Курсовая Работа по ТПР

Терешков Алексей, Алимов Исмаил, Мамченков Дмитрий

1 Задача

Рассмотрим алгоритм экспоненциального взвешивания на основе градиента с переменным шагом обучения. Приведите исчерпывающие выкладки и получите оценку на кумулятивный регрет. Как следует выбирать параметр обучения на каждом шаге?

2 Решение

Рассмотрим алгоритм экспоненциального взвешивания на основе градиента с переменным шагом обучения. Будем предполагать, что функция потерь $l(x, y)$ является не только выпуклой по первому аргументу, но и дифференцируемой, а ее градиент по x будем обозначать через $\nabla l(x, y)$. Выбор оптимального параметра ε (шаг обучения) возможен только при априорном знании количества раундов T. Вместе с тем особый интерес представляют алгоритмы, для которых справедлива оценка $R_{k,t} = o(t)$, т. е. средний относительно числа раундов кумулятивный регрет стремится к нулю:

$$\frac{R_{k,t}}{t} \to 0 \qquad t \to +\infty$$

Для решения этой проблемы параметр ε можно выбирать в зависимости от раунда t, т. е. $\varepsilon = \varepsilon_t$.

В такой постановке предсказание алгоритмом экспоненциального взвешивания на основе градиента с переменным шагом обучения осуществляется по формуле

$$\hat{p}_t = \frac{\sum_{k=1}^{N} exp[-\varepsilon_t \sum_{s=1}^{t-1} \langle \nabla l(\hat{p}_s, y_s), f_{k,t} \rangle] f_{k,t}}{\sum_{k=1}^{N} exp[-\varepsilon_t \sum_{s=1}^{t-1} \langle \nabla l(\hat{p}_s, y_s), f_{k,t} \rangle]}$$

Докажем следующее утверждение.

Пусть пространство решений D является выпуклым подмножеством единичного евклидова шара $\{u \in \mathbb{R}^d : ||u||_2 \leq 1\}$ и функция потерь $l(\cdot, \cdot)$ является выпуклой по первому аргументу, а ее градиент удовлетворяет неравенству

$$||\nabla l(u, y)||_2 \leq 1$$

для $u \in D, y \in Y$. Тогда для любого раунда t и $\varepsilon_t > 0$, а также произвольных исходов $\{y_s\}_{s=1}^{t} \subset Y$ справедлива следующая оценка на куммулятивный регрет:

$$\hat{L}_t - L_{k,t} \leq \frac{\ln N}{\varepsilon_t} + \frac{\varepsilon_t t}{2}.$$

Доказательство. Веса в этом алгоритме определяется формулой

$$w_k(t-1) = exp[-\varepsilon_t \sum_{s=1}^{t-1} \langle \nabla l(\hat{p}_s, y_s), f_{k,s} \rangle].$$

Введем новую функцию потерь по закону

$$l_*(u, y_s) = \langle \nabla l(\hat{p}_s, y_s), u \rangle, \quad u \in D.$$

В силу неравенства Коши – Буняковского $l_*(u, y_s) \in [-1, 1]$, поэтому чтобы применить результат об оптимальной оценке алгоритма экспоненциального взвешивания, введем еще одну функцию

$$l_\circ(u, y_s) = \frac{1 + l_*(u, y_s)}{2},$$

принимающую значения из отрезка $[0, 1]$. Тогда

$$\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{t}\langle \hat{p}_s - f_{k,s}, \nabla l(\hat{p}_s, y_s)\rangle = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{t} l_*(\hat{p}_s, y_s) - \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{t} l_*(f_{k,s}, y_s) = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{t} l_\circ(\hat{p}_s, y_s) - \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{t} l_\circ(f_{k,s}, y_s) \le \frac{\ln N}{2\varepsilon_t} + \frac{\varepsilon_t t}{4},$$

поскольку для функции потерь $l_\circ(\cdot,\cdot)$ обычный алгоритм экспоненциального взвешивания в нашем случае имеет параметр $2\varepsilon_t$. Вспоминая, что функция $l(\cdot,\cdot)$ является выпуклой по первому аргументу, записываем неравенство

$$l(f_{k,s}, y_s) \ge l(\hat{p}_s, y_s) + \langle f_{k,s} - \hat{p}_s, \nabla l(\hat{p}_s, y_s)\rangle$$

откуда

$$\langle \hat{p}_s - f_{k,s}, \nabla l(\hat{p}_s, y_s)\rangle \ge l(\hat{p}_s, y_s) - l(f_{k,s}, y_s).$$

Таким образом,

$$\hat{L}_t - L_{k,t} \le \langle \hat{p}_s - f_{k,s}, \nabla l(\hat{p}_s, y_s)\rangle \le \frac{lnN}{\varepsilon_t} + \frac{\varepsilon_t t}{2}.$$