1 Konvergente Reihen, Teil 1

hatten: endl. Summen:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Ziel: unendl. Summen:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Was soll das sein?

Definition 1.0.1. Dieses Symbol

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

steht für die Folge $(S_n)_n$ der Partialsummen:

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert, falls die Folge ihrer Partialsummen konvergiert. In diesem Fall setzen wir

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} S_n$$

Sagen auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert, falls $(S_n)_n$ divergiert. Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt bestimmt divergent, falls $(S_n)_n$ bestimmt gegen $+\infty$ oder $-\infty$ divergiert. Setzen dann $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty$, falls $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = -\infty$. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$, falls $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = +\infty$

Bemerkung. Sei $(b_n)_n$ eine Folge. $a_1 = b_1, a_n = b_n - b_{n-1}, n \geq 2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k = b_n$.

Auch Reihen der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ oder $\sum_{n=42}^{\infty} a_n$, $(v \in \mathbb{Z})$ $\sum_{n=v}^{\infty} a_n$.

Beobachtung: Sind $a_n \geq 0 \Rightarrow S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ monoton wachsend in n.

$\overset{\text{Mon. Konv.}}{\Rightarrow}$

entweder $(S_n)_n$ ist nach oben beschränkt $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n \in [0, \infty)$

oder $(S_n)_n$ ist nach oben beschränkt $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$

$\Rightarrow$

Satz 1.0.2. Sind $a_n \geq 0, n \in \mathbb{N}$, dann gilt
entweder ist $S_n = \sum_{k=1}^n a_n$ nach oben beschränkt und dann ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} S_n \in [0, \infty)$$

oder $S_n \to \infty, n \to \infty$ und dann ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} S_n = +\infty.$$

Beweis. Oben. □

Korollar 1.0.3. Sind $a_n \geq 0, n \in \mathbb{N}$, so ist

entweder $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ in diesem Fall ist die Reihe nach oben beschränkt.

oder $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$ nach oben unbeschränkt.

Satz 1.0.4 (Cauchy-Kriterium für Reihen)**.** Seien $a_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert } \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists K \in \mathbb{N} : |\sum_{j=n+1}^{m} a_j| < \varepsilon \quad \forall m > n \geq K.$$

Beweis. Reihe konvergiert per Def. genau dann, wenn Folge der Partialsummen $(S_n)_n, S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ konvergiert.

$$\overset{\text{Cauchy-Krit. Folgen}}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \exists K \in \mathbb{N} : |\underbrace{S_m - S_n}_{=\sum_{k=1}^m a_k - \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=n+1}^m a_k}| < \varepsilon \quad \forall m > n \geq K.$$

□

Beweis. Partialsummen $(S_n)_n$

$$S_n := \sum_{j=1}^{n} a_j$$

Cauchy-Kriterium für Folgen:

$$\Rightarrow (S_n)_n \text{ konvergiert } \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists K \in \mathbb{N} : |S_m - S_n| < \varepsilon \quad \forall m > n \geq K.$$

$$S_m - S_n = \sum_{j=1}^{m} a_j - \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{j=n+1}^{m} a_j.$$

D. h. $(S_n)_n$ konvergiert

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists K \in \ |\sum_{j=n+1}^{m} a_j| < \varepsilon \quad \forall m > n \geq K.$$

$\square$

Beispiel (Geometrische Reihe). Sei $|q| < 1$.

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

Beispiel.

$$S_n = \sum_{j=0}^{n} q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \to \frac{1}{1-q} \text{ (da } \lim_{n\to\infty} q^{n+1} = 0)$$

Beispiel.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1 \text{ (teleskopierende Summe)}$$

Beweis.

$$\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \quad \forall n \geq 2.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow S_n &= \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j(j-1)} = \sum_{j=2}^{n} \left(\frac{1}{j-1} - \frac{1}{j} \right) \\ &= \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j-1} - \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j} - \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j} \\ &= 1 - \frac{1}{n} \to 1, n \to \infty \end{aligned}$$

$\square$

Beispiel.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Beweis.

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2} = 1 + \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j^2}$$

$$\frac{1}{j^2} \leq \frac{1}{j(j-1)} \quad \forall j \geq 2.$$

$$\Rightarrow S_n = 1 + \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j^2}.$$

Also folgt aus $\leq 1 + \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j(j-1)} = 1 + 1 - \frac{1}{n}$.
Monotone Konvergenz, da $(S_n)_n$ konvergiert, also konvergiert $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} = 2 - \frac{1}{n} \leq 2 \quad \forall n$. □

Korollar 1.0.5. Wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, so ist $(a_n)_n$ eine Nullfolge.

Beweis. Satz 4 $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists K \in \mathbb{N} : |\sum_{j=n+1}^{m} a_j| < \varepsilon \quad \forall m > n \geq K$.
Setze

$$m = n + 1 : \sum_{j=n+1}^{n+1} a_j = a_{n+1} \Rightarrow |a_{n+1}| < \varepsilon \quad \forall n \geq K.$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} a_{n+1} = 0 = \lim_{n \to \infty} a_n.$$

□

Bemerkung. Warnung: die Umkehrung gilt nicht!

Beispiel (harmonische Reihe).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ divergiert, obwohl } \frac{1}{n} \to 0.$$

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$$

$$S_m - S_n \text{ wähle } m = 2n$$

$$S_{2n} - S_n = \sum_{j=1}^{2n} \frac{1}{j} - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} = \sum_{j=n+1}^{2n} \frac{1}{j}$$

$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

$$\le \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n}$$
$$= \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow |S_{2n} - S_n| = S_{2n} - S_n \to \frac{1}{2} \quad \forall n > 1$$

also kann $(S_n)_n$ nicht konvergieren!

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Satz 1.0.6. Gilt $0 \le a_n \le b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, so folgt:

1. Ist $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent, so konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \le \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.
2. Divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, so divergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (gegen $+\infty$).

Beweis.

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} a_j$$
$$t_n = \sum_{j=1}^{n} b_j$$
$$\Rightarrow S_n \le t_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
$$t_{n+1} \ge t_n, S_{n+1} \ge S_n$$

1. Ist $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent, so konvergiert $(t_n)_n$.

$$t := \lim_{n\to\infty} t_n \in [0, \infty) \Rightarrow t_n \le t.$$
$$\Rightarrow S_n \le t_n \le t \Rightarrow (S_n)_n \text{ nach oben beschränkt.}$$
$$\overset{\text{Mon. Konv.}}{\Rightarrow} s = \lim_{n\to\infty} S_n \text{ existiert und } \underbrace{S}_{=\sum_{n=1}^{\infty} a_n} \le t = \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

2. Aus 1. folgt ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ divergent, so muss auch $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$.

□

Satz 1.0.7. Sind $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergente (reelle Reihen), so konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n + \mu b_n) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Beweis.

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} a_j, t_n = \sum_{j=1}^{n} b_j, S = \lim_{n\to\infty} S_n, t = \lim_{n\to\infty} t_n$$

$$\sum_{j=1}^{n}(\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{j=1}^{n} a_j + \mu \sum_{j=1}^{n} b_j = \lambda S_n + \mu t_n \to \lambda S + \mu t, n \to \infty.$$

□

Satz 1.0.8 (Cauchyscher Verdichtungssatz)**.** Sei $(a_n)_n$ monoton fallende Nullfolge. Dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert}$$

$\Leftrightarrow$ die „verdichtete“ Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \dots$ konvergiert.

Beweis. $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n, a_n \to 0 \quad n \to \infty \Rightarrow a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

$$S_n := \sum_{j=1}^{n} a_j, t_n := \sum_{j=0}^{K} 2^j a_{2^j} \text{ sind mon. wachsende Folgen.}$$

„$\Leftarrow$“: Beobachtung: Jedes $n \in \mathbb{N}$ ist in genau einem „dyadischen“ Intervall. $I_l := \{2^l, 2^l + 1, \dots, 2^{l+1} - 1\}$

$$I_0 = \{1\}, I_1 = \{2, 3\}, I_3 = \{4, 5, 6, 7\}, \# I_l = 2^{l+1} - 2^l = 2^l$$

Ang., $n < 2^k$.

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} a_j \leq \sum_{j=1}^{2^k-1} a_j = \sum_{l=0}^{k} \sum_{j\in I_l} \underbrace{a_j}_{\leq a_{2^l}}$$

Bemerkung: $I_l \cap I_m = \emptyset \; l \neq m, \quad \bigcup_{l=0}^{k} I_l = \{n \in \mathbb{N} | n \leq 2^k - 1\}$

$$\leq \sum_{l=0}^{k} \# I_l \cdot a_{2^l} = \sum_{l=0}^{k} 2^l \cdot a_{2^l} = t_k$$

$$\Rightarrow S_n \leq t_k, \text{ falls } n \leq 2^k - 1$$

Annahme: $t = \lim t_k$ existiert. $\Rightarrow t_k \leq t \quad \forall k$.

$$\Rightarrow S_n \leq \lim_{k\to\infty} t_k = t.$$

$$S_n \leq t \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$\overset{\text{Mon. Konv.}}{\Rightarrow} \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ existiert. ✓

„$\Rightarrow$“: Beachte: Jedes $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ ist in genau einem Block.

$$\tilde{I}_l = \{2^{l-1}+1, 2^{l-1}+2, \dots, 2^l\}, l \in \mathbb{N}.$$

Sei $n \geq 2^k \Rightarrow$

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} a_j \geq \sum_{j=1}^{2^k} a_j = a_1 + \sum_{j=2}^{2^k} a_j$$
$$= a_1 + \sum_{l=1}^{k} \sum_{j\in\tilde{I}_l} a_j \geq a_1 + \sum_{l=1}^{k} \underbrace{\#\tilde{I}_l}_{=2^{l-1}} a_{2^l}$$

Für $n \geq 2^k$ ist

$$\begin{aligned} S_n &\geq a_1 + \sum_{l=1}^{k} 2^{l-1} a_{2^l} \\ &= a_1 + \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{l=1}^{k} 2^l a_{2^l}}_{=t_k - a_1} \\ &= \frac{1}{2} a_1 + \frac{1}{2} t_k \end{aligned}$$

$$\Rightarrow t_k \leq 2S_n \quad \forall n \geq 2^k.$$

Wir nehmen an, dass $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ existiert.

$$S_n \leq S_{n+1} \leq \dots \leq S$$

Halte $k \in \mathbb{N}$ fest.

$$\Rightarrow t_k \leq 2S_n \text{ für fast alle } n.$$
$$\Rightarrow t_k \leq \lim_{n\to\infty} 2S_n = 2S$$
$$\Rightarrow t_k \leq 2S \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$
$$\overset{\text{Mon. Konv.}}{\Rightarrow} \lim_{k\to\infty} t_k \text{ existiert.}$$

□

Beispiel.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ konv. } \Leftrightarrow p > 1.$$

Beweis. Verdichtete Reihe ist
$$\sum_{l=0}^{\infty} 2^l \frac{1}{(2^l)^p} = \sum_{l=0}^{\infty} (2^{1-p})^l.$$

geometrische Reihe, sie konv. genau dann, wenn $2^{1-p} < 1 \Leftrightarrow p > 1$. $\square$

Beispiel.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+\ln_2 n)^p}.$$

Satz 1.0.9 (Leibniz)**.** Ist $(a_n)_n$ eine mon. fallende Nullfolge, so konvergiert die alternierende Reihe
$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$$

Beispiel.
$$1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \text{ konv. } (= \log 2).$$
$$1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \frac{1}{2n+1} \text{ konv. } (= \frac{\pi}{4})$$

Beachte: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

Beweis. Aus $a_{n+1} \leq a_n, a_n \to 0 \Rightarrow a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
$$S_k := \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} a_j \quad k \in \mathbb{N}.$$
$$S_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{2n-1} - a_{2n} = \underbrace{(a_1 - a_2)}_{\geq 0} + \underbrace{(a_3 - a_4)}_{\geq 0} + \cdots + \underbrace{(a_{2n-1} - a_{2n})}_{\geq 0}$$

$$S_{2n+1} = \sum_{j=1}^{2n+1} (-1)^{j+1} a_j = a_1 - a_2 + a_3 - \cdots - a_{2n} + a_{2n+1}$$

$$= a_1 - \underbrace{a_2 - a_3}_{\geq 0} - \cdots - \underbrace{(a_{2n} - a_{2n+1})}_{\geq 0}$$

$\Rightarrow S_{2(n+1)} = S_{2n+2} = S_{2n} + (a_{2n+1} - a_{2n+2}) \geq S_{2n}$.
$S_{2(n+1)+1} = s_{2n+3} = S_{2n+1} - (a_{2n+2} - a_{2n+3}) \leq S_{2n+1}$

und $0 \leq S_{2n} = \sum_{j=1}^{2n} (-1)^{j+1} a_j = S_{2n+1} - (-1)^{2n+2} \cdot a_{2n+1} = S_{2n+1} - a_{2n+1} \leq S_{2n+1}$

$\Rightarrow S_{2n} \leq S_{2n+2}, \quad S_{2n+1} \geq S_{2n+3}$ und $0 \leq S_{2n} \leq S_{2n+1} - a_{2n+1} \leq S_{2n+1} \leq a_n$

$\overset{\text{Mon. Konv.}}{\Rightarrow} \; S_1 = \lim_{n\to\infty} S_{2n}$ und $S_2 = \lim_{n\to\infty} S_{2n+1}$ existieren.
und:

$$\underbrace{S_{2n} - S_{2n+1}}_{S_1 - S_2} = a_{2n+1} \to \quad n \to \infty$$

$$\Rightarrow S_1 - S_2 = \lim_{n\to\infty} (S_{2n} - S_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0$$

$$\Rightarrow S_1 = S_2 \Rightarrow (S_n)_n \text{ konvergiert auch gegen } S_1 (= S_2).$$

□

Definition 1.0.10. Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt absolut konvergent, falls $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert, d. h. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$.

Satz 1.0.11. Eine absolut konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n \in \mathbb{R}$ ist konvergent, und

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

(Dreiecksungleichung für Reihen)

Beweis. Annahme: $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

$$\overset{\text{Cauchy Krit.}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \exists K \in \mathbb{N} : \sum_{j=n+1}^{m} |a_j| < \varepsilon \quad \forall m > n \geq K.$$

Beachte:

$$\left| \sum_{j=n+1}^{m} a_j \right| \leq \sum_{j=n+1}^{m} |a_j| < \varepsilon \quad \forall m > n \geq K$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N} : \left| \sum_{j=n+1}^{m} a_j \right| < \varepsilon \quad \forall m > n \geq K$$

$$\overset{\text{Cauchy}}{\underset{\text{Kriterium}}{\Rightarrow}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert}$$

Auch: m fest.

$$\underbrace{\left| \sum_{n=1}^{m} a_n \right|}_{=S_m} = |S_m| \leq \sum_{n=1}^{m} |a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

$$\Rightarrow |S_m| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

Wissen $S_m \to \sum_{n=1}^{\infty} a_n, m \to \infty$

$$\Rightarrow \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| = |S| = |\lim_{m \to \infty} S_m| = \lim_{m \to \infty} |S_m| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

$\square$

Bemerkung. Warnung: Umkehrung von Satz 11 ist falsch! (Bsp. alternierende harm. Reihe)

Definition 1.0.12. Wir nennen eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ eine Majorante, von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, a_n \in \mathbb{R}$, falls $|a_n| \leq c_n$ für fast alle n.

Korollar 1.0.13. Hat die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine konvergente Majorante, so konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut und ist somit auch konvergent.

Beweis. Folgt direkt aus Satz 6, Def. 12 und Satz 11. $\square$

Satz 1.0.14 (Quotientenkriterium)**.** Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ Reihe, $a_n \neq 0$, und es gebe ein q mit $0 < q < 1$, sodass

$$(*) \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq q \text{ für fast alle } n.$$

Dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

Beweis. 1. $(*) \Rightarrow \limsup_{n \to \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq q$.

2. $\tilde{q} = \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq \tilde{q} + \varepsilon$ für fast alle n.

$$(*) \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq q \quad \forall n \geq n_0.$$

$$p \in \mathbb{N}_0, n = n_0 + p$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow |a_{n+1}| \leq q|a_n| \leq q^2|a_{n-1}| \leq \dots \leq q^{p+1}|a_{n_0}| \\ &\Rightarrow |a_n| \leq q^p|a_{n_0}| = q^n \underbrace{q^{-n_0}|a_{n_0}|}_{=M} \leq Mq^n =: c_n \end{aligned}$$

d. h. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ hat $\sum_{n=0}^{\infty} Mq^n$ (geom. Reihe, sie konvergiert, da $0 < q < 1$) als Majorante. □

Bemerkung. $a_n = Mq^n$

$$\Rightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{Mq^{n+1}}{Mq^n} = q$$

$$a_n = \frac{1}{n^p} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{(n+1)^p}\frac{n^p}{1} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^p = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^p \to 1, n \to \infty$$

$$\Rightarrow \limsup n \to \infty \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1.$$

Satz 1.0.15 (Wurzelkriterium)**.** $\sum_n a_n$ Reihe mit

$$(**) \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Rightarrow \sum_n a_n \text{ konv. abs..}$$

Ist $\limsup\limits_{n\to\infty} > 1$, so ist die Reihe divergent. (ohne Bew.)

Bemerkung. Bei $\limsup\limits_{n\to\infty} = 1$ ist keine Aussage möglich.

Bemerkung. $\limsup\limits_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} \leq \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}, a_n \neq 0,$ für fast alle n. (H. A.)

Beweis. $(**) \Rightarrow \exists 0 < q < 1 . K \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} \leq q \quad \forall n \geq K.$$

$$\left(\tilde{q} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sup |a_k|^{\frac{1}{n}}}_{\to\tilde{q}<1(n\to\infty)} < 1\right)$$

$\forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N} : \sup\limits_{k \geq n} |a_k|^{\frac{1}{k}} < \tilde{q} + \varepsilon \quad \forall n \geq K$
d.h.

$$\sup_{k \geq n} |a_k|^{\frac{1}{k}} < \tilde{q} + \varepsilon = q \ (< 1)$$

$\tilde{q} < 1$ wähle $s > 0 : q = \tilde{q} + s < 1$

$$\Rightarrow |a_n| \leq q^n \quad \forall n \geq K$$

Damit haben wir konv. Majorante $\sum_n q^n$. □

Satz 1.0.16 („Mutter aller Konvergenzkriterien“)**.** Sei $\sum_n a_n$ Reihe mit $a_n \neq 0$ für fast alle n. Dann gilt:

$$\sum_n a_n \text{ konv. abs. } \Leftrightarrow \exists c_n > 0, \sum_n c_n < \infty \text{ und } \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq \frac{c_{n+1}}{c_n} \text{ für fast alle } n.$$

Beweis. Übung. Scharfes Hinschauen auf Beweis des Quotientenkriteriums. □

Korollar 1.0.17. $\sum_n a_n$ und $p > 1 : \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq 1 - \frac{p}{n+1}$ für fast alle $n \Rightarrow \sum_n a_n$ konv. abs. (Übung).

Bemerkung. Ist $\liminf\limits_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} > 1 \Rightarrow a_n$ divergent.
Ist $\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1 \Rightarrow \sum_n a_n$ divergent.
Ist $\liminf\limits_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} (\inf\limits_{k\geq n} |a_n|^{\frac{1}{k}}) > 1 \Rightarrow \exists q > 1 : k \in \mathbb{N}$.

$$|a_n|^{1/n} \geq \underset{k \geq n}{inf} |a_k|^{1/k} \geq q > 1 \quad \forall n \geq K.$$

$$\Rightarrow |a_n| > q^n \to \infty, n \to \infty \Rightarrow a_n \text{ keine Nullfolge } \Rightarrow \sum_n a_n \text{ divergent.}$$

Beispiel (Exponentialreihe).

$$x \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{x^n}{n!}}_{=a_n} =: \exp x.$$

$$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = |\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{x^n}| = \frac{|x|}{n+1} \to 0, n \to \infty$$

$$\Rightarrow \frac{|a_{n+1}}{a_n} \leq 1/2 \text{ für fast alle } n.$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + 1/2x^2 + 1/6x^3 + \dots \text{ konv. absolut.}$$

Bemerkung.

$$S_n(x) := \sum_{j=1}^{n} \frac{x^j}{j!} = 1 + x + 1/2x^2 + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

$$S_n'(x) = 1 + x + 1/2x^2 + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = S_{n-1}(x)$$

$$\Rightarrow S_n'(x) = S_{n-1}(x) = S_n(x) - \frac{x^n}{n!}$$

Falls gilt: $S'(x) = (\lim_{n\to\infty} S_n(x))' = \lim_{n\to\infty}(S_n'(x)) = \lim_{n\to\infty} S_{n-1}(x) = S(x) \Rightarrow \exp' x = \exp x$? (im Allg. falsch, aber für Potenzreihen wahr)