по первому аргументу и принимает значения из отрезка [0, 1]. Тогда для любой монотонно убывающей последовательности $\{\varepsilon_s\}_{s\in N}$ положительных чисел, для любого раунда $t \geq 1$, а также произвольных исходов $\{y_s\}_{s=1}^{t}$ кумулятивный регрет для алгоритма экспоненциального взвешивания с переменным параметром $\varepsilon_t$ удовлетворяет неравенству

$$R_{k,t} \leq \frac{\ln N}{\varepsilon_t} + \frac{1}{8}\sum_{s=1}^{t} \varepsilon_s.$$

Доказательство:

Из выпуклости функции потерь $l(\cdot,\cdot)$ по первому аргументу следует неравенство

$$l(\hat{p_t}, y_t) = l(\sum_{k=1}^{N} \frac{w_k(t-1)}{W_{t-1}} f_{k,t}, y_t) \leq \sum_{k=1}^{N} \frac{w_k(t-1)}{W_{t-1}} l(f_{k,t}, y_t).$$

Далее, воспользуемся неравенством Хёфдинга, сразу применяя к левой и правой части функцию $\xi \mapsto e^{\varepsilon_t \xi}$, а затем еще и предыдущим неравенством:

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{w_k(t-1)}{W_{t-1}} exp[-\varepsilon_t \cdot l(f_{k,t}, y_t)] \leq exp[-\varepsilon_t \sum_{k=1}^{N} \frac{w_k(t-1)}{W_{t-1}} l(f_{k,t}, y_t) + \frac{\varepsilon_t^2}{8}] \leq exp[-\varepsilon_t l(\hat{p_t}, y_t) + \frac{\varepsilon_t^2}{8}]$$

Умножив левую и правую часть последнего неравенства на $e^{\varepsilon_t l(\hat{p_t}, y_t) + \frac{\varepsilon_t^2}{8}}$ в итоге получим

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{w_k(t-1)}{W_{t-1}} exp[-\varepsilon_t \cdot l(f_{k,t}, y_t) - \frac{\varepsilon_t^2}{8} + \varepsilon_t l(\hat{p}_t, y_t)] \le 1. \tag{1}$$

Введем вспомогательные величины

$$a_k(t-1) = exp[-\varepsilon_{t-1} L_{k,t-1} + \varepsilon_{t-1}(\hat{L}_{t-1} - \frac{1}{8}\sum_{s=1}^{t-1} \varepsilon_s)],$$

заметив, что

$$\frac{w_k(t-1)}{W_{t-1}} = \frac{\frac{1}{N}[a_k(t-1)]^{\varepsilon_t/\varepsilon_{t-1}}}{\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{N}[a_j(t-1)]^{\varepsilon_t/\varepsilon_{t-1}}}. \tag{2}$$

Используя принцип математической индукции покажем, что

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{N} a_j(t) \le 1. \tag{3}$$

Очевидно, что $a_j(0) = 1$, поэтому при $t = 0$ неравенство (3) справедливо. Пусть теперь выполняется неравенство (3) при $t := t - 1$:

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{N} a_j(t-1) \le 1.$$

Поскольку $\varepsilon_{t-1} \ge \varepsilon_t > 0$, то функция $\xi \mapsto \xi^{\varepsilon_t/\varepsilon_{t-1}}$ является вогнутой, поэтому

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{N}[a_j(t-1)]^{\varepsilon_t/\varepsilon_{t-1}} \le [\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{N} a_j(t-1)]^{\varepsilon_t/\varepsilon_{t-1}} \le 1.$$

Используя полученную выше оценку, получим неравенство

$$\frac{w_k(t-1)}{W_{t-1}} \ge \frac{1}{N}[a_j(t-1)]^{\varepsilon_t/\varepsilon_{t-1}},$$

которое вместе с (1) приводит к неравенству

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{N}[a_k(t-1)]^{\varepsilon_t/\varepsilon_{t-1}} exp[-\varepsilon_t \cdot l(f_{k,t}, y_t) - \frac{\varepsilon_t^2}{8} + \varepsilon_t \cdot l(\hat{p}_t, y_t)] \le 1.$$

Вместе с тем простая проверка показывает, что

$$a_k(t) = [a_k(t-1)]^{\varepsilon_t/\varepsilon_{t-1}} exp[-\varepsilon_t \cdot l(f_{k,t}, y_t) - \frac{\varepsilon_t^2}{8} + \varepsilon_t \cdot l(\hat{p}_t, y_t)].$$

следовательно последнее неравенство и есть (3). Наконец, в силу неравенста (3) справедливы выкладки

$$1 \ge \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{N} a_k(t) \ge \frac{1}{N} a_k(t) = \frac{1}{N} exp[-\varepsilon_t L_{k,t} + \varepsilon_t(\hat{L}_t - \frac{1}{8}\sum_{s=1}^{t} \varepsilon_s)],$$

откуда после логарифмирования и упрощения получаем итоговое неравенство

$$\hat{L}_t - L_{k,t} \le \frac{\ln N}{\varepsilon_t} + \frac{1}{8}\sum_{s=1}^{t} \varepsilon_s.$$