

# Analysis I (WS 18/19)

Pavel Zwerschke, Daniel Augustin

21. November 2018

# Inhaltsverzeichnis

<b>0</b>	<b>Organisatorisches</b>	<b>2</b>
<b>1</b>	<b>Was ist Analysis?</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Etwas Logik</b>	<b>3</b>
2.1	Grundbegriffe . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Die reellen Zahlen</b>	<b>8</b>
3.1	Körperaxiome (engl. field) . . . . .	8
3.2	Die Anordnungsaxiome . . . . .	10
3.3	Obere und untere Schranken, Supremum und Infimum . . . .	14
3.4	Das Vollständigkeitsaxiom . . . . .	16
3.5	Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Funktionen und Abbildungen</b>	<b>21</b>
4.1	Funktion als Abbildung . . . . .	21
4.2	Abbildungen als Graph . . . . .	22
4.3	Schubfachprinzip und endliche Mengen . . . . .	24
<b>5</b>		<b>33</b>
5.1	Starke Induktion und das Wohlordnungsprinzip . . . . .	33
5.2	Anwendungen . . . . .	34
<b>6</b>	<b>Existenz von Wurzeln (in <math>\mathbb{R}</math>)</b>	<b>36</b>
<b>7</b>	<b>Folgen und Konvergenz</b>	<b>38</b>
7.1	Grundlagen . . . . .	38
<b>8</b>	<b>Monotone Konvergenz</b>	<b>48</b>

## 0 Organisatorisches

### **Dozent**

Prof. Dr. Dirk Hundertmark (20.30, 2.028)

[dirk.hundertmark@kit.edu](mailto:dirk.hundertmark@kit.edu)

### **Übungsleiter**

Dr. Markus Lange (20.30, 2.030)

[markus.lange@kit.edu](mailto:markus.lange@kit.edu)

### **Übungszettel**

Ausgabe:

donnerstags unter [www.math.kit.edu/iana1/lehre/ana12018w/](http://www.math.kit.edu/iana1/lehre/ana12018w/)

Abgabe:

bis mittwochs um 19:00 in den Abgabekästen des Foyers des Mathematikgebäudes (20.30)

getackert, mit Namen, Matrikelnummer, Tutoriennummer und Deckblatt (optional) in das Fach mit der richtigen Kennzeichnung legen

Zettel dürfen zu zweit abgegeben werden

### **Übungsschein**

Jede K-Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet. Einen Übungsschein erhält wer 50% der Punkte aller K-Aufgaben erzielt.

### **Klausur**

Die Anmeldung findet über das Online-Portal statt. Die Klausur findet am 26.03.2019 von 08:00 bis 10:00 statt. Der Übungsschein ist Voraussetzung für die Teilnahme an der Klausur.

# 1 Was ist Analysis?

**Mathematik:** Streng logisches Herleiten neuer Aussagen (aus möglichst wenigen Grundannahmen, sog. Axiomen).

**Analysis:** Aus dem altgriech. „Auflösen“. Analysis hat ihre Grundlage in der „Infinitesimalrechnung“ von Leibnitz und Newton.

**Zentrale Begriffe:** Grenzwerte von Folgen und Reihen, Funktionen, stetig, differenzierbar, integrieren, Differential- und Integralrechnung, Differentialgleichungen (Newton, Maxwell, Schrödinger), unendlich dimensionale Räume

*Beispiel.*  $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$

$$2S = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} + \dots$$

$$2S = 1 + S$$

$S$  entspricht der Wahrscheinlichkeit, dass irgendwann mal Kopf in einem Münzwurf kommt.

Vorsicht!

$$S = 1 + 2 + 4 + \dots$$

$$2S = 2 + 4 + 8 + \dots = -1 + 1 + 2 + 4 + \dots = -1 + S$$

$$S = -1$$

Natürlich Quatsch!

Formales Rechnen kann gefährlich sein!

- Was sind mathematische Aussagen?
- Wie macht man Beweise, wie findet man sie? (learning by doing)
- logische Zusammenhänge
- Was sind Zahlen?

## 2 Etwas Logik

Eine (mathematische) Aussage ist ein Ausdruck, der wahr oder falsch ist.

z. B.

1.  $A$  : „ $1 + 1 = 2$ .“ (auch „ $1 + 1 = 3$ “, „ $1 + 1 = 0$ “)
2.  $B$  : „Es gibt unendlich viele Primzahlen.“
3.  $C$  : „Es gibt unendlich viele Primzahlen  $p$ , für die  $p + 2$  auch eine Primzahl ist.“ (Primzahlzwillingsvermutung)
4.  $D$  : „Die Gleichung  $m\ddot{x} = F$  hat, gegeben  $\dot{x}(0) = v_0, x(0) = x_0$ , immer genau eine Lösung.“ (Lösung der Newtonschen Gleichung)

5.  $E$  : „Jede gerade natürliche Zahl größer als 2 ist die Summe zweier Primzahlen.“ (Goldbachsche Vermutung)
6.  $F$  : „Morgen ist das Wetter schön.“
7.  $G$  : „Ein einzelnes Atom im Vakuum mit der Kernladungszahl  $Z$  kann höchstens  $Z + 1$  Elektronen binden.“ (Ionisierungsvermutung, es ist noch nicht einmal bekannt, ob es eine Zahl  $Z$  gibt, sodass höchstens  $Z + 1$  Elektronen gebunden werden.)
8.  $H(k, m, n)$  : „Es gilt:  $k^2 + m^2 = n^2$ .“ (z. B.  $H(3, 4, 5)$  ist wahr.)

Gegeben für natürliche Zahlen  $n$ , Aussagen  $A(n)$ , dann gilt:  
Für jede nat. Zahl  $n$  ist  $A(n)$  wahr, genau dann, wenn

1.  $A(1)$  ist wahr.
2. Unter der Annahme, dass  $A(n)$  wahr ist, folgt, dass  $A(n + 1)$  wahr ist.

*Beispiel.*  $A(n) : 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ .

*Beweis.* Vollständige Induktion

Induktionsanfang:

$$1 = \frac{1(1+1)}{2} \checkmark$$

Induktionsschluss:

Wir nehmen an, dass  $A(n)$  wahr ist (für  $n \in \mathbb{N}$ )

D. h. Induktionsannahme:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Dann folgt:

$$\begin{aligned} \underbrace{1 + 2 + \dots + n}_{= \frac{n(n+1)}{2}} + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} \end{aligned}$$

□

*Bemerkung.* Gaußscher Trick:

1)

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + n = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1$$

$$2S = \underbrace{(n+1) + (n+1) + \dots + (n+1)}_{n\text{-mal}} \Leftrightarrow S = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2)

$$S_n = 0 + 1 + 2 + \dots + n$$

= Anzahl der Punkte in

$\approx$  Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks  $= \frac{1}{2} * n * n$ .

Also: Ansatz („geschicktes Raten“, „scientific guess“, englisch: ansatz):

$$S_n = \underbrace{a_2 n^2 + a_1 n + a_0}_{\text{Polynom 2. Grades in } n}$$

$$a_2 = \frac{1}{2}$$

Wie bekommt man  $a_0, a_1, (a_2)$ ?  $n = 0 : S_0 = 0 = a_2 * 0^2 + a_1 * 0 + a_0 \Rightarrow a_0 = 0$ .

$$n = 1 : S_1 = 1 = a_2 * 1^2 + a_1 * 1^2 = a_2 + a_1 = \frac{1}{2} + a_1.$$

$$\text{also: } a_1 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \text{Raten: } S_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

## 2.1 Grundbegriffe

Aussagen: Notation

:	„so, dass gilt“
$\exists$	„es gibt mindestens ein“, „es existiert“
$\forall$	„für alle“
$\Rightarrow$	„impliziert“ ( $A \Rightarrow B$ „aus $A$ folgt $B$ “)
$\Leftrightarrow$	„genau dann, wenn“
$\neg A$	nicht $A$
$A \wedge B$	$A$ und $B$
$A \vee B$	$A$ oder $B$
$A := B$	$A$ ist per Definition gleich $B$

**Satz 2.1.1.** Folgende Aussagen sind allein aus logischen Gründen immer

$$\neg(\neg A) \Leftrightarrow A \quad \text{Gesetz der doppelten Verneinung}$$

$$A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A \quad \text{Kontraposition}$$

wahr.  $A \Rightarrow B \Leftrightarrow (\neg(A \wedge \neg B))$  beim Widerspruchsbeweis

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B) \quad \text{de Morgan}$$

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B) \quad \text{de Morgan}$$

*Bemerkung.*  $A \Rightarrow B \Leftrightarrow B$  ist mindestens so wahr wie  $A \Leftrightarrow A$  ist mindestens so falsch wie  $B \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$ .

$$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B \wedge B \Rightarrow A).$$

*Beispiel.*  $n \in \mathbb{N}$  ist gerade, falls  $k \in \mathbb{N}$  existiert mit  $n = 2k$ .

$n \in \mathbb{N}$  ist ungerade, falls  $\exists k \in \mathbb{N}_0 : \forall n = 2k + 1$ .

Dann gilt:  $n$  ist gerade  $\Leftrightarrow n^2$  ist gerade.

*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “:  $n$  gerade  $\Rightarrow n = 2k$ , für  $k \in \mathbb{N}$

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2) \text{ ist gerade.}$$

Umgekehrt müssen wir zeigen:

„ $\Leftarrow$ “:  $n^2$  gerade  $\Rightarrow n$  gerade

Kontraposition:  $n$  ungerade  $\Rightarrow n^2$  ungerade

Also sei  $n = 2k+1, k \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = \underbrace{2(2k^2+2k)}_{\text{gerade}} + 1 \Rightarrow$

$n^2$  ist ungerade. □

### **Mengen** (nach Cantor)

informell: Eine Menge ist eine Sammlung von Objekten (Elemente) zu einem neuen Objekt.

Vorsicht: Russells Paradox

genaue Definition von Zermelo-Fraenkel Axiome ( $\rightarrow$  Logik Mengenlehre)

$a \in M$  :  $a$  ist Element von  $M$

$a \notin M$  :  $a$  ist kein Element von  $M$

z.B.:

$$M = \{1, 4\}$$

$$1 \in M$$

$$5 \notin M$$

Angabe von Mengen durch

- Auflistung  
 $M = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_{17}\}$
- Eigenschaft  
 $M = \{a | a \text{ hat Eigenschaft } E\}$

z.B.:

- $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$
- $\mathbb{Z} := \{x | x \in \mathbb{N} \vee x \in -\mathbb{N} \vee x = 0\}$
- $-\mathbb{N} := \{-n | n \in \mathbb{N}\}$

**Definition 2.1.2.** Sei  $M$  eine Menge und  $A(x)$  Aussagen mit  $x \in M$

$\forall x \in M : A(x)$  ist wahr, falls alle  $A(x)$  wahr sind.

$\exists x \in M : A(x)$  ist wahr, falls mindestens eine Aussage  $A(x)$  wahr ist.

Achtung: Zusammensetzen: Reihenfolge ist wichtig!

*Beispiel.* Töpfe := Menge der Töpfe

Deckel := Menge der Deckel

$A : \forall T \in \text{Töpfe} \exists D \in \text{Deckel} : D \text{ passt auf } T$

(Für jeden Topf gibt es einen Deckel, der passt)

$B : \exists D \in \text{Deckel} \forall T \in \text{Töpfe} : D \text{ passt auf } T$

(Es existiert mindestens ein Deckel, der auf alle Töpfe passt)

Negation:

$$\begin{aligned}\neg(\forall x \in M : A(x)) \\ \Leftrightarrow \exists x \in M : \neg A(x) \\ \neg(\exists x \in M : A(x)) \\ \Leftrightarrow \forall x \in M : \neg A(x)\end{aligned}$$

**Definition 2.1.3** (wichtige Mengen). Seien  $M, N$  Mengen.

$$\begin{aligned}\emptyset &:= \text{die Menge ohne Elemente (leere Menge)} \\ M \cap N &:= \{x | x \in M \wedge x \in N\} \text{ (Schnitt)} \\ M \cup N &:= \{x | x \in M \vee x \in N\} \text{ (Vereinigung)} \\ M \setminus N &:= \{x | x \in M \wedge x \notin N\} \text{ (Differenzmenge)} \\ \mathcal{P}(M) &:= \{A | A \subset M\} \text{ die Menge aller Teilmengen von } M \text{ (Potenzmenge)}\end{aligned}$$

Sei  $I$  eine Menge und für  $i \in I$  eine Menge  $M_i$ .

$$\begin{aligned}\bigcap_{i \in I} M_i &:= \{x | \forall i \in I : x \in M_i\}. \\ \bigcup_{i \in I} M_i &:= \{x | \exists i \in I : x \in M_i\}.\end{aligned}$$

Ist  $M \cap N = \emptyset$ , so heißen  $M$  und  $N$  divergent.

$M \subset N$ , falls  $\forall x \in M : x \in N$  ( $M$  Teilmenge von  $N$ ).

$M = N$ , falls  $M$  und  $N$  dieselben Elemente haben.

Insbesondere ist  $(M = N) \Leftrightarrow M \subset N \wedge N \subset M$ .

$M \subsetneq N : M \subset N \wedge M \neq N$  ( $M$  echte Teilmenge von  $N$ ).

*Beispiel.*  $\emptyset \subset M$

$$M = \{1, 2\} \Rightarrow \mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

1. Eigenschaften von „ $\subset$ “

- (a)  $\emptyset \subset M$
- (b)  $M \subset M$
- (c)  $M = N \Leftrightarrow M \subset N \wedge N \subset M$
- (d)  $A \subset B \wedge B \subset C \Leftrightarrow A \subset C$

2. Assoziativität

- (a)  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- (b)  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$



3. Kommutativität

(a)  $A \cup B = B \cup A$

(b)  $A \cap B = B \cap A$

4. Distributivgesetz

(a)  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(b)  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

### 3 Die reellen Zahlen

#### 3.1 Körperaxiome (engl. field)

$\mathbb{K}$  : Menge mit zwei Operationen „+“ und „ $\cdot$ “.

$\forall a, b \in \mathbb{K}$  ist  $a + b \in \mathbb{K} \wedge a \cdot b \in \mathbb{K}$  erklärt sollen kompatibel sein.

**Definition 3.1.1** (Körperaxiome). In einem Körper gelten diese Axiome:

1. Kommutativität:  $\forall a, b \in \mathbb{K} : a + b = b + a, a \cdot b = b \cdot a$

2. Assoziativität:  $\forall a, b, c \in \mathbb{K} : a + (b + c) = (a + b) + c, a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

3. Existenz des neutralen Elements:

$\exists 0 \in \mathbb{K} : a + 0 = 0 + a = a \forall a \in \mathbb{K}$

$\exists 1 \in \mathbb{K} : a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \forall a \in \mathbb{K}$

4. Existenz eines inversen Elements:

$\forall a \in \mathbb{K} \exists -a \in \mathbb{K} : a + (-a) = 0$

$\forall a \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \exists \frac{1}{a} \in \mathbb{K} : a \cdot \frac{1}{a} = 1$

Es gilt:  $0 \neq 1$ .

5. Distributivgesetz:  $\forall a, b, c \in \mathbb{K} : a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

*Beispiel.*  $\mathbb{Q} = \frac{m}{n}, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}$  ist ein Körper.

$\mathbb{F}_2 : \begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}$  ist ein Körper.

*Bemerkung.* .

1. Somit ist ein Körper  $\mathbb{K}$  mit „+“ eine kommutative Gruppe und  $\mathbb{K} \setminus \{0\}$  mit „ $\cdot$ “ auch eine kommutative Gruppe.

2. Die neutralen Elemente sind eindeutig bestimmt.

z.B.: angenommen,  $0_1$  und  $0_2$  sind neutrale Elemente mit „+“.

$$\Rightarrow 0_1 \stackrel{(3)}{=} 0_1 + 0_2 \stackrel{(1)}{=} 0_2 + 0_1 \stackrel{(2)}{=} 0_2$$

analog für Multiplikation

**Definition 3.1.2.** Zu  $a \in \mathbb{K}$  ist  $-a$  das Inverse bzgl. der Addition  
schreibe  $a - b := a + (-b)$ .

Zu  $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$  sei  $a^{-1}$  das Inverse bzgl. der Multiplikation.

Ist  $b \neq 0$ , so schreiben wir  $\frac{a}{b} := a \cdot b^{-1} = b^{-1} \cdot a$ .

schreibe  $(ab) := a \cdot b$ .

**Lemma 3.1.3** (Rechnen in einem Körper). .

1. Umformen von Gleichungen

$$\forall a, b, c \in \mathbb{K} :$$

$$\text{aus } a + b = c \text{ folgt } a = c - b$$

$$\text{aus } a \cdot b = c, b \neq 0 \text{ folgt } a = \frac{c}{b}$$

2. Allgemeine Rechenregeln

$$-(-a) = a$$

$$(a^{-1})^{-1} = a, \text{ falls } a \neq 0$$

$$-(a + b) = (-a) + (-b)$$

$$(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$$

$$a \cdot 0 = 0$$

$$a(-b) = -(ab), (-a)(-b) = ab$$

$$a(b - c) = ab - ac$$

$$ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0 \text{ (Nullteilerfreiheit)}$$

*Beweis.*  $0 = a + (-a) = (-a) + a$

$$\Rightarrow -(-a) = a$$

$$(a + b) + ((-a) + (-b)) = (a + (-a)) + (b + (-b)) = 0 + 0 = 0$$

$$\Rightarrow -(a + b) = (-a) + (-b)$$

benutzen wir auch Eindeutigkeit des inversen Elements

$$\text{analog zeigt man } (a^{-1})^{-1} = a \text{ und } (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = a^{-1}b^{-1}$$

$$\text{z.B.: } (ab) \cdot (b^{-1}a^{-1}) = a(b \cdot b^{-1})a^{-1} = (a \cdot 1)a^{-1} = a \cdot a^{-1} = 1$$

$$\text{Ferner } a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0 = a \cdot 0 + 0$$

$$\Rightarrow a \cdot 0 = a \cdot 0 - a \cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow a \cdot b + a \cdot (-b) = a \cdot (b + (-b)) = a \cdot 0 = 0$$

$$\stackrel{\text{Eind. d. Inv.}}{\Rightarrow} -ab = a(-b)$$

$$\text{Somit auch } (-a)(-b) = -((-a)b) = -(b(-a)) = (-ba) = -(-ab) = ab$$

$$\text{und } a(b - c) = a(b + (-c)) = ab + a(-c) = ab + (-ac) = ab - ac.$$

ist  $ab = 0$  und  $a \neq 0 \Rightarrow 0 = (ab)\frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot (ab) = (\frac{1}{a} \cdot a)b = 1b = b$   
 also ist  $b = 0$ . □

**Satz 3.1.4** (Bruchrechnen).  $a, b, c, d \in \mathbb{K}, c \neq 0, d \neq 0$ .  
 Dann gilt

1.  $\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ad+bc}{cd}$
2.  $\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{ab}{cd}$
3.  $\frac{a/c}{b/d} = \frac{ad}{bc}$ , falls auch  $b \neq 0$  ist.

*Beweis.* Übung □

*Beispiel.* rationale Zahlen sind ein Körper  
 schreiben  $(\mathbb{K}, +, \cdot)$  für einen Körper

## 3.2 Die Anordnungsaxiome

**Definition 3.2.1.** Sei  $\mathbb{K}$  (genauer  $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ) ein Körper. Dann heißt  $>$  eine Anordnung falls

1. Für jedes  $a \in \mathbb{K}$  gilt genau eine der Aussagen  $a > 0, a = 0, -a > 0$   
 (wenn  $a \in \mathbb{K}$ , mit  $a > 0$  positiv)
2. Aus  $a > 0$  und  $b > 0$  folgt  
 $a + b > 0$  und  $a \cdot b > 0$

Wir nennen  $(\mathbb{K}, +, \cdot, >)$  einen angeordneten Körper.

*Bemerkung.* Statt  $-a > 0$  schreiben wir  $a < 0$   
 Statt  $a - b > 0$  schreiben wir  $a > b$   
 Bild:



Statt  $a - b < 0$  schreiben wir  $a < b$ .  
 $a \geq b$ , falls  $a > b \vee a = b$   
 $a \leq b$ , falls  $a < b \vee a = b$ .

**Satz 3.2.2.** Sei  $(\mathbb{K}, +, \cdot, >)$  ein angeordneter Körper. Dann gilt

1. für  $a, b \in \mathbb{K}$  gilt genau eine der Relationen  $a > b, a = b, a < b$  (Trichotomie)
2. Aus  $a > b, b > c$  folgt  $a > c$  (Transitivität)

3. Aus  $a > b$  folgt:

$$\begin{cases} a + c > b + c, \forall c \in \mathbb{K} \\ ac > bc, \text{ falls } c > 0 \\ ac < bc, \text{ falls } c < 0 \end{cases}.$$

4. Aus  $a > b$  und  $c > d$  folgt:

$$\begin{cases} a + c > b + d \\ ac > bd, \text{ falls } b, d > 0 \end{cases}$$

5. Für  $a \neq 0$  ist  $a^2 > 0$ .

6. Aus  $a > 0$  folgt  $\frac{1}{a} > 0$ .

7. Aus  $a > b > 0$  folgt  $0 < \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ .

8. Aus  $a > b, 0 < \lambda < 1$  folgt  $b < \lambda b + (1 - \lambda)a < a$ .

*Bemerkung.* Auf  $\mathbb{F}_2$  kann es keine Anordnung geben!

*Beweis.* 1. Direkt aus (A.1) und Def. von  $a > b$ .

$$2. \ a - c = \underbrace{(a - b)}_{>0} + \underbrace{(b - c)}_{>0} \stackrel{(A.2)}{>} 0.$$

$$3. \ (a + c) - (b + c) = a - b > 0$$

$$ac - bc = \underbrace{(a - b)}_{>0} \cdot c \stackrel{(A.2)}{>} 0, \text{ falls } c > 0$$

Ist  $c < 0$ , so ist  $-c > 0$

$$\Rightarrow bc - ac = \underbrace{(a - b)}_{>0} \cdot \underbrace{(-c)}_{>0} \stackrel{(A.2)}{>} 0$$

$$ac - bd = ac - bc + bc - bd = \underbrace{(a - b)}_{>0} \cdot \underbrace{c}_{>0} + \underbrace{b}_{>0} \cdot \underbrace{(c - d)}_{>0} \stackrel{(A.2)}{>} 0.$$

$$4. \ (a + c) - (b + d) = (a - b) + (c - d) > 0 \text{ nach (A.2)}$$

$$ac - bd = ac - bc + bc - bd = (a - b)c + b(c - d)$$

$$\text{Ist } b = 0 \Rightarrow a > b = 0 \Rightarrow ac > 0 = bd$$

$$\text{Ist } b < 0 \Rightarrow (-b)d > 0 \Rightarrow -bd > 0 \Rightarrow bd < 0 \Rightarrow ac < -bd \Rightarrow$$

$$\underbrace{ac}_{>0} + \underbrace{(-bd)}_{>0} \stackrel{(A.2)}{>} 0.$$

5. Fallunterscheidung:

$$\text{ist } a > 0 \Rightarrow a^2 = a \cdot a > 0 \text{ (A.2)}$$

$$\text{ist } a < 0 \Rightarrow a^2 = (-a) \cdot (-a) > 0 \text{ (A.2)}$$

6. sei  $a > 0$  :

$$\stackrel{5.}{\Rightarrow} \left(\frac{1}{a}\right) > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} = \underbrace{\left(\frac{1}{a}\right)^2}_{>0} \cdot \underbrace{a}_{>0} > 0.$$

7. aus  $a > b > 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{1}{b}(a - b) \frac{1}{a} > 0.$$

8.  $a > b, 0 > \lambda > 1 \Rightarrow \lambda > 0 \wedge 1 - \lambda > 0$

$$b = \lambda b + \underbrace{(1 - \lambda)b}_{< (1 - \lambda)a}$$

$$< \lambda b + (1 - \lambda)a < \lambda a + (1 - \lambda)a = a$$

$$\Rightarrow b < \lambda b + (1 - \lambda)a = a.$$

$$\text{Insbesondere } \lambda = 1/2 \Rightarrow b < 1/2b + 1/2a = \frac{a+b}{2} < a.$$

□

**Definition 3.2.3** (Betrag). Sei  $(\mathbb{K}, +, \cdot, >)$  ein angeordneter Körper.

Betrag von  $a \in \mathbb{K}$  ist gegeben durch

$$|a| := \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq 0 \\ -a, & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

auch noch  $a, b \in \mathbb{K}$

$$\max(a, b) := \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq b \\ b, & \text{falls } a < b \end{cases}$$

$$\min(a, b) := \begin{cases} a, & \text{falls } a \leq b \\ b, & \text{falls } a > b \end{cases}$$

*Bemerkung.* .

1.  $a, b \in \mathbb{K}$

$$|a - b| = \text{Abstand von } a \text{ zu } b.$$

$$|a| = |a - 0| = \text{Abstand von } a \text{ zu } 0.$$

2.  $|a| = \max(a, -a).$

**Satz 3.2.4.**  $(\mathbb{K}, +, \cdot, >)$  ang. Körper

Dann gilt  $\forall a, b \in \mathbb{K}$  :

1.  $|-a| = |a|$  und  $a \leq |a|$

2.  $|a| \geq 0$  und  $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$
3.  $|ab| = |a| |b|$
4.  $|a + b| \leq |a| + |b|$  (Dreiecksungleichung)
5.  $||a| - |b|| \leq |a - b|$  (umgekehrte Dreiecksungleichung)

*Beweis.* .

$$1. \quad |-a| = \begin{cases} -a, & -a \geq 0 \\ -(-a), & -a \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} -a, & a \leq 0 \\ a, & a \geq 0 \end{cases} = |a|$$

$$|a| - a = \begin{cases} a - a, & a \geq 0 \\ -a - a, & a < 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & a \geq 0 \\ -(a + a), & a < 0 \end{cases} \geq 0.$$

alternativ:  $a \leq \max(a, -a) = |a|$ .

2.

3. Hier ändern sich die linke und rechte Seite nicht, wenn man  $a$  bzw.  $b$  durch  $-a$  bzw.  $-b$  ersetzt.

Also, o.B.d.A. können wir annehmen, dass  $a, b \geq 0$ .

$$\Rightarrow |ab| = ab = |a| |b|.$$

4.  $\stackrel{\text{Satz 1 (5)}}{\Rightarrow} |a + b|^2 = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = |a|^2 + 2 \underbrace{ab}_{\geq 0} \leq |a|^2 + |ab| + |b|^2$   
 $\stackrel{(2)}{\leq} |a|^2 + 2|ab| + |b|^2$   
 $\stackrel{(3)}{|a|^2 + 2|a||b| + |b|^2}.$   
 Also  $(a + b)^2 \leq (|a| + |b|)^2$   
 $\stackrel{\text{H.A.}}{\Rightarrow} |a + b| \leq |a| + |b|.$   
 H.A. aus  $|c|^2 \leq |d|^2$  folgt  $|c| \leq |d|$  (Kontraposition).

5.  $|a| = |a - b + b| = |(a - b) + b| \stackrel{(4)}{\leq} |a - b| + |b|$   
 $|a| - |b| \leq |a - b| \quad \forall a, b \in \mathbb{K}.$   
 Jetzt: Symmetrieargument. (Vertausch von  $a$  und  $b$ )  
 $\Rightarrow |b| - |a| \leq |b - a| = |(-b - a)| = |a - b|$   
 also  $|b| - |a| \leq |a - b|$   
 $|a| - |b| \leq |a - b|$   
 $||a| - |b|| = \max(|a| - |b|, -(|a| - |b|)) = \max(|a| - |b|, |b| - |a|) \leq |a - b|.$

□

*Beispiel.* Sei  $a, b \in \mathbb{K}$  ein angeordneter Körper. Aus  $|b - a| \leq b/2, 2 = 1 + 1$  folgt  $a \geq b/2$  Bild:

*Beweis.*  $b - a \leq |b - a| \leq b/2 \Rightarrow a \geq b - b/2 = b/2$ . □

**Korollar 3.2.5** („geometrisch-arithmetische Ungleichung“). Sei  $(\mathbb{K}, +, \cdot, >)$  ein ang. Körper,  $a, b \in \mathbb{K}$

$$\Rightarrow ab \leq \left( \frac{a+b}{2} \right)^2.$$

Wenn Gleichheit gilt, so folgt  $a = b$ .

*Beweis.* In Übung □

**Fakt:**

- In jedem angeordneten Körper gilt  $0 < 1$ !
- Es gibt keine Anordnung, die  $\mathbb{F}_2$  zu einem angeordneten Körper macht. (H.A.)

### 3.3 Obere und untere Schranken, Supremum und Infimum

Notation:  $a$  ist nicht negativ, falls  $a \geq 0$ .

natürlich  $a = b \Leftrightarrow a \leq b \wedge a \geq b$ .

Im Folgenden ist  $\mathbb{K}$  immer ein angeordneter Körper.  $A, B \subset \mathbb{K}$ ,  $A, B \neq \emptyset$  und  $\gamma \in \mathbb{K}$ , so bedeutet  $A \leq \gamma : \forall a \in A : a \leq \gamma$  ( $\gamma$  ist obere Schranke für  $A$ ).

$B \geq \beta : \forall b \in B : b \geq \beta$  ( $\beta$  ist untere Schranke für  $B$ ).

Analog sind  $a < \gamma$ ,  $A > \gamma$ ,  $A < B$ , usw. definiert.

Hat  $A$  eine obere Schranke, so heißt  $A$  nach oben beschränkt. Hat  $B$  eine untere Schranke, so ist  $B$  nach unten beschränkt.  $A$  ist beschränkt, falls es nach oben und unten beschränkt ist.

Ist  $A \leq \alpha$  und  $\alpha \in A$ , so heißt  $\alpha$  größtes (maximales) Element von  $A$ , schreibe  $\alpha = \max A$  (Maximum).

Ist  $B \geq \beta$  und  $\beta \in B$ , so heißt  $\beta$  kleinstes (minimales) Element von  $B$ , schreibe  $\beta = \min B$  (Minimum).

Man zeige, dass  $\max$  und  $\min$  eindeutig sind, sofern sie existieren.

$[0, 1) := \{x \in \mathbb{K} \mid 0 \leq x < 1\}$  hat kein Maximum bzw. kein maximales Element.

**Definition 3.3.1.** Sei  $A \subset \mathbb{K}$ ,  $A \neq \emptyset$ . Dann ist  $\gamma \in \mathbb{K}$  die kleinste obere Schranke (oder Supremum), falls  $A \leq \gamma$  und aus  $A \leq n$  folgt  $\gamma \leq n$ .

Schreibe  $\gamma = \sup A = \sup(A)$ .

Analog:  $\beta$  ist die größte untere Schranke von  $A$  (Infimum), falls  $\beta \leq A$  und aus  $\eta \leq A$  folgt  $\eta \leq \beta$

Schreibe  $\beta = \inf A = \inf(A)$ .

*Beispiel.*  $P := \{x \in \mathbb{K} | x > 0\}$

$\Rightarrow$

1.  $P$  ist nicht nach oben beschränkt.
2.  $P$  hat kein Minimum, aber  $\inf P = 0$ .

*Beweis.* .

1. Ang.  $\gamma$  ist obere Schranke für  $P$ . D.h.  $\forall x \in P$  folgt  $0 < x \leq \gamma \Rightarrow \gamma > 0 \Rightarrow \gamma \in P \Rightarrow 0 < \gamma = \gamma + 0 < \gamma + 1 \in P \Rightarrow \gamma + 1 \in P$  und  $\gamma + 1 > \gamma$  ist nicht obere Schranke für  $P$  (Widerspruch!)  $\nexists$
2.  $2 := 1 + 1 > 1 > 0$   
 Ang.  $\min P := \eta$  existiert.  $\Rightarrow \eta \in P, \eta > 0, \tilde{x} := \frac{\eta}{2} = \frac{0+\eta}{2} < \eta$ .  
 Es gilt  $0 = \inf P$ .  
 Sicherlich  $0 < P$ , also ist 0 eine untere Schranke für  $P$ .  
 0 ist die größte untere Schranke, denn nach obigem Argument ist jede Zahl  $> 0$  keine untere Schranke für  $P$ !

□

**Lemma 3.3.2.**  $A \subset \mathbb{K}, A \neq \emptyset$ .

1.  $\alpha := \sup A \Leftrightarrow \alpha \geq A \wedge \forall \varepsilon > 0 \exists a \in A : \alpha - \varepsilon < a$ .
2.  $\beta := \inf B \Leftrightarrow \beta \leq B \wedge \forall \varepsilon > 0 \exists b \in B : b < \beta + \varepsilon$ .

*Beweis.* .

1. „ $\Rightarrow$ “: Sei  $\alpha = \sup A$ . Also  $\alpha$  ist die kleinste obere Schranke für  $A$ . D.h.  $\alpha \geq A$  und  $\forall \varepsilon > 0$  ist  $\varepsilon > 0 < \alpha$ , also ist  $\alpha - \varepsilon$  keine obere Schranke für  $A$ . D.h.  $\exists a \in A : \alpha - \varepsilon < a$ .  
 „ $\Leftarrow$ “: Sei  $\alpha \geq A \wedge \forall \varepsilon > 0 \exists a \in A : \alpha - \varepsilon < a$ . Also ist  $\alpha$  eine obere Schranke für  $A$ . Sei  $\tilde{\alpha} < \alpha$ .  
 Setze  $\varepsilon := \alpha - \tilde{\alpha} > 0 \Rightarrow \exists a \in A : \tilde{\alpha} = \alpha - \varepsilon < a \Rightarrow \tilde{\alpha}$  ist keine obere Schranke für  $a$ .  $\Rightarrow \alpha$  ist die kleinste obere Schranke.
2.  $A := -B = \{-b | b \in B\}$ . Beachte:  $\sup A = \sup(-B) = -\inf B$ .

□



### 3.4 Das Vollständigkeitsaxiom

**Definition 3.4.1.** Ein angeordneter Körper  $(\mathbb{K}, +, \cdot, >)$  erfüllt das Vollständigkeitsaxiom, falls

Jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge hat ein Supremum.

Solch einen Körper nennt man ordnungsvollständig.  $\mathbb{R}$ , der Körper der reellen Zahlen, ist der ordnungsvollständige Körper. (Im Wesentlichen gibt es nur einen!)

$$\mathbb{Q}; A := \{r \in \mathbb{Q} | r^2 < 2\}$$

Notation:  $a, b \in \mathbb{R} \quad a < b$

$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$  abgeschlossenes Intervall

$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$  offenes Intervall

$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$  nach rechts halboffenes Intervall

$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$  nach links halboffenes Intervall

Intervalllänge:  $b - a$

unbeschränkte Intervalle:

$(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} | x \leq a\}$

$[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} | x \geq a\}$

$(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} | x < a\}$

$(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} | x > a\}.$

### 3.5 Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$

(als Teilmenge von  $\mathbb{R}$ )

$n$  natürliche Zahl,  $n = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n\text{-mal}}$  (zirkulär  $\neq$ )

**Definition 3.5.1.** Eine Teilmenge  $M \subset \mathbb{R}$  heißt induktiv, falls

1.  $1 \in M$

2. Aus  $x \in M$  folgt  $x + 1 \in M$

*Beispiel.*  $[1, \infty)$  ist induktiv.

$\mathbb{R}$  ist induktiv.

$(1, \infty)$  ist nicht induktiv.

$\{1\} \cup [1 + 1, \infty)$  ist induktiv.

**Beobachtung:** Ein beliebiger Schnitt induktiver Mengen ist wieder induktiv.

$J$ : Indexmenge  $A_0$  induktiv  $\forall j \in J$

$$\Rightarrow \forall i \in J : 1 \in A_i \Rightarrow 1 \in \bigcap_{j \in J} A_j$$

$$\text{Ist } x \in \bigcap_{j \in J} A_j \Rightarrow \forall j \in J : x \in A_j \Rightarrow x+1 \in A_j \Rightarrow x+1 \in \bigcap_{j \in J} A_j.$$

**Definition 3.5.2** (natürliche Zahlen). .

$$\mathbb{N} := \left\{ x \in \mathbb{R} : \text{für jede induktive Teilmenge } M \subset \mathbb{R} \text{ gilt } x \in M \right\} := \bigcap_{M \subset \mathbb{R} \text{ ist induktiv}} M$$

*Bemerkung.*  $\mathbb{N}$  ist induktiv und  $\mathbb{N}$  ist die kleinste induktive Teilmenge von  $\mathbb{R}$ .

**Satz 3.5.3** (Archimedisches Prinzip für  $\mathbb{R}$ ). .

1.  $\mathbb{N}$  ist (in  $\mathbb{R}$ ) nicht nach oben beschränkt!
2.  $\forall x \in \mathbb{R}$  mit  $x > 0 \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < x$ .

*Beweis.* 1. Angenommen,  $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$  ist nach oben beschränkt.

$\mathbb{N} \neq \emptyset$  (da  $1 \in \mathbb{N}$ )

Vollständigkeitsaxiom  $\Rightarrow \alpha := \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$ .

Setze  $\varepsilon = 1$  in Lemma 3.3.2

$\alpha - 1$  ist nicht obere Schranke für  $\mathbb{N}$ .

$\exists n \in \mathbb{N} : n > \alpha - 1$

$\Rightarrow n + 1 > \alpha \in \mathbb{N}$  zu  $\alpha$  ist obere Schranke von  $\mathbb{N}$ .

$$2. \text{ Sei } x > 0 \xrightarrow{\text{Satz 3.2.1 (6)}} \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : n > \frac{1}{x} \xrightarrow{\text{Satz 3.2.1 (7)}} x = \frac{1}{1/x} > \frac{1}{n}. \quad \square$$

**Satz 3.5.4** (Induktionsprinzip). Sei  $M \subset \mathbb{N}$  mit

1.  $1 \in M$
2. Ist  $x \in M \Rightarrow x + 1 \in M$

Dann ist  $M = \mathbb{N}$ .

*Beweis.*  $\Rightarrow M$  ist induktiv.  $\mathbb{N}$  kleinste induktive Teilmenge von  $\mathbb{R}$

$\Rightarrow \mathbb{N} \subset M$

$M \subset \mathbb{N} \wedge \mathbb{N} \subset M \Leftrightarrow M = \mathbb{N}. \quad \square$

**Korollar 3.5.5** (Vollständige Induktion). Für  $n \in \mathbb{N}$  seien  $A(n)$  Aussagen. Es gelte:

1.  $A(1)$  ist wahr.

2. aus  $A(n)$  ist wahr folgt  $A(n+1)$  ist wahr.

*Beweis.* Definiere  $M := \{n \in \mathbb{N} | A(n) \text{ ist wahr}\} \subset \mathbb{N}$ .

1.  $\Rightarrow 1 \in M$ , da  $A(1)$  wahr ist

2.  $\Rightarrow$  sei  $n \in M$ , d.h.  $A(n)$  ist wahr  $\Rightarrow A(n+1)$  ist wahr, d.h.  $n+1 \in M$ .

Ind.prinzip Satz 4  $\Rightarrow M = \mathbb{N}$ , also sind alle  $A(n)$  wahr!

□

Notation: Induktive Definition von Summen und Produkten.

$a_1 + a_2 + \dots + a_n$  vage ...

**Summe:**

$$\sum_{k=1}^1 a_k := a_1, (n=1), \sum_{k=1}^{n+1} a_k := \left( \sum_{k=1}^n a_k \right) + a_{n+1}, n \in \mathbb{N}$$

Allgemein: untere Grenze  $k = m$ , obere Grenze  $k = n$ , Laufindex kann verschoben werden.

z.B.:  $k = j + 1$

$$\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{j=m-1}^{n-1} a_{j+1} = \dots = \sum_{l=0}^{n-m} a_{l+m}$$

Ist  $m > n$ , definieren  $\sum_{k=m}^{n-m} a_k := 0$  (leere Summe)

**Produkt:**

$$\prod_{k=1}^1 a_k := a_1, \prod_{k=1}^{n+1} a_k := \left( \prod_{k=1}^n a_k \right) \cdot a_{n+1}, n \in \mathbb{N}$$

Ähnlich  $\prod_{k=m}^n a_k$ , setzen für  $m > n$   $\prod_{k=m}^n a_k := 1$  (leeres Produkt)

z.B.

$$a \in \mathbb{R}, a^n = \prod_{k=1}^n a, \text{ d.h. } a^1 = a, a^{n+1} = a^n \cdot a, n \in \mathbb{N} \text{ (induktive Definition)}$$

Rechenregeln gelten z.B.

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k, b_j \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, n$$

$$c \in \mathbb{R}, \sum_{k=1}^n (c \cdot a_k) = c \cdot \sum_{k=1}^n a_k$$

**Satz 3.5.6** (Bernoullische Ungleichung).

$$x \in \mathbb{R}, x \geq -1, n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$$

gilt  $(1+x)^n \geq 1 + nx$  ( $\forall n \in \mathbb{N}, x \geq -1$ )

mit „ $>$ “, falls  $n > 1, x \neq 0$

$$(\forall n \in \mathbb{N}, x \geq -1) (1+x)^n \geq 1 + nx$$

*Beweis.* Vollständige Induktion:

Induktionsanfang:

$$n = 0 : (1+x)^0 = 1 = 1 + 0x \checkmark$$

$$n = 1 : (1+x)^1 = 1 + x = 1 + 1x \checkmark$$

Induktionsschritt: Induktionsvoraussetzung: es gelte für ein festes, aber beliebiges  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned} (1+x)^n &\geq 1 + nx \\ (1+x)^{n+1} &= \underbrace{(1+x)^n}_{\geq 1+nx} \cdot \underbrace{(1+x)}_{>0} \geq (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2 \\ &= \begin{cases} \geq 1 + (n+1)x, & x > -1 \\ > 1 + (n+1)x, & x > -1, x \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

□

**Satz 3.5.7** (geometrische Summe). Sei  $x \neq 1$ , dann ist

$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

*Beweis.* Vollständige Induktion:

IA:

$$n = 0 : \sum_{k=0}^0 x^k = x^0 = 1 = \frac{1-0}{1-0} \checkmark$$

$$n = 1 : \sum_{k=0}^1 x^k = 1 + x = \frac{1-x}{1-x}(1+x) = \frac{1-x^2}{1-x} \checkmark$$

IS:

IV: Es gelte für ein festes, aber beliebiges  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \sum_{k=0}^n x^k + x^{n+1} \stackrel{\text{IV}}{=} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} + x^{n+1} \\
&= \frac{1 - x^{n+1} + (1 - x)x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1 - x^{n+2}}{1 - x}.
\end{aligned} \tag{1}$$

□

*Beweis.* ohne vollständige Induktion:

$$\begin{aligned}
S_n &:= \sum_{k=0}^n x^k \\
x \cdot S_n &= \sum_{k=0}^n x^k = \sum_{k=0}^n x^{k+1} = \sum_{j=1}^{n+1} x^j, \\
\Rightarrow (1 - x)S_n &= S_n - xS_n = \sum_{k=0}^n x^k - \sum_{k=1}^{n+1} x^k = x^0 - x^{n+1} = 1 - x^{n+1} \\
\Rightarrow S_n &= \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}
\end{aligned}$$

□

**Satz 3.5.8** (Eigenschaften von  $\mathbb{N}$ ). Es gilt

1.  $\forall m, n \in \mathbb{N} : n + m \in \mathbb{N}$  und  $n \cdot m \in \mathbb{N}$ .
2.  $\forall n \in \mathbb{N} : n = 1$  oder  $(n > 1 \text{ und demnach } n - 1 \in \mathbb{N})$ .
3.  $\forall m, n \in \mathbb{N} : m \leq n : n - m \in \mathbb{N}_0$ .
4.  $\forall n \in \mathbb{N}$  gibt es kein  $m \in \mathbb{N} : n < m < n + 1$ .

*Beweis.* .

1. Gegeben  $m \in \mathbb{N} : A := \{n \in \mathbb{N} | n + m \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}$

(a)  $1 \in A$ , denn  $m \in \mathbb{N} : 1 + m = m + 1 \in \mathbb{N}$ .

(b) Angenommen,  $n \in A \Rightarrow (n + 1) + m = \underbrace{n + m}_{\in \mathbb{N}} + 1 \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow n + 1 \in A$$

somit ist  $A$  induktiv, also  $\mathbb{N} \subset A \Rightarrow A = \mathbb{N}$ .

2. Definiere  $B := \{n \in \mathbb{N} | n = 1 \vee (n - 1 \in \mathbb{N} \wedge n - 1 \geq 1)\} \subset \mathbb{N}$   
Dann ist  $B$  induktiv, denn

(a)  $1 \in B, 2 = 1 + 1 \in B$

(b) Sei  $1 \neq n \in B$ , so folgt  $1 \leq n - 1$  und somit  $n = \underbrace{(n-1)}_{\in \mathbb{N}} + 1 \in \mathbb{N}$   
 $\Rightarrow n+1 \in \mathbb{N}$  und  $(n+1) - 1 = n \geq 1+1 > 1$ . Somit ist  $n+1 \in B$ .

3.  $C := \{n \in \mathbb{N} | \forall m \in \mathbb{N} \text{ mit } m \leq n \text{ ist } n - m \in \mathbb{N}_0\} \Rightarrow$

(a)  $1 \in C$ , denn ist  $m \in \mathbb{N}$  und  $m = 1$ .

folgt nach b):  $m = 1$

$\Rightarrow n - m = 1 - 1 = 0 \in \mathbb{N}_0$ .

(b) ang.  $n \in C$  und  $m \in \mathbb{N}$  mit  $m \leq n + 1$ .

Fallunterscheidung:

- $n = 1 \Rightarrow n + 1 - m = (n + 1) - 1 = n \in \mathbb{N}.$  ✓

$\Rightarrow n + 1 \in C$ .

- $n > 1$  (und  $m \leq n + 1$ )

$\stackrel{2}{\Rightarrow} m - 1 \in \mathbb{N}$  und  $m - 1 \leq (n + 1) - 1 = n$

Da  $n \in C, m - 1 \in \mathbb{N}, m - 1 \leq n \Rightarrow \underbrace{n - (m - 1)}_{=(n+1)-m} \in \mathbb{N}_0$

$\Rightarrow n + 1 \in C$ .

4. H.A.

□

## 4 Funktionen und Abbildungen

### 4.1 Funktion als Abbildung

**Definition 4.1.1.** Eine Funktion (oder Abbildung) von einer Menge  $A$  in eine Menge  $B$  ordnet jedem Element  $a \in A$  ein eindeutiges Element  $b \in B$  zu.

Wir schreiben:

$$f : A \rightarrow B, a \mapsto f(a) \quad (= b)$$

$A$ : Definitionsbereich

$B$ : Zielbereich (Target(space))

z.B.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$

Die Abbildung  $f : A \rightarrow B$  ist

injektiv	aus $f(a) = f(a'), a, a' \in A$ , folgt $a = a'$
surjektiv	$\forall b \in B \exists a \in A : b = f(a)$
bijektiv	sie ist injektiv und surjektiv

*Bemerkung.*  $f : A \rightarrow B$  injektiv  $\Leftrightarrow a, a' \in A, a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$

$f : A \rightarrow B$  ist bijektiv  $\Rightarrow \forall b \in B \exists! a \in A : f(a) = b$ .

Definiere  $f^{-1} : B \rightarrow A, b \mapsto a, a \in A : f(a) = b$  (inverse Funktion).

Ist  $f : A \rightarrow B$  nicht bijektiv. (Verallgemeinerte Inverse)

$f^{-1} : P(B) \rightarrow P(A), M \mapsto \{a \in A \mid f(a) \in M\}$

Verkettung:

gegeben:  $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$

$g \circ f : A \rightarrow C \quad g \circ f(a) := g(f(a)).$

$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$

$f : A \rightarrow B$  ist bijektiv  $\Rightarrow f^{-1} \circ f = \text{id}_A, f \circ f^{-1} = \text{id}_B$

$\text{id}_A : A \rightarrow A, a \mapsto a.$

## 4.2 Abbildungen als Graph

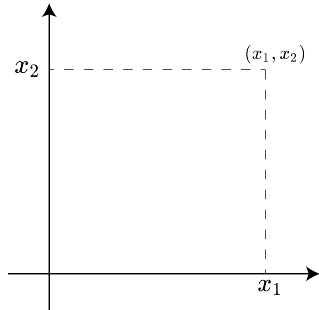
**Definition 4.2.1.** Seien  $A, B$  Mengen. Dann ist  $(a, b)$  ein sog. Tupel.  
in der Mengenlehre:  $(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}.$

Beachte: Reihenfolge ist wichtig! im Allg.  $(a, b) \neq (b, a)$

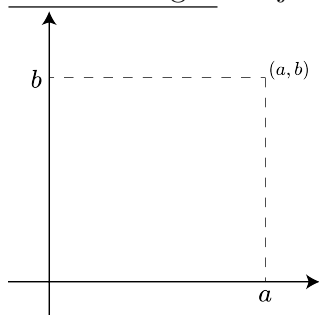
Menge  $A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$

heißt kartesisches Produkt (von  $A$  und  $B$ )

z.B.  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$



### 2. Abbildungen Projektionen



$\Pi_1 = \Pi_A : A \times B \rightarrow A, (a, b) \mapsto a$  (Projektion auf 1. Koordinate)

$\Pi_2 = \Pi_B : A \times B \rightarrow B, (a, b) \mapsto b$  (Projektion auf 2. Koordinate)

$$\Pi_A(a, b) = a$$

$$\Pi_B(a, b) = b$$

$n$ -Tupel: Mengen  $A_1, \dots, A_n, n \in \mathbb{N}$ .

$A_1 \times A_2$  wie vorhin

$A_1 \times \dots \times A_{n+1} := (A_1 \times \dots \times A_n) \times A_{n+1}, n \in \mathbb{N}$  (induktiv)

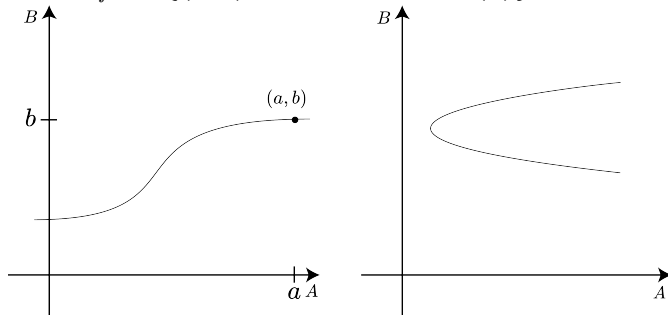
Beobachtung:

$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C) + \{(a, b, c) | a \in A, b \in B, c \in C\} = ((a, b), c) = (a, (b, c))$$

Genauer:  $\exists$  Bijektion  $\Phi : (A \times B) \times C \rightarrow A \times (B \times C)$

**Definition 4.2.2** (Graph einer Abbildung). Geg:  $f : A \rightarrow B$  Funktion

$$\Gamma := \Gamma_f := \{(a, b) \in A \times B : b = f(a)\} \subset A \times B$$



$P \subset A \times B$  ist der Graph einer Funktion genau dann, wenn aus  $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \Gamma$  folgt  $b_1 = b_2$ . (und  $\forall a \in A \exists b \in B : (a, b) \in \Gamma$ )

**Satz 4.2.3.**  $\Gamma \subset A \times B$  ist genau dann Graph einer Abbildung  $f : A \rightarrow B$ , wenn die Projektion  $\Pi_A|_\Gamma : \Gamma \rightarrow A$  bijektiv ist.

Notation:  $g : D \rightarrow E, X \subset D$

$$g|_X : X \rightarrow E, x \mapsto g(x)$$

*Beweis.* Sei  $\Gamma = \Gamma_f$  mit  $f : A \rightarrow B$  Funktion

$$(a, b) \in \Gamma_f \Leftrightarrow b = f(a) \Rightarrow \forall a \in A \text{ existiert genau ein } b \in B \text{ mit } f(a) = b.$$

$\Rightarrow \Pi_A|_\Gamma$  ist bijektiv.

Umgekehrt: Sei  $\Pi_A|_\Gamma \rightarrow A$  bijektiv.

D.h. ist  $(a_j, b_j) \in \Gamma, j \in \{1, 2\}$

$$\text{und } \Pi_A(a_1, b_1) = \Pi_A(a_2, b_2) \Rightarrow (a_1, b_1) = (a_2, b_2)$$

$$\Leftrightarrow a_1 = a_2, b_1 = b_2$$

$\Rightarrow$  zu  $a \in A \exists! b \in B, (a, b) \in \Gamma$ .

$$\text{Da } b = \Pi_B(a, b) = \Pi_B((\Pi_A|_\Gamma)^{-1}(a))$$

Definiere  $f := \Pi_B \circ (\Pi_A|_\Gamma)^{-1} : A \rightarrow B$  ist Funktion





nachrechnen  $\Gamma = \Gamma_f$

□

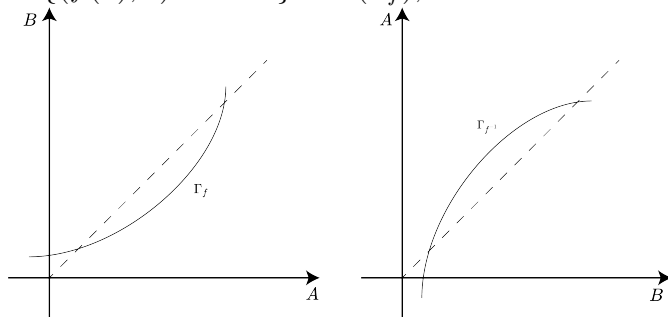
*Bemerkung.* In Satz 3 gilt  $f = \Pi_B \circ (\Pi_A|_\Gamma)^{-1}$

*Beispiel.* Ist  $f : A \rightarrow B$  bijektiv

$$b = f(a), \quad f^{-1}(b) = a$$

Dann gilt:  $\Gamma_f^{-1} = \{(b, f^{-1}(b)) | b \in B\}$

$$= \{(f(a), a) : a \in A\} = S(\Gamma_f), S : A \times B \rightarrow B \times A \text{ (swap), } (a, b) \mapsto (b, a).$$



$\Gamma_{f^{-1}}$  = Spiegeln von  $\Gamma_f$  an Winkelhalbierenden.

### 4.3 Schubfachprinzip und endliche Mengen

Notation: Sei  $n \in \mathbb{N}$ .  $[n] := \{1, \dots, n\}$  ist gegeben durch:

$$[1] = \{1, \dots, 1\} = \{1\}$$

$$[n+1] = \{1, \dots, n, n+1\} = [n] \cup \{n+1\} \text{ induktive Def. } n \in \mathbb{N}$$

$$[2] = \{1, 2\}, [3] = \{1, 2, 3\}$$

**Satz 4.3.1** (Schubfachprinzip). Ist  $f : [m] \rightarrow [n]$  ( $m, n \in \mathbb{N}$ ) injektiv, dann ist  $m \leq n$ .

*Beweis.* Fassen obige Aussage als  $A(n)$  auf, die für alle  $m \in \mathbb{N}$  zu zeigen ist. Induktionsanfang:

$n = 1 : f : [m] \rightarrow \{1\}$  injektiv  $\Rightarrow m = 1$ , da sonst  $f(1) = 1 = f(2)$  zu Injektivität.

Induktionsschritt:

Induktionsvoraussetzung:  $A(n)$  ist wahr für  $n \in \mathbb{N}$ .

Zu zeigen:  $A(n+1)$  ist wahr.

Angenommen,  $f : [m] \rightarrow [n+1] = [n] \cup \{n+1\}$  sei injektiv.

Zu zeigen:  $m \leq n+1$

Fallunterscheidung:

1. Ang.  $m = 1 \Rightarrow m = 1 \leq n+1 \checkmark$
2. Ang.  $m > 1, m \in \mathbb{N} \xrightarrow{\text{Satz 3.5.8}} m-1 \in \mathbb{N}$   
(\*) Beh.:  $\exists$  inj.  $\tilde{f} : \{1, \dots, m-1\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ .

$$\stackrel{(*)+\text{IV}}{\Rightarrow} m-1 \leq n, \text{ d.h. } m \leq n+1 \Rightarrow A(n+1) \text{ ist wahr.}$$

Beweis von (\*):

Angenommen,  $\exists f : [m] \rightarrow [n+1]$  inj.

Dann  $\exists \tilde{f} : [m-1] \rightarrow [n+1]$  inj.

Fallunterscheidung:

- Ang.  $f(k) \in [n] \forall 1 \leq k \leq m-1$ . Dann setze  $\tilde{f}(k) := f|_{[m-1]}$   
 $\tilde{f}(k) := f(k), 1 \leq k \leq m-1$   
(Nachrechnen  $\tilde{f}$  ist injektiv.)
- $\exists j \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq m-1$  mit  $f(j) = n+1$ .  
Dann def.  $\tilde{f} : [m-1] \rightarrow [n]$

$$\tilde{f}(k) := \begin{cases} f(k), 1 \leq k \leq m-1, k \neq j \\ f(m), k = j \end{cases}$$

Man prüfe nach  $\tilde{f} : [m-1] \rightarrow [n]$  injektiv!

□

**Korollar 4.3.2.** Sind  $n, m \in \mathbb{N}$  und  $f : [m] \rightarrow [n]$  bijektiv  $\Rightarrow m = n$ .

*Beweis.* Nach Voraussetzung ist  $f : [m] \rightarrow [n]$  injektiv und  $f^{-1} : [n] \rightarrow [m]$  auch injektiv.

$\Rightarrow m \leq n \wedge n \leq m \Rightarrow m = n$ .

□

**Definition 4.3.3.** Eine Menge  $M$  ist endlich, falls  $M = \emptyset$  oder falls  $n \in \mathbb{N}_0$  und eine Bijektion  $f : 1, \dots, n \rightarrow M$  existiert.

Die Anzahl der Elemente von  $M$  ( $\#M$ ) ist dann  $\#M := n$ , setzen  $\#\emptyset := 0$ .

Eine Menge ist unendlich, falls sie nicht endlich ist.

*Bemerkung.* Ist  $M$  endlich, so ist  $\#M$  wohldefiniert.  
 Angenommen:

$$\begin{array}{l} f : [n] \rightarrow M \\ g : [m] \rightarrow M \end{array} \quad \text{beide bijektiv.}$$

$$[n] \xrightarrow{f} M \xleftarrow{g} [m]$$

$h := f^{-1} \circ g = [m] \rightarrow [n]$  ist auch bijektiv.  $\stackrel{\text{Korr. 2}}{\Rightarrow} m = n$ .

Weiter in Definition:

Zwei Mengen  $A, B$  heißen gleichmächtig, falls es eine Bijektion  $f : A \rightarrow B$  gibt, schreiben  $A \sim B$ . Eine Menge  $A$  heißt abzählbar, falls  $A$  endlich ist oder es eine Bijektion  $f : \mathbb{N} \rightarrow A$  gibt. Ist  $A$  abzählbar und unendlich, so heißt  $A$  abzählbar unendlich.

*Bemerkung.* Satz von Cantor und Berenstein:

Ang.  $\exists$  Injektion  $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow A$ , dann  $\exists$  Bijektion  $h : A \rightarrow B$ .

*Beweis.* Siehe Kolmogorov-Fomin: Introductory Real Analysis.

Könnten definieren  $A \leq B$ , falls es eine inj. Funktion  $f : A \rightarrow B$  gibt.

$A \leq B \wedge B \leq A \Leftrightarrow A \sim B$ . □

*Bemerkung.*  $A \leq B$  heißt Kardinalität von  $A$  ist kleiner gleich der Kardinalität von  $B$ .

1. Ist  $B \subset A$  und  $A$  endlich, so ist  $B$  endlich und  $\#B \leq \#A$ .
2.  $A, B$  endlich und disjunkt,  $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \#(A \cup B) = \#A + \#B$ .

#### **Satz 4.3.4.** .

1. Jede Teilmenge einer abzählbaren Menge ist abzählbar.
2. Sind für  $j \in \mathbb{N}$   $A_j$  abzählbare Mengen. Dann ist  $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$  abzählbar.

*Beweis.* .

1. Sei  $A$  abzählbar. Ist  $A$  endlich, so ist auch jedes  $B \subset A$  endlich, und somit abzählbar.  
 Sei  $A$  abzählbar unendlich. Dann existiert eine Bijektion  $f : \mathbb{N} \rightarrow A$  und setzen wir  $a_n := f(n)$ , so ist

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{a_n\} = \{a_1, a_2, \dots\}.$$

Ist  $B \subset A$ , so existieren  $n_j \in \mathbb{N}, 1 \leq n_1 < n_2 < \dots$  mit

$$B = \{a_{n_1}, a_{n_2}, \dots\}.$$

Gibt es nur endlich viele  $n_j$ , so ist  $B$  endlich, andernfalls ist  $h : \mathbb{N} \rightarrow B, g \mapsto h(j) := a_{n_j}$  eine Bijektion.

2. o.B.d.A. sind alle  $A_j$  paarweise verschieden,  $A_l \cap A_m \neq \emptyset$  für  $l \neq m$ .  
Wenn nicht, betrachte

$$B_1 := A_1, \quad B_2 := A_2 \setminus A_1,$$

$$B_3 := A_3 \setminus \{A_1 \cup A_2\}, \dots, \quad B_{n+1} := A_{n+1} \setminus \{A_1 \cup \dots \cup A_n\}$$

Dann sind  $B_n$  paarweise verschieden und

$$\bigcup_{l \in \mathbb{N}} B_l = \bigcup_{l \in \mathbb{N}} A_l.$$

Schreiben  $A_l$  als Liste  $A_l = \{a_{1l}, a_{2l}, \dots\}$

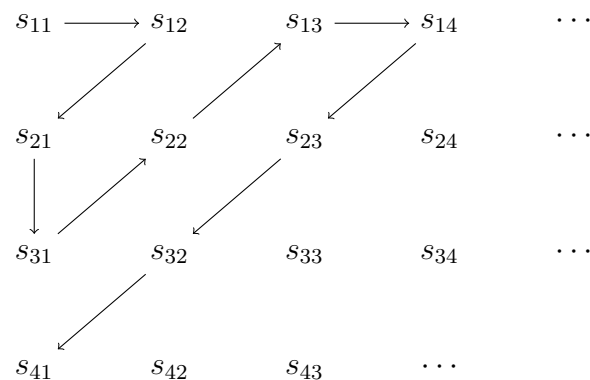


Bild: Jetzt können wir das obige rechteckige Schema diagonal abzählen! Dies liefert uns eine Bijektion von  $\mathbb{N}$  nach  $\bigcup_l \mathbb{N} A_l$ .

□

*Bemerkung.* Als Übung: Man gebe explizit eine Bijektion  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  an!

### Permutationen:

**Definition 4.3.5.** Eine bijektive Abbildung  $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  heißt Permutation.

$$n! = \prod_{k=1}^n k$$

**Satz 4.3.6.**

$$n \in \mathbb{N}, S_n = \{\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\} \mid \sigma \text{ ist bijektiv.}\} \Rightarrow \#S_n = n!$$

*Beweis.* per Induktion

$n = 1$  ist klar. Beobachtung: Permutation  $\sigma \in S_n$  identifizieren mit  $n$ -Tupel  $(\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n))$

Induktionsannahme:  $\#S_n = n!$  für ein  $n \in \mathbb{N}$

Die Menge  $S_{n+1}$  ist die disjunkte Vereinigung der Teilmengen

$$S_{n+1,k} := \{\tau \in S_{n+1} \mid \tau_k = n+1\} \quad k = 1, \dots, n+1.$$

z.B.:

$$S_{4,2} = \{(1, 4, 2, 3), (2, 4, 3, 1), (3, 4, 1, 2), (1, 4, 3, 2), (2, 4, 1, 3), (3, 4, 1, 2)\}$$

Beobachtung: Jedem  $\tau = (\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in S_n$  können wir die Permutation  $(\sigma_1, \dots, \sigma_{k-1}, \underbrace{n+1}_{k\text{-te Stelle}}, \sigma_k, \dots, \sigma_n) \in S_{n,k}$  zuordnen und diese Abbildung ist bijektiv (nachprüfen).

$$\begin{aligned} \Rightarrow \#S_{n+1,k} &= \#S_n \\ S_{n+1} &= \# \left( \bigcup_{k=1}^{n+1} S_{n+1,k} \right) = \sum_{k=1}^{n+1} \underbrace{\#S_{n+1,k}}_{=\#S_n=n!} = \sum_{k=1}^{n+1} n! = (n+1)n! = (n+1)! \end{aligned}$$

□

**Definition 4.3.7** (Binomialkoeffizient). Für  $\alpha \in \mathbb{R}$  und  $k \in \mathbb{N}$  setzen wir

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-k+1)}{k!}, \text{ sowie } \binom{\alpha}{0} := 1.$$

**Lemma 4.3.8** (Rekursionsformel für Binomialkoeffizienten). Für  $\alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$  gilt

$$\binom{\alpha+1}{k} = \binom{\alpha}{k} + \binom{\alpha}{k-1}.$$

*Beweis.* Für  $k = 1$  ist dies einfach zu sehen. Für  $k \geq 2$  gilt

$$\begin{aligned} & \binom{\alpha}{k} + \binom{\alpha}{k-1} \\ &= \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} + \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-k+2)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (k-1)} \\ &= \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-k+2)(\alpha-k+1+k)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} \\ &= \frac{(\alpha+1)\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot ((\alpha-1)-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} = \binom{\alpha+1}{k} \end{aligned}$$

□

*Bemerkung.* .

1. Ist  $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$ , so können wir  $\binom{n}{k}$  ausrechnen mit dem Dreiecksschema von Blaise Pascal (1623-1662).

$n = 0$						1										
$n = 1$					1		1									
$n = 2$				1		2		1								
$n = 3$				1		3		3		1						
$n = 4$				1		4		6		4		1				
$n = 5$				1		5		10		10		5		1		
$n = 6$				1		6		15		20		15		6		1

2. Ist  $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$ , so folgt durch Erweitern mit  $(n - k)!$  für  $n \in \mathbb{N}_0, k \in \{0, 1, \dots, n\}$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}.$$

**Satz 4.3.9** (Zahl der Kombinationen). Sei  $n \in \mathbb{N}_0, k \in \{1, \dots, n\}$ . Dann ist die Anzahl der  $k$ -elementigen Teilmengen von  $\{1, \dots, n\}$  gleich  $\binom{n}{k}$ .

*Beweis.* Die Behauptung gilt für  $k = 0$  und beliebiges  $n \in \mathbb{N}$ , da die leere Menge die einzige Teilmenge von  $\{1, \dots, n\}$  mit 0 Elementen ist und nach Def. ist  $\binom{n}{0} = 1$ .

Insbesondere gilt die Behauptung dann für  $n = 0$ .

Induktiv über  $n$ , wobei Behauptung für alle  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$  zu zeigen ist.

Induktionsschluss: Bestimme die Anzahl der  $k$ -elementigen Teilmengen von  $\{1, \dots, n+1\}$  (wobei wir  $k \geq 1$  annehmen können).

Sei  $A \subset \{1, \dots, n+1\}$  mit  $\#A = k \geq 1$ .

Diese fallen in 2 Klassen: Klasse 1:  $n + 1 \notin A$ .

Klasse 2:  $n + 1 \in A$ .

Die Mengen der Klasse 1 bestehen genau aus den  $k$ -elementigen Teilmengen von  $\{1, \dots, n\}$ .

Die Mengen der 2. Klasse erhält man aus den  $(k-1)$ -elementigen Teilmengen von  $\{1, \dots, n\}$  durch Vereinigung mit  $\{n+1\}$ .

Also ist nach Induktionsannahme

$$\begin{aligned} & \# \{k\text{-elementige Teilmengen von } \{1, \dots, n+1\}\} \\ &= \# \{k\text{-elementige Teilmengen von } \{1, \dots, n\}\} \\ &+ \# \{(k-1)\text{-elementige Teilmengen von } \{1, \dots, n\}\} \\ &\stackrel{\text{IV}}{=} \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \stackrel{\text{Lem. 8}}{=} \binom{n+1}{k}. \end{aligned}$$

☐

**Satz 4.3.10** (Binomische Formel).

$$a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} : (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

*Bemerkung.*

$$(a + b)^1 = a + b \quad (2)$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (3)$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad (4)$$

*Beweis.* Induktion

$$n = 1 : (a + b)^1 = a + b = \sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} a^k b^{1-k} \checkmark$$

Induktionsvoraussetzung: für ein beliebiges, aber festes  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= (a + b)(a + b)^n = (a + b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-(k-1)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\ &= \binom{n}{n} a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{0} b^{n+1} \\ &= \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \underbrace{\left( \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right)}_{=\binom{n+1}{k}} a^k b^{n+1-k} + \binom{n+1}{0} b^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}. \end{aligned}$$

□

**Notation:** Geg. Menge  $A$ , sei

$$\{0, 1\}^A := \{\text{Funktion } f : A \rightarrow \{0, 1\}\}$$

= Menge aller  $\{0, 1\}$ -wertigen Funktionen mit Definitionsbereich  $A$ .

Allg.:  $A, B$  Mengen,  $B^A := \{\text{Funktion } f : a \rightarrow B\}$ .

**Satz 4.3.11.** Sei  $A \neq \emptyset$  eine endliche Menge. Dann ist

$$\#(\{0, 1\}^A) = 2^{\#A}.$$

*Beweis.* Sei  $n := \#A \in \mathbb{N}$ .

$\Rightarrow$  Bijektion  $h : \{1, \dots, n\} \rightarrow A$ .

$\Rightarrow$  können annehmen  $A = \{1, 2, \dots, n\}$

z.z.  $\#(\{0, 1\}^{[n]}) = 2^n$ .

Induktion:  $n = 1 \exists$  Fkt.  $f_1, f_2 : \{1\} \rightarrow \{0, 1\}$

$f_1(1) = 0 \quad f_2(1) = 1$

Formel stimmt für  $n = 1$ . Ang. Formel stimmt für  $n \geq 1$ . Fkt.  $f : \{1, \dots, n+1\} \rightarrow \{0, 1\}$

2 Klassen:

$$1. S_0 = \{f : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{0, 1\} : f(n+1) = 0\}$$

$$2. S_1 = \{f : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{0, 1\} : f(n+1) = 1\}$$

$$S_0 \cap S_1 = \emptyset, \{0, 1\}^{[n+1]} = S_0 \cup S_1$$

$$\underbrace{\#S_0}_{=\#S_1} = \#(\{0, 1\}^{[n]}) \stackrel{\text{IA}}{=} 2^n$$

$$\Rightarrow \#(\{0, 1\}^{n+1}) = \#S_0 + \#S_1 = 2^n + 2^n = 2^{n+1}.$$

□

**Korollar 4.3.12.** Sei  $A$  endliche Menge.

$\mathcal{P}(A) = \text{Potenzmenge} = \{B \mid B \subseteq A\}$

$\Rightarrow \#\mathcal{P}(A) = 2^{\#A}$ .

*Beweis.* Sei  $A \neq \emptyset \Rightarrow \mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}, \quad 2^0 = 1 \checkmark$

Sei  $\#A \in \mathbb{N}$ . Nach Satz 11 reicht eine Bijektion  $\varphi : \mathcal{P} \rightarrow \underbrace{\{0, 1\}^A}_{=\{f:A \rightarrow \{0,1\}\}}$ . Dies

wird in Lemma 13 für bel. Mengen  $A$  gemacht. □

**Lemma 4.3.13.** Sei  $A \neq \emptyset$ . Dann sind  $\mathcal{P}(A)$  und  $\{0, 1\}^A$  gleichmächtig.



*Beweis.* Brauchen  $\varphi : \mathcal{P}(A) \rightarrow \{0, 1\}^A$ .

Sei  $B \subseteq A$ , Indikatorfunktion

$$\mathbb{1}_B(x) := \begin{cases} 1, & x \in B \\ 0, & x \in A \setminus B \end{cases}, \mathbb{1}_B : A \rightarrow \{0, 1\}.$$

Beachte:  $B = \{x \in A \mid \mathbb{1}_B(x) = 1\}$ .

Definiere  $\varphi : \mathcal{P}(A) \rightarrow \{0, 1\}^A, B \mapsto \mathbb{1}_B$ .

Beh.:  $\varphi$  ist bijektiv.

1.  $\varphi$  ist surjektiv.

Sei  $f : A \rightarrow \{0, 1\}$

$$B_f := f^{-1}(\{1\}) = \{a \in A \mid f(a) = 1\} \Rightarrow \varphi(B_f) = \mathbb{1}_{B_f} = f \text{ (nachrechnen).}$$

2.  $\varphi$  ist injektiv.

Seien  $B_1, B_2 \subseteq A, B_1 \neq B_2$ .

$$B_1 \setminus B_2 \neq \emptyset \vee B_2 \setminus B_1 \neq \emptyset$$

$$\text{o.B.d.A. } B_1 \setminus B_2 \neq \emptyset \Rightarrow \exists x \in B_2 \setminus B_1 \subset A$$

$$\mathbb{1}_{B_1}(x) = 0 \neq 1 = \mathbb{1}_{B_2}(x)$$

$$\Rightarrow \varphi(B_1) = \mathbb{1}_{B_1} \neq \mathbb{1}_{B_2} = \varphi(B_2).$$

□

**Lemma 4.3.14.** Sei  $A$  Menge. Dann gibt es keine surj. Fkt.  $f : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ .

*Bemerkung.* Ist  $A$  endlich  $\Rightarrow \#\mathcal{P}(A) = 2^{\#A} > \#A$ .

$$\varphi : \mathcal{P}(A) \rightarrow \{0, 1\}^A, A \supset B \mapsto \mathbb{1}_B.$$

*Beweis.* Sei  $f : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$

$$f(A) \subset A \quad \forall a \in A.$$

Definiere  $R := \{a \in A, a \neq f(a)\} \subset A$ .

Angenommen  $f : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$  ist surjektiv.

$$\Rightarrow \forall b \in A \exists b : B = f(b) \Rightarrow \exists a \in A : R = f(a).$$

$\Rightarrow$  2 Möglichkeiten:

1.  $a \in R$

$$a \in f(a = R = \{x \in A \mid x \notin f(x)\}) \nmid$$

2.  $a \notin R = f(a) \Rightarrow a \notin f(a) \Rightarrow a \in R \nmid$

$f$  kann nicht surjektiv sein!

□

## 5

### 5.1 Starke Induktion und das Wohlordnungsprinzip

**Satz 5.1.1** (starke Induktion). Seien  $A(n)$  Aussagen für  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gilt

1.  $A(1)$  ist wahr
2.  $\forall n \in \mathbb{N} : A(1), \dots, A(n) \text{ wahr} \Rightarrow A(n+1) \text{ ist wahr}$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$  ist  $A(n)$  wahr

*Beweis.* Definiere die Aussage  $B(n) := \{\text{alle } A(k) \text{ mit } k \leq n \text{ sind wahr}\} \Rightarrow$

1.  $B(1)$  ist wahr
2. Ist  $B(n)$  wahr für ein  $n \in \mathbb{N}$ , so ist  $B(n+1)$  wahr

$\Rightarrow B(n)$  ist wahr für alle  $n \in \mathbb{N}$ . □

*Bemerkung.*  $(\forall n \in \mathbb{N} : A(n) \forall k < n \Rightarrow A(n)) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} A(n)$ .

**Satz 5.1.2** (Wohlordnungsprinzip für  $\mathbb{N}$ ). Jede nichtleere Teilmenge der natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}$  hat ein kleinstes Element.

*Beweis.* Sei  $A(n) := \{\text{Jede Teilmenge } b \subset \mathbb{N} \text{ mit } n \in b \text{ hat ein kleinstes Element}\}$ .

Müssen zeigen:  $A(n)$  ist wahr für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

1.  $A(1)$  ist wahr, denn ist  $B \subset \mathbb{N}$  mit  $1 \in B$ , so folgt  $\forall k \in B : k \geq 1$ . Also ist 1 kleinstes Element in  $B$ .
2. Angenommen für  $n \in \mathbb{N}$  sind  $A(1), \dots, A(n)$  wahr. Sei  $B \subset \mathbb{N}$  mit  $n+1 \in B$ .
  1. Fall:  $\{1, \dots, n\} \cap B = \emptyset \Rightarrow n+1$  ist kleinstes Element in  $B$ .
  2. Fall:  $\{1, \dots, n\} \cap B \neq \emptyset \Rightarrow \exists k \in \{1, \dots, n\}$  mit  $k \in B$ .  
Aus der Induktionsannahme folgt also  $A(k)$  ist wahr.  $\Rightarrow B$  hat ein kleinstes Element.

In beiden Fällen hat  $B$  ein kleinstes Element, also ist  $A(n+1)$  wahr.

$\stackrel{\text{Satz 1}}{\Rightarrow} \forall n \in \mathbb{N} A(n)$  wahr. □

Notation:

Ganze Zahlen  $\mathbb{Z} := (-\mathbb{N}) \cup \mathbb{N}_0 = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ .

Rationale Zahlen:  $\mathbb{Q} := \{\frac{m}{n} | n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}\}$ .

**Korollar 5.1.3.** Jede nichtleere, nach unten beschränkte Teilmenge in  $\mathbb{Z}$  hat ein kleinstes Element.

*Beweis.* Sei  $A \subseteq \mathbb{Z}, A \neq \emptyset, A \geq \beta$  für  $\beta \in \mathbb{Z}$

Setze  $B := A + \beta + 1 = \{\alpha + |\beta| + 1 | \alpha \in A\} \subseteq \mathbb{N}, B \neq \emptyset$

$\xRightarrow{\text{Satz 2}} \exists n_0 := \min B \Rightarrow z_0 := n_0 - |\beta| - 1 \in \mathbb{Z}$  ist kleinstes Element von  $A$ .  $\square$

## 5.2 Anwendungen

**Lemma 5.2.1.** Sei  $a \in \mathbb{R}$  mit  $a > 0$ . Dann existiert  $q \in \mathbb{N}_0$  mit  $q \leq a < q+1$

*Beweis.* Ist  $0 < a < 1$ , so nehme  $q = 0$ .

Also  $a \geq 1$  und setze  $B := \{n \in \mathbb{N} | a < n\}$ .

Da  $\mathbb{N}$  nicht nach oben beschränkt ist (archim. Prinzip), gilt  $B \neq \emptyset$ .

$\xRightarrow{\text{Satz 2}} m := \min B$  existiert. Da  $m \in B$ , ist  $m > a \geq 1$ .

Somit gilt nach Satz 3.5.8, dass  $q := m - 1 \in \mathbb{N}$ .

Da  $m$  die kleinste natürliche Zahl mit  $m < a$  ist, folgt  $q = m - 1 \leq a < m = q + 1$ .  $\square$

*Bemerkung.* Dieselbe Beweisidee zeigt auch

$$\forall a \in \mathbb{R} \exists q \in \mathbb{Z} \text{ mit } q \leq a < q + 1.$$

**Satz 5.2.2** ( $\mathbb{Q}$  ist dicht in  $\mathbb{R}$ ). Seien  $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ . Dann existiert  $r \in \mathbb{Q}$  mit  $a < r < b$ .

*Beweis.* O.B.d.A.  $b \geq 0$ , ansonsten betrachte  $a' = -a, b' = -b$ .

Weiter können wir  $a \geq 0$  annehmen, sonst nehme  $r = 0$ . Also sei  $0 \leq a < b$

$\xRightarrow{\text{Archimedes}} \exists n \in \mathbb{N} : n(b - a) > 1$ .

Setze  $B := \{l \in \mathbb{N} | l > na\} \subset \mathbb{N}$ .

$\xRightarrow{\text{Satz 5.1.2}} m = \min B$  existiert.

Da  $m = \min B$  ist, gilt

$$m - a \leq na < m,$$

somit gilt auch

$$\begin{aligned} na < m &= \underbrace{m-1}_{< na} + \underbrace{1}_{< n(b-a)} = nb \\ \Rightarrow na < m, nb &\Leftrightarrow a < \frac{m}{n} < b. \end{aligned}$$

$\square$

### Exkurs

Beh.:  $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

*Beweis.* [Beweis durch Widerspruch] Sei  $r^2 = 2$  mit  $r = \frac{m}{n}, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}$ .  
Wir definieren

$$A := \{n \in \mathbb{N} | \exists m \in \mathbb{Z} \frac{m^2}{n^2} = 2\} \neq \emptyset$$

$$\stackrel{\text{Satz 5.1.2}}{\Rightarrow} n_* = \min A \in \mathbb{N}$$

Also existiert  $m \in \mathbb{Z}_+$  mit

$$m^2 = 2 \cdot n_*^2 \Rightarrow m > n_*$$

Außerdem gilt

$$m = \sqrt{2}n_* \stackrel{\sqrt{2} > 1}{\Leftrightarrow} 0 < \underbrace{m - n_*}_{\in \mathbb{N}} = \underbrace{(\sqrt{2} - 1)n_*}_{<1} < n_*$$

Nun gilt:

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n_*} = \frac{m(m - n_*)}{n_*(m - n_*)} \stackrel{m^2 = 2n_*^2}{=} \frac{2n_*^2 - mn_*}{n_*(m - n_*)} = \frac{2n_* - m}{m - n_*}$$

$2n_* - m \in \mathbb{Z}, m - n_* < n_*$ , aber  $n_* = \min A$

Somit kann kein  $m \in \mathbb{Z}$  existieren, sodass  $\frac{m^2}{n^2} = 2$  für beliebiges  $n \in \mathbb{N}$ .

Also ist  $\sqrt{2}$  per Definition der rationalen Zahlen in  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . □

**Satz 5.2.3.** Sei  $k \in \mathbb{N}$ , dann gilt entweder  $\sqrt{k} \in \mathbb{N}$  oder  $\sqrt{k} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

*Beweis.* Sei  $k \in \mathbb{N}$  und  $\sqrt{k} \notin \mathbb{N}$ .

Angenommen  $\sqrt{k} \in \mathbb{Q}$ , also  $\sqrt{k} = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$

$$A := \{n \in \mathbb{N} | \exists m \in \mathbb{Z} \frac{m^2}{n^2} = k\}$$

$$\stackrel{\text{Satz 5.1.2}}{\Rightarrow} \exists n_* = \min A \in \mathbb{N}$$

Sei  $\frac{m}{n_*} = \sqrt{k}$ , dann gilt

$$m - n_* = \underbrace{(\sqrt{k} - 1)n_*}_{<1}$$

Aber wähle  $q \in \mathbb{N} : q \leq \sqrt{k} < q + 1$

Existiert nach Lemma 5.2.1. Da  $\sqrt{k} \notin \mathbb{N}$  gilt  $q < \sqrt{k} < q + 1$ .

Also gilt:

$$0 < \underbrace{m - qn_*}_{\in \mathbb{N}} = \underbrace{(\sqrt{k} - q)n_*}_{<1} < n_*$$

Somit

$$\sqrt{k} = \frac{m}{n_*} = \frac{m(m - qn_*)}{n_*(m - qn_*)} = \frac{kn_*^2 - mqn_*}{n_*(m - qn_*)} = \frac{kn_* - mq}{m - qn_*}$$

$$\nexists n_* = \min A, m - qn_* < n_*$$

Somit muss  $\sqrt{k} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  sein. □

## 6 Existenz von Wurzeln (in $\mathbb{R}$ )

Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $a > 0$ . Dann heißt eine Zahl  $\alpha$   $n$ -te Wurzel von  $a$ , schreiben  $\alpha = a^{\frac{1}{n}}$  oder  $\sqrt[n]{a}$ , falls  $a^n = a$ .

**Satz 6.0.1.** Sei  $\alpha \in \mathbb{R}, a > 0$  und  $n \in \mathbb{N}$ . Dann existiert die  $n$ -te Wurzel von  $a$  als reelle Zahl. D.h.  $\exists! \alpha \in \mathbb{R}$  mit  $\alpha > 0$  und  $\alpha^n = a$ .

*Bemerkung.* Für die rationalen Zahlen ist dies falsch!

*Beweis.* Angenommen, die Beh. gilt für  $a \geq 1$ . Sei  $0 < b < 1$ . Setze  $a := \frac{1}{b} > 1 \Rightarrow \exists! \alpha > 0 : \alpha^n = a = \frac{1}{b}$ . Setze  $\beta := \frac{1}{\alpha}$ .

Dann gilt also

$$\beta^n = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^n = \frac{1}{\alpha^n} = \frac{1}{a} = b.$$

Also nehme an  $a \geq 1$ . Ist  $a = 1$ , so ist  $\alpha = 1$  die einzige Lösung von  $\alpha^n = 1$ . Außerdem können wir  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n > 1$  wählen. Also sei  $a > 1, n \in \mathbb{N}, n > 1$ . Setze

$$A := \{x \in \mathbb{R} | 0 < x, x^n < a\}$$

Dann ist  $1 \in A$  und somit  $A \neq \emptyset$ . Außerdem ist  $A$  nach oben beschränkt, denn ist  $y \geq a$ , so folgt

$$y^n \geq a^n = \underbrace{a \cdot a \dots a}_{n\text{-mal}} > \underbrace{1 \cdot 1 \dots 1}_{n\text{-mal}} \cdot a = a$$

Also ist  $A \leq a$ .

$$\stackrel{\text{Vollst.axiom}}{\Rightarrow} \alpha := \sup A \in \mathbb{R} \text{ existiert.}$$

Da  $1 \in A \Rightarrow \alpha \geq 1 > 0$ .

$\alpha^n$  ist eine reelle Zahl für die gilt nach Anordnungsaxiom entweder  $\alpha^n < a, \alpha^n > a$  oder  $\alpha^n = a$ .

1. Fall: Annahme:  $\alpha^n < a$ .

Sei  $0 < \delta \leq 1$ . Dann gilt (binom. Formel)

$$\begin{aligned}
(\alpha + \delta)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \alpha^k \delta^{n-k} \\
&= \alpha^n + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \alpha^k \delta^{n-k} \\
&= \alpha^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k-1} \underbrace{\alpha^{k-1}}_{\leq a^{k-1}} \underbrace{\delta^{n+1-k}}_{\leq \delta \cdot \delta^{n-k} \leq \delta} \\
&\leq \alpha^n \delta \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k-1} \alpha^{k-1} \\
&\leq \alpha^n \delta \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \alpha^k \\
&= \alpha^n + \delta(a+1)^n (*)
\end{aligned}$$

$\alpha^n < a$  nach Annahme und  $\delta := \frac{1}{2} \min \left( 1, \frac{a-\alpha^n}{(a+1)^n} \right)$

Dann gilt  $0 < \delta \leq 1$  und  $(*)$

$$(\alpha + \delta)^n \leq \alpha^n + \delta(a+1)^n \leq \alpha^n + \frac{1}{2}(a - \alpha^n) = \frac{1}{2}(\alpha^n + a) < \frac{1}{2}(a + a) = a$$

Somit ist  $\alpha < \alpha + \delta \nmid \alpha$  ist  $\sup A$ .

2. Fall: Annahme:  $\alpha^n > a, 0 < \delta \leq 1$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow (\alpha - \delta)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \alpha^{n-k} (-\delta)^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \alpha^{n-k} (-1)^k \delta^k \\
&= \alpha^n + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} \alpha^{n-1-k} (-1)^{k+1} \delta^{k+1} \\
&= \alpha^n - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} \alpha^{n-1-k} (-1)^k \delta^k \\
&\geq \alpha^n - \delta \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} a^{n-k+1} \\
&= \alpha^n - \delta \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k \\
&\geq \alpha^n - \delta(a+1)^n (***)
\end{aligned}$$

Setze  $\delta := \frac{1}{2} \min \left( 1, \frac{\alpha^n - a}{(a+1)^n} \right)$ . Dann gilt  $0 \leq \delta \leq \frac{1}{2} < 1$ .

$$(\alpha - \delta)^n \geq \alpha^n - \frac{1}{2}(\alpha^n + a) = \frac{1}{2}(\alpha^n + a) > \frac{1}{2}(a + a) \geq a.$$

Somit  $\alpha - \delta$  eine obere Schranke für  $A$ . Da  $\alpha - \delta < \alpha$ , ist das ein Widerspruch zu  $\alpha = \sup A$ . Somit bleibt nur  $\alpha^n = a$ .  $\square$

## 7 Folgen und Konvergenz

### 7.1 Grundlagen

**Definition 7.1.1.** Sei  $X \neq \emptyset$  eine Menge. Eine Folge (mit Werten in  $X$  oder auch  $X$ -wertige Folge) ist eine Funktion

$$f : \mathbb{N} \rightarrow X, n \mapsto f(n) \in X$$

Wir setzen  $a_n := f(n), n \in \mathbb{N}$ .

$a_n$  heißt  $n$ -tes Folgenglied. Wir schreiben auch  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  oder kurz  $(a_n)_n$ .

Ist  $X = \mathbb{R}$ , so heißt die Folge reellwertig oder reelle Folge (Folge reeller Zahlen).  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ .

**Definition 7.1.2** (Konvergenz (reeller Folgen)). Eine reelle Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert (mit  $n \rightarrow \infty$ ) gegen ein  $a \in \mathbb{R}$ , falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N} : \forall n \geq k \text{ folgt } |a_n - a| < \varepsilon.$$

Die Zahl  $a$  heißt Grenzwert der Folge, wir schreiben  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  oder  $a_n \rightarrow a$  (für  $n \rightarrow \infty$ ).

Eine (reelle) Folge heißt konvergent, falls ein  $a \in \mathbb{R}$  der Grenzwert der Folge ist, andernfalls heißt die Folge divergent.

*Bemerkung.*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N} : \forall n \geq k \text{ folgt } |a_n - a| < \varepsilon.$$

*Beispiel.* .

1.  $a_n := \frac{1}{n}$  konvergiert gegen 0. Denn zu geg.  $\varepsilon > 0$  wähle  $k \in \mathbb{N}$  mit  $k > \frac{1}{\varepsilon}$ . Dann gilt für  $n \geq k$

$$|a_n - a| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{k} < \varepsilon.$$

2. Konstante Folge . Sei  $a \in \mathbb{R}$  und sei  $a_n = a$  für  $n \in \mathbb{N}$ .  
Dann folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , denn für  $\varepsilon > 0$

$$|a_n - a| = |a - a| = 0 < \varepsilon, \text{ wähle } k = 1$$

3. Sei  $a_n := (-1)^n$ , also  $a_1 = -1, a_2 = 1, a_3 = -1, \dots$   
Dann ist  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nicht konvergent.

*Beweis.* Angenommen:  $(a_n)_n$  konvergiert und  $a \in \mathbb{R}$  ist Grenzwert. Zu  $\varepsilon = 1$  existiert dann  $k \in \mathbb{N}$  so, dass  $|a_n - a| < \varepsilon = 1 \quad \forall n \geq k$   
Also gilt für  $n \geq k$ :

$$2 = |a_n - a_{n+1}| = |a_n - a + a - a_{n+1}| \leq |a_n - a| + |a - a_{n+1}| < 1 + 1 = 2 \quad \text{!}$$

□

4. Die Folge  $(a_n)$  konvergiert gegen  $a$ . Dann konvergiert auch  $(|a_n|)_n$  gegen  $|a|$ . (Hinweis: Umgekehrte Dreiecksungleichung)
5. Geometrische Folge:  
Sei  $q \in \mathbb{R}, |q| < 1$ . Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0.$$

*Beweis.* Annahme:  $q \neq 0$ , dann gilt  $\frac{1}{|q|} > 1$  und es existiert  $x > 0$ , sodass  $\frac{1}{|q|} = 1 + x$ .  
Aus Bernoullischer Ungleichung folgt

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

und somit

$$|q^n - 0| = |q^n| = |q|^n = \frac{1}{(1 + x)^n} \leq \frac{1}{1 + nx}.$$

Also zu  $\varepsilon > 0$  wähle  $k \in \mathbb{N} \forall n \geq k$  gilt  $nx > \frac{1}{\varepsilon}$ .

$$|q^n - 0| \leq \frac{1}{1 + nx} \leq \frac{1}{nx} < \varepsilon \text{ für } n \geq k.$$

□

6. Sei  $a \in \mathbb{R}$  mit  $a > 0$ . Dann konvergiert die  $a_n = a^{1/n}$  gegen 1.



*Beweis.* Fall 1: Die Beh. stimmt für  $a = 1$ .

Fall 2:  $a > 1$ . Dann ist  $a_n = a^{1/n} > 1$  und somit  $q_n := a_n - 1 = a^{1/n} - 1 > 0$ .

$$a_n = a^{\frac{1}{n}} = 1 + q_n \Rightarrow a = (1 + q_n)^n \underset{\text{Bern. Ungl.}}{\geq} 1 + nq_n$$

$$\Rightarrow 0 \leq q_n \leq \frac{a-1}{n} \forall n \in \mathbb{N}$$

Zu  $\varepsilon > 0$  wähle  $K \in \mathbb{N}$  mit  $K > \frac{a-1}{\varepsilon}$ .

Dann  $n \geq K$

$$|a_n - 1| = |a^{1/n} - 1| = a^{1/n} - 1 = q_n \leq \frac{a-1}{n} < \varepsilon.$$

Fall 3:  $0 < a < 1$ . Dann ist  $b := \frac{1}{a} > 1$ .

$$\stackrel{\text{Fall 2}}{\Rightarrow} \lim_{n \rightarrow \infty} b^{\frac{1}{n}} = 1$$

$$\begin{aligned} |a^{1/n} - 1| &= a^{1/n} \left| 1 - \frac{a}{a^{1/n}} \right| \\ &= a^{1/n} \left| 1 - \left( \frac{a}{a} \right)^{1/n} \right| \\ &= a^{1/n} |1 - b^{1/n}| \\ &\leq |1 - b^{1/n}| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{1/n} = 1$$

□

7. Es gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} = 1$ .

*Beweis.* 1. Versuch:

Setze  $q_n := n^{1/n} - 1 > 0$  für  $n > 1$

$$\begin{aligned} \Rightarrow n &= (1 + q_n)^n \geq 1 + nq_n \\ \Rightarrow |n^{1/n} - 1| &= q_n \leq \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n} \end{aligned}$$

funktioniert nicht...

Frage: Kann Bernoullische Ungleichung verbessert werden?

$$\begin{aligned}
 (1+q)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} q^k 1^{n-k} \\
 &= 1 + \binom{n}{1} q + \binom{n}{2} q^2 + \sum_{k=3}^n \binom{n}{k} q^k 1^{n-k} \\
 &\geq 1 + nq + \frac{n(n-1)}{2} q^2 \\
 &\geq 1 + \frac{n(n-1)}{2} q^2 \quad \text{falls } q \geq 0.
 \end{aligned}$$

(\*)

Setzen  $q_n := n^{1/n} - 1 > 0$  für  $n \geq 2$ .

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow n &= (1+q_n)^n \stackrel{(*)}{\geq} 1 + \frac{n(n-1)}{2} q_n^2 \\
 \Rightarrow q_n^2 &\leq \frac{2(n-1)}{n(n-1)} = \frac{2}{n} \\
 \Rightarrow q_n &\leq \sqrt{\frac{2}{n}} \quad \forall n \geq 2
 \end{aligned}$$

Zu  $\varepsilon > 0$  wähle  $K \in \mathbb{N}$  mit  $\sqrt{\frac{2}{K}} < \varepsilon$ .

$$\Rightarrow |n^{1/n} - 1| = q_n \leq \sqrt{\frac{2}{n}} \stackrel{n \geq K}{<} \varepsilon.$$

Somit gilt  $\forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N}$ , sodass für  $n \geq K$  gilt

$$|n^{1/n} - 1| < \varepsilon.$$

Also per Definition

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} = 1.$$

□

**Satz 7.1.3.** Falls die reelle Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert, so ist ihr Grenzwert eindeutig bestimmt.

*Beweis.* Annahme:  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert gegen  $a$  und  $b \in \mathbb{R}$ . Und  $a \neq b$   
o.B.d.A. gilt  $a < b$ . Wissen:

$$\begin{aligned}\forall \varepsilon > 0 \exists K_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq K_1 \quad |a_n - a| < \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0 \exists K_2 \in \mathbb{N} : \forall n \geq K_2 \quad |a_n - b| < \varepsilon\end{aligned}$$

Setze  $\varepsilon := \frac{b-a}{2} > 0$ .

Dann folgt für  $n \geq \max\{K_1, K_2\}$

$$b - a = b - a_n + a_n - a \leq \underbrace{|b - a_n|}_{< \varepsilon} + \underbrace{|a_n - a|}_{< \varepsilon} < 2\varepsilon = b - a \quad \text{!}$$

Somit muss  $a = b$  gelten! □

Bild:

**Definition 7.1.4** ( $\varepsilon$ -Umgebung). Die  $\varepsilon$ -Umgebung um  $a \in \mathbb{R}$  ist die Menge

$$U_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon).$$

Beobachtung: Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergent gegen  $a \in \mathbb{R}$ .

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists K \in \mathbb{N} : a_n \in U_\varepsilon(a) \quad \forall n \geq K.$$

**Definition 7.1.5** (Beschränktheit von Folgen). Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  heißt beschränkt, wenn für  $C \geq 0$  gilt  $|a_n| \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N}$

nach oben beschränkt, wenn es ein  $C \in \mathbb{R}$  gibt mit  $a_n \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N}$

nach unten beschränkt, wenn es ein  $C \in \mathbb{R}$  gibt mit  $a_n \geq C \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

*Bemerkung.* beschränkt  $\Leftrightarrow$  nach oben und nach unten beschränkt

**Satz 7.1.6.** Jede konvergente Folge ist beschränkt.

*Beweis.* Sei  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ . Zu  $\varepsilon = 1$  wähle  $K \in \mathbb{N}$ .  $|a_n - a| < 1 \quad \forall n \geq K$ .

$$\begin{aligned}n \geq K &\Rightarrow |a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a| \\ n \leq K - 1 &\Rightarrow |a_n| \leq \max\{|a_1|, \dots, |a_{K-1}|\}.\end{aligned}$$

Setze  $C := \max\{|a_1|, \dots, |a_{K-1}|, 1 + |a|\}$ , so folgt

$$|a_n| \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

□

**Lemma 7.1.7.** Die Folge  $(b_n)_n \subset \mathbb{R}$  konvergiert gegen  $b \neq 0$ . Dann existiert  $K \in \mathbb{N}$ , sodass

$$|b_n| \geq \frac{|b|}{2}.$$

*Beweis.* Bild:

Setze  $\varepsilon := \frac{|b|}{2} > 0$ . Dann existiert  $K \in \mathbb{N}$  mit

$$|b_n - b| < \varepsilon = \frac{|b|}{2} \quad \forall n \geq K, n \geq K$$

$$\Rightarrow |b| = |b - b_n + b_n| \leq |b - b_n| + |b_n| \stackrel{n \geq K}{<} \frac{|b|}{2} + |b_n|$$

$$\Rightarrow |b_n| > |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2} \quad \forall n \geq K.$$

□

**Satz 7.1.8** (Rechenregel für Grenzwerte). Es gelte  $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b$  für  $n \rightarrow \infty$ .

1.  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$  ist  $(\lambda a_n + \mu b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergent mit Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda a + \mu b.$$

2. Die Folge  $(a_n b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert mit Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = ab.$$

3. Falls  $b \neq 0$ , so gibt es ein  $K_0 \in \mathbb{N}$  mit  $b_n \neq 0 \quad \forall n \geq K_0$  und die Folge  $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \geq K_0}$  ist konvergent mit Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

*Beweis.* 1. 1. Fall  $\lambda = \mu = 1$ .

Zu  $\varepsilon > 0 \exists K_1, K_2 \in \mathbb{N}$ , sodass

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq K_1$$

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq K_2$$

Setze  $K := \max\{K_1, K_2\}$ . Dann folgt

$$|a_n + b_n - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall n \geq K$$

. Also ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = a + b$ . Fall 2: allg.  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Aus 2. folgt

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda a_n &= \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \mu b_n &= \mu \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \quad (*) \end{aligned}$$

$\xRightarrow{\text{Fall 1}} \lambda a_n + \mu b_n$  ist konvergent und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda a_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu b_n) \stackrel{(*)}{=} \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \mu \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lambda a + \mu b.$$

2. Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Dann folgt  $a_n b_n - ab = a_n b_n - a_n b + a_n b - ab = a_n(b_n - b) + (a_n - a)b$

$$\Rightarrow |a_n b_n - ab| \leq |a_n| |b_n - b| + |a_n - a| |b|.$$

Nach Satz 6 existiert  $C \geq 0$  mit  $|a_n| \leq C \forall n \in \mathbb{N}$ . Setze  $D := \max\{C, |b|\}$ .

$$|a_n b_n - ab| \leq D(|a_n - a| + |b_n - b|) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Zu  $\varepsilon > 0$  wähle  $K_1, K_2 \in \mathbb{N}$  mit

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2(0+1)} \quad \forall n \in K_1$$

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2(0+1)} \quad \forall n \in K_2$$

Dann folgt  $\forall n \geq K := \max\{K_1, K_2\}$

$$|a_n b_n - ab| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Also  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = ab$ .

3. o.B.d.A.  $a_n = 1$ . (aus 2. folgt dann der allg. Fall mit  $\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n}$ )  
Da  $b_n \rightarrow b \neq 0$ , folgt mit Lemma 7, dass ein  $K_0 \in \mathbb{N}$  existiert mit  $|b_n| > \frac{|b|}{2}$  für  $n \geq K_0$

$\frac{1}{b_n}$  ist wohldefiniert  $\forall n \geq K_0$ .

Es gilt:  $\frac{1}{b} - \frac{1}{b_n} = \frac{b_n - b}{bb_n}$  und somit

$$\left| \frac{1}{b} - \frac{1}{b_n} \right| = \frac{|b_n - b|}{|b| \cdot |b_n|} \leq \frac{2|b_n - b|}{|b|^2}.$$

Zu  $\varepsilon > 0$  wähle  $K_1 \in \mathbb{N}$  mit  $|b_n - b| < \frac{|b|^2 \varepsilon}{2} \quad \forall n \geq K_1$ .  
Dann folgt

$$\left| \frac{1}{b} - \frac{1}{b_n} \right| \leq \frac{2 \cdot |b_n - b|}{|b|^2} < \varepsilon \quad \forall n \geq \max\{K_0, K_1\}.$$

Somit folgt  $\frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{b}$  (für  $n \rightarrow \infty$ ). Somit folgt die allg. Aussage aus Teil 2 von Satz 7.1.8. □

reelle Folgen  $f = (f_n)_n, g = (g_n)_n$

$$(f + g)_n := f_n + g_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

$x(\lambda f)_n := \lambda f_n \Rightarrow (\lambda f + \mu g)_n = \lambda f_n + \mu g_n$  ist eine Linearkombination.  
 $\Rightarrow$  Raum der reellen Folgen ist ein reeller Vektorraum.

$$\begin{aligned} & \{\text{Raum der (reellen) Folgen}\} \\ & \supsetneq \{\text{Raum der beschränkten (reellen) Folgen}\} \\ & \supsetneq \{\text{Raum der (reellen) konvergenten Folgen}\} \\ & \supsetneq \{\text{Raum der (reellen) Nullfolgen}\}. \end{aligned}$$

$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist eine Nullfolge, falls  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 0$ .

*Beispiel* (1).  $p, q$  Polynome vom Grad  $m, n \in \mathbb{N}$ .

D. h.

$$p(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0 \quad b_n \neq 0 \neq a_m$$

$$\begin{aligned} k \in \mathbb{N}. \frac{p(k)}{q(k)} &= \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0} \\ &= k^{m-n} \frac{a_m + a_{m-1} k^{-1} + \dots + a_1 k^{1-m} + a_0 k^{-m}}{b_n + b_{n-1} k^{-1} + \dots + b_1 k^{1-n} + b_0 k^{-n}} \\ &\xrightarrow{\text{Satz 8}} \begin{cases} 0, & \text{falls } n > m. \\ \frac{a_n}{b_n}, & \text{falls } n = m. \end{cases} \end{aligned}$$

*Beispiel* (Geometrische Reihe).

$$-1 < q < 1.$$

$$\begin{aligned} a_n &:= 1 + q + q^2 + \dots + q^n \\ &= \sum_{l=0}^n q^l \stackrel{\text{Satz 3.5.7}}{=} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \frac{1 - \lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}. \end{aligned}$$

Da  $q^n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ , Bsp. 6 oben. Schreiben hierfür

$$\sum_{l=0}^n q^l = \frac{1}{1 - q}, \quad -1 < q < 1$$

*Beispiel.* Ist  $(b_n)_n$  beschränkt,  $(a_n)_n$  Nullfolge.  $\Rightarrow (b_n a_n)_n$  Nullfolge. (Hausaufgabe)

**Notation:** Wir sagen die Aussagen  $A(n), n \in \mathbb{N}$  gelten für fast alle  $n \in \mathbb{N}$ , falls  $K_0 \in \mathbb{N}$  existiert, sodass  $A(n)$  wahr ist für alle  $n \geq K_0$  (d. h. für alle genügend großen  $n$ , d. h.  $A(n)$  wahr für alle bis auf endlich viele  $n \in \mathbb{N}$ ).

*Beispiel.*

$$a_n \rightarrow a, n \rightarrow \infty \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0 \text{ ist } a_n \in U_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon \text{ für fast alle } n.))$$

**Satz 7.1.9.** Seien  $(a_n)_n, (b_n)_n$  konvergente reelle Folgen,  $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b, n \rightarrow \infty$ . Dann gilt

1. Aus  $a_n \leq b_n$  für fast alle  $n$  folgt  $a \leq b$ .
2. Sind  $c, d \in \mathbb{R}, c \leq a_n \leq d$  für fast alle  $n \Rightarrow c \leq a \leq d$
3. (Sandwichlemma) Ist  $a_n \leq c_n \leq b_n$  für fast alle  $n$  ( $(c_n)_n$  weitere reelle Folge) und  $a = b \Rightarrow (c_n)_n$  konvergiert und  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a (= b)$ .

*Beweis.* 1. Bild: Formal:  $\exists K_0 \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n \quad \forall n \geq K_0$ .

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists K_1 \in \mathbb{N}, K_2 \in \mathbb{N} : \quad a_n \in U_\varepsilon(a) \forall n \geq K_1, \quad a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \\ \Rightarrow K := \max(K_0, K_1, K_2) \quad b_n \in U_\varepsilon(b) \forall n \geq K_2, \quad b - \varepsilon < b_n < b + \varepsilon. \end{aligned}$$

$$\text{Ang. } a > b : \varepsilon := \frac{a-b}{2} > 0 \Rightarrow$$

$$K \text{ wie oben } :\Rightarrow a < a_n + \varepsilon \leq b_n + \varepsilon < b + \varepsilon = b + 2 \frac{a-b}{2} = a \Rightarrow a < a$$

$\nRightarrow a \leq b$ . Andere Möglichkeit:

$$a_n \leq b_n, \forall \varepsilon > 0 : a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon, b - \varepsilon < b_n < b + \varepsilon \quad \forall n \geq K.$$

$$a < a_n + \varepsilon \leq b_n + \varepsilon < b + 2\varepsilon \Rightarrow \underbrace{a - b < 2\varepsilon}_{\Rightarrow a-b \leq 0 \Leftrightarrow a \leq b} \quad \forall \varepsilon > 0.$$

2. Nehme  $b_n = c, b_n \rightarrow c$ .

$$\text{Da } b_n = c \leq a_n \xrightarrow{1} c = \lim b_n \leq \lim a_n = a.$$

$$\text{Nehme auch } b_n = d, a_n \leq d = b_n \xrightarrow{1} a \leq \lim b_n = d. \checkmark$$

3. Haben  $\forall \varepsilon > 0$ .

$$\begin{aligned} \exists K_0 \in \mathbb{N} : & \quad a_n \leq c_n \leq b_n \quad \forall n \geq K_0 \\ \exists K_1, K_2 \in \mathbb{N} : & \quad a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \quad \forall n \geq K_1 \\ & \quad \underbrace{b - \varepsilon}_{=a-\varepsilon} < b_n < \underbrace{b + \varepsilon}_{=a+\varepsilon} \quad \forall n \geq K_2. \text{ (da } b = a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall n \geq K : a - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \varepsilon \\ \Rightarrow a - \varepsilon < c_n < a_n + \varepsilon \Leftrightarrow c_n \in U_\varepsilon(a) \quad \forall n \geq K \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$  konvergiert  $(c_n)_n$  gegen  $a$ !

□

Achtung!  $a_n < b_n \forall n, a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b \nRightarrow a < b$ .

Bsp.  $a_n = 0, b_n = \frac{1}{n}$ .

**Definition 7.1.10** (Uneigentliche Konvergenz). Die Folge  $(a_n)_n$  konvergiert uneigentlich (divergiert bestimmt) gegen  $+\infty$ , falls

$$\forall R > 0 \exists K \in \mathbb{N} \text{ mit } a_n > R \quad \forall n \geq K.$$

Schreiben  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  oder  $a_n \rightarrow +\infty, n \rightarrow \infty$  Analog für  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ , falls

$$\forall R < 0 \exists K \in \mathbb{N} : a_n < R \quad \forall n \geq K.$$

*Beispiel.* Ist  $a > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = +\infty, 0 < \frac{1}{q} < 1$ .

*Beweis.*  $\frac{1}{q^n} = \left(\frac{1}{q}\right)^n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$

d. h. zu  $R > 0 \exists K \in \mathbb{N} : \frac{1}{q^n} < \frac{1}{R} \quad \forall n \geq K$ .



$\Leftrightarrow q^n > R \quad \forall n \geq K$ . Also  $\lim q^n = +\infty$  nach Def.

Insgesamt:

$$\begin{array}{ll} q > 1 & \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = +\infty. \\ q = 1 & \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 1. \\ -1 < q < 1 & \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0. \\ q \leq 1 & \Rightarrow (q^n)_n \text{ ist nicht konvergent.} \end{array}$$

Ist  $q < 1 \Rightarrow (q^n)_n$  nicht beschränkt ist.  $\square$

**Satz 7.1.11** (Kehrwerte). 1. Aus  $|a_n| \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$  folgt  $\frac{1}{a_n} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ .

2. Aus  $a_n \rightarrow 0, a_n > 0$  (bzw.  $a_n < 0$ )  $\forall n$  folgt  $\frac{1}{a_n} \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$  ( $\frac{1}{a_n} \rightarrow -\infty, n \rightarrow \infty$ ).

*Beweis.* Übungsaufgabe  $\square$

## 8 Monotone Konvergenz

**Definition 8.0.1.** Eine Folge  $(a_n)_n$  heißt  
monoton wachsend, falls  $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

monoton fallend, falls  $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

Ähnlich: monoton wachsend (fallend) für fast alle  $n \in \mathbb{N}$ , falls  $K \in \mathbb{N}$  existiert mit  $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \geq K$  (bzw.  $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \geq K$ ).

Ist

$a_n < a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ , so heißt  $a_n$  streng monoton wachsend.

$a_{n+1} < a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ , so heißt  $a_n$  streng monoton fallend.

**Satz 8.0.2.** Jede monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge ist konvergent. Jede monoton fallende, nach unten beschränkte Folge ist konvergent.

*Beweis.*  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$  (oder  $\forall n \geq K \in \mathbb{N}$ )  
und  $\exists C \in \mathbb{R} : a_n \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N}$  (oder  $\forall n \geq K \in \mathbb{N}$ )

$$B := \{a_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}, b \neq \emptyset \text{ und } B \leq C.$$

$\xRightarrow{\text{Vollst.axiom}} L := \sup B$  die kleinste obere Schranke für  $B$ .

$\Rightarrow a_n \leq L \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

Und:  $L$  kleinste ob. Schranke  $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : L - \varepsilon$  keine obere Schranke für  $B$ .

$$\Rightarrow \exists K \in \mathbb{N} : L - \varepsilon < a_K \leq a_{K+1} \leq a_{K+2} \leq \dots \leq a_n \quad \forall n \geq K.$$

$$\forall n \geq K : L - \varepsilon < a_n \leq L < L + \varepsilon \Leftrightarrow a_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$$

$\Leftrightarrow (a_n)_n$  konvergiert gegen  $L$ .

Ist  $a_{n+1} \leq a_n, a_n \geq C \quad \forall n \in \mathbb{N}$ , so betrachte  $b_n := -a_n \leq -C$  und  $b_{n+1} \geq b_n$ .

Dann ersten Fall anwenden!  $\square$

*Beispiel (1).*  $x_0 = 0, \quad x_{n+1} := \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right)$  konvergent gegen  $\sqrt{a}, a > 0$ .

Ang.:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$  existiert, dann auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = l, l > 0$

$$\xRightarrow{\text{Grenzwertsätze}} l = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right) \right) = \frac{1}{2} \left( l + \frac{a}{l} \right) \Rightarrow l^2 = a, l = \sqrt{a}.$$

*Beispiel (2).*  $f_n := \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n$  Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n$  existiert  
=:  $e$ .