# Analysis I (WS 18/19)

Pavel Zwerschke

9. November 2018

# Inhaltsverzeichnis

# 0 Organisatorisches

**Dozent**
Prof. Dr. Dirk Hundertmark (20.30, 2.028)
dirk.hundertmark@kit.edu
**Übungsleiter**
Dr. Markus Lange (20.30, 2.030)
markus.lange@kit.edu
**Übungszettel**
Ausgabe:
donnerstags unter `www.math.kit.edu/iana1/lehre/ana12018w/`
Abgabe:
bis mittwochs um 19:00 in den Abgabekästen des Foyers des Mathematikgebäudes (20.30)
getackert, mit Namen, Matrikelnummer, Tutoriennummer und Deckblatt (optional) in das Fach mit der richtigen Kennzeichnung legen
Zettel dürfen zu zweit abgegeben werden
**Übungsschein**
Jede K-Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet. Einen Übungsschein erhält wer 50% der Punkte aller K-Aufgaben erzielt.
**Klausur**
Die Anmeldung findet über das Online-Portal statt. Die Klausur findet in KW 8 2019 statt. Der Übungsschein ist Voraussetzung für die Teilnahme an der Klausur.

# 1 Was ist Analysis?

**Zentrale Begriffe:**
Grenzwerte von Folgen und Reihen, Funktionen, stetig, differenzierbar, integrieren, Differential- und Integralrechnung, Differentialgleichungen (Newton, Maxwell, Schrödinger), unendlich dimensionale Räume

*Beispiel.* $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$
$2S = 1 + \frac{1}{2} + \dots + {}^1\!/_2 + \dots$
$2S = 1 + S$
$S$ entspricht der Wahrscheinlichkeit, dass irgendwann mal Kopf in einem Münzwurf kommt.
Vorsicht!
$S = 1 + 2 + 4 + \dots$
$2S = 2 + 4 + 8 + \dots = -1 + 1 + 2 + 4 + \dots = -1 + S$
$S = -1$
Natürlich Quatsch!
Formales Rechnen kann gefährlich sein!

- Was sind mathematische Aussagen?
- Wie macht man Beweise, wie findet man sie? (learning by doing)
- logische Zusammenhänge

# 2 Etwas Logik

Eine (mathematische) Aussage ist ein Ausdruck, der wahr oder falsch ist.
z. B.

1. $A$ : „$1 + 1 = 2$.“(auch „$1 + 1 = 3$“, „$1 + 1 = 0$“)
2. $B$ : „Es gibt unendlich viele Primzahlen.“
3. $C$ : „Es gibt unendlich viele Primzahlen $p$ für die $p + 2$ auch eine Primzahl ist.“
4. $D$ : „Die Gleichung $m\ddot{x} = F$ hat geg. $\dot{x}(0) = v_0, x(0) = x_0$ immer genau eine Lösung.“
5. $E$ : „Jede gerade natürliche Zahl größer als 2 ist die Summe zweier Primzahlen.“
6. $F$ : „Morgen ist das Wetter schön.“

7. $G$ : „Ein einzelnes Atom im Vakuum mit der Kernladungszahl $Z$ kann höchstens $Z+1$ Elektronen binden.“

8. $H(k,m,n)$ : „Es gilt: $k^2+m^2=n^2$.“(z. B. $H(3,4,5)$ ist wahr.)

Gegeben für natürliche Zahlen $n$, Aussagen $A(n)$, dann gilt:
Für jede nat. Zahl $n$ ist $A(n)$ wahr, genau dann, wenn

1. $A(1)$ ist wahr.

2. Unter der Annahme, dass $A(n)$ wahr ist, folgt, dass $A(n+1)$ wahr ist.

*Beispiel.* $A(n): 1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

*Beweis.* Vollständige Induktion
Induktionsanfang:
$1=\frac{1(1+1)}{2}\checkmark$
Induktionsschluss:
Wir nehmen an, dass $A(n)$ wahr ist (für $n\in\mathbb{N}$)
D. h. Induktionsannahme:
$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$
Dann folgt:
$\underbrace{1+2+\cdots+n}_{=\frac{n(n+1)}{2}}+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)$
$=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}=\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$ □

*Bemerkung.* Gaußscher Trick:
1)
$S=1+2+3+\cdots+n=n+(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1$
$2S=\underbrace{(n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)}_{n\text{-mal}}\Leftrightarrow S=\frac{n(n+1)}{2}$.
2)
$S_n=0+1+2+\cdots+n$
$=$ Anzahl der Punkte in
$\approx$ Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks $=\frac{1}{2}*n*n$.
Also: Ansatz („geschicktes Raten“, „scientific guess“, englisch: ansatz):
$S_n=\underbrace{a_2n^2+a_1n+a_0}_{\text{Polynom 2. Grades in n}}$
$a_2=\frac{1}{2}$
Wie bekommt man $a_0,a_1,(a_2)$? $n=0: S_0=0=a_2*0^2+a_1*0+a_0\Rightarrow a_0=0$.
$n=1: S_1=1=a_2*1^2+a_1*1^2=a_2+a_1=\frac{1}{2}+a_1$.
also: $a_1=\frac{1}{2}$
$\Rightarrow$ Raten: $S_n=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n=\frac{n(n+1)}{2}$.

## 2.1 Grundbegriffe

Aussagen: Notation

| | |
|---:|---|
| $:$ | „so, dass gilt“ |
| $\exists$ | „es gibt mindestens ein“, „es existiert“ |
| $\forall$ | „für alle“ |
| $\Rightarrow$ | „impliziert“($A \Rightarrow B$ „aus $A$ folgt $B$“) |
| $\Leftrightarrow$ | „genau dann, wenn“ |
| $\neg A$ | nicht $A$ |
| $A \wedge B$ | $A$ und $B$ |
| $A \vee B$ | $A$ oder $B$ |
| $A := B$ | $A$ ist per Definition gleich $B$ |

**Satz 2.1.1.** Folgende Aussagen sind allein aus logischen Gründen immer wahr.

| | |
|---:|---|
| $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$ | Gesetz der doppelten Verneinung |
| $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$ | Kontraposition |
| $A \Rightarrow B \Leftrightarrow (\neg(A \wedge \neg B))$ | beim Widerspruchsbeweis |
| $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$ | de Morgan |
| $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$ | de Morgan |

*Bemerkung.* $A \Rightarrow B \Leftrightarrow B$ ist mindestens so wahr wie $A \Leftrightarrow A$ ist mindestens so falsch wie $B \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$.
$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B \wedge B \Rightarrow A)$.

*Beispiel.* $n \in \mathbb{N}$ ist gerade, falls $k \in \mathbb{N}$ existiert mit $n = 2k$.
$n \in \mathbb{N}$ ist ungerade, falls $\exists k \in \mathbb{N}_0 : \vee n = 2k + 1$.
Dann gilt: $n$ ist gerade $\Leftrightarrow$ $n^2$ ist gerade.

*Beweis.* „$\Rightarrow$“: $n$ gerade $\Rightarrow n = 2k$, für $k \in \mathbb{N}$
$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ ist gerade.
Umgekehrt müssen wir zeigen:
„$\Leftarrow$“: $n^2$ gerade $\Rightarrow$ $n$ gerade
Kontraposition: $n$ ungerade $\Rightarrow$ $n^2$ ungerade
Also sei $n = 2k+1, k \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = \underbrace{2(2k^2 + 2k)}_{\text{gerade}} +1 \Rightarrow$
$n^2$ ist ungerade. □

**Mengen** (nach Cantor)
informell: Eine Menge ist eine Sammlung von Objekten (Elemente) zu einem neuen Objekt.
Vorsicht: Russels Paradox
genaue Definition von Zermelo-Fraenkel Axiome ($\rightarrow$ Logik Mengenlehre)
$a \in M : a$ ist Element von $M$

$a \notin M$ : $a$ ist kein Element von $M$
z.B.:
$M = \{1, 4\}$
$1 \in M$
$5 \notin M$
Angabe von Mengen durch

- Auflistung
  $M = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_{17}\}$

- Eigenschaft
  $M = \{a | a \text{ hat Eigenschaft } E\}$

z.B.:

- $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$

- $\mathbb{Z} := \{x | x \in \mathbb{N} \vee x \in -\mathbb{N} \vee x = 0\}$

- $-\mathbb{N} := \{-n | n \in \mathbb{N}\}$

**Definition 2.1.2.** Sei $M$ eine Menge und $A(x)$ Aussagen mit $x \in M$
$\forall x \in M : A(x)$ ist wahr, falls alle $A(x)$ wahr sind.
$\exists x \in M : A(x)$ ist wahr, falls mindestens eine Aussage $A(x)$ wahr ist.

Achtung: Zusammensetzen: Reihenfolge ist wichtig!
*Beispiel.* Töpfe := Menge der Töpfe
Deckel := Menge der Deckel
$A : \forall T \in$ Töpfe $\exists D \in$ Deckel : $D$ passt auf $T$
(Für jeden Topf gibt es einen Deckel, der passt)
$B : \exists D \in$ Deckel $\forall T \in$ Töpfe : $D$ passt auf $T$
(Es existiert mindestens ein Deckel, der auf alle Töpfe passt)

Negation:
$\neg(\forall x \in M : A(x))$
$\Leftrightarrow \exists x \in M : \neg A(x)$
$\neg(\exists x \in M : A(x))$
$\Leftrightarrow \forall x \in M : \neg A(x)$

**Definition 2.1.3** (wichtige Mengen)**.** Seien $M, N$ Mengen.

$$\begin{aligned}
\emptyset &:= \text{ die Menge ohne Elemente (leere Menge)} \\
M \cap N &:= \{x | x \in M \wedge x \in N\} \text{ (Schnitt)} \\
M \cup N &:= \{x | x \in M \vee x \in N\} \text{ (Vereinigung)} \\
M \setminus N &:= \{x | x \in M \wedge x \notin N\} \text{ (Differenzmenge)} \\
\mathcal{P}(M) &:= \{A | A \subset M\} \text{ die Menge aller Teilmengen von } M \text{ (Potenzmenge)}
\end{aligned}$$

Sei $I$ eine Menge und für $i \in I$ eine Menge $M_i$.

$$\bigcap_{i \in I} M_i := \{x | \forall i \in I : x \in M_i\}.$$
$$\bigcup_{i \in I} M_i := \{x | \exists i \in I : x \in M_i\}.$$

Ist $M \cap N = \emptyset$, so heißen $M$ und $N$ divergent.
$M \subset N$, falls $\forall x \in M : x \in N$ ($M$ Teilmenge von $N$).
$M = N$, falls $M$ und $N$ dieselben Elemente haben.
Insbesondere ist $(M = N) \Leftrightarrow M \subset N \wedge N \subset M$.
$M \subsetneq N : M \subset N \wedge M \neq N$ ($M$ echte Teilmenge von $N$).

*Beispiel.* $\emptyset \subset M$
$M = \{1, 2\} \Rightarrow \mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

1. Eigenschaften von „$\subset$“
   (a) $\emptyset \subset M$
   (b) $M \subset M$
   (c) $M = N \Leftrightarrow M \subset N \wedge N \subset M$
   (d) $A \subset B \wedge B \subset C \Leftrightarrow A \subset C$
2. Assoziativität
   (a) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
   (b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
3. Kommutativität
   (a) $A \cup B = B \cup A$
   (b) $A \cap B = B \cap A$
4. Distributivgesetz
   (a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
   (b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

# 3 Die reellen Zahlen

## 3.1 Körperaxiome (engl. field)

$\mathbb{K}$ : Menge mit zwei Operationen „+“und „·“.
$\forall a, b \in \mathbb{K}$ ist $a + b \in \mathbb{K} \wedge a \cdot b \in \mathbb{K}$ erklärt sollen kompatibel sein.

**Definition 3.1.1** (Körperaxiome)**.** In einem Körper gelten diese Axiome:

1. Kommutativität: $\forall a, b \in \mathbb{K} : a + b = b + a, a \cdot b = b \cdot a$

2. Assoziativität: $\forall a, b, c \in \mathbb{K} : a + (b + c) = (a + b) + c, a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

3. Existenz des neutralen Elements:
   $\exists 0 \in \mathbb{K} : a + 0 = 0 + a = a \forall a \in \mathbb{K}$
   $\exists 1 \in \mathbb{K} : a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \forall a \in \mathbb{K}$

4. Existenz eines inversen Elements:
   $\forall a \in \mathbb{K} \exists -a \in \mathbb{K} : a + (-a) = 0$
   $\forall a \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \exists \frac{1}{a} \in \mathbb{K} : a \cdot \frac{1}{a} = 1$
   Es gilt: $0 \neq 1$.

5. Distributivgesetz: $\forall a, b, c \in \mathbb{K} : a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

*Beispiel.* $\mathbb{Q} = \frac{m}{n}, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}$ ist ein Körper.

$$\mathbb{F}_2 : \begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}$$ ist ein Körper.

*Bemerkung.* .

1. Somit ist ein Körper $\mathbb{K}$ mit „+“eine kommutative Gruppe und $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ mit „·“auch eine kommutative Gruppe.

2. Die neutralen Elemente sind eindeutig bestimmt.
   z.B.: angenommen, $0_1$ und $0_2$ sind neutrale Elemente mit „+“.
   $\Rightarrow 0_1 \overset{(3)}{=} 0_1 + 0_2 \overset{(1)}{=} 0_2 + 0_1 \overset{(2)}{=} 0_2$
   analog für Multiplikation

**Definition 3.1.2.** Zu $a \in \mathbb{K}$ ist $-a$ das Inverse bzgl. der Addition
schreibe $a - b := a + (-b)$.
Zu $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ sei $a^{/1}$ das Inverse bzgl. der Multiplikation.
Ist $b \neq 0$, so schreiben wir $\frac{a}{b} := a \cdot b^{-1} = b^{-1} \cdot a$.
schreibe $(ab) := a \cdot b$.

**Lemma 3.1.3** (Rechnen in einem Körper)**.** .

1. Umformen von Gleichungen
   $\forall a, b, c \in \mathbb{K}$ :
   aus $a + b = c$ folgt $a = c - b$
   aus $a \cdot b = c$, $b \neq 0$ folgt $a = \frac{c}{b}$

2. Allgemeine Rechenregeln

$$\begin{aligned} -(-a) &= a \\ (a^{-1})^{-1} &= a, \text{ falls } a \neq 0 \\ -(a+b) &= (-a) + (-b) \\ (a \cdot b)^{-1} &= b^{-1} \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1} \\ a \cdot 0 &= 0 \\ a(-b) &= -(ab), (-a)(-b) = ab \\ a(b-c) &= ab - ac \\ ab = 0 &\Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0 \text{ (Nullteilerfreiheit)} \end{aligned}$$

*Beweis.* $0 = a + (-a) = (-a) + a$
$\Rightarrow -(-a) = a$
$(a + b) + ((-a) + (-b)) = (a + (-a)) + (b + (-b)) = 0 + 0 = 0$
$\Rightarrow -(a + b) = (-a) + (-b)$
benutzen wir auch Eindeutigkeit des inversen Elements
analog zeigt man $(a^{-1})^{-1} = a$ und $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = a^{-1}b^{-1}$
z.B.: $(ab) \cdot (b^{-1}a^{-1}) = a(b \cdot b^{-1})a^{-1} = (a \cdot 1)a^{-1} = a \cdot b^{-1} = 1$
Ferner $a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0 = a \cdot 0 + 0$
$\Rightarrow a \cdot 0 = a \cdot 0 - a \cdot 0 = 0$
$\Rightarrow a \cdot b + a \cdot (-b) = a \cdot (b + (-b)) = a \cdot 0 = 0$
$\overset{\text{Eind. d. Inv.}}{\Rightarrow} -ab = a(-b)$
Somit auch $(-a)(-b) = -((-a)b) = -(b(-a)) = (-ba) = -(-ab) = ab$
und $a(b - c) = a(b + (-c)) = ab + a(-c) = ab + (-ac) = ab - ac$.
ist $ab = 0$ und $a \neq 0 \Rightarrow 0 = (ab)\frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot (ab) = (\frac{1}{a} \cdot a)b = 1b = b$
also ist $b = 0$. □

**Satz 3.1.4** (Bruchrechnen)**.** $a, b, c, d \in \mathbb{K}, c \neq 0, d \neq 0$.
Dann gilt

1. $\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ad+bc}{cd}$

2. $\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{ab}{cd}$

3. $\frac{a/c}{b/d} = \frac{ad}{bc}$, falls auch $b \neq 0$ ist.

*Beweis.* Übung $\square$

*Beispiel.* rationale Zahlen sind ein Körper
schreiben $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ für einen Körper

## 3.2 Die Anordnungsaxiome

**Definition 3.2.1.** Sei $\mathbb{K}$ (genauer $(\mathbb{K}, +, \cdot)$) ein Körper. Dann heißt $>$ eine Anordnung falls

1. Für jedes $a \in \mathbb{K}$ gilt genau eine der Aussagen $a > 0, a = 0, -a > 0$
   (wenn $a \in \mathbb{K}$, mit $a > 0$ positiv)

2. Aus $a > 0$ und $b > 0$ folgt
   $a + b > 0$ und $a \cdot b > 0$

Wir nennen $(\mathbb{K}, +, \cdot, >)$ einen angeordneten Körper.

*Bemerkung.* Statt $-a > 0$ schreiben wir $a < 0$
Statt $a - b > 0$ schreiben wir $a > b$
Bild:


Statt $a - b < 0$ schreiben wir $a < b$.
$a \geq b$, falls $a > b \vee a = b$
$a \leq b$, falls $a < b \vee a = b$.

**Satz 3.2.2.** Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot, >)$ ein angeordneter Körper. Dann gilt

1. für $a, b \in \mathbb{K}$ gilt genau eine der Relationen $a > b, a = b, a < b$ (Trichotromie)

2. Aus $a > b, b > c$ folgt $a > c$ (Transitivität)

3. Aus $a > b$ folgt:
   $$\begin{cases} a + c > b + c, \forall c \in \mathbb{K} \\ ac > bc, \text{ falls } c > 0 \\ ac < bc, \text{ falls } c < 0 \end{cases}.$$

4. Aus $a > b$ und $c > d$ folgt:
   $$\begin{cases} a + c > b + d \\ ac > bd, \text{ falls } b, d > 0 \end{cases}$$

5. Für $a \neq 0$ ist $a^2 > 0$.

6. Aus $a > 0$ folgt $\frac{1}{a} > 0$.
7. Aus $a > b > 0$ folgt $0 < \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.
8. Aus $a > b, 0 < \lambda < 1$ folgt $b < \lambda b + (1-\lambda)a < a$.

*Bemerkung.* Auf $\mathbb{F}_2$ kann es keine Anordnung geben!

*Beweis.* 1. Direkt aus (A.1) und Def. von $a > b$.

2. $a - c = \underbrace{(a-b)}_{>0} + \underbrace{(b-c)}_{>0} \overset{(A.2)}{>} 0.$

3. $(a+c) - (b+c) = a - b > 0$
   $ac - bc = \underbrace{(a-b)}_{>0} \cdot c \overset{(A.2)}{>} 0$, falls $c > 0$
   Ist $c < 0$, so ist $-c > 0$
   $\Rightarrow bc - ac = \underbrace{(a-b)}_{>0} \cdot \underbrace{(-c)}_{>0} \overset{(A.2)}{>} 0$
   $ac - bd = ac - bc + bc - bd = \underbrace{(a-b)}_{>0} \cdot \underbrace{c}_{>0} + \underbrace{b}_{>0} \cdot \underbrace{(c-d)}_{>0} \overset{(A.2)}{>} 0.$

4. $(a+c) - (b+d) = (a-b) + (c-d) > 0$ nach (A.2)
   $ac - bd = ac - bc + bc - bd = (a-b)c + b(c-d)$
   Ist $b = 0 \Rightarrow a > b = 0 \Rightarrow ac > 0 = bd$
   Ist $b < 0 \Rightarrow (-b)d > 0 \Rightarrow -bd > 0 \Rightarrow bd < 0 \Rightarrow ac < -bd \Rightarrow$
   $\underbrace{ac}_{>0} + \underbrace{(-bd)}_{>0} \overset{(A.2)}{>} 0.$

5. Fallunterscheidung:
   ist $a > 0 \Rightarrow a^2 = a \cdot a > 0$ (A.2)
   ist $a < 0 \Rightarrow a^2 = (-a) \cdot (-a) > 0$ (A.2)

6. sei $a > 0:$
   $\overset{5.}{\Rightarrow} \left(\frac{1}{a}\right) > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} = \underbrace{\left(\frac{1}{a}\right)^2}_{>0} \cdot \underbrace{a}_{>0} > 0.$

7. aus $a > b > 0$
   $\Rightarrow \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{1}{b}(a-b)\frac{1}{a} > 0.$

8. $a > b, 0 > \lambda > 1 \Rightarrow \lambda > 0 \wedge 1 - \lambda > 0$
   $b = \lambda b + \underbrace{(1-\lambda)b}_{<(1-\lambda)a}$
   $< \lambda b + (1-\lambda)a < \lambda a + (1-\lambda)a = a$
   $\Rightarrow b < \lambda b + (1-\lambda)a = a.$
   Insbesondere $\lambda = 1/2 \Rightarrow b < 1/2 b + 1/2 a = \frac{a+b}{2} < a.$

$\square$

**Definition 3.2.3** (Betrag)**.** Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot, >)$ ein angeordneter Körper.
Betrag von $a \in \mathbb{K}$ ist gegeben durch

$$|a| := \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq 0 \\ -a, & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

auch noch $a, b \in \mathbb{K}$

$$\max(a,b) := \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq b \\ b, & \text{falls } a < b \end{cases}$$

$$\min(a,b) := \begin{cases} a, & \text{falls } a \leq b \\ b, & \text{falls } a > b \end{cases}$$

*Bemerkung.* .

1. $a, b \in \mathbb{K}$
   $|a - b| =$ Abstand von $a$ zu $b$.
   $|a| = |a - 0| =$ Abstand von $a$ zu $0$.

2. $|a| = \max(a, -a)$.

**Satz 3.2.4.** $(\mathbb{K}, +, \cdot, >)$ ang. Körper
Dann gilt $\forall a, b \in \mathbb{K}:$

1. $|-a| = |a|$ und $a \leq |a|$

2. $|a| \geq 0$ und $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$

3. $|ab| = |a|\,|b|$

4. $|a + b| \leq |a| + |b|$ (Dreiecksungleichung)

5. $||a| - |b|| \leq |a - b|$ (umgekehrte Dreiecksungleichung)

*Beweis.* .

1. $|-a| = \begin{cases} -a, -a \geq 0 \\ -(-a), -a \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} -a, a \leq 0 \\ a, a \geq 0 \end{cases} = |a|$

   $|a| - a = \begin{cases} a - a, a \geq 0 \\ -a - a, a < 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, a \geq 0 \\ -(a + a), a < 0 \end{cases} \geq 0.$

   alternativ: $a \leq \max(a, -a) = |a|$.

2.

3. Hier ändern sich die linke und rechte Seite <u>nicht</u>, wenn man $a$ bzw. $b$ durch $-a$ bzw. $-b$ ersetzt.
   Also, o.B.d.A. können wir annehmen, dass $a, b \geq 0$.
   $\Rightarrow |ab| = ab = |a|\,|b|$.

4. $\overset{\text{Satz 1 (5)}}{\Rightarrow} |a+b|^2 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = |a|^2 + 2\underbrace{ab} \leq |ab| + |b|^2$
   $\overset{(2)}{\leq} |a|^2 + 2\,|ab| + |b|^2$
   $\overset{(3)}{}$
   $|a|^2 + 2\,|a|\,|b| + |b|^2$.
   Also $(a+b)^2 \leq (|a| + |b|)^2$
   $\overset{\text{H.A.}}{\Rightarrow} |a+b| \leq |a| + |b|$.
   H.A. aus $|c|^2 \leq |d|^2$ folgt $|c| \leq |d|$ (Kontraposition).

5. $|a| = |a - b + b| = |(a-b) + b| \overset{(4)}{\leq} |a-b| + |b|$
   $|a| - |b| \leq |a - b| \, \forall a, b \in \mathbb{K}$.
   Jetzt: Symmetrieargument. (Vertausch von $a$ und $b$)
   $\Rightarrow |b| - |a| \leq |b - a| = |(-b - a)| = |a - b|$
   also $|b| - |a| \leq |a - b|$
   $|a| - |b| \leq |a - b|$
   $||a| - |b|| = \max(|a| - |b|, -(|a| - |b|)) = \max(|a| - |b|, |b| - |a|) \leq |a - b|$.

□

*Beispiel.* Sei $a, b \in \mathbb{K}$ ein angeordneter Körper. Aus $|b - a| \leq b/2, 2 = 1 + 1$ folgt $a \geq b/2$ Bild:

*Beweis.* $b - a \leq |b - a| \leq b/2 \Rightarrow a \geq b - b/2 = b/2$. □

**Korollar 3.2.5** („geometrisch-arithmetische Ungleichung"). Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot, >)$ ein ang. Körper, $a, b \in \mathbb{K}$
$\Rightarrow ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$.
Wenn Gleichheit gilt, so folgt $a = b$.

*Beweis.* In Übung □

**Fakt:**

- In jedem angeordneten Körper gilt $0 < 1$!
- Es gibt keine Anordnung, die $\mathbb{F}_2$ zu einem angeordneten Körper macht. (H.A.)

## 3.3 Obere und untere Schranken, Supremum und Infimum

Notation: $a$ ist nicht negativ, falls $a \geq 0$.
natürlich $a = b \Leftrightarrow a \leq b \wedge a \geq b$.
Im Folgenden ist $\mathbb{K}$ immer ein angeordneter Körper. $A, B \subset \mathbb{K}, A, B \neq \emptyset$ und $\gamma \in \mathbb{K}$, so bedeutet $A \leq \gamma : \forall a \in A : a \leq \gamma$ ($\gamma$ it obere Schranke für $A$).
$B \geq \beta : \forall b \in B : b \geq \beta$ ($\beta$ ist untere Schranke für $B$).
Analog sind $a < \gamma, A > \gamma, A < B$, usw. definiert.
Hat $A$ eine obere Schranke, so heißt $A$ nach oben beschränkt. Hat $B$ eine untere Schranke, so ist $B$ nach unten beschränkt. $A$ ist beschränkt, falls es nach oben und unten beschränkt ist.
Ist $A \leq \alpha$ und $\alpha \in A$, so heißt $\alpha$ größtes (maximales) Element von $A$, schreibe $\alpha = \max A$ (Maximum).
Ist $B \geq \beta$ und $\beta \in B$, so heißt $B$ kleinstes (minimales) Element von $B$, schreibe $\beta = \min B$ (Minimum).
Man zeige, dass max und min eindeutig sind, sofern sie existieren.
$[0, 1) := \{x \in \mathbb{K} | 0 \leq x \leq 1\}$ hat kein Maximum bzw. kein maximales Element.

**Definition 3.3.1.** Sei $A \subset \mathbb{K}, A \neq \emptyset$. Dann ist $\gamma \in \mathbb{K}$ die kleinste obere Schranke (oder Supremum), falls $A \leq \gamma$ und aus $A \leq n$ folgt $\gamma \leq n$.
Schreibe $\gamma = \sup A = \sup(A)$.
Analog: $\beta$ it die größte untere Schranke von $A$ (Infimum), falls $\beta \leq A$ und aus $\eta \leq A$ folgt $\eta \leq \beta$
Schreibe $\beta = \inf A = \inf(A)$.

*Beispiel.* $P := \{x \in \mathbb{K} | x > 0\}$
$\Rightarrow$

1. $P$ ist nicht nach oben beschränkt.
2. $P$ hat kein Minimum, aber $\inf P = 0$.

*Beweis.* .

1. Ang. $\gamma$ ist obere Schranke für $P$. D.h. $\forall x \in P$ folgt $0 < x \leq \gamma \Rightarrow \gamma > 0 \Rightarrow \gamma \in P \Rightarrow 0 < \gamma = \gamma + 0 < \gamma + 1 \in P \Rightarrow \gamma + 1 \in P$ und $\gamma + 1 > \gamma \gamma$ ist nicht obere Schranke für $P$ (Widerspruch!) ↯

2. $2 := 1 + 1 > 1 > 0$
   Ang. $\min P := \eta$ existiert. $\Rightarrow \eta \in P, \eta > 0, \tilde{x} := \frac{\eta}{2} = \frac{0+\eta}{2} < \eta$.
   Es gilt $0 = \inf P$.
   Sicherlich $0 < P$, also ist 0 eine untere Schranke für $P$.
   0 ist die größte untere Schranke, denn nach obigem Argument ist jede Zahl $> 0$ keine untere Schranke für $P$!

□

**Lemma 3.3.2.** $A \subset \mathbb{K}, A \neq \emptyset$.

1. $\alpha := \sup A \Leftrightarrow \alpha \geq A \wedge \forall \varepsilon > 0 \exists a \in A : \alpha - \varepsilon < a$.

2. $\beta := \inf B \Leftrightarrow \beta \leq B \wedge \forall \varepsilon > 0 \exists b \in B : b < \beta + \varepsilon$.

*Beweis.* .

1. „$\Rightarrow$“: Sei $\alpha = \sup A$. Also $\alpha$ ist die kleinste obere Schranke für $A$. D.h. $\alpha \geq A$ und $\forall \varepsilon > 0$ ist $\varepsilon > 0 < \alpha$, also ist $\alpha - \varepsilon$ keine obere Schranke für $A$. D.h. $\exists a \in A : \alpha - \varepsilon < a$.
   „$\Leftarrow$“: Sei $\alpha \geq A \wedge \forall \varepsilon > 0 \exists a \in A : \alpha - \varepsilon < a$. Also ist $\alpha$ eine obere Schranke für $A$. Sei $\tilde{\alpha} < \alpha$.
   Setze $\varepsilon := \alpha - \tilde{\alpha} > 0 \Rightarrow \exists a \in A : \tilde{\alpha} = \alpha - \varepsilon < a \Rightarrow \tilde{\alpha}$ ist keine obere Schranke für $a$. $\Rightarrow \alpha$ ist die kleinste obere Schranke.

2. $A := -B = \{-b | b \in B\}$. Beachte: $\sup A = \sup(-B) = -\inf B$.

□

## 3.4 Das Vollständigkeitsaxiom

**Definition 3.4.1.** Ein angeordneter Körper $(\mathbb{K}, +, \cdot, >)$ erfüllt das Vollständigkeitsaxiom, falls

Jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge hat ein Supremum.

Solch einen Körper nennt man ordnungsvollständig. $\mathbb{R}$, der Körper der reellen Zahlen, ist <u>der</u> ordnungsvollständige Körper. (Im Wesentlichen gibt es nur einen!)

$\mathbb{Q}; A := \{r \in \mathbb{Q} | r^2 < 2\}$
Notation: $a, b \in \mathbb{R} \quad a < b$
$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$ abgeschlossenes Intervall
$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$ offenes Intervall
$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$ nach rechts halboffenes Intervall
$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$ nach links halboffenes Intervall
Intervalllänge: $b - a$
unbeschränkte Intervalle:
$(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} | x \leq a\}$
$[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} | x \geq a\}$
$(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} | x < a\}$
$(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} | x > a\}$.

## 3.5 Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$

(als Teilmenge von $\mathbb{R}$)
$n$ natürliche Zahl, $n = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n\text{-mal}}$ (zirkulär $\lightning$)

**Definition 3.5.1.** Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ heißt <u>induktiv</u>, falls

1. $1 \in M$
2. Aus $x \in M$ folgt $x + 1 \in M$

*Beispiel.* $[1, \infty)$ ist induktiv.
$\mathbb{R}$ ist induktiv.
$(1, \infty)$ ist nicht induktiv.
$\{1\} \cup [1 + 1, \infty)$ ist induktiv.

**Beobachtung:** Ein beliebiger Schnitt induktiver Mengen ist wieder induktiv.
$J$: Indexmenge $A_0$ induktiv $\forall j \in J$
$\Rightarrow \forall i \in J : 1 \in A_j \Rightarrow 1 \in \bigcap\limits_{j \in J} A_j$
Ist $x \in \bigcap\limits_{j \in J} A_j \Rightarrow \forall j \in J : x \in A_j \Rightarrow x + 1 \in A_j \Rightarrow x + 1 \in \bigcap\limits_{j \in J} A_j$.

**Definition 3.5.2** (natürliche Zahlen)**.** .
$\mathbb{N} := \{x \in \mathbb{R} :$ für jede induktive Teilmenge $M \in \mathbb{R}$ gilt $x \in M\} := \bigcap\limits_{M \subset \mathbb{R} \text{ ist induktiv}} M$

*Bemerkung.* $\mathbb{N}$ ist induktiv und $\mathbb{N}$ ist die kleinste induktive Teilmenge von $\mathbb{R}$.

**Satz 3.5.3** (Archimedisches Prinzip für $\mathbb{R}$)**.** .

1. $\mathbb{N}$ ist (in $\mathbb{R}$) <u>nicht</u> nach oben beschränkt!

2. $\forall x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0 \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < x$.

*Beweis.* 1. Angenommen, $\mathbb{N} \subset R$ ist nach oben beschränkt.
$\mathbb{N} \neq \emptyset$ (da $1 \in \mathbb{N}$)
Vollständigkeitsaxiom $\Rightarrow \alpha := \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$.
Setze $\varepsilon = 1$ in Lemma 3.3.2
$\alpha - 1$ ist nicht obere Schranke für $\mathbb{N}$.
$\exists n \in \mathbb{N} : n > \alpha - 1$
$\Rightarrow n + 1 > \alpha \in \mathbb{N}$ ↯zu $\alpha$ ist obere Schranke von $\mathbb{N}$.

2. Sei $x > 0 \overset{\text{Satz 3.2.1 (6)}}{\Rightarrow} \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : n > \frac{1}{x} \underset{\text{Satz 3.2.1 (7)}}{\Rightarrow} x = \dfrac{1}{1/x} > \frac{1}{n}$.

□

**Satz 3.5.4** (Induktionsprinzip)**.** Sei $M \subset \mathbb{N}$ mit

1. $1 \in M$

2. Ist $x \in M \Rightarrow x + 1 \in M$

Dann ist $M = \mathbb{N}$.

*Beweis.* $\Rightarrow M$ ist induktiv. $\mathbb{N}$ kleinste induktive Teilmenge von $\mathbb{R}$
$\Rightarrow \mathbb{N} \subset M$
$M \subset \mathbb{N} \wedge \mathbb{N} \subset M \Leftrightarrow M = \mathbb{N}$. □

**Korollar 3.5.5** (Vollständige Induktion)**.** Für $n \in \mathbb{N}$ seien $A(n)$ Aussagen. Es gelte:

1. $A(1)$ ist wahr.

2. aus $A(n)$ ist wahr folgt $A(n + 1)$ ist wahr.

*Beweis.* Definiere $M := \{n \in \mathbb{N} | A(n) \text{ ist wahr}\} \subset \mathbb{N}$.

1. $\Rightarrow 1 \in M$, da $A(1)$ wahr ist

2. $\Rightarrow$ sei $n \in M$, d.h. $A(n)$ ist wahr $\Rightarrow A(n+1)$ ist wahr, d.h. $n+1 \in M$.

$\overset{\text{Ind.prinzip Satz 4}}{\Rightarrow} M = \mathbb{N}$, also sind alle $A(n)$ wahr! □

Notation: Induktive Definition von Summen und Produkten.
$a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ vage ...
**Summe:**

$$\sum_{k=1}^{1} a_k := a_1, (n = 1), \sum_{k=1}^{n+1} a_k := \left( \sum_{k=1}^{n} a_k \right) + a_{n+1}, n \in \mathbb{N}$$

Allgemein: untere Grenze $k = m$, obere Grenze $k = n$, Laufindex kann verschoben werden.
z.B.: $k = j + 1$

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{j=m-1}^{n-1} a_{j+1} = \ldots = \sum_{l=0}^{n-m} a_{l+m}$$

Ist $m > n$, definieren $\sum_{k=m}^{n-m} a_k := 0$ (leere Summe)
**Produkt:**

$$\prod_{k=1}^{1} a_k := a_1, \prod_{k=1}^{n+1} a_k := \left( \prod_{k=1}^{n} a_k \right) \cdot a_{n+1}, n \in \mathbb{N}$$

Ähnlich $\prod_{k=m}^{n} a_n$, setzen für $m > n \prod_{k=m} .a_k := 1$ (leeres Produkt)
z.B.

$$a \in \mathbb{R}, a^n = \prod_{k=1}^{n} a, \text{ d.h. } a^1 = a, a^{n+1} = a^n \cdot a, n \in \mathbb{N} \text{ (induktive Definition)}$$

Rechenregeln gelten z.B.

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k a_j, b_j \in \mathbb{R}, j = 1, \ldots, n$$

$$c \in \mathbb{R}, \sum_{n}^{k=1} (c \cdot a_k) = c \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k$$

**Satz 3.5.6** (Bernoullische Ungleichung)**.**

$$x \in \mathbb{R}, x \geq -1, n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$$

gilt $(1 + x)^n \geq 1 + n + x (\forall m \in \mathbb{N}, x \geq -1)$
mit „>“, falls $n > 1, x \neq 0$
$(\forall n \in \mathbb{N}, x \geq -1 (1 + x)^n \geq 1 + nx)$

*Beweis.* Vollständige Induktion:
Induktionsanfang:

$$n = 0 : (1+x)^0 = 1 = 1 + 0x\checkmark$$

$$n = 1 : (1+x)^1 = 1 + x = 1 + 1x\checkmark$$

Induktionsschritt: Induktionsvoraussetzung: es gelte für ein festes, aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}(1+x)^n &\geq 1 + nx\\ (1+x)^{n+1} &= \underbrace{(1+x)^n}_{\geq 1+nx} \cdot \underbrace{(1+x)}_{>0} \geq (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2\\ &= \begin{cases} \geq 1 + (n+1)x, x > -1 \\ > 1 + (n+1)x, x > -1, x \neq 0 \end{cases}\end{aligned}$$

□

**Satz 3.5.7** (geometrische Summe)**.** Sei $x \neq 1$, dann ist

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

*Beweis.* Vollständige Induktion:
IA:

$$\begin{aligned}n = 0 &: \sum_{k=0}^{0} x^k = x^0 = 1 = \frac{1-0}{1+0}\checkmark\\ n = 1 &: \sum_{n=0}^{1} x^k = 1 + x = \frac{1-x}{1-x}(1+x) = \frac{1-x^2}{1-x}\checkmark\end{aligned}$$

IS:
IV: Es gelte für ein festes, aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} x^k + x^{n+1} \overset{\text{IV}}{=} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} + x^{n+1}\\ &= \frac{1 - x^{n+1} + (1-x)x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1 - x^{n+2}}{1 - x}.\end{aligned} \tag{1}$$

□

*Beweis.* ohne vollständige Induktion:

$$
\begin{aligned}
S_n &:= \sum_{k=0}^{n} x^k \\
x \cdot S_n &= \sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{k=0}^{n} x^{k+1} = \sum_{j=1}^{n+1} x^j, \\
\Rightarrow (1-x)S_n &= S_n - xS_n = \sum_{k=0}^{n} x^k - \sum_{k=1}^{n+1} x^k = x^0 - x^{n+1} = 1 - x^{n+1} \\
\Rightarrow S_n &= \frac{1-x^{n+1}}{1-x}
\end{aligned}
$$

□

**Satz 3.5.8** (Eigenschaften von $\mathbb{N}$)**.** Es gilt

1. $\forall m, n \in \mathbb{N} : n + m \in \mathbb{N}$ imd $n \cdot m \in \mathbb{N}$.
2. $\forall n \in \mathbb{N} : n = 1$ oder ($n > 1$ und demnach $n - 1 \in \mathbb{N}$).
3. $\forall m, n \in \mathbb{N} : m \leq n : n - m \in \mathbb{N}_0$.
4. $\forall n \in \mathbb{N}$ gibt es kein $m \in \mathbb{N} : n < m < n + 1$.

*Beweis.* .

1. Gegeben $m \in \mathbb{N} : A := \{n \in \mathbb{N} | n + m \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}$

   (a) $1 \in A$, denn $m \in \mathbb{N} : 1 + m = m + 1 \in \mathbb{N}$.

   (b) Angenommen, $n \in A \Rightarrow (n+1) + m = \underbrace{n+m}_{\in \mathbb{N}} + 1 \in \mathbb{N}$

   $\Rightarrow n + 1 \in A$

   somit ist $A$ induktiv, also $\mathbb{N} \subset A \Rightarrow A = \mathbb{N}$.

2. Definiere $B := \{n \in \mathbb{N} | n = 1 \vee (n - 1 \in \mathbb{N} \wedge n - 1 \geq 1)\} \subset \mathbb{N}$
   Dann ist $B$ induktiv, denn

   (a) $1 \in B$

   (b) Sei $n \in B$. Fallunterscheidung

   - $n = 1 \Rightarrow n + 1 = 1 + 1 > 1$.
     und $(n+1) - 1 = (1+1) - 1 = 1 \in \mathbb{N}$
   - $n \in B \wedge n \neq 1 \Rightarrow 1 \leq n - 1$ und somit $n = (\underbrace{n-1}_{\in \mathbb{N}}) + 1 \in \mathbb{N}$

     $n - 1 \in \mathbb{N}$[ODER B?] $\wedge\, n - 1 \geq 1$
     $\Rightarrow n = \underbrace{(n-1)}_{\in \mathbb{N}} + 1 \in \mathbb{N}$
     $\Rightarrow n + 1 - 1 = n \in \mathbb{N}$
     und $(n+1) - 1 = n \in \mathbb{N}$
     und $(n+1) - 1 = n = (n-1) + 1 \geq 1 + 1 \geq$ [ODER >?]1.
     $\Rightarrow n + 1 \in B$.

3. $C := \{n \in \mathbb{N} | \forall m \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$ ist $n - m \in \mathbb{N}_0\} \Rightarrow$

   (a) $1 \in C$, denn ist $m \in \mathbb{N}$ und $m = 1$.
   folgt nach b): $m = 1$
   $\Rightarrow n - m = 1 - 1 = 0 \in \mathbb{N}_0$.

   (b) ang. $n \in C$ und $m \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n + 1$.
   Fallunterscheidung:

   - $n = 1 \Rightarrow n + 1 - m = (n+1) - 1 = n \in \mathbb{N}$.✓
     $\Rightarrow n + 1 \in C$.

- $n > 1$ (und $m \leq n+1$)
  $\overset{2.}{\Rightarrow} m-1 \in \mathbb{N}$ und $m-1 \leq (n+1)-1 = n$
  Da $n \in C, m-1 \in \mathbb{N}, m-1 \leq n \Rightarrow \underbrace{n-(m-1)}_{=(n+1)-m} \in \mathbb{N}_0$

  $\Rightarrow n+1 \in C$.

4. H.A.

$\square$

# 4 Funktionen und Abbildungen

## 4.1 Funktion als Abbildung

**Definition 4.1.1.** Eine Funktion (oder Abbildung) von einer Menge $A$ in eine Menge $B$ ordnet jedem Element $a \in A$ ein eindeutiges Element $b \in B$ zu.
Wir schreiben:

$$f : A \to B, a \mapsto f(a) \quad (= b)$$

$A$: Definitionsbereich
$B$ : Zielbereich (Target(space))
z.B. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$
Die Abbildung $f : A \to B$ ist

| | |
|---|---|
| injektiv | aus $f(a) = f(a'), a, a' \in A$, folgt $a = a'$ |
| surjektiv | $\forall b \in B \exists a \in A : b = f(a)$ |
| bijektiv | sie ist injektiv und surjektiv |

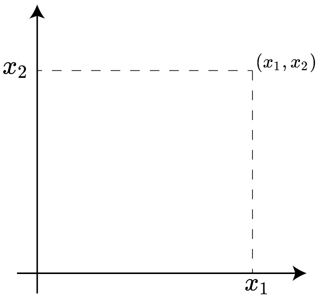
*Bemerkung.* $f : A \to B$ injektiv $\Leftrightarrow a, a' \in A, a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$

$f : A \to B$ ist bijektiv $\Rightarrow \forall b \in B \exists! a \in A : f(a) = b$.
Definiere $f^{-1} : B \to A, b \mapsto a, a \in A : f(a) = b$ (inverse Funktion).
Ist $f : A \to B$ nicht bijektiv. (Verallgemeinerte Inverse)
$f^{-1} : P(B) \to P(A), M \mapsto \{a \in A | f(a) \in M\}$
Verkettung:
gegeben: $f : A \to B, g : B \to C$
$g \circ f : A \to C \qquad g \circ f(a) := g(f(a))$.
$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$
$f : A \to B$ ist bijektiv $\Rightarrow f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A, f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B$
$\mathrm{id}_A : A \to A, a \mapsto a$.

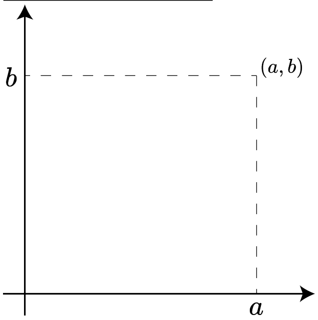
## 4.2 Abbildungen als Graph

**Definition 4.2.1.** Seien $A, B$ Mengen. Dann ist $(a,b)$ ein sog. Tupel.
in der Mengenlehre: $(a,b) := \{\{a\},\{a,b\}\}$.

Beachte: Reihenfolge ist wichtig! im Allg. $(a,b) \neq (b,a)$
Menge $A \times B := \{(a,b) | a \in A, b \in B\}$
heißt kartesisches Produkt (von $A$ und $B$)
z.B. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

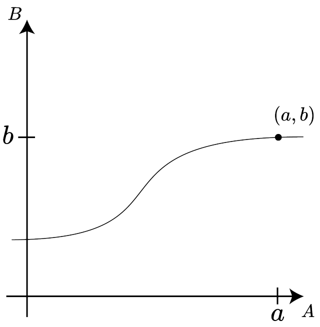


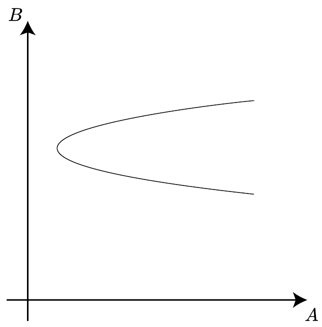

2. Abbildungen Projektionen




$\Pi_1 = \Pi_A : A \times B \to A, (a,b) \mapsto a$ (Projektion auf 1. Koordinate)
$\Pi_2 = \Pi_B : A \times B \to B, (a,b) \mapsto b$ (Projektion auf 2. Koordinate)
$\Pi_A(a,b) = a$
$\Pi_B(a,b) = b$
$n$-Tupel: Mengen $A_1, \ldots, A_n, n \in \mathbb{N}$.
$A_1 \times A_2$ wie vorhin
$A_1 \times \cdots \times A_{n+1} := (A_1 \times \cdots \times A_n) \times A_{n+1}, n \in \mathbb{N}$ (induktiv)
Beobachtung:
$(A \times B) \times C = A \times (B \times C) + \{(a,b,c) | a \in A, b \in B, c \in C\} = ((a,b),c) = (a,(b,c))$
Genauer: $\exists$ Bijektion $\Phi : (A \times B) \times C \to A \times (B \times C)$

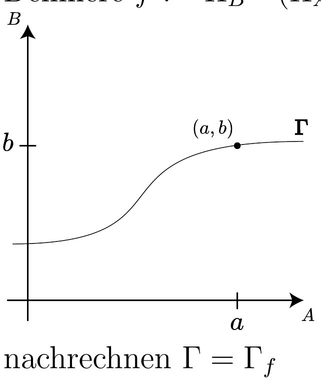
**Definition 4.2.2** (Graph einer Abbildung)**.** Geg: $f : A \to B$ Funktion
$\Gamma := \Gamma_f := \{(a,b) \in A \times B : b = f(a)\} \subset A \times B$





$P \subset A \times B$ ist der Graph einer Funktion genau dann, wenn aus $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \Gamma$ folgt $b_1 = b_2$. (und $\forall a \in A \exists b \in B : (a, b) \in \Gamma$)

**Satz 4.2.3.** $\Gamma \subset A \times B$ ist genau dann Graph einer Abbildung $f : A \to B$, wenn die Projektion $\Pi_A|_\Gamma : \Gamma \to A$ bijektiv ist.
Notation: $g : D \to E, X \subset D$
$g|_X : X \to E, x \mapsto g(x)$

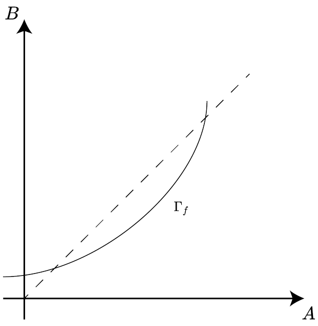
*Beweis.* Sei $\Gamma = \Gamma_f$ mit $f : A \to B$ Funktion
$\overset{(a,b)\in\Gamma_f \Leftrightarrow b=f(a)}{\Rightarrow}$ $\forall a \in A$ existiert genau ein $b \in B$ mit $f(a) = b$.
$\Rightarrow \Pi_A|_\Gamma$ ist bijektiv.
Umgekehrt: Sei $\Pi_A|_\Gamma \to A$ bijektiv.
D.h. ist $(a_j, b_j) \in \Gamma, j \in \{1, 2\}$
und $\Pi_A(a_1, b_1) = \Pi_A(a_2, b_2) \Rightarrow (a_1, b_1) = (a_2, b_2)$
$\Leftrightarrow a_1 = a_2, b_1 = b_2$
$\Rightarrow$ zu $a \in A \exists! b \in B, (a, b) \in \Gamma$.
Da $b = \Pi_B(a, b) = \Pi_B((\Pi_A|_\Gamma)^{-1}(a))$
Definiere $f := \Pi_B \circ (\Pi_A|_\Gamma)^{-1} : A \to B$ ist Funktion


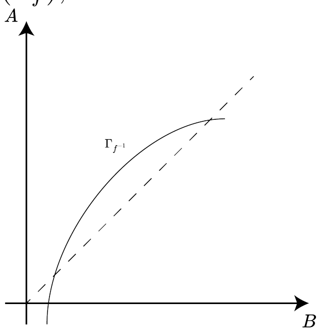
nachrechnen $\Gamma = \Gamma_f$ □

*Bemerkung.* In Satz 3 gilt $f = \Pi_B \circ (\Pi_A|_\Gamma)^{-1}$

*Beispiel.* Ist $f : A \to B$ bijektiv
$b = f(a), \quad f^{-1}(b) = a$

Dann gilt: $\Gamma_f^{-1} = \{(b, f^{-1}(b)) | b \in B\}$
$= \{(f(a), a) : a \in A\} = S(\Gamma_f), S : A \times B \to B \times A$ (swap), $(a, b) \mapsto (b, a)$.




$\Gamma_{f^{-1}}$ = Spiegeln von $\Gamma_f$ an Winkelhalbierenden.

## 4.3 Schubfachprinzip und endliche Mengen