Analysis I (WS 18/19)

Pavel Zwerschke, Daniel Augustin

27. November 2018

Inhaltsverzeichnis

0 Organisatorisches **2**

1 Was ist Analysis? **3**

2 Etwas Logik **3**
2.1 Grundbegriffe 5

3 Die reellen Zahlen **8**
3.1 Körperaxiome (engl. field) 8
3.2 Die Anordnungsaxiome 10
3.3 Obere und untere Schranken, Supremum und Infimum 14
3.4 Das Vollständigkeitsaxiom 16
3.5 Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ 16

4 Funktionen und Abbildungen **21**
4.1 Funktion als Abbildung 21
4.2 Abbildungen als Graph 22
4.3 Schubfachprinzip und endliche Mengen 24

5 **33**
5.1 Starke Induktion und das Wohlordnungsprinzip 33
5.2 Anwendungen 34

6 Existenz von Wurzeln (in $\mathbb{R}$) **36**

7 Folgen und Konvergenz **38**
7.1 Grundlagen 38

8 Monotone Konvergenz **48**

9 **55**
9.1 Cauchyfolgen 55

0 Organisatorisches

Dozent
Prof. Dr. Dirk Hundertmark (20.30, 2.028)
dirk.hundertmark@kit.edu
Übungsleiter
Dr. Markus Lange (20.30, 2.030)
markus.lange@kit.edu
Übungszettel
Ausgabe:
donnerstags unter `www.math.kit.edu/iana1/lehre/ana12018w/`
Abgabe:
bis mittwochs um 19:00 in den Abgabekästen des Foyers des Mathematikgebäudes (20.30)
getackert, mit Namen, Matrikelnummer, Tutoriennummer und Deckblatt (optional) in das Fach mit der richtigen Kennzeichnung legen
Zettel dürfen zu zweit abgegeben werden
Übungsschein
Jede K-Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet. Einen Übungsschein erhält wer 50% der Punkte aller K-Aufgaben erzielt.
Klausur
Die Anmeldung findet über das Online-Portal statt. Die Klausur findet am 26.03.2019 von 08:00 bis 10:00 statt. Der Übungsschein ist Voraussetzung für die Teilnahme an der Klausur.

1 Was ist Analysis?

Mathematik: Streng logisches Herleiten neuer Aussagen (aus möglichst wenigen Grundannahmen, sog. Axiomen).
Analysis: Aus dem altgriech. „Auflösen“. Analysis hat ihre Grundlage in der „Infinitisemalrechnung“von Leibnitz und Newton.
Zentrale Begriffe: Grenzwerte von Folgen und Reihen, Funktionen, stetig, differenzierbar, integrieren, Differential- und Integralrechnung, Differentialgleichungen (Newton, Maxwell, Schrödinger), unendlich dimensionale Räume

Beispiel. $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$
$2S = 1 + \frac{1}{2} + \dots + 1/2 + \dots$
$2S = 1 + S$
S entspricht der Wahrscheinlichkeit, dass irgendwann mal Kopf in einem Münzwurf kommt.
Vorsicht!
$S = 1 + 2 + 4 + \dots$
$2S = 2 + 4 + 8 + \dots = -1 + 1 + 2 + 4 + \dots = -1 + S$
$S = -1$
Natürlich Quatsch!
Formales Rechnen kann gefährlich sein!

- Was sind mathematische Aussagen?
- Wie macht man Beweise, wie findet man sie? (learning by doing)
- logische Zusammenhänge
- Was sind Zahlen?

2 Etwas Logik

Eine (mathematische) Aussage ist ein Ausdruck, der wahr oder falsch ist.
z. B.

1. A : „$1 + 1 = 2$.“ (auch „$1 + 1 = 3$“, „$1 + 1 = 0$“)
2. B : „Es gibt unendlich viele Primzahlen.“
3. C : „Es gibt unendlich viele Primzahlen p, für die $p + 2$ auch eine Primzahl ist.“ (Primzahlzwillingsvermutung)
4. D : „Die Gleichung $m\ddot{x} = F$ hat, gegeben $\dot{x}(0) = v_0, x(0) = x_0$, immer genau eine Lösung.“ (Lösung der Newtonschen Gleichung)

5. E : „Jede gerade natürliche Zahl größer als 2 ist die Summe zweier Primzahlen.“ (Goldbachsche Vermutung)

6. F : „Morgen ist das Wetter schön.“

7. G : „Ein einzelnes Atom im Vakuum mit der Kernladungszahl Z kann höchstens $Z+1$ Elektronen binden.“ (Ionisierungsvermutung, es ist noch nicht einmal bekannt, ob es eine Zahl Z gibt, sodass höchstens $Z+1$ Elektronen gebunden werden.)

8. $H(k,m,n)$: „Es gilt: $k^2+m^2=n^2$.“ (z. B. $H(3,4,5)$ ist wahr.)

Gegeben für natürliche Zahlen n, Aussagen $A(n)$, dann gilt:
Für jede nat. Zahl n ist $A(n)$ wahr, genau dann, wenn

1. $A(1)$ ist wahr.

2. Unter der Annahme, dass $A(n)$ wahr ist, folgt, dass $A(n+1)$ wahr ist.

Beispiel. $A(n) : 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Beweis. Vollständige Induktion
Induktionsanfang:
$1 = \frac{1(1+1)}{2} \checkmark$
Induktionsschluss:
Wir nehmen an, dass $A(n)$ wahr ist (für $n \in \mathbb{N}$)
D. h. Induktionsannahme:
$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$
Dann folgt:
$\underbrace{1+2+\cdots+n}_{=\frac{n(n+1)}{2}}+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2}+(n+1)$
$= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$ □

Bemerkung. Gaußscher Trick:
1)
$S = 1+2+3+\cdots+n = n+(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1$
$2S = \underbrace{(n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)}_{n\text{-mal}} \Leftrightarrow S = \frac{n(n+1)}{2}$.
2)
$S_n = 0+1+2+\cdots+n$
$=$ Anzahl der Punkte in
$\approx$ Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks $= \frac{1}{2} * n * n$.
Also: Ansatz („geschicktes Raten“, „scientific guess“, englisch: ansatz):

$S_n = \underbrace{a_2 n^2 + a_1 n + a_0}_{\text{Polynom 2. Grades in n}}$
$a_2 = \frac{1}{2}$
Wie bekommt man $a_0, a_1, (a_2)$? $n = 0 : S_0 = 0 = a_2 * 0^2 + a_1 * 0 + a_0 \Rightarrow a_0 = 0$.
$n = 1 : S_1 = 1 = a_2 * 1^2 + a_1 * 1^2 = a_2 + a_1 = \frac{1}{2} + a_1$.
also: $a_1 = \frac{1}{2}$
$\Rightarrow$ Raten: $S_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = \frac{n(n+1)}{2}$.

2.1 Grundbegriffe

Aussagen: Notation

$:$	„so, dass gilt“
$\exists$	„es gibt mindestens ein“, „es existiert“
$\forall$	„für alle“
$\Rightarrow$	„impliziert“($A \Rightarrow B$ „aus A folgt B“)
$\Leftrightarrow$	„genau dann, wenn“
$\neg A$	nicht A
$A \wedge B$	A und B
$A \vee B$	A oder B
$A := B$	A ist per Definition gleich B

Satz 2.1.1. Folgende Aussagen sind allein aus logischen Gründen immer wahr.

$\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$	Gesetz der doppelten Verneinung
$A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$	Kontraposition
$A \Rightarrow B \Leftrightarrow (\neg(A \wedge \neg B))$	beim Widerspruchsbeweis
$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$	de Morgan
$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$	de Morgan

Bemerkung. $A \Rightarrow B \Leftrightarrow B$ ist mindestens so wahr wie $A \Leftrightarrow A$ ist mindestens so falsch wie $B \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$.
$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B \wedge B \Rightarrow A)$.

Beispiel. $n \in \mathbb{N}$ ist gerade, falls $k \in \mathbb{N}$ existiert mit $n = 2k$.
$n \in \mathbb{N}$ ist ungerade, falls $\exists k \in \mathbb{N}_0 : \vee n = 2k + 1$.
Dann gilt: n ist gerade $\Leftrightarrow n^2$ ist gerade.

Beweis. „$\Rightarrow$“: n gerade $\Rightarrow n = 2k$, für $k \in \mathbb{N}$
$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ ist gerade.
Umgekehrt müssen wir zeigen:
„$\Leftarrow$“: n^2 gerade $\Rightarrow n$ gerade
Kontraposition: n ungerade $\Rightarrow n^2$ ungerade

Also sei $n = 2k+1, k \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = \underbrace{2(2k^2 + 2k)}_{\text{gerade}} +1 \Rightarrow$
n^2 ist ungerade. $\square$

Mengen (nach Cantor)
informell: Eine Menge ist eine Sammlung von Objekten (Elemente) zu einem neuen Objekt.
Vorsicht: Russels Paradox
genaue Definition von Zermelo-Fraenkel Axiome ($\rightarrow$ Logik Mengenlehre)
$a \in M$: a ist Element von M
$a \notin M$: a ist kein Element von M
z.B.:
$M = \{1, 4\}$
$1 \in M$
$5 \notin M$
Angabe von Mengen durch

- Auflistung
  $M = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_{17}\}$
- Eigenschaft
  $M = \{a | a \text{ hat Eigenschaft } E\}$

z.B.:

- $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$
- $\mathbb{Z} := \{x | x \in \mathbb{N} \vee x \in -\mathbb{N} \vee x = 0\}$
- $-\mathbb{N} := \{-n | n \in \mathbb{N}\}$

Definition 2.1.2. Sei M eine Menge und $A(x)$ Aussagen mit $x \in M$
$\forall x \in M : A(x)$ ist wahr, falls alle $A(x)$ wahr sind.
$\exists x \in M : A(x)$ ist wahr, falls mindestens eine Aussage $A(x)$ wahr ist.

Achtung: Zusammensetzen: Reihenfolge ist wichtig!

Beispiel. Töpfe := Menge der Töpfe
Deckel := Menge der Deckel
$A : \forall T \in$ Töpfe $\exists D \in$ Deckel : D passt auf T
(Für jeden Topf gibt es einen Deckel, der passt)
$B : \exists D \in$ Deckel $\forall T \in$ Töpfe : D passt auf T
(Es existiert mindestens ein Deckel, der auf alle Töpfe passt)

Negation:
$\neg(\forall x \in M : A(x))$
$\Leftrightarrow \exists x \in M : \neg A(x)$
$\neg(\exists x \in M : A(x))$
$\Leftrightarrow \forall x \in M : \neg A(x)$

Definition 2.1.3 (wichtige Mengen)**.** Seien M, N Mengen.

$$\begin{aligned} \emptyset &:= \text{ die Menge ohne Elemente (leere Menge)} \\ M \cap N &:= \{x | x \in M \wedge x \in N\} \text{ (Schnitt)} \\ M \cup N &:= \{x | x \in M \vee x \in N\} \text{ (Vereinigung)} \\ M \setminus N &:= \{x | x \in M \wedge x \notin N\} \text{ (Differenzmenge)} \\ \mathcal{P}(M) &:= \{A | A \subset M\} \text{ die Menge aller Teilmengen von } M \text{ (Potenzmenge)} \end{aligned}$$

Sei I eine Menge und für $i \in I$ eine Menge M_i.

$$\bigcap_{i \in I} M_i := \{x | \forall i \in I : x \in M_i\}.$$
$$\bigcup_{i \in I} M_i := \{x | \exists i \in I : x \in M_i\}.$$

Ist $M \cap N = \emptyset$, so heißen M und N divergent.
$M \subset N$, falls $\forall x \in M : x \in N$ (M Teilmenge von N).
$M = N$, falls M und N dieselben Elemente haben.
Insbesondere ist $(M = N) \Leftrightarrow M \subset N \wedge N \subset M$.
$M \subsetneq N : M \subset N \wedge M \neq N$ (M echte Teilmenge von N).

Beispiel. $\emptyset \subset M$
$M = \{1, 2\} \Rightarrow \mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

1. Eigenschaften von „$\subset$“
   (a) $\emptyset \subset M$
   (b) $M \subset M$
   (c) $M = N \Leftrightarrow M \subset N \wedge N \subset M$
   (d) $A \subset B \wedge B \subset C \Leftrightarrow A \subset C$
2. Assoziativität
   (a) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
   (b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

3. Kommutativität

   (a) $A \cup B = B \cup A$
   (b) $A \cap B = B \cap A$

4. Distributivgesetz

   (a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
   (b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

3 Die reellen Zahlen

3.1 Körperaxiome (engl. field)

$\mathbb{K}$: Menge mit zwei Operationen „+“und „·“.
$\forall a, b \in \mathbb{K}$ ist $a + b \in \mathbb{K} \wedge a \cdot b \in \mathbb{K}$ erklärt sollen kompatibel sein.

Definition 3.1.1 (Körperaxiome)**.** In einem Körper gelten diese Axiome:

1. Kommutativität: $\forall a, b \in \mathbb{K} : a + b = b + a, a \cdot b = b \cdot a$

2. Assoziativität: $\forall a, b, c \in \mathbb{K} : a + (b + c) = (a + b) + c, a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

3. Existenz des neutralen Elements:
   $\exists 0 \in \mathbb{K} : a + 0 = 0 + a = a \forall a \in \mathbb{K}$
   $\exists 1 \in \mathbb{K} : a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \forall a \in \mathbb{K}$

4. Existenz eines inversen Elements:
   $\forall a \in \mathbb{K} \exists - a \in \mathbb{K} : a + (-a) = 0$
   $\forall a \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \exists \frac{1}{a} \in \mathbb{K} : a \cdot \frac{1}{a} = 1$
   Es gilt: $0 \neq 1$.

5. Distributivgesetz: $\forall a, b, c \in \mathbb{K} : a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Beispiel. $\mathbb{Q} = \frac{m}{n}, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}$ ist ein Körper.

$$\mathbb{F}_2 : \begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}$$ ist ein Körper.

Bemerkung. .

1. Somit ist ein Körper $\mathbb{K}$ mit „+“eine kommutative Gruppe und $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ mit „·“auch eine kommutative Gruppe.

2. Die neutralen Elemente sind eindeutig bestimmt.
   z.B.: angenommen, 0_1 und 0_2 sind neutrale Elemente mit „+“.
   $\Rightarrow 0_1 \overset{(3)}{=} 0_1 + 0_2 \overset{(1)}{=} 0_2 + 0_1 \overset{(2)}{=} 0_2$
   analog für Multiplikation

Definition 3.1.2. Zu $a \in \mathbb{K}$ ist $-a$ das Inverse bzgl. der Addition
schreibe $a - b := a + (-b)$.
Zu $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ sei $a^{/1}$ das Inverse bzgl. der Multiplikation.
Ist $b \neq 0$, so schreiben wir $\frac{a}{b} := a \cdot b^{-1} = b^{-1} \cdot a$.
schreibe $(ab) := a \cdot b$.

Lemma 3.1.3 (Rechnen in einem Körper)**.** .

1. Umformen von Gleichungen
   $\forall a, b, c \in \mathbb{K}:$
   aus $a + b = c$ folgt $a = c - b$
   aus $a \cdot b = c$, $b \neq 0$ folgt $a = \frac{c}{b}$

2. Allgemeine Rechenregeln

$$\begin{aligned}
-(-a) &= a \\
(a^{-1})^{-1} &= a, \text{ falls } a \neq 0 \\
-(a+b) &= (-a) + (-b) \\
(a \cdot b)^{-1} &= b^{-1} \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1} \\
a \cdot 0 &= 0 \\
a(-b) &= -(ab), (-a)(-b) = ab \\
a(b-c) &= ab - ac \\
ab = 0 &\Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0 \text{ (Nullteilerfreiheit)}
\end{aligned}$$

Beweis. $0 = a + (-a) = (-a) + a$
$\Rightarrow -(-a) = a$
$(a + b) + ((-a) + (-b)) = (a + (-a)) + (b + (-b)) = 0 + 0 = 0$
$\Rightarrow -(a + b) = (-a) + (-b)$
benutzen wir auch Eindeutigkeit des inversen Elements
analog zeigt man $(a^{-1})^{-1} = a$ und $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = a^{-1}b^{-1}$
z.B.: $(ab) \cdot (b^{-1}a^{-1}) = a(b \cdot b^{-1})a^{-1} = (a \cdot 1)a^{-1} = a \cdot b^{-1} = 1$
Ferner $a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0 = a \cdot 0 + 0$
$\Rightarrow a \cdot 0 = a \cdot 0 - a \cdot 0 = 0$
$\Rightarrow a \cdot b + a \cdot (-b) = a \cdot (b + (-b)) = a \cdot 0 = 0$
$\overset{\text{Eind. d. Inv.}}{\Rightarrow} -ab = a(-b)$
Somit auch $(-a)(-b) = -((-a)b) = -(b(-a)) = (-ba) = -(-ab) = ab$
und $a(b - c) = a(b + (-c)) = ab + a(-c) = ab + (-ac) = ab - ac$.

ist $ab = 0$ und $a \neq 0 \Rightarrow 0 = (ab)\frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot (ab) = (\frac{1}{a} \cdot a)b = 1b = b$
also ist $b = 0$. □

Satz 3.1.4 (Bruchrechnen)**.** $a, b, c, d \in \mathbb{K}, c \neq 0, d \neq 0$.
Dann gilt

1. $\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ad+bc}{cd}$
2. $\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{ab}{cd}$
3. $\frac{a/c}{b/d} = \frac{ad}{bc}$, falls auch $b \neq 0$ ist.

Beweis. Übung □

Beispiel. rationale Zahlen sind ein Körper
schreiben $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ für einen Körper

3.2 Die Anordnungsaxiome

Definition 3.2.1. Sei $\mathbb{K}$ (genauer $(\mathbb{K}, +, \cdot)$) ein Körper. Dann heißt $>$ eine Anordnung falls

1. Für jedes $a \in \mathbb{K}$ gilt genau eine der Aussagen $a > 0, a = 0, -a > 0$
   (wenn $a \in \mathbb{K}$, mit $a > 0$ positiv)
2. Aus $a > 0$ und $b > 0$ folgt
   $a + b > 0$ und $a \cdot b > 0$

Wir nennen $(\mathbb{K}, +, \cdot, >)$ einen angeordneten Körper.

Bemerkung. Statt $-a > 0$ schreiben wir $a < 0$
Statt $a - b > 0$ schreiben wir $a > b$
Bild:

Statt $a - b < 0$ schreiben wir $a < b$.
$a \geq b$, falls $a > b \vee a = b$
$a \leq b$, falls $a < b \vee a = b$.

Satz 3.2.2. Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot, >)$ ein angeordneter Körper. Dann gilt

1. für $a, b \in \mathbb{K}$ gilt genau eine der Relationen $a > b, a = b, a < b$ (Trichotomie)
2. Aus $a > b, b > c$ folgt $a > c$ (Transitivität)

3. Aus $a > b$ folgt:
$$\begin{cases} a + c > b + c, \forall c \in \mathbb{K} \\ ac > bc, \text{ falls } c > 0 \\ ac < bc, \text{ falls } c < 0 \end{cases}.$$

4. Aus $a > b$ und $c > d$ folgt:
$$\begin{cases} a + c > b + d \\ ac > bd, \text{ falls } b, d > 0 \end{cases}$$

5. Für $a \neq 0$ ist $a^2 > 0$.

6. Aus $a > 0$ folgt $\frac{1}{a} > 0$.

7. Aus $a > b > 0$ folgt $0 < \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

8. Aus $a > b, 0 < \lambda < 1$ folgt $b < \lambda b + (1 - \lambda)a < a$.

Bemerkung. Auf $\mathbb{F}_2$ kann es keine Anordnung geben!

Beweis. 1. Direkt aus (A.1) und Def. von $a > b$.

2. $a - c = \underbrace{(a - b)}_{>0} + \underbrace{(b - c)}_{>0} \overset{(A.2)}{>} 0.$

3. $(a + c) - (b + c) = a - b > 0$

   $ac - bc = \underbrace{(a - b)}_{>0} \cdot c \overset{(A.2)}{>} 0$, falls $c > 0$

   Ist $c < 0$, so ist $-c > 0$

   $\Rightarrow bc - ac = \underbrace{(a - b)}_{>0} \cdot \underbrace{(-c)}_{>0} \overset{(A.2)}{>} 0$

   $ac - bd = ac - bc + bc - bd = \underbrace{(a - b)}_{>0} \cdot \underbrace{c}_{>0} + \underbrace{b}_{>0} \cdot \underbrace{(c - d)}_{>0} \overset{(A.2)}{>} 0.$

4. $(a + c) - (b + d) = (a - b) + (c - d) > 0$ nach (A.2)
   $ac - bd = ac - bc + bc - bd = (a - b)c + b(c - d)$
   Ist $b = 0 \Rightarrow a > b = 0 \Rightarrow ac > 0 = bd$
   Ist $b < 0 \Rightarrow (-b)d > 0 \Rightarrow -bd > 0 \Rightarrow bd < 0 \Rightarrow ac < -bd \Rightarrow \underbrace{ac}_{>0} + \underbrace{(-bd)}_{>0} \overset{(A.2)}{>} 0.$

5. Fallunterscheidung:
   ist $a > 0 \Rightarrow a^2 = a \cdot a > 0$ (A.2)
   ist $a < 0 \Rightarrow a^2 = (-a) \cdot (-a) > 0$ (A.2)

6. sei $a > 0$:
   $\overset{5.}{\Rightarrow} \left(\frac{1}{a}\right) > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} = \underbrace{\left(\frac{1}{a}\right)^2}_{>0} \cdot \underbrace{a}_{>0} > 0.$

7. aus $a > b > 0$
   $\Rightarrow \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{1}{b}(a-b)\frac{1}{a} > 0.$

8. $a > b, 0 > \lambda > 1 \Rightarrow \lambda > 0 \wedge 1 - \lambda > 0$
   $b = \lambda b + \underbrace{(1-\lambda)b}_{<(1-\lambda)a}$
   $< \lambda b + (1-\lambda)a < \lambda a + (1-\lambda)a = a$
   $\Rightarrow b < \lambda b + (1-\lambda)a = a.$
   Insbesondere $\lambda = {}^1\!/_2 \Rightarrow b < {}^1\!/_2 b + {}^1\!/_2 a = \frac{a+b}{2} < a.$

$\square$

Definition 3.2.3 (Betrag)**.** Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot, >)$ ein angeordneter Körper.
Betrag von $a \in \mathbb{K}$ ist gegeben durch

$$|a| := \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq 0 \\ -a, & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

auch noch $a, b \in \mathbb{K}$

$$\max(a,b) := \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq b \\ b, & \text{falls } a < b \end{cases}$$

$$\min(a,b) := \begin{cases} a, & \text{falls } a \leq b \\ b, & \text{falls } a > b \end{cases}$$

Bemerkung. .

1. $a, b \in \mathbb{K}$
   $|a - b| =$ Abstand von a zu b.
   $|a| = |a - 0| =$ Abstand von a zu 0.

2. $|a| = \max(a, -a)$.

Satz 3.2.4. $(\mathbb{K}, +, \cdot, >)$ ang. Körper
Dann gilt $\forall a, b \in \mathbb{K}$:

1. $|-a| = |a|$ und $a \leq |a|$

2. $|a| \geq 0$ und $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$

3. $|ab| = |a|\,|b|$

4. $|a+b| \leq |a| + |b|$ (Dreiecksungleichung)

5. $||a| - |b|| \leq |a-b|$ (umgekehrte Dreiecksungleichung)

Beweis. .

1. $|-a| = \begin{cases} -a, -a \geq 0 \\ -(-a), -a \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} -a, a \leq 0 \\ a, a \geq 0 \end{cases} = |a|$
   $|a| - a = \begin{cases} a-a, a \geq 0 \\ -a-a, a < 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, a \geq 0 \\ -(a+a), a < 0 \end{cases} \geq 0.$
   alternativ: $a \leq \max(a, -a) = |a|$.

2.

3. Hier ändern sich die linke und rechte Seite <u>nicht</u>, wenn man a bzw. b durch $-a$ bzw. $-b$ ersetzt.
   Also, o.B.d.A. können wir annehmen, dass $a, b \geq 0$.
   $\Rightarrow |ab| = ab = |a|\,|b|$.

4. $\overset{\text{Satz 1 (5)}}{\Rightarrow} |a+b|^2 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = |a|^2 + 2\underbrace{ab}_{} \leq |ab| + |b|^2$
   $\overset{(2)}{\leq} |a|^2 + 2\,|ab| + |b|^2$
   $\overset{(3)}{|a|^2 + 2\,|a|\,|b| + |b|^2}$.
   Also $(a+b)^2 \leq (|a| + |b|)^2$
   $\overset{\text{H.A.}}{\Rightarrow} |a+b| \leq |a| + |b|$.
   H.A. aus $|c|^2 \leq |d|^2$ folgt $|c| \leq |d|$ (Kontraposition).

5. $|a| = |a - b + b| = |(a-b) + b| \overset{(4)}{\leq} |a-b| + |b|$
   $|a| - |b| \leq |a-b|\,\forall a, b \in \mathbb{K}$.
   Jetzt: Symmetrieargument. (Vertausch von a und b)
   $\Rightarrow |b| - |a| \leq |b-a| = |(-b-a)| = |a-b|$
   also $|b| - |a| \leq |a-b|$
   $|a| - |b| \leq |a-b|$
   $||a| - |b|| = \max(|a| - |b|\,, -(|a| - |b|)) = \max(|a| - |b|, |b| - |a|) \leq |a-b|$.

$\square$

Beispiel. Sei $a, b \in \mathbb{K}$ ein angeordneter Körper. Aus $|b-a| \leq {}^b\!/\!_2, 2 = 1+1$ folgt $a \geq {}^b\!/\!_2$ Bild:

Beweis. $b - a \leq |b-a| \leq {}^b\!/\!_2 \Rightarrow a \geq b - {}^b\!/\!_2 = {}^b\!/\!_2$. □

Korollar 3.2.5 („geometrisch-arithmetische Ungleichung“)**.** Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot, >)$ ein ang. Körper, $a, b \in \mathbb{K}$
$\Rightarrow ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$.
Wenn Gleichheit gilt, so folgt $a = b$.

Beweis. In Übung □

Fakt:

- In jedem angeordneten Körper gilt $0 < 1$!
- Es gibt keine Anordnung, die $\mathbb{F}_2$ zu einem angeordneten Körper macht. (H.A.)

3.3 Obere und untere Schranken, Supremum und Infimum

Notation: a ist nicht negativ, falls $a \geq 0$.
natürlich $a = b \Leftrightarrow a \leq b \land a \geq b$.
Im Folgenden ist $\mathbb{K}$ immer ein angeordneter Körper. $A, B \subset \mathbb{K}, A, B \neq \emptyset$ und $\gamma \in \mathbb{K}$, so bedeutet $A \leq \gamma : \forall a \in A : a \leq \gamma$ (γ it obere Schranke für A).
$B \geq \beta : \forall b \in B : b \geq \beta$ (β ist untere Schranke für B).
Analog sind $a < \gamma, A > \gamma, A < B$, usw. definiert.
Hat A eine obere Schranke, so heißt A nach oben beschränkt. Hat B eine untere Schranke, so ist B nach unten beschränkt. A ist beschränkt, falls es nach oben und unten beschränkt ist.
Ist $A \leq \alpha$ und $\alpha \in A$, so heißt α größtes (maximales) Element von A, schreibe $\alpha = \max A$ (Maximum).
Ist $B \geq \beta$ und $\beta \in B$, so heißt B kleinstes (minimales) Element von B, schreibe $\beta = \min B$ (Minimum).
Man zeige, dass max und min eindeutig sind, sofern sie existieren.
$[0, 1) := \{x \in \mathbb{K} | 0 \leq x \leq 1\}$ hat kein Maximum bzw. kein maximales Element.

Definition 3.3.1. Sei $A \subset \mathbb{K}, A \neq \emptyset$. Dann ist $\gamma \in \mathbb{K}$ die kleinste obere Schranke (oder Supremum), falls $A \leq \gamma$ und aus $A \leq n$ folgt $\gamma \leq n$.
Schreibe $\gamma = \sup A = \sup(A)$.
Analog: β it die größte untere Schranke von A (Infimum), falls $\beta \leq A$ und aus $\eta \leq A$ folgt $\eta \leq \beta$
Schreibe $\beta = \inf A = \inf(A)$.

Beispiel. $P := \{x \in \mathbb{K} | x > 0\}$
$\Rightarrow$

1. P ist nicht nach oben beschränkt.
2. P hat kein Minimum, aber $\inf P = 0$.

Beweis. .

1. Ang. γ ist obere Schranke für P. D.h. $\forall x \in P$ folgt $0 < x \leq \gamma \Rightarrow \gamma > 0 \Rightarrow \gamma \in P \Rightarrow 0 < \gamma = \gamma + 0 < \gamma + 1 \in P \Rightarrow \gamma + 1 \in P$ und $\gamma + 1 > \gamma \gamma$ ist nicht obere Schranke für P (Widerspruch!) $\lightning$
2. $2 := 1 + 1 > 1 > 0$
   Ang. $\min P := \eta$ existiert. $\Rightarrow \eta \in P, \eta > 0, \tilde{x} := \frac{\eta}{2} = \frac{0+\eta}{2} < \eta$.
   Es gilt $0 = \inf P$.
   Sicherlich $0 < P$, also ist 0 eine untere Schranke für P.
   0 ist die größte untere Schranke, denn nach obigem Argument ist jede Zahl > 0 keine untere Schranke für P!

$\square$

Lemma 3.3.2. $A \subset \mathbb{K}, A \neq \emptyset$.

1. $\alpha := \sup A \Leftrightarrow \alpha \geq A \wedge \forall \varepsilon > 0 \exists a \in A : \alpha - \varepsilon < a$.
2. $\beta := \inf B \Leftrightarrow \beta \leq B \wedge \forall \varepsilon > 0 \exists b \in B : b < \beta + \varepsilon$.

Beweis. .

1. „$\Rightarrow$“: Sei $\alpha = \sup A$. Also α ist die kleinste obere Schranke für A. D.h. $\alpha \geq A$ und $\forall \varepsilon > 0$ ist $\varepsilon > 0 < \alpha$, also ist $\alpha - \varepsilon$ keine obere Schranke für A. D.h. $\exists a \in A : \alpha - \varepsilon < a$.
   „$\Leftarrow$“: Sei $\alpha \geq A \wedge \forall \varepsilon > 0 \exists a \in A : \alpha - \varepsilon < a$. Also ist α eine obere Schranke für A. Sei $\tilde{\alpha} < \alpha$.
   Setze $\varepsilon := \alpha - \tilde{\alpha} > 0 \Rightarrow \exists a \in A : \tilde{\alpha} = \alpha - \varepsilon < a \Rightarrow \tilde{\alpha}$ ist keine obere Schranke für a. $\Rightarrow \alpha$ ist die kleinste obere Schranke.
2. $A := -B = \{-b | b \in B\}$. Beachte: $\sup A = \sup(-B) = -\inf B$.

$\square$

3.4 Das Vollständigkeitsaxiom

Definition 3.4.1. Ein angeordneter Körper $(\mathbb{K}, +, \cdot, >)$ erfüllt das Vollständigkeitsaxiom, falls

Jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge hat ein Supremum.

Solch einen Körper nennt man ordnungsvollständig. $\mathbb{R}$, der Körper der reellen Zahlen, ist <u>der</u> ordnungsvollständige Körper. (Im Wesentlichen gibt es nur einen!)

$\mathbb{Q}; A := \{r \in \mathbb{Q} | r^2 < 2\}$
Notation: $a, b \in \mathbb{R} \quad a < b$
$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} | a \le x \le b\}$ abgeschlossenes Intervall
$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$ offenes Intervall
$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} | a \le x < b\}$ nach rechts halboffenes Intervall
$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} | a < x \le b\}$ nach links halboffenes Intervall
Intervalllänge: $b - a$
unbeschränkte Intervalle:
$(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} | x \le a\}$
$[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} | x \ge a\}$
$(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} | x < a\}$
$(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} | x > a\}$.

3.5 Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$

(als Teilmenge von $\mathbb{R}$)
n natürliche Zahl, $n = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n\text{-mal}}$ (zirkulär $\lightning$)

Definition 3.5.1. Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ heißt <u>induktiv</u>, falls

1. $1 \in M$
2. Aus $x \in M$ folgt $x + 1 \in M$

Beispiel. $[1, \infty)$ ist induktiv.
$\mathbb{R}$ ist induktiv.
$(1, \infty)$ ist nicht induktiv.
$\{1\} \cup [1 + 1, \infty)$ ist induktiv.

Beobachtung: Ein beliebiger Schnitt induktiver Mengen ist wieder induktiv.
J: Indexmenge A_0 induktiv $\forall j \in J$

$\Rightarrow \forall i \in J : 1 \in A_j \Rightarrow 1 \in \bigcap\limits_{j \in J} A_j$
Ist $x \in \bigcap\limits_{j \in J} A_j \Rightarrow \forall j \in J : x \in A_j \Rightarrow x + 1 \in A_j \Rightarrow x + 1 \in \bigcap\limits_{j \in J} A_j$.

Definition 3.5.2 (natürliche Zahlen)**.** .
$\mathbb{N} := \{x \in \mathbb{R} : \text{ für jede induktive Teilmenge } M \in \mathbb{R} \text{ gilt } x \in M\} := \bigcap\limits_{M \subset \mathbb{R} \text{ ist induktiv}} M$

Bemerkung. $\mathbb{N}$ ist induktiv und $\mathbb{N}$ ist die kleinste induktive Teilmenge von $\mathbb{R}$.

Satz 3.5.3 (Archimedisches Prinzip für $\mathbb{R}$)**.** .

1. $\mathbb{N}$ ist (in $\mathbb{R}$) <u>nicht</u> nach oben beschränkt!

2. $\forall x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0 \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < x$.

Beweis. 1. Angenommen, $\mathbb{N} \subset R$ ist nach oben beschränkt.
$\mathbb{N} \neq \emptyset$ (da $1 \in \mathbb{N}$)
Vollständigkeitsaxiom $\Rightarrow \alpha := \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$.
Setze $\varepsilon = 1$ in Lemma 3.3.2
$\alpha - 1$ ist nicht obere Schranke für $\mathbb{N}$.
$\exists n \in \mathbb{N} : n > \alpha - 1$
$\Rightarrow n + 1 > \alpha \in \mathbb{N}$ ↯zu α ist obere Schranke von $\mathbb{N}$.

2. Sei $x > 0 \overset{\text{Satz 3.2.1 (6)}}{\Rightarrow} \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : n > \frac{1}{x} \underset{\text{Satz 3.2.1 (7)}}{\Rightarrow} x = \dfrac{1}{1/x} > \frac{1}{n}$.

□

Satz 3.5.4 (Induktionsprinzip)**.** Sei $M \subset \mathbb{N}$ mit

1. $1 \in M$

2. Ist $x \in M \Rightarrow x + 1 \in M$

Dann ist $M = \mathbb{N}$.

Beweis. $\Rightarrow M$ ist induktiv. $\mathbb{N}$ kleinste induktive Teilmenge von $\mathbb{R}$
$\Rightarrow \mathbb{N} \subset M$
$M \subset \mathbb{N} \wedge \mathbb{N} \subset M \Leftrightarrow M = \mathbb{N}$. □

Korollar 3.5.5 (Vollständige Induktion)**.** Für $n \in \mathbb{N}$ seien $A(n)$ Aussagen. Es gelte:

1. $A(1)$ ist wahr.

2. aus $A(n)$ ist wahr folgt $A(n+1)$ ist wahr.

Beweis. Definiere $M := \{n \in \mathbb{N} | A(n) \text{ ist wahr}\} \subset \mathbb{N}$.

1. $\Rightarrow 1 \in M$, da $A(1)$ wahr ist

2. $\Rightarrow$ sei $n \in M$, d.h. $A(n)$ ist wahr $\Rightarrow A(n+1)$ ist wahr, d.h. $n+1 \in M$.

$\overset{\text{Ind.prinzip Satz 4}}{\Rightarrow} M = \mathbb{N}$, also sind alle $A(n)$ wahr! □

Notation: Induktive Definition von Summen und Produkten.
$a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ vage …
Summe:

$$\sum_{k=1}^{1} a_k := a_1, (n=1), \sum_{k=1}^{n+1} a_k := \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) + a_{n+1}, n \in \mathbb{N}$$

Allgemein: untere Grenze $k = m$, obere Grenze $k = n$, Laufindex kann verschoben werden.
z.B.: $k = j + 1$

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{j=m-1}^{n-1} a_{j+1} = \ldots = \sum_{l=0}^{n-m} a_{l+m}$$

Ist $m > n$, definieren $\sum_{k=m}^{n-m} a_k := 0$ (leere Summe)
Produkt:

$$\prod_{k=1}^{1} a_k := a_1, \prod_{k=1}^{n+1} a_k := \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) \cdot a_{n+1}, n \in \mathbb{N}$$

Ähnlich $\prod_{k=m}^{n} a_n$, setzen für $m > n \prod_{k=m} .a_k := 1$ (leeres Produkt)
z.B.

$$a \in \mathbb{R}, a^n = \prod_{k=1}^{n} a, \text{ d.h. } a^1 = a, a^{n+1} = a^n \cdot a, n \in \mathbb{N} \text{ (induktive Definition)}$$

Rechenregeln gelten z.B.

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k a_j, b_j \in \mathbb{R}, j = 1, \ldots, n$$

$$c \in \mathbb{R}, \sum_{n}^{k=1}(c \cdot a_k) = c \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Satz 3.5.6 (Bernoullische Ungleichung)**.**

$$x \in \mathbb{R}, x \geq -1, n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$$

gilt $(1+x)^n \geq 1 + n + x (\forall m \in \mathbb{N}, x \geq -1)$
mit „>“, falls $n > 1, x \neq 0$
$(\forall n \in \mathbb{N}, x \geq -1 (1+x)^n \geq 1 + nx)$

Beweis. Vollständige Induktion:
Induktionsanfang:

$$n = 0 : (1+x)^0 = 1 = 1 + 0x \checkmark$$

$$n = 1 : (1+x)^1 = 1 + x = 1 + 1x \checkmark$$

Induktionsschritt: Induktionsvoraussetzung: es gelte für ein festes, aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}(1+x)^n &\geq 1 + nx \\ (1+x)^{n+1} &= \underbrace{(1+x)^n}_{\geq 1+nx} \cdot \underbrace{(1+x)}_{>0} \geq (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2 \\ &= \begin{cases} \geq 1 + (n+1)x, x > -1 \\ > 1 + (n+1)x, x > -1, x \neq 0 \end{cases}\end{aligned}$$

□

Satz 3.5.7 (geometrische Summe)**.** Sei $x \neq 1$, dann ist

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Beweis. Vollständige Induktion:
IA:

$$n = 0 : \sum_{k=0}^{0} x^k = x^0 = 1 = \frac{1-0}{1+0} \checkmark$$

$$n = 1 : \sum_{n=0}^{1} x^k = 1 + x = \frac{1-x}{1-x}(1+x) = \frac{1-x^2}{1-x} \checkmark$$

IS:
IV: Es gelte für ein festes, aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} x^k + x^{n+1} \overset{\text{IV}}{=} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1} \\
&= \frac{1-x^{n+1}+(1-x)x^{n+1}}{1-x} = \frac{1-x^{n+2}}{1-x}.
\end{aligned} \tag{1}$$

□

Beweis. ohne vollständige Induktion:

$$\begin{aligned}
S_n &:= \sum_{k=0}^{n} x^k \\
x \cdot S_n &= \sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{k=0}^{n} x^{k+1} = \sum_{j=1}^{n+1} x^j, \\
\Rightarrow (1-x)S_n &= S_n - xS_n = \sum_{k=0}^{n} x^k - \sum_{k=1}^{n+1} x^k = x^0 - x^{n+1} = 1 - x^{n+1} \\
\Rightarrow S_n &= \frac{1-x^{n+1}}{1-x}
\end{aligned}$$

□

Satz 3.5.8 (Eigenschaften von $\mathbb{N}$)**.** Es gilt

1. $\forall m, n \in \mathbb{N} : n + m \in \mathbb{N}$ imd $n \cdot m \in \mathbb{N}$.
2. $\forall n \in \mathbb{N} : n = 1$ oder ($n > 1$ und demnach $n - 1 \in \mathbb{N}$).
3. $\forall m, n \in \mathbb{N} : m \leq n : n - m \in \mathbb{N}_0$.
4. $\forall n \in \mathbb{N}$ gibt es kein $m \in \mathbb{N} : n < m < n + 1$.

Beweis. .

1. Gegeben $m \in \mathbb{N} : A := \{n \in \mathbb{N} | n + m \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}$

   (a) $1 \in A$, denn $m \in \mathbb{N} : 1 + m = m + 1 \in \mathbb{N}$.

   (b) Angenommen, $n \in A \Rightarrow (n+1) + m = \underbrace{n+m}_{\in \mathbb{N}} + 1 \in \mathbb{N}$

   $\Rightarrow n + 1 \in A$

   somit ist A induktiv, also $\mathbb{N} \subset A \Rightarrow A = \mathbb{N}$.

2. Definiere $B := \{n \in \mathbb{N} | n = 1 \vee (n - 1 \in \mathbb{N} \wedge n - 1 \geq 1)\} \subset \mathbb{N}$
   Dann ist B induktiv, denn

(a) $1 \in B, 2 = 1 + 1 \in B$

(b) Sei $1 \neq n \in B$, so folgt $1 \leq n - 1$ und somit $n = \underbrace{(n-1)}_{\in \mathbb{N}} + 1 \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow n+1 \in \mathbb{N}$ und $(n+1) - 1 = n \geq 1+1 > 1$. Somit ist $n+1 \in B$.

3. $C := \{n \in \mathbb{N} | \forall m \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$ ist $n - m \in \mathbb{N}_0\} \Rightarrow$

(a) $1 \in C$, denn ist $m \in \mathbb{N}$ und $m = 1$.
folgt nach b): $m = 1$
$\Rightarrow n - m = 1 - 1 = 0 \in \mathbb{N}_0$.

(b) ang. $n \in C$ und $m \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n + 1$.
Fallunterscheidung:

- $n = 1 \Rightarrow n + 1 - m = (n+1) - 1 = n \in \mathbb{N}.\checkmark$
$\Rightarrow n + 1 \in C$.
- $n > 1$ (und $m \leq n + 1$)
$\overset{2.}{\Rightarrow} m - 1 \in \mathbb{N}$ und $m - 1 \leq (n+1) - 1 = n$
Da $n \in C, m - 1 \in \mathbb{N}, m - 1 \leq n \Rightarrow \underbrace{n - (m-1)}_{=(n+1)-m} \in \mathbb{N}_0$
$\Rightarrow n + 1 \in C$.

4. H.A.

$\square$

4 Funktionen und Abbildungen

4.1 Funktion als Abbildung

Definition 4.1.1. Eine Funktion (oder Abbildung) von einer Menge A in eine Menge B ordnet jedem Element $a \in A$ ein eindeutiges Element $b \in B$ zu.
Wir schreiben:

$$f : A \to B, a \mapsto f(a) \quad (= b)$$

A: Definitionsbereich
B : Zielbereich (Target(space))
z.B. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$
Die Abbildung $f : A \to B$ ist

injektiv	aus $f(a) = f(a'), a, a' \in A$, folgt $a = a'$
surjektiv	$\forall b \in B \exists a \in A : b = f(a)$
bijektiv	sie ist injektiv und surjektiv

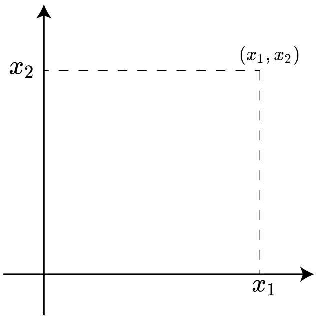
Bemerkung. $f : A \to B$ injektiv $\Leftrightarrow a, a' \in A, a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$

$f : A \to B$ ist bijektiv $\Rightarrow \forall b \in B \exists! a \in A : f(a) = b$.
Definiere $f^{-1} : B \to A, b \mapsto a, a \in A : f(a) = b$ (inverse Funktion).
Ist $f : A \to B$ nicht bijektiv. (Verallgemeinerte Inverse)
$f^{-1} : P(B) \to P(A), M \mapsto \{a \in A | f(a) \in M\}$
Verkettung:
gegeben: $f : A \to B, g : B \to C$
$g \circ f : A \to C \qquad g \circ f(a) := g(f(a))$.
$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$
$f : A \to B$ ist bijektiv $\Rightarrow f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A, f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B$
$\mathrm{id}_A : A \to A, a \mapsto a$.

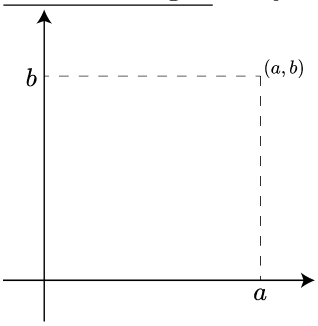
4.2 Abbildungen als Graph

Definition 4.2.1. Seien A, B Mengen. Dann ist (a, b) ein sog. Tupel.
in der Mengenlehre: $(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$.

Beachte: Reihenfolge ist wichtig! im Allg. $(a, b) \neq (b, a)$
Menge $A \times B := \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$
heißt kartesisches Produkt (von A und B)
z.B. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$



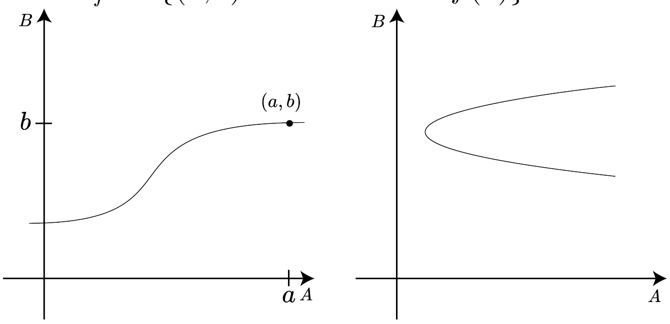
2. Abbildungen Projektionen



$\Pi_1 = \Pi_A : A \times B \to A, (a, b) \mapsto a$ (Projektion auf 1. Koordinate)
$\Pi_2 = \Pi_B : A \times B \to B, (a, b) \mapsto b$ (Projektion auf 2. Koordinate)

$\Pi_A(a,b) = a$
$\Pi_B(a,b) = b$
n-Tupel: Mengen $A_1, \dots, A_n, n \in \mathbb{N}$.
$A_1 \times A_2$ wie vorhin
$A_1 \times \dots \times A_{n+1} := (A_1 \times \dots \times A_n) \times A_{n+1}, n \in \mathbb{N}$ (induktiv)
<u>Beobachtung:</u>
$(A \times B) \times C = A \times (B \times C) + \{(a,b,c) | a \in A, b \in B, c \in C\} = ((a,b),c) = (a,(b,c))$
Genauer: $\exists$ Bijektion $\Phi : (A \times B) \times C \to A \times (B \times C)$

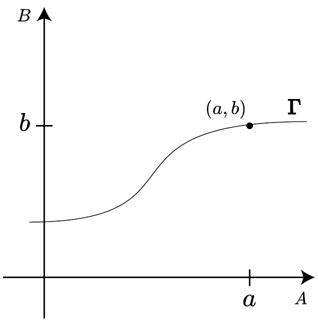
Definition 4.2.2 (Graph einer Abbildung)**.** Geg: $f : A \to B$ Funktion
$\Gamma := \Gamma_f := \{(a,b) \in A \times B : b = f(a)\} \subset A \times B$



$P \subset A \times B$ ist der Graph einer Funktion genau dann, wenn aus $(a_1,b_1),(a_2,b_2) \in \Gamma$ folgt $b_1 = b_2$. (und $\forall a \in A \exists b \in B : (a,b) \in \Gamma$)

Satz 4.2.3. $\Gamma \subset A \times B$ ist genau dann Graph einer Abbildung $f : A \to B$, wenn die Projektion $\Pi_A|_\Gamma : \Gamma \to A$ bijektiv ist.
Notation: $g : D \to E, X \subset D$
$g|_X : X \to E, x \mapsto g(x)$

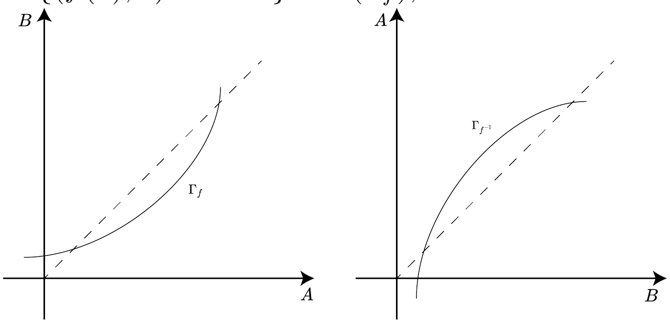
Beweis. Sei $\Gamma = \Gamma_f$ mit $f : A \to B$ Funktion
$\overset{(a,b)\in\Gamma_f \Leftrightarrow b=f(a)}{\Rightarrow} \forall a \in A$ existiert genau ein $b \in B$ mit $f(a) = b$.
$\Rightarrow \Pi_A|_\Gamma$ ist bijektiv.
Umgekehrt: Sei $\Pi_A|_\Gamma \to A$ bijektiv.
D.h. ist $(a_j,b_j) \in \Gamma, j \in \{1,2\}$
und $\Pi_A(a_1,b_1) = \Pi_A(a_2,b_2) \Rightarrow (a_1,b_1) = (a_2,b_2)$
$\Leftrightarrow a_1 = a_2, b_1 = b_2$
$\Rightarrow$ zu $a \in A \exists! b \in B, (a,b) \in \Gamma$.
Da $b = \Pi_B(a,b) = \Pi_B((\Pi_A|_\Gamma)^{-1}(a))$
Definiere $f := \Pi_B \circ (\Pi_A|_\Gamma)^{-1} : A \to B$ ist Funktion



nachrechnen $\Gamma = \Gamma_f$ $\square$

Bemerkung. In Satz 3 gilt $f = \Pi_B \circ (\Pi_A|_\Gamma)^{-1}$

Beispiel. Ist $f : A \to B$ bijektiv
$b = f(a), \quad f^{-1}(b) = a$
Dann gilt: $\Gamma_f^{-1} = \{(b, f^{-1}(b)) | b \in B\}$
$= \{(f(a), a) : a \in A\} = S(\Gamma_f), S : A \times B \to B \times A$ (swap), $(a, b) \mapsto (b, a)$.



$\Gamma_{f^{-1}}$ = Spiegeln von Γ_f an Winkelhalbierenden.

4.3 Schubfachprinzip und endliche Mengen

Notation: Sei $n \in \mathbb{N}.[n] := \{1, \dots, n\}$ ist gegeben durch:

$$[1] = \{1, \dots, 1\} = \{1\}$$

$$[n+1] = \{1, \dots, n, n+1\} = [n] \cup \{n+1\} \text{ induktive Def.} n \in \mathbb{N}$$
$$[2] = \{1, 2\}, [3] = \{1, 2, 3\}$$

Satz 4.3.1 (Schubfachprinzip)**.** Ist $f : [m] \to [n] (m, n \in \mathbb{N})$ injektiv, dann ist $m \leq n$.

Beweis. Fassen obige Aussage als $A(n)$ auf, die für alle $m \in \mathbb{N}$ zu zeigen ist.
Induktionsanfang:

$n = 1 : f : [m] \to \{1\}$ injektiv $\Rightarrow m = 1,$ da sonst $f(1) = 1 = f(2)$ ↯ zu Injektivität.

Induktionsschritt:
Induktionsvoraussetzung: $A(n)$ ist wahr für $n \in \mathbb{N}$.
Zu zeigen: $A(n+1)$ ist wahr.
Angenommen, $f : [m] \to [n+1] = [n] \cup \{n+1\}$ sei injektiv.
Zu zeigen: $m \leq n+1$
Fallunterscheidung:

1. Ang. $m = 1 \Rightarrow m = 1 \leq n+1$✓

2. Ang. $m > 1, m \in \mathbb{N} \overset{\text{Satz 3.5.8}}{\Rightarrow} m-1 \in \mathbb{N}$
   $(*)$ Beh.: $\exists$ inj. $\tilde{f} : \{1, \dots, m-1\} \to \{1, \dots, n\}$.

$$\overset{(*)+\text{IV}}{\Rightarrow} m-1 \leq n, \text{ d.h. } m \leq n+1 \Rightarrow A(n+1) \text{ ist wahr.}$$

Beweis von $(*)$:
Angenommen, $\exists f : [m] \to [n+1]$ inj.
Dann $\exists \tilde{f} : [m+1] \to [m+1] \to [n]$ inj.
Fallunterscheidung:

- Ang. $f(k) \in [n] \forall 1 \leq k \leq m-1$. Dann setze $\tilde{f}(k) := f|_{[m-1]}$
  $\tilde{f}(k) := f(k), 1 \leq k \leq m-1$
  (Nachrechnen $\tilde{f}$ ist injektiv.)

- $\exists j \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq m-1$ mit $f(j) = n+1$.
  Dann def. $\tilde{f} : [m-1] \to [n]$

  $$\tilde{f}(k) := \begin{cases} f(k), 1 \leq k \leq m-1, k \neq j \\ f(m), k = j \end{cases}$$

  Man prüfe nach $\tilde{f} : [m-1] \to [n]$ injektiv!

$\square$

Korollar 4.3.2. Sind $n, m \in \mathbb{N}$ und $f : [m] \to [n]$ bijektiv $\Rightarrow m = n$.

Beweis. Nach Voraussetzung ist $f : [m] \to [n]$ injektiv und $f^{-1} : [n] \to [m]$ auch injektiv.
$\Rightarrow m \leq n \wedge n \leq m \Rightarrow m = n$. $\square$

Definition 4.3.3. Eine Menge M ist <u>endlich</u>, falls $M = \emptyset$ oder falls $n \in \mathbb{N}_0$ und eine Bijektion $f : 1, \dots, n \to M$ existiert.
Die Anzahl der Elemente von M $(\#M)$ ist dann $\#M := n$, setzen $\#\emptyset := 0$.
Eine Menge ist unendlich, falls sie nicht endlich ist.

Bemerkung. Ist M endlich, so ist $\#M$ wohldefiniert.
Angenommen:

$$\begin{matrix} f:[n]\to M \\ g:[m]\to M \end{matrix} \quad \text{beide bijektiv.}$$

$$[n] \xrightarrow{f} M \xleftarrow{g} [m]$$

$h := f^{-1} \circ g = [m] \to [n]$ ist auch bijektiv. $\overset{\text{Korr. 2}}{\Rightarrow}$ $m = n$.

Weiter in Definition:
Zwei Mengen A, B heißen gleichmächtig, falls es eine Bijektion $f : A \to B$ gibt, schreiben $A \sim B$. Eine Menge A heißt abzählbar, falls A endlich ist oder es eine Bijektion $f : \mathbb{N} \to A$ gibt. Ist A abzählbar und unendlich, so heißt A abzählbar unendlich.

Bemerkung. Satz von Cantor und Berenstein:
Ang. $\exists$ Injektion $f : A \to B, f : B \to A$, dann $\exists$ Bijektion $h : A \to B$.

Beweis. Siehe Kolmogorov-Fomin: Introductory Real Analysis.
Könnten definieren $A \leq B$, falls es eine inj. Funktion $f : A \to B$ gibt.
$A \leq B \wedge B \leq A \Leftrightarrow A \sim B$. □

Bemerkung. $A \leq B$ heißt Kardinalität von A ist kleiner gleich der Kardinalität von B.

1. Ist $B \subset A$ und A endlich, so ist B endlich und $\#B \leq \#A$.

2. A, B endlich und disjunkt, $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \#(A \cup B) = \#A + \#B$.

Satz 4.3.4. .

1. Jede Teilmenge einer abzählbaren Menge ist abzählbar.

2. Sind für $j \in \mathbb{N} \quad A_j$ abzählbare Mengen. Dann ist $\bigcup_{j\in\mathbb{N}}$ abzählbar.

Beweis. .

1. Sei A abzählbar. Ist A endlich, so ist auch jedes $B \subset A$ endlich, und somit abzählbar.
   Sei A abzählbar unendlich. Dann existiert eine Bijektion $f : \mathbb{N} \to A$ und setzen wir $a_n := f(n)$, so ist

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{a_n\} = \{a_1, a_2, \ldots\}.$$

Ist $B \subset A$, so existieren $n_j \in \mathbb{N}, 1 \leq n_1 < n_2 < \ldots$ mit

$$B = \{a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots\}.$$

Gibt es nur endlich viele n_j, so ist B endlich, andernfalls ist $h : \mathbb{N} \to B, g \mapsto h(j) := a_{n_j}$ eine Bijektion.

2. o.B.d.A. sind alle A_j paarweise verschieden, $A_l \cap A_m \neq \emptyset$ für $l \neq m$. Wenn nicht, betrachte

$$B_1 := A_1, \quad B_2 := A_2 \setminus A_1,$$

$$B_3 := A_3 \setminus \{A_1 \cup A_2\}, \ldots, \quad B_{n+1} := A_{n+1} \setminus \{A_1 \cup \ldots \cup A_n\}$$

Dann sind B_n paarweise verschieden und

$$\bigcup_{l \in \mathbb{N}} B_l = \bigcup_{l \in \mathbb{N}} A_l.$$

Schreiben A_l als Liste $A_l = \{a_{1l}, a_{2l}, \ldots\}$

Bild:

$$\begin{tikzcd}
s_{11} \arrow[r] & s_{12} \arrow[dl] & s_{13} \arrow[r] & s_{14} \arrow[dl] & \cdots \\
s_{21} \arrow[d] & s_{22} \arrow[ur] & s_{23} \arrow[dl] & s_{24} & \cdots \\
s_{31} \arrow[ur] & s_{32} \arrow[dl] & s_{33} & s_{34} & \cdots \\
s_{41} & s_{42} & s_{43} & \cdots &
\end{tikzcd}$$

Jetzt können wir das obige rechteckige Schema diagonal abzählen! Dies liefert uns eine Bijektion von $\mathbb{N}$ nach $\bigcup_l \in \mathbb{N} A_l$.

$\square$

Bemerkung. Als Übung: Man gebe explizit eine Bijektion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ an!

Permutationen:

Definition 4.3.5. Eine bijektive Abbildung $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ heißt <u>Permutation</u>.

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k$$

Satz 4.3.6.

$$n \in \mathbb{N}, S_n = \{\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\} | \sigma \text{ ist bijektiv.}\} \Rightarrow \#S_n = n!$$

Beweis. per Induktion
$n = 1$ ist klar. Beobachtung: Permutation $\sigma \in S_n$ identifizieren mit n-Tupel $(\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n))$
Induktionsannahme: $\#S_n = n!$ für ein $n \in \mathbb{N}$
Die Menge S_{n+1} ist die disjunkte Vereinigung der Teilmengen

$$S_{n+1,k} := \{\tau \in S_{n+1} | \tau_k = n+1\} \quad k = 1, \dots, n+1.$$

z.B.:

$$S_{4,2} = \{(1,4,2,3), (2,4,3,1), (3,4,1,2), (1,4,3,2), (2,4,1,3), (3,4,1,2)\}$$

Beobachtung: Jedem $\tau = (\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in S_n$ können wir die Permutation $(\sigma_1, \dots, \sigma_{k-1}, \underbrace{n+1}_{k\text{-te Stelle}}, \sigma_k, \dots, \sigma_n) \in S_{n,k}$ zuordnen <u>und</u> diese Abbildung ist <u>bijektiv</u> (nachprüfen).

$$\Rightarrow \#S_{n+1,k} = \#S_n$$

$$S_{n+1} = \#(\bigcup_{k=1}^{n+1} S_{n+1,k}) = \sum_{k=1}^{n+1} \underbrace{\#S_{n+1,k}}_{=\#S_n = n!} = \sum_{k=1}^{n+1} n! = (n+1)n! = (n+1)!$$

□

Definition 4.3.7 (Binomialkoeffizient)**.** Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \ldots \cdot (\alpha-k+1)}{k!}, \text{ sowie } \binom{\alpha}{0} := 1.$$

Lemma 4.3.8 (Rekursionsformel für Binomialkoeffizienten)**.** Für $\alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\binom{\alpha+1}{k} = \binom{\alpha}{k} + \binom{\alpha}{k-1}.$$

Beweis. Für $k = 1$ ist dies einfach zu sehen. Für $k \geq 2$ gilt

$$\begin{aligned}
&\binom{\alpha}{k} + \binom{\alpha}{k-1} \\
&= \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \ldots \cdot (\alpha-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k} + \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \ldots \cdot (\alpha-k+2)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (k-1)} \\
&= \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \ldots \cdot (\alpha-k+2)(\alpha-k+1+k)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k} \\
&= \frac{(\alpha+1)\alpha(\alpha-1) \cdot \ldots \cdot ((\alpha-1)-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k} = \binom{\alpha+1}{k}
\end{aligned}$$

□

Bemerkung. .

1. Ist $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$, so können wir $\binom{n}{k}$ ausrechnen mit dem Dreiecksschema von Blaise Pascal (1623-1662).

$n = 0$							1						
$n = 1$						1		1					
$n = 2$					1		2		1				
$n = 3$				1		3		3		1			
$n = 4$			1		4		6		4		1		
$n = 5$		1		5		10		10		5		1	
$n = 6$	1		6		15		20		15		6		1

2. Ist $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$, so folgt durch Erweitern mit $(n-k)!$ für $n \in \mathbb{N}_0, k \in \{0, 1, \dots, n\}$
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}.$$

Satz 4.3.9 (Zahl der Kombinationen)**.** Sei $n \in \mathbb{N}_0, k \in \{1, \dots, n\}$. Dann ist die Anzahl der k-elementigen Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$ gleich $\binom{n}{k}$.

Beweis. Die Behauptung gilt für $k = 0$ und beliebiges $n \in \mathbb{N}$, da die leere Menge die einzige Teilmenge von $\{1, \dots, n\}$ mit 0 Elementen ist und nach Def. ist $\binom{n}{0} = 1$.
Insbesondere gilt die Behauptung dann für $n = 0$.
Induktiv über n, wobei Behauptung für alle $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ zu zeigen ist.
Induktionsschluss: Bestimme die Anzahl der k-elementigen Teilmengen von $\{1, \dots, n+1\}$ (wobei wir $k \geq 1$ annehmen können).
Sei $A \subset \{1, \dots, n+1\}$ mit $\#A = k \geq 1$.
Diese fallen in 2 Klassen: Klasse 1: $n + 1 \notin A$.
Klasse 2: $n + 1 \in A$.
Die Mengen der Klasse 1 bestehen genau aus den k-elementigen Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$.
Die Mengen der 2. Klasse erhält man aus den $(k-1)$-elementigen Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$ durch Vereinigung mit $\{n+1\}$.
Also ist nach Induktionsannahme

$$\begin{aligned}
&\#\{k\text{-elementige Teilmengen von } \{1, \dots, n+1\}\} \\
&= \#\{k\text{-elementige Teilmengen von } \{1, \dots, n\}\} \\
&+ \#\{(k-1)\text{-elementige Teilmengen von } \{1, \dots, n\}\} \\
&\overset{\text{IV}}{=} \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \overset{\text{Lem. 8}}{=} \binom{n+1}{k}.
\end{aligned}$$

□

Satz 4.3.10 (Binomische Formel)**.**

$$a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} : (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Bemerkung.

$$(a+b)^1 = a+b \tag{2}$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \tag{3}$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \tag{4}$$

Beweis. Induktion

$$n = 1 : (a+b)^1 = a + b = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^k b^{1-k} \checkmark$$

Induktionsvoraussetzung: für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n = (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-(k-1)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= \binom{n}{n} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{0} b^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right)}_{=\binom{n+1}{k}} a^k b^{n+1-k} + \binom{n+1}{0} b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}.
\end{aligned}$$

$\square$

Notation: Geg. Menge A, sei

$$\{0,1\}^A := \{\text{Funktion } f : A \to \{0,1\}\}$$

= Menge aller $\{0,1\}$-wertigen Funktionen mit Definitionsbereich A.
Allg.: A, B Mengen, $B^A := \{\text{Funktion } f : a \to B\}$.

Satz 4.3.11. Sei $A \neq \emptyset$ eine endliche Menge. Dann ist

$$\#(\{0,1\}^A) = 2^{\#A}.$$

Beweis. Sei $n := \#A \in \mathbb{N}$.
$\Rightarrow$ Bijektion $h : \{1, \dots, n\} \to A$.
$\Rightarrow$ können annehmen $A = \{1, 2, \dots, n\}$
z.z. $\#(\{0,1\}^[n]) = 2^n$.
Induktion: $n = 1 \exists$ Fkt. $f_1, f_2 : \{1\} \to \{0,1\}$
$f_1(1) = 0 \quad f_2(1) = 1$
Formel stimmt für $n = 1$. Ang. Formel stimmt für $n \geq 1$. Fkt. $f : \{1, \dots, n+1\} \to \{0,1\}$
2 Klassen:

1. $S_0 = \{f : \{1, \dots, n\} \to \{0,1\} : f(n+1) = 0\}$
2. $S_1 = \{f : \{1, \dots, n\} \to \{0,1\} : f(n+1) = 1\}$

$$S_0 \cap S_1 = \emptyset, \{0,1\}^{[n+1]} = S_0 \cup S_1$$

$$\underbrace{\#S_0}_{=\#S_1} = \#(\{0,1\}^{[n]}) \overset{\text{IA}}{=} 2^n$$

$$\Rightarrow \#(\{0,1\}^{n+1}) = \#S_0 + \#S_1 = 2^n + 2^n = 2^{n+1}.$$

$\square$

Korollar 4.3.12. Sei A endliche Menge.
$\mathcal{P}(A)$ = Potenzmenge = $\{B | B \subseteq A\}$
$\Rightarrow \#\mathcal{P}(A = 2^{\#A})$.

Beweis. Sei $A \neq \emptyset \Rightarrow \mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}, \quad 2^0 = 1\checkmark$
Sei $\#A \in \mathbb{N}$. Nach Satz 11 reicht eine Bijektion $\varphi : \mathcal{P} \to \underbrace{\{0,1\}^A}_{=\{f:A\to\{0,1\}\}}$. Dies wird in Lemma 13 für bel. Mengen A gemacht. $\square$

Lemma 4.3.13. Sei $A \neq \emptyset$. Dann sind $\mathcal{P}(A)$ und $\{0,1\}^A$ gleichmächtig.

Beweis. Brauchen $\varphi : \mathcal{P}(A) \to \{0,1\}^A$.
Sei $B \subseteq A$, Indikatorfunktion

$$\mathbb{1}_B(x) := \begin{cases} 1, & x \in B \\ 0, & x \in A \setminus B \end{cases}, \mathbb{1}_B : A \to \{0,1\}.$$

Beachte: $B = \{x \in A | \mathbb{1}_B(x) = 1\}$.
Definiere $\varphi : \mathcal{P}(A) \to \{0,1\}^A, B \mapsto \mathbb{1}_B$.
Beh.: φ ist bijektiv.

1. φ ist surjektiv.
   Sei $f : A \to \{0,1\}$

   $$B_f := f^{-1}(\{1\}) = \{a \in A | f(a) = 1\} \Rightarrow \varphi(B_f) = \mathbb{1}_{B_f} = f \text{ (nachrechnen)}.$$

2. φ ist injektiv.
   Seien $B_1, B_2 \subseteq A, B_1 \neq B_2$.

   $$\begin{aligned} B_1 \setminus B_2 \neq \emptyset \vee B_2 \setminus B_1 \neq \emptyset \\ \text{o.B.d.A. } B_1 \setminus B_2 \neq \emptyset \Rightarrow \exists x \in B_2 \setminus B_1 \subset A \\ \mathbb{1}_{B_1}(x) = 0 \neq 1 = \mathbb{1}_{B_2}(x) \\ \Rightarrow \varphi(B_1) = \mathbb{1}_{B_1} \neq \mathbb{1}_{B_2} = \varphi(B_2). \end{aligned}$$

□

Lemma 4.3.14. Sei A Menge. Dann gibt es keine surj. Fkt. $f : A \to \mathcal{P}(A)$.

Bemerkung. Ist A endlich $\Rightarrow \#\mathcal{P}(A) = 2^{\#A} > \#A$.
$\varphi : \mathcal{P}(A) \to \{0,1\}^A, \quad A \supset B \mapsto \mathbb{1}_B$.

Beweis. Sei $f : A \to \mathcal{P}(A)$

$$f(A) \subset A \quad \forall a \in A.$$

Definiere $R := \{a \in A, a \neq f(a)\} \subset A$.
Angenommen $f : A \to \mathcal{P}(A)$ ist surjektiv.

$$\Rightarrow \forall b \in A \exists b : B = f(b) \Rightarrow \exists a \in A : R = f(a).$$

$\Rightarrow$ 2 Möglichkeiten:

1. $a \in R$

   $$a \in f(a = R = \{x \in A | x \notin f(x)\}) \lightning$$

2. $a \notin R = f(a) \Rightarrow a \notin f(a) \Rightarrow a \in R \lightning$
   f kann nicht surjektiv sein!

□

5

5.1 Starke Induktion und das Wohlordnungsprinzip

Satz 5.1.1 (starke Induktion)**.** Seien $A(n)$ Aussagen für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

1. $A(1)$ ist wahr
2. $\forall n \in \mathbb{N} : A(1), \ldots, A(n)$ wahr $\Rightarrow A(n+1)$ ist wahr

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ ist $A(n)$ wahr

Beweis. Definiere die Aussage $B(n) := \{$alle $A(k)$ mit $k \leq n$ sind wahr$\} \Rightarrow$

1. $B(1)$ ist wahr
2. Ist $B(n)$ wahr für ein $n \in \mathbb{N}$, so ist $B(n+1)$ wahr

$\Rightarrow B(n)$ ist wahr für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Bemerkung. $(\forall n \in \mathbb{N} : A(k) \forall k < n \Rightarrow A(n)) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} A(n)$.

Satz 5.1.2 (Wohlordnungsprinzip für $\mathbb{N}$)**.** Jede nichtleere Teilmenge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ hat ein kleinstes Element.

Beweis. Sei $A(n) := \{$Jede Teilmenge $b \subset \mathbb{N}$ mit $m \in B$ hat ein kleinstes Element$\}$.
Müssen zeigen: $A(n)$ ist wahr für alle $n \in \mathbb{N}$.

1. $A(1)$ ist wahr, denn ist $B \subset \mathbb{N}$ mit $1 \in B$, so folgt $\forall k \in B : l \geq 1$. Also ist 1 kleinstes Element in B.
2. Angenommen für $n \in \mathbb{N}$ sind $A(1), \ldots, A(n)$ wahr. Sei $B \subset \mathbb{N}$ mit $n+1 \in B$.
   1. Fall: $\{1, \ldots, n\} \cap B = \emptyset \Rightarrow n+1$ ist kleinstes Element in B.
   2. Fall: $\{1, \ldots, n\} \cap B \neq \emptyset \Rightarrow \exists k \in \{1, \ldots, n\}$ mit $k \in B$.
   Aus der Induktionsannahme folgt also $A(k)$ ist wahr. $\Rightarrow B$ hat ein kleinstes Element.

In beiden Fällen hat B ein kleinstes Element, also ist $A(n+1)$ wahr.
$\overset{\text{Satz 1}}{\Rightarrow} \forall n \in \mathbb{N} A(n)$ wahr. □

Notation:
Ganze Zahlen $\mathbb{Z} := (-\mathbb{N}) \cup \mathbb{N}_0 = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.
Rationale Zahlen: $\mathbb{Q} := \{\frac{m}{n} | n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}\}$.

Korollar 5.1.3. Jede nichtleere, nach unten beschränkte Teilmenge in $\mathbb{Z}$ hat ein kleinstes Element.

Beweis. Sei $A \subsetneq \mathbb{Z}, A \neq \emptyset, A \geq \beta$ für $B \in \mathbb{Z}$
Setze $B := A + \beta + 1 = \{\alpha + |\beta| + 1 | \alpha \in A\} \subsetneq \mathbb{N}, B \neq \emptyset$
$\overset{\text{Satz 2}}{\Rightarrow} \exists n_0 := \min B \Rightarrow z_0 := n_0 - |\beta| - 1 \in \mathbb{Z}$ ist kleinstes Element von A. □

5.2 Anwendungen

Lemma 5.2.1. Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$. Dann existiert $q \in \mathbb{N}_0$ mit $q \leq a < q+1$

Beweis. Ist $0 < a < 1$, so nehme $q = 0$.
Also $a \geq 1$ und setze $B := \{n \in \mathbb{N} | a < n\}$.
Da $\mathbb{N}$ nicht nach oben beschränkt ist (archim. Prinzip), gilt $B \neq \emptyset$.
$\overset{\text{Satz 2}}{\Rightarrow} m := \min B$ existiert. Da $m \in B$, ist $m > a \geq 1$.
Somit gilt nach Satz 3.5.8, dass $q := m - 1 \in \mathbb{N}$.
Da m die kleinste natürliche Zahl mit $m < a$ ist, folgt $q = m - 1 \leq a < m = q + 1$. □

Bemerkung. Dieselbe Beweisidee zeigt auch

$$\forall a \in \mathbb{R} \exists q \in \mathbb{Z} \text{ mit } q \leq a < q + 1.$$

Satz 5.2.2 ($\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$)**.** Seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Dann existiert $r \in \mathbb{Q}$ mit $a < r < b$.

Beweis. O.B.d.A. $b \geq 0$, ansonsten betrachte $a' = -a, b' = -b$.
Weiter können wir $a \geq 0$ annehmen, sonst nehme $r = 0$. Also sei $0 \leq a < b \overset{\text{Archimedes}}{\Rightarrow} \exists n \in \mathbb{N} : n(b - a) > 1$.
Setze $B := \{l \in \mathbb{N} | l > na\} \subset \mathbb{N}$.

$$\overset{\text{Satz 5.1.2}}{\Rightarrow} m = \min B \text{ existiert.}$$

Da $m = \min B$ ist, gilt

$$m - a \leq na < m,$$

somit gilt auch

$$na < m = \underbrace{m - 1}_{<na} + \underbrace{1}_{<n(b-a)} = nb$$

$$\Rightarrow na < m, nb \Leftrightarrow a < \frac{m}{n} < b.$$

□

Exkurs
Beh.: $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Beweis. [Beweis durch Widerspruch] Sei $r^2 = 2$ mit $r = \frac{m}{n}, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}$.
Wir definieren

$$A := \{n \in \mathbb{N} | \exists m \in \mathbb{Z} \frac{m^2}{n^2} = 2\} \neq \emptyset$$

$$\overset{\text{Satz 5.1.2}}{\Rightarrow} n_* = \min A \in \mathbb{N}$$

Also existiert $m \in \mathbb{Z}_+$ mit

$$m^2 = 2 \cdot m_*^2 \Rightarrow m > n_*$$

Außerdem gilt

$$m = \sqrt{2} n_* \overset{\sqrt{2}>1}{\Leftrightarrow} 0 < \underbrace{m - n_*}_{\in \mathbb{N}} = \underbrace{\overbrace{(\sqrt{2} - 1)}^{>0}}_{<1} n_* < n_*$$

Nun gilt:

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n_*} = \frac{m(m - n_*)}{n_*(m - n_*)} \overset{m^2=2n_*^2}{=} \frac{2n_*^2 - mn_*}{n_*(m - n_*)} = \frac{2n_* - m}{m - n_*}$$

$\lightning 2n_* - m \in \mathbb{Z}, m - n_* < n_*$, aber $n_* = \min A$
Somit kann kein $m \in \mathbb{Z}$ existieren, sodass $\frac{m^2}{n^2} = 2$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$.
Also ist $\sqrt{2}$ per Definition der rationalen Zahlen in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. □

Satz 5.2.3. Sei $k \in \mathbb{N}$, dann gilt entweder $\sqrt{k} \in \mathbb{N}$ oder $\sqrt{k} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Beweis. Sei $k \in \mathbb{N}$ und $\sqrt{k} \notin \mathbb{N}$.
Angenommen $\sqrt{k} \in \mathbb{Q}$, also $\sqrt{k} = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$
$A := \{n \in \mathbb{N} | \exists m \in \mathbb{Z} \frac{m^2}{n^2} = k\}$

$$\overset{\text{Satz 5.1.2}}{\Rightarrow} \exists n_* = \min A \in \mathbb{N}$$

Sei $\frac{m}{n_*} = \sqrt{k}$, dann gilt

$$m - n_* = \underbrace{(\sqrt{k} - 1)}_{<1} n_*$$

Aber wähle $q \in \mathbb{N} : q \leq \sqrt{k} < q + 1$
Existiert nach Lemma 5.2.1. Da $\sqrt{k} \notin \mathbb{N}$ gilt $q < \sqrt{k} < q + 1$.
Also gilt:

$$0 \overset{q<\sqrt{k}}{<} \underbrace{m - qn_*}_{\in \mathbb{N}} = \underbrace{(\sqrt{k} - q)}_{<1} n_* < n_*$$

Somit
$$\sqrt{k} = \frac{m}{n_*} = \frac{m(m-qn_*)}{n_*(m-qn_*)} = \frac{kn_*^2 - mqn_*}{n_*(m-qn_*)} = \frac{kn_* - mq}{m-qn_*}$$
$\lightning n_* = \min A, m - qn_* < n_*$
Somit muss $\sqrt{k} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sein. $\square$

6 Existenz von Wurzeln (in $\mathbb{R}$)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $a > 0$. Dann heißt eine Zahl α n-te Wurzel von a, schreiben $\alpha = a^{\frac{1}{n}}$ oder $\sqrt[n]{a}$, falls $a^n = a$.

Satz 6.0.1. Sei $\alpha \in \mathbb{R}, a > 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann existiert die n-te Wurzel von a als reelle Zahl. D.h. $\exists! \alpha \in \mathbb{R}$ mit $\alpha > 0$ und $\alpha^n = a$.

Bemerkung. Für die rationalen Zahlen ist dies falsch!

Beweis. Angenommen, die Beh. gilt für $a \geq 1$. Sei $0 < b < 1$. Setze $a := \frac{1}{b} > 1 \Rightarrow \exists! \alpha > 0 : \alpha^n = a = \frac{1}{b}$. Setze $\beta := \frac{1}{\alpha}$.
Dann gilt also
$$\beta^n = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^n = \frac{1}{\alpha^n} = \frac{1}{a} = b.$$
Also nehme an $a \geq 1$. Ist $a = 1$, so ist $\alpha = 1$ die einzige Lösung von $\alpha^n = 1$. Außerdem können wir $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1$ wählen. Also sei $a > 1, n \in \mathbb{N}, n > 1$.
Setze
$$A := \{x \in \mathbb{R} | 0 < x, x^n < a\}$$
Dann ist $1 \in A$ und somit $A \neq \emptyset$. Außerdem ist A nach oben beschränkt, denn ist $y \geq a$, so folgt
$$y^n \geq a^n = \underbrace{a \cdot a \ldots \cdot a}_{n\text{-mal}} > \underbrace{1 \cdot 1 \ldots \cdot 1}_{n\text{-mal}} \cdot a = a$$
Also ist $A \leq a$.
$$\overset{\text{Vollst.axiom}}{\Rightarrow} \alpha := \sup A \in \mathbb{R} \text{ existiert.}$$
Da $1 \in A \Rightarrow \alpha \geq 1 > 0$.
α^n ist eine reelle Zahl für die gilt nach Anordnungsaxiom entweder $\alpha^n < a, \alpha^n > a$ oder $\alpha^n = a$.
1. Fall: Annahme: $\alpha^n < a$.

Sei $0 < \delta \leq 1$. Dann gilt (binom. Formel)

$$\begin{aligned}
(\alpha+\delta)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^k \delta^{n-k} \\
&= \alpha^n + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \alpha^k \delta^{n-k} \\
&= \alpha^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k-1} \underbrace{\alpha^{k-1}}_{\leq a^{k-1}} \underbrace{\delta^{n+1-k}}_{\leq \delta \cdot \delta^{n-k} \leq \delta} \\
&\leq \alpha^n \delta \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k-1} \alpha^{k-1} \\
&\leq \alpha^n \delta \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^k \\
&= \alpha^n + \delta(a+1)^n (*)
\end{aligned}$$

$\alpha^n < a$ nach Annahme und $\delta := \frac{1}{2} \min\left(1, \frac{a-\alpha^n}{(a+1)^n}\right)$
Dann gilt $0 < \delta \leq 1$ und $(*)$

$$(\alpha+\delta)^n \leq \alpha^n + \delta(a+1)^n \leq \alpha^n + \frac{1}{2}(a-\alpha^n) = \frac{1}{2}(\alpha^n + a) < \frac{1}{2}(a+a) = a$$

Somit ist $\alpha < \alpha + \delta \lightning \alpha$ ist $\sup A$.
2. Fall: Annahme: $\alpha^n > a, 0 < \delta \leq 1$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow (\alpha-\delta)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^{n-k} (-\delta)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^{n-k} (-1)^k \delta^k \\
&= \alpha^n + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} \alpha^{n-1-k} (-1)^{k+1} \delta^{k+1} \\
&= \alpha^n - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} \alpha^{n-1-k} (-1)^k \delta^k \\
&\geq \alpha^n - \delta \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} a^{n-k+1} \\
&= \alpha^n - \delta \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k \\
&\geq \alpha^n - \delta(a+1)^n (**)
\end{aligned}$$

Setze $\delta := \frac{1}{2}\min\left(1, \frac{\alpha^n - a}{(a+1)^n}\right)$. Dann gilt $0 \leq \delta \leq \frac{1}{2} < 1$.

$$(\alpha - \delta)^n \geq \alpha^n - \frac{1}{2}(\alpha^n + a) = \frac{1}{2}(\alpha^n + a) > \frac{1}{2}(a + a) \geq a.$$

Somit $\alpha - \delta$ eine obere Schranke für A. Da $\alpha - \delta < \alpha$, ist das ein Widerspruch zu $\alpha = \sup A$. Somit bleibt nur $\alpha^n = a$. □

7 Folgen und Konvergenz

7.1 Grundlagen

Definition 7.1.1. Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge. Eine Folge (mit Werten in X oder auch X-wertige Folge) ist eine Funktion

$$f : \mathbb{N} \to X, n \mapsto f(n) \in X$$

Wir setzen $a_n := f(n), n \in \mathbb{N}$.
a_n heißt n-tes Folgenglied. Wir schreiben auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder kurz $(a_n)_n$.
Ist $X = \mathbb{R}$, so heißt die Folge reellwertig oder reelle Folge (Folge reeller Zahlen). $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$.

Definition 7.1.2 (Konvergenz (reeller Folgen))**.** Eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert (mit $n \to \infty$) gegen ein $a \in \mathbb{R}$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N} : \forall n \geq k \text{ folgt } |a_n - a| < \varepsilon.$$

Die Zahl a heißt Grenzwert der Folge, wir schreiben $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ oder $a_n \to a$ (für $n \to \infty$).
Eine (reelle) Folge heißt konvergent, falls ein $a \in \mathbb{R}$ der Grenzwert der Folge ist, andernfalls heißt die Folge divergent.

Bemerkung.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N} : \forall n \geq k \text{ folgt } |a_n - a| < \varepsilon.$$

Beispiel. .

1. $a_n := \frac{1}{n}$ konvergiert gegen 0. Denn zu geg. $\varepsilon > 0$ wähle $k \in \mathbb{N}$ mit $k > \frac{1}{\varepsilon}$. Dann gilt für $n \geq k$

$$|a_n - a| = |\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{k} < \varepsilon.$$

2. Konstante Folge . Sei $a \in \mathbb{R}$ und sei $a_n = a$ für $n \in \mathbb{N}$.
   Dann folgt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, denn für $\varepsilon > 0$

$$|a_n - a| = |a - a| = 0 < \varepsilon, \text{ wähle } k = 1$$

3. Sei $a_n := (-1)^n$, also $a_1 = -1, a_2 = 1, a_3 = -1, \ldots$
   Dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht konvergent.

   Beweis. Angenommen: $(a_n)_n$ konvergiert und $a \in \mathbb{R}$ ist Grenzwert. Zu $\varepsilon = 1$ existiert dann $k \in \mathbb{N}$ so, dass $|a_n - a| < \varepsilon = 1 \quad \forall n \geq k$
   Also gilt für $n \geq k$:

$$2 = |a_n - a_{n+1}| = |a_n - a + a - a_{n+1}| \leq |a_n - a| + |a - a_{n+1}| < 1 + 1 = 2 \text{ ↯}$$

$\square$

4. Die Folge (a_n) konvergiert gegen a. Dann konvergiert auch $(|a_n|)_n$ gegeen $|a|$. (Hinweis: Umgekehrte Dreiecksungleichung)

5. Geometrische Folge:
   Sei $q \in \mathbb{R}, |q| < 1$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0.$$

   Beweis. Annahme: $q \neq 0$, dann gilt $\frac{1}{|q|} > 1$ und es existiert $x > 0$, sodass $\frac{1}{|q|} = 1 + x$.
   Aus Bernoullischer Ungleichung folgt

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

   und somit

$$|q^n - 0| = |q^n| = |q|^n = \frac{1}{(1+x)^n} \leq \frac{1}{1+nx}.$$

   Also zu $\varepsilon > 0$ wähle $k \in \mathbb{N} \forall n \geq k$ gilt $nx > \frac{1}{\varepsilon}$.

$$|q^n - 0| \leq \frac{1}{1+nx} \leq \frac{1}{nx} < \varepsilon \text{ für } n \geq k.$$

$\square$

6. Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$. Dann konvergiert die $a_n = a^{1/n}$ gegen 1.

Beweis. Fall 1: Die Beh. stimmt für $a = 1$.
Fall 2: $a > 1$. Dann ist $a_n = a^{1/n} > 1$ und somit $q_n := a_n - 1 = a^{1/n} - 1 > 0$.
$a_n = a^{\frac{1}{n}} = 1 + q_n \Rightarrow a = (1+q_n)^n \underset{\text{Bern. Ungl.}}{\geq} 1 + nq_n$

$$\Rightarrow 0 \leq q_n \leq \frac{a-1}{n} \forall n \in \mathbb{N}$$

Zu $\varepsilon > 0$ wähle $K \in \mathbb{N}$ mit $K > \frac{a-1}{\varepsilon}$.
Dann $n \geq K$

$$|a_n - 1| = |a^{1/n} - 1| = a^{1/n} - 1 = q_n \leq \frac{a-1}{n} < \varepsilon.$$

Fall 3: $0 < a < 1$. Dann ist $b := \frac{1}{a} > 1$.

$$\overset{\text{Fall 2}}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty} b^{\frac{1}{n}} = 1$$

$$\begin{aligned} |a^{1/n} - 1| &= a^{1/n} \left|1 - \frac{a}{a^{1/n}}\right| \\ &= a^{1/n} \left|1 - \left(\frac{a}{a}\right)^{1/n}\right| \\ &= a^{1/n} \left|1 - b^{1/n}\right| \\ &\leq \left|1 - b^{1/n}\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = 1$$

□

7. Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$.

Beweis. 1. Versuch:
Setze $q_n := n^{1/n} - 1 > 0$ für $n > 1$

$$\Rightarrow n = (1+q_n)^n \geq 1 + nq_n$$

$$\Rightarrow |n^{1/n} - 1| = q_n \leq \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$$

funktioniert nicht...
Frage: Kann Bernoullische Ungleichung verbessert werden?

$$\begin{aligned}(1+q)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} q^k 1^{n-k} \\ &= 1 + \binom{n}{1} q + \binom{n}{2} q^2 + \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} q^k 1^{n-k} \\ &\geq 1 + nq + \frac{n(n-1)}{2} q^2 \\ &\geq 1 + \frac{n(n-1)}{2} q^2 \quad \text{falls } q \geq 0. \\ (*)\end{aligned}$$

Setzen $q_n := n^{1/n} - 1 > 0$ für $n \geq 2$.

$$\Rightarrow n = (1+q_n)^n \overset{(*)}{\geq} 1 + \frac{n(n-1)}{2} q_n^2$$

$$\Rightarrow q_n^2 \leq \frac{2(n-1)}{n(n-1)} = \frac{2}{n}$$

$$\Rightarrow q_n \leq \sqrt{\frac{2}{n}} \forall n \geq 2$$

Zu $\varepsilon > 0$ wähle $K \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt{\frac{2}{K}} < \varepsilon$.

$$\Rightarrow |n^{1/n} - 1| = q_n \leq \sqrt{\frac{2}{n}} \overset{n \geq K}{<} \varepsilon.$$

Somit gilt $\forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N}$, sodass für $n \geq K$ gilt

$$|n^{1/n} - 1| < \varepsilon.$$

Also per Definition

$$\lim_{n \to \infty} n^{1/n} = 1.$$

□

Satz 7.1.3. Falls die reelle Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert, so ist ihr Grenzwert eindeutig bestimmt.

Beweis. Annahme: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen a und $b \in \mathbb{R}$. Und $a \neq b$ o.B.d.A. gilt $a < b$. Wissen:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq K_1 \quad |a_n - a| < \varepsilon$$
$$\forall \varepsilon > 0 \exists K_2 \in \mathbb{N} : \forall n \geq K_2 \quad |a_n - b| < \varepsilon$$

Setze $\varepsilon := \frac{b-a}{2} > 0$.
Dann folgt für $n \geq \max\{K_1, K_2\}$

$$b - a = b - a_n + a_n - a \leq \underbrace{|b-a|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|a_n - a|}_{<\varepsilon} < 2\varepsilon = b - a \lightning$$

Somit muss $a = b$ gelten! □

Bild:

Definition 7.1.4 (ε-Umgebung)**.** Die ε-Umgebung um $a \in \mathbb{R}$ ist die Menge

$$U_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon).$$

Beobachtung: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent gegen $a \in \mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists K \in \mathbb{N} : a_n \in U_\varepsilon(a) \forall n \geq K.$$

Definition 7.1.5 (Beschränktheit von Folgen)**.** Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ heißt beschränkt, wenn für $C \geq 0$ gilt $|a_n| \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N}$
nach oben beschränkt, wenn es ein $C \in \mathbb{R}$ gibt mit $a_n \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N}$
nach unten beschränkt, wenn es ein $C \in \mathbb{R}$ gibt mit $a_n \geq C \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Bemerkung. beschränkt $\Leftrightarrow$ nach oben und nach unten beschränkt

Satz 7.1.6. Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Beweis. Sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Zu $\varepsilon = 1$ wähle $K \in \mathbb{N}$. $|a_n - a| < 1 \quad \forall n \geq K$.

$$n \geq K \Rightarrow |a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|$$
$$n \leq K - 1 \Rightarrow |a_n| \leq \max\{|a_1|, \ldots, |a_{K-1}|\}.$$

Setze $C := \max\{|a_1|, \ldots, |a_{K-1}|, 1 + |a|\}$, so folgt

$$|a_n| \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

□

Lemma 7.1.7. Die Folge $(b_n)_n \subset \mathbb{R}$ konvergiert gegen $b \neq 0$. Dann existiert $K \in \mathbb{N}$, sodass

$$|b_n| \geq \frac{|b|}{2}.$$

Beweis. Bild:
Setze $\varepsilon := \frac{|b|}{2} > 0$. Dann existiert $K \in \mathbb{N}$ mit

$$|b_n - b| < \varepsilon = \frac{|b|}{2} \quad \forall n \geq K, n \geq K$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow |b| = |b - b_n + b_n| \leq |b - b_n| + |b_n| \overset{n \geq K}{<} \frac{|b|}{2} + |b_n| \\ &\Rightarrow |b_n| > |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2} \quad \forall n \geq K. \end{aligned}$$

□

Satz 7.1.8 (Rechenregel für Grenzwerte)**.** Es gelte $a_n \to a, b_n \to b$ für $n \to \infty$.

1. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist $(\lambda a_n + \mu b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent mit Grenzwert

   $$\lim_{n \to \infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda a + \mu b.$$

2. Die Folge $(a_n b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert mit Grenzwert

   $$\lim_{n \to \infty} (a_n b_n) = ab.$$

3. Falls $b \neq 0$, so gibt es ein $K_0 \in \mathbb{N}$ mit $b_n \neq 0 \quad \forall n \geq K$ und die Folge $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \geq K_0}$ ist konvergent mit Grenzwert

   $$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

Beweis. 1. 1. Fall $\lambda = \mu = 1$.
Zu $\varepsilon > 0 \exists K_1, K_2 \in \mathbb{N}$, sodass

$$\begin{aligned} |a_n - a| &< \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq K_1 \\ |b_n - b| &< \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq K_2 \end{aligned}$$

Setze $K := \max\{K_1, K_2\}$. Dann folgt

$$|a_n+b_n-(a+b)| = |(a_n-a)+(b_n-b)| \leq |a_n-a|+|b_n-b| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall n \geq K$$

. Also ist $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = a + b$. Fall 2: allg. $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
Aus 2. folgt

$$\lim_{n\to\infty} \lambda a_n = \lambda \lim_{n\to\infty} a_n$$

$$\lim_{n\to\infty} \mu b_n = \mu \lim_{n\to\infty} b_n \qquad (*)$$

$\overset{\text{Fall 1}}{\Rightarrow}$ $\lambda a_n + \mu b_n$ ist konvergent und

$$\lim_{n\to\infty}(\lambda a_n+\mu b_n) = \lim_{n\to\infty}(\lambda a_n)+\lim_{n\to\infty}(\mu b_n) \overset{(*)}{=} \lambda \lim_{n\to\infty} a_n+\mu \lim_{n\to\infty} b_n = \lambda a+\mu b.$$

2. Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt $a_n b_n - ab = a_n b_n - a_n b + a_n b - ab = a_n(b_n - b) + (a_n - a)b$

$$\Rightarrow |a_n b_n - ab| \leq |a_n||b_n - b| + |a_n - a||b|.$$

Nach Satz 6 existiert $C \geq 0$ mit $|a_n| \leq C \forall n \in \mathbb{N}$. Setze $D := \max\{C, |b|\}$.

$$|a_n b_n - ab| \leq D(|a_n - a| + |b_n - b|) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Zu $\varepsilon > 0$ wähle $K_1, K_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2(0+1)} \quad \forall n \in K_1$$

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2(0+1)} \quad \forall n \in K_2$$

Dann folgt $\forall n \geq K := \max\{K_1, K_2\}$

$$|a_n b_n - ab| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Also $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab$.

3. o.B.d.A. $a_n = 1$. (aus 2. folgt dann der allg. Fall mit $\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n}$)
Da $b_n \to b \neq 0$, folgt mit Lemma 7, dass ein $K_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $|b_n| > \frac{|b|}{2}$ für $n \geq K_0$

$$\frac{1}{b_n} \text{ ist wohldefiniert } \forall n \geq K_0.$$

Es gilt: $\frac{1}{b} - \frac{1}{b_n} = \frac{b_n - b}{bb_n}$ und somit

$$\left|\frac{1}{b} - \frac{1}{b_n}\right| = \frac{|b_n - b|}{|b| \cdot |b_n|} \leq \frac{2|b_n - b|}{|b|^2}.$$

Zu $\varepsilon > 0$ wähle $K_1 \in \mathbb{N}$ mit $|b_n - b| < \frac{|b|^2\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq K_1$.
Dann folgt

$$\left|\frac{1}{b} - \frac{1}{b_n}\right| \leq \frac{2 \cdot |b_n - b|}{|b|^2} < \varepsilon \quad \forall n \geq \max\{K_0, K_1\}.$$

Somit folgt $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$ (für $n \to \infty$). Somit folgt die allg. Aussage aus Teil 2 von Satz 7.1.8.

□

reelle Folgen $f = (f_n)_n, g = (g_n)_n$

$$(f+g)_n := f_n + g_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

$x(\lambda f)_n := \lambda f_n \Rightarrow (\lambda f + \mu g)_n = \lambda f_n + \mu g_n$ ist eine Linearkombination.
$\Rightarrow$ Raum der reellen Folgen ist ein reeller Vektorraum.

$$\begin{aligned}
&\{\text{Raum der (reellen) Folgen}\}\\
&\supsetneq \{\text{Raum der beschränkten (reellen) Folgen}\}\\
&\supsetneq \{\text{Raum der (reellen) konvergenten Folgen}\}\\
&\supsetneq \{\text{Raum der (reellen) Nullfolgen}\}.
\end{aligned}$$

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge, falls $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = 0$.

Beispiel (1). p, q Polynome vom Grad $m, n \in \mathbb{N}$.
D. h.

$$\begin{aligned}
p(x) &= a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad \forall x \in \mathbb{R}\\
q(x) &= b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0 \quad b_n \neq 0 \neq a_m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k \in \mathbb{N}. \frac{p(k)}{q(k)} &= \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0}\\
&= k^{m-n}\frac{a_m + a_{m-1}k^{-1} + \ldots + a_1 k^{1-m} + a_0 k^{-m}}{b_n + b_{n-1}k^{-1} + \ldots + b_1 k^{1-n} + b_0 k^{-n}}\\
&\xrightarrow{\text{Satz 8}} \begin{cases} 0, & \text{falls } n > m.\\ \frac{a_n}{b_n}, & \text{falls } n = m. \end{cases}
\end{aligned}$$

Beispiel (Geometrische Reihe).

$$
\begin{aligned}
-1 < q < 1.& \\
a_n &:= 1 + q + q^2 + \ldots + q^n \\
&= \sum_{l=0}^{n} q^l \overset{\text{Satz 3.5.7}}{=} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \\
\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n &= \frac{1 - \lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}.
\end{aligned}
$$

Da $q^n \to 0, n \to \infty$, Bsp. 6 oben. Schreiben hierfür

$$\sum_{l=0}^{n} q^l = \frac{1}{1-q}, \quad -1 < q < 1$$

Beispiel. Ist $(b_n)_n$ beschränkt, $(a_n)_n$ Nullfolge. $\Rightarrow$ $(b_n a_n)_n$ Nullfolge. (Hausaufgabe)

Notation: Wir sagen die Aussagen $A(n), n \in \mathbb{N}$ gelten für fast alle $n \in \mathbb{N}$, falls $K_0 \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $A(n)$ wahr ist für alle $n \geq K_0$ (d. h. für alle genügend großen n, d. h. $A(n)$ wahr für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}$).

Beispiel.

$$a_n \to a, n \to \infty \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0 \text{ ist } a_n \in U_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon \text{ für fast alle } n.)$$

Satz 7.1.9. Seien $(a_n)_n, (b_n)_n$ konvergente reelle Folgen, $a_n \to a, b_n \to b, n \to \infty$. Dann gilt

1. Aus $a_n \leq b_n$ für fast alle n folgt $a \leq b$.
2. Sind $c, d \in \mathbb{R}, c \leq a_n \leq d$ für fast alle $n \Rightarrow c \leq a \leq d$
3. (Sandwichlemma) Ist $a_n \leq c_n \leq b_n$ für fast alle n ($(c_n)_n$ weitere reelle Folge) und $a = b \Rightarrow (c_n)_n$ konvergiert und $\lim\limits_{b\to\infty} c_n = a \ (= b)$.

Beweis. 1. Bild: Formal: $\exists K_0 \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n \quad \forall n \geq K_0$.

$$
\begin{aligned}
\forall \varepsilon > 0 \exists K_1 \in \mathbb{N}, K_2 \in \mathbb{N}: \quad & a_n \in U_\varepsilon(a) \forall n \geq K_1, \quad a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \\
\Rightarrow K := \max(K_0, K_1, K_2) \quad & b_n \in U\varepsilon(b) \forall n \geq K_2, \quad b - \varepsilon < b_n < b + \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Ang. $a > b : \varepsilon := \frac{a-b}{2} > 0 \Rightarrow$
K wie oben $:\Rightarrow a < a_n + \varepsilon \leq b_n + \varepsilon < b + e\varepsilon = b + 2\frac{a-b}{2} = a \Rightarrow a < a$

$\lightning \Rightarrow a \leq b$✓. Andere Möglichkeit:

$$a_n \leq b_n, \forall \varepsilon > 0 : a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon, b - \varepsilon < b_n < b + \varepsilon \quad \forall n \geq K.$$
$$a < a_n + \varepsilon \leq b_n + \varepsilon < b + 2\varepsilon \Rightarrow \underbrace{a - b < 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0}_{\Rightarrow a - b \leq 0 \Leftrightarrow a \leq b.}.$$

2. Nehme $b_n = c, b_n \to c$.
   Da $b_n = c \leq a_n \overset{1.}{\Rightarrow} c = \lim b_n \leq \lim a_n = a$.
   Nehme auch $b_n = d, a_n \leq d = b_n \overset{1.}{\Rightarrow} a \leq \lim b_n = d$.✓

3. Haben $\forall \varepsilon > 0$.

$$\begin{aligned} &\exists K_0 \in \mathbb{N}: & a_n \leq c_n \leq b_n \quad \forall n \geq K_0 \\ &\exists K_1, K_2 \in \mathbb{N}: & a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \quad \forall n \geq K_1 \\ & & \underbrace{b - \varepsilon}_{=a-\varepsilon} < b_n < \underbrace{b + \varepsilon}_{=a+\varepsilon} \quad \forall n \geq K_2.(\text{ da })b = a \end{aligned}$$

$$\forall n \geq K : a - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \varepsilon$$
$$\Rightarrow a - \varepsilon < c_n < a_n + \varepsilon \Leftrightarrow c_n \in U_\varepsilon(a) \quad \forall n \geq K$$

$\Leftrightarrow$ konvergiert $(c_n)_n$ gegen a!

□

Achtung! $a_n < b_n \forall n, a_n \to a, b_n \to b \not\Rightarrow a < b$.
Bsp. $a_n = 0, b_n = \frac{1}{n}$.

Definition 7.1.10 (Uneigentliche Konvergenz)**.** Die Folge $(a_n)_n$ konvergiert uneigentlich (divergiert bestimmt) gegen $+\infty$, falls

$$\forall R > 0 \exists K \in \mathbb{N} \text{ mit } a_n > R \quad \forall n \geq K.$$

Schreiben $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ oder $a_n \to +\infty, n \to \infty$ Analog für $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, falls

$$\forall R < 0 \exists K \in \mathbb{N} : a_n < R \forall n \geq K.$$

Beispiel. Ist $a > 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty, 0 < \frac{1}{q} < 1$.

Beweis. $\frac{1}{q^n} = \left(\frac{1}{q}\right)^n \to 0, n \to \infty$
d. h. zu $R > 0 \exists K \in \mathbb{N} : \frac{1}{q^n} < \frac{1}{R} \quad \forall n \geq K$.

$\Leftrightarrow q^n > R \quad \forall n \geq K$. Also $\lim q^n = +\infty$ nach Def.
Insgesamt:

$$\begin{aligned}
q > 1 \qquad & \Rightarrow \lim_{n\to\infty} q^n = +\infty. \\
q = 1 \qquad & \Rightarrow \lim_{n\to\infty} q^n = 1. \\
-1 < q < 1 \qquad & \Rightarrow \lim_{n\to\infty} q^n = 0. \\
q \leq 1 \qquad & \Rightarrow (q^n)_n \text{ ist nicht konvergent.}
\end{aligned}$$

Ist $q < 1 \Rightarrow (q_n)_n$ nicht beschränkt ist. □

Satz 7.1.11 (Kehrwerte).

1. Aus $|a_n| \to \infty, n \to \infty$ folgt $\frac{1}{a_n} \to 0, n \to \infty$.
2. Aus $a_n \to 0, a_n > 0$ (bzw. $a_n < 0$) $\forall n$ folgt $\frac{1}{a_n} \to \infty, n \to \infty$ ($\frac{1}{a_n} \to -\infty, n \to \infty$).

Beweis. Übungsaufgabe □

8 Monotone Konvergenz

Definition 8.0.1. Eine Folge $(a_n)_n$ heißt
monoton wachsend, falls $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
monoton fallend, falls $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
Ähnlich: monoton wachsend (fallend) für fast alle $n \in \mathbb{N}$, falls $K \in \mathbb{N}$ existiert mit $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \geq K$ (bzw. $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \geq K$).
Ist
$a_n < a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, so heißt a_n streng monoton wachsend.
$a_{n+1} < a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, so heißt a_n streng monoton fallend.

Satz 8.0.2 (Monotone Konvergenz)**.** Jede monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge ist konvergent. Jede monoton fallende, nach unten beschränkte Folge ist konvergent.

Beweis. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (oder $\forall n \geq K \in \mathbb{N}$)
und $\exists C \in \mathbb{R} : a_n \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (oder $\forall n \geq K \in \mathbb{N}$)

$$B := \{a_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}, b \neq \emptyset \text{ und } B \leq C.$$

$\overset{\text{Vollst.axiom}}{\Rightarrow} L := \sup B$ die kleinste obere Schranke für B.
$\Rightarrow a_n \leq L \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Und: L kleinste ob. Schranke $\Rightarrow \forall\varepsilon > 0 : L-\varepsilon$ keine obere Schranke für B.

$$\Rightarrow \exists K \in \mathbb{N} : L-\varepsilon < a_K \leq a_{K+1} \leq a_{K+2} \leq \ldots \leq a_n \quad \forall n \geq K.$$
$$\forall n \geq K : L-\varepsilon < a_n \leq L < L+\varepsilon \Leftrightarrow a_n \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$$

$\Leftrightarrow (a_n)_n$ konvergiert gegen L.
Ist $a_{n+1} \leq a_n, a_n \geq C \quad \forall n \in \mathbb{N}$, so betrachte $b_n := -a_n \leq -C$ und $b_{n+1} \geq b_n$.
Dann ersten Fall anwenden! □

Beispiel (1). $x_0 > 0, \quad x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$ konvergent gegen $\sqrt{a}, a > 0$.
Ang.: $\lim_{n\to\infty} x_n = l$ existiert, dann auch $\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = l, l > 0$

$$\overset{\text{Grenzwertsätze}}{\Longrightarrow} l = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(l + \frac{a}{l}\right) \Rightarrow l^2 = a, l = \sqrt{a}.$$

Beispiel (2). $f_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ Grenzwert $\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ existiert $=: e$.
Beh. 1: f_n ist nach oben beschränkt.
Beh. 2: f_n ist monoton wachsend.

Beweis. Beh. 1:

$$\begin{aligned} f_n = (1+\frac{1}{n})^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{n!}{k!(n-k)!}}_{=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\frac{n}{n}\underbrace{\frac{n-1}{n}}_{<1}\underbrace{\frac{n-k+1}{n}}_{<1} \\ &\leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} =: e_n, \quad f_n \leq e_n \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$$e_{n+1} = e_n + \frac{1}{(n+1)!} > 1_n.$$

Beachte: $k! = k(k-1)(k-2)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1 \qquad k \geq 2$
$\geq 3 \cdot 3 \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3^{k-2} \cdot 2 (*)$

Also ist $n \geq 3$.

$$e_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \overset{(*)}{\leq} 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2 \cdot 3^{k-2}}$$
$$= 2 + \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{l=0}^{n-2} (\frac{1}{3})^l}_{=1-(\frac{1}{3})^{n-1}}$$
$$\leq 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = 2 + \frac{3}{4} = 2,75.$$
$$\Rightarrow e_n \leq 2,75 \forall n \geq 2.$$

$\Rightarrow (e_n)_n$ ist nach oben beschränkt.
$\overset{Mon.Konv.}{\Rightarrow} \lim\limits_{n\to\infty} e_n$ existiert $\leq 2,75$.
Auch $f_n \leq e_n \leq 2,75 \quad \forall n \geq 2$.
$\Rightarrow (f_n)_n$ ist auch oben beschränkt. Beh. 2:

$$\frac{f_n}{f_{n-1}} = \frac{(1+\frac{1}{n})^n}{(1+\frac{1}{n})^{n-1}} \qquad n \geq 2$$
$$= \frac{(\frac{n+1}{n})^n}{(\frac{n}{n-1})^{n-1}} = \frac{n}{n-1} \frac{(\frac{n+1}{n})^n}{(\frac{n}{n-1})^n} \frac{n}{n-1} \left(\frac{\overbrace{(n+1)(n-1)}^{n^2-1}}{n^2} \right)^n$$
$$= \frac{n}{n-1} \left(\frac{n^2-1}{n^2} \right)^n = \frac{n}{n-1} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n^2} \right)^n}_{\geq 1 - n\frac{1}{n^2} \text{ (Bern. Ungl.)}}$$
$$\geq \frac{n}{n-1}(1 - n\frac{1}{n^2}) = \frac{n}{n-1}(1 - \frac{1}{n}) = 1 \Rightarrow f_n \geq f_{n-1} \forall n \geq 2.$$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ existiert! □

Definition 8.0.3 (Eulersche Zahl)**.** $e := \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n \ (\leq 2,75)$

Bemerkung. 1. Es gilt auch $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n$ exist. $\forall x \in \mathbb{R}$ (H.A.)

2. Alternative Darstellung für e:
Hatten gesehen: $f_n \leq e_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \forall n$
$e_n \leq 2,75, e_{n+1} > e_n$

$\Rightarrow$ es existiert $\lim\limits_{n\to\infty} e_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} =: \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ und somit auch $e = \lim\limits_{n\to\infty} f_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} e_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$.

Beobachtung:

$$f_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \underbrace{\frac{n}{n} \frac{(n-1)}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n}}_{\geq 0}, \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}.$$

Nehme $m \in \mathbb{N}$ fest.

$$n \geq m \geq \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} 1 \underbrace{\frac{n-1}{n}}_{\overset{n\to\infty}{\to} 1} \cdots \underbrace{\frac{n-k+1}{n}}_{\overset{n\to\infty}{\to} 1}$$

Grenzwertsätze $\Rightarrow \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}$ für $n \to \infty$. $\Rightarrow$ Für jedes $m \in \mathbb{N}$ ist

$$e_m \leq \lim_{n\to\infty} f_n = e$$

Auch, $e_m = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}$ hat den Grenzwert $m \to \infty$!

$$\overset{\text{Satz 7.1.9.}}{\lim} m \to \infty e_m \leq e.$$

$$\Rightarrow e = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} =: \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

Satz 8.0.4. *e ist irrational!*

Beweis. $e_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ approximiert e extrem gut

$$0 < e - e_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

.

$$m > n : \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k!} \qquad k \geq n+1$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-(n+1)}$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=n+1}^{m} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-(n+1)}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} \sum_{l=0}^{m-(n+1)} (\frac{1}{2})^l = \frac{1}{(n+1)!} \frac{1-(\frac{1}{2})^{m-(n-1)}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2}{(n+1)!}$$

$$\Rightarrow 0 < e - e_n \leq \frac{2}{(n+1)!} (*) \qquad \forall n \geq 2.$$

Wäre e rational, $\Rightarrow p \in \mathbb{N}, q \in \in : e = \frac{p}{q}$

$$\Rightarrow n!e = n!\frac{p}{q} \in \mathbb{N} \forall n \geq q$$

Auch: $n!e_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow n!(e-e_n) \in \mathbb{N}_0 \qquad \forall n$, die groß genug sind

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} 0 < n!(e-e_n) \leq \frac{n!2}{(n+1)!} = \frac{2}{n+1} < 1 \quad \forall n \geq 3$$

$\lightning$ also ist e irrational! $\square$

Anwendungen:

Satz 8.0.5 (Invervallschachtelungsprinzip)**.** Seien $a_n \leq b_n, I_n := [a_n, b_n]$ abgeschlossene Intervalle und

$$I_{n+1} \subset I_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

sowie $|I_n| := b_n - a_n \overset{n\to\infty}{\to} 0$.
Dann besteht $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ aus genau einem Punkt! Bild:

Beweis. 1. $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ besteht aus höchstens einem Punkt in $\mathbb{R}$.
Ang. $\exists a, a^2 \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \quad a \neq a^2$ (o.B.d.A. $\tilde{a} > a$).

$$I_{n+1} \subset I_n \quad \forall n \Rightarrow I_n \subset I_{n-1} \subset \ldots \subset I_m \quad \forall n > m.$$

$$\Rightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{x \in \mathbb{R} | x \in I_n \forall n \in \mathbb{N}\} \subset \{x \in \mathbb{R} | x \in I_k \quad \forall 1 \le k \le m\} = \bigcap_{k=1}^{m} I_k = I_m$$

$$\Rightarrow \{a, \tilde{a}\} \subset I_m \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

$$a, \tilde{a} \in I_m = [a_m, b_m].$$

$$\Rightarrow 0 < \tilde{a} - a \le b_m - a_m = |I_m| \to 0 \quad m \to \infty$$

$\lightning$ für m groß $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ hat höchstens ein Element!

2. $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \emptyset \qquad I_n = [a_n, b_n]$

$$I_{n+1} \subset I_n \Leftrightarrow a_{n+1} \ge a_n \wedge b_{n+1} \le b_n \quad \forall n.$$

Auch: $a_n \le b_n \le b_{n-1} \le \ldots \le b_1 \Rightarrow$ Folge $(a_n)_n$ ist nach oben beschränkte monoton wachsende Folge.
$\overset{\text{Mon.Konv.}}{\Rightarrow} a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existiert und $a \ge a_n \quad \forall n.$
Sei $n \ge m$:

$$a - n \le b_n \le \ldots \le b_m \Rightarrow a = \lim_{n\to\infty} a_n \le b_m$$

$$\Rightarrow a_m \le a_{n-1} \le a_n \le a \le b_m.$$

$\Rightarrow a \in I_m$ für jedes $m \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \{a\} \subset \bigcap_{m\in\mathbb{N}} I_m$$

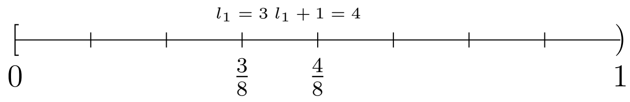
$$\text{d. h.} \bigcap_{m\in\mathbb{N}} I_m \neq \emptyset$$

□

Satz 8.0.6 (k-adische Darstellung reeller Zahlen)**.** $k \in \mathbb{N}, k \ge Z$ und $x \in \mathbb{R}$. Dann gibt es $z_0 \in \mathbb{Z}$ und $l_j \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$ derart, dass $x = z_0 + \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} l_j k^{-j} = z_0 + \sum_{j=1}^{\infty} l_j k^{-j}$.
$Z_0 := \lfloor x \rfloor := \min(p \in \mathbb{Z}, p > x) - 1 = \max(q \in \mathbb{Z}, q \le x)$.
$0 \le x - \lfloor c \rfloor < 1$.
$\Rightarrow$ o.B.d.A. sei $0 \le x < 1$. iteriere diesen Prozess. $\to$ kriegen $l_j \in \{0, 1, 2, \ldots, k-1\}$ und $\sum_{j=1}^{n} l_j k^{-j} \le x < \sum_{j=1}^{n-1} l_j k^{-j + \frac{l_n+1}{k^n}} \quad (*)$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} x = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} l_j k^{-j}.$$

Beispiel. $p := \lfloor x \rfloor := \max(z \in \mathbb{Z} : z \leq x) \Rightarrow p \leq x < p+1 \Rightarrow \tilde{x} := x - p \in [0,1)$. Also reicht es, $x \in [0,1)$ zu betrachten!
Bild: $k = 8$



$l_1 = \lfloor kx \rfloor$

$$\frac{l_1}{k} \leq x < \frac{l_1+1}{k} \Rightarrow 0 \leq x - \frac{l_1}{k} < \frac{1}{k}$$

$$\Rightarrow 0 \leq k\left(x - \frac{l_1}{k}\right) < 1 \Leftrightarrow 0 \leq k^2[x - \frac{l_1}{k}] < k.$$

$$l_2 := \lfloor k^2\left(x - \frac{l_1}{k}\right)\rfloor \overset{\text{wie vorher}}{\Rightarrow} \frac{l_2}{k} \leq k(x - \frac{l_1}{k}) < \frac{1}{k}$$

$$\Rightarrow l_1/k + l_2/k^2 \leq x < l_1/k + \frac{l_2+1}{k^2}$$

induktiv weitermachen. Geg. $l_1, l_2, \ldots, l_n \in \{0, 1, 2, \ldots, k-1\}$.

$$\text{mit } l_1/k + l_2/k^2 + \ldots + l_n/k^n \leq x < l_1/k + l_2/k^2 + l_{n-1}/k^{n-1} + \frac{l_n+1}{k^n}$$

$$\Rightarrow 0 \leq x - \sum_{j=1}^{n} \frac{l_j}{k^j} < \frac{1}{k^n}$$

$$\text{oder } k^{n+1}[x - \sum_{j=1}^{n} \frac{l_j}{k^j}] < k \in \mathbb{N}$$

$$\text{definiere } l_{n+1} := \lfloor k^{n+1}(x - \sum_{j=1}^{n} \frac{l_j}{k^j})\rfloor$$

$$\text{kriegen } a_n := \sum_{j-1}^{n} \frac{l_j}{k^j} \leq x < \sum_{j=1}^{n} l_j/k^j + 1/k^n =: b_n$$

$$\Rightarrow a_n \leq x < b_n$$

$$\text{und } b_n - a_n = 1/k^n \to 0, n \to \infty.$$

Entweder: $I_n := [a_n, b_n]$ sind geschachtelt $I_{n+1} \subset I_n$ Lange $I_n - |I_n| = b_n - a_n \to 0$. Intervallschachtelungsprinzip $\Rightarrow \{x\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \Rightarrow x = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} l_j/k^j$.

Alternative:

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &\geq a_n \\
a_n \leq b_n &= \sum_{j=1}^{n} l_j/k^j + 1/k^n \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} \frac{k-1}{k^j} + 1/k^n = (k-1) \underbrace{\sum_{j=1}^{n} (1/k)^j + 1/k^n}_{=1/k\sum_{j=0}^{n-1}(1/k)^j = 1/k\frac{1-(1/k)^n}{1-1/k}} \\
&= 1-(1/k)^n + 1/k^n = 1. \overset{\text{Mon. Konv.}}{\Rightarrow} a = \lim_{n\to\infty} ...AUFSCHRIEB
\end{aligned}
$$

Korollar 8.0.7. Die reellen Zahlen sind überabzählbar!

Beweis. Es reicht zu zeigen $[0,1)$ ist überabzählbar. Es reicht, eine Teilmenge von $A \subset [0,1)$ anzugeben, die nicht abzählbar ist.
nehmen: $k = 3$

$$A := \{x \in [0,1) : \exists l_j \in \{0,1\} x = \sum_{j=1}^{\infty} l_j/3^j = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{l_j}{3^j}\}.$$

A hat dieselbe Mächtigkeit wie die Menge der $\{0,1\}$-wertigen Folgen. hat dieselbe Mächtigkeit wie $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Dies ist überabzählbar. □

9

9.1 Cauchyfolgen

Definition 9.1.1 (Cauchyfolge)**.** Eine Folge $(a_n)_n$ heißt Cauchyfolge (kurz Cauchy), falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K \in \mathbb{N} : |a_n - a_m| < \varepsilon \text{für alle } n, m \in K$$

Bemerkung. Reicht $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m > n \geq K$ zu betrachten, da Def. symmetrisch in m, n ist und falls $m = n \Rightarrow a_m - a_n = 0$

Lemma 9.1.2. Jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge.

Beweis. $(a_n)_n \quad a_n \to a$ für $n \to \infty$
d. h. $\forall \varepsilon > 0 \exists K \in \mathbb{N} : \forall n \geq K$ ist $|a_n - a| < \varepsilon/2$.
Ist $m > n \geq K : |a_m - a_n| = |a_m - a + a - a_n| \leq \underbrace{|a_m - a|}_{<\varepsilon/2} + \underbrace{|a - a_n|}_{<\varepsilon/2}$. Also ist $(a_n)_n$ Cauchyfolge. □

Lemma 9.1.3. Jede Cauchyfolge ist beschränkt.

Beweis. Sei a_n Cauchyfolge.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K \in \mathbb{N} : |a_m - a_n| < \varepsilon \quad \forall m, n \geq K.$$

Wähle $\varepsilon = 1, k_0 : |a_m - a_n| < 1 \quad \forall n, m \geq K_0$
Sei $n \geq k_0 \Rightarrow |a_{K_0} - a_n| < 1$.

$$\Rightarrow |a_n| = |a_n - a_{K_0} + a_{K_0}| \leq |a_n - a_{K_0}| + |a_{K_0} < 1 + |a_{K_0}|$$

für alle $n \geq K_0$
Also setze: $C := \max(|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{K_0}|, 1 + |a_{K_0}|) < \infty$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \text{ ist } |a_n| \leq C.$$

□

Beispiel.

$$\begin{aligned} a_n &= (-1)^n \ (\text{oder}(-1)^n + 1/n) \\ n = 2k, k \in \mathbb{N} \Rightarrow a_{2k} &= (-1)^{2k} = 1 \\ a_{2k+1} &= (-1)^{2k+1} = -1. \end{aligned}$$

Die neue Folge $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist kostant, also konvergiert sie.
Beispiel. $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_R\} \subset \mathbb{R} \quad R \in \mathbb{N}$.
$(a_n)_n$ Folge mit Werten in B. $a_n \in B \forall n \in \mathbb{N}$
B endliche Menge!
$\Rightarrow$ Es gibt mind. ein $r_0 \in \{1, 2, \ldots, R\}$, sodass $a_n = b_{r_0}$ für unendlich viele n.

$$\Leftrightarrow \forall K \in \mathbb{N} \exists n > K : a_n = b_{r_0}$$

Jetzt induktiv:

$$\begin{aligned} n_1 \in \mathbb{N} : a_{n_1} = b_{r_0}. \\ n_2 := \min(n > n_1 : a_n = b_{r_0}) > n_1 \quad a_{n_2} = b_{r_0} \\ \text{induktiv} \\ \text{geg. } n_1 < n_2 < \ldots < n_k \\ a_{n_l} = b_{r_0} \quad l = \{1, \ldots, k\} \\ n_{k+1} = \min(n > n_k : a_n = b_{r_0}) > n_k \text{ und } a_{n_{k+1}} = b_{r_0}. \end{aligned}$$

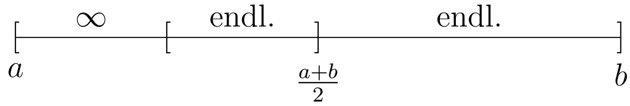
Erhalte $n_k \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ mit $n_{k+1} > n_k \forall k \in \mathbb{N}$ und $a_{n_k} = b_{r_0}$
$\Rightarrow$ Folge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ die konstant ist.
Außerdem $(a_{n_k})_k$ ist Teil der Folge $(a_n)_n$!

Definition 9.1.4 (Teilfolge)**.** Eine Funktion $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ heißt Ausdünnung, falls $\sigma(n+1) > \sigma(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (d. h. σ ist streng monoton wachsend).

Erinnerung: Folge ist eine Funktion $f : \mathbb{N} \to X$
$\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \Rightarrow f \circ \sigma : \mathbb{N} \to X, n \mapsto f(\sigma(n))$ ist auch eine Folge.
$a_n = f(n), \qquad a_{\sigma(n)} = f(\sigma(n)) = (f \circ \sigma)(n)$
Geg. Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und eine Ausdünnung $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Setzen wir $n_k := \sigma(k), k \in \mathbb{N}$ und $(a_{\sigma(k)})_k = (a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Beobachtung: abg. und beschr. Intervalle sind aus Folgensicht fast so gut wie endliche Mengen!

Lemma 9.1.5. Sei $I = [a, b], \quad a, b \in \mathbb{R}, a \leq b.(a_n)_n \subset I$. d. h. $a_n \in I \quad \forall n \in \mathbb{N}$, dann gibt es eine Teilfolge, von $(a_n)_n$, die konvergiert.

Beweis. $I_0 = [a, b]$
Bild:



Der unendliche Intervall wird immer halbiert in einen endlichen und unendlichen Teil (rekursiv). □

Korollar 9.1.6. Jede beschräNkte (reelle) Folge hat eine konvergente Teilfolge (Satz von Bolzano-Weierstrauß).

Beweis. Sei $0 \leq C < \infty.|a_n| \leq C \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\Rightarrow -C \leq a_n \leq C, a_n \in [-C, C] \forall n \in \mathbb{N}.$$

$\Rightarrow$ Beh. folgt aus Lemma 5! □