1 Existenz von Wurzeln (in $\mathbb{R}$)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $a > 0$. Dann heißt eine Zahl α n-te Wurzel von a, schreiben $\alpha = a^{\frac{1}{n}}$ oder $\sqrt[n]{a}$, falls $a^n = a$.

Satz 1.0.1. Sei $\alpha \in \mathbb{R}, a > 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann existiert die n-te Wurzel von a als reelle Zahl. D.h. $\exists! \alpha \in \mathbb{R}$ mit $\alpha > 0$ und $\alpha^n = a$.

Bemerkung. Für die rationalen Zahlen ist dies falsch!

Beweis. Angenommen, die Beh. gilt für $a \geq 1$. Sei $0 < b < 1$. Setze $a := \frac{1}{b} > 1 \Rightarrow \exists! \alpha > 0 : \alpha^n = a = \frac{1}{b}$. Setze $\beta := \frac{1}{\alpha}$.
Dann gilt also

$$\beta^n = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^n = \frac{1}{\alpha^n} = \frac{1}{a} = b.$$

Also nehme an $a \geq 1$. Ist $a = 1$, so ist $\alpha = 1$ die einzige Lösung von $\alpha^n = 1$. Außerdem können wir $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1$ wählen. Also sei $a > 1, n \in \mathbb{N}, n > 1$. Setze

$$A := \{x \in \mathbb{R} | 0 < x, x^n < a\}$$

Dann ist $1 \in A$ und somit $A \neq \emptyset$. Außerdem ist A nach oben beschränkt, denn ist $y \geq a$, so folgt

$$y^n \geq a^n = \underbrace{a \cdot a \ldots \cdot a}_{n\text{-mal}} > \underbrace{1 \cdot 1 \ldots \cdot 1}_{n\text{-mal}} \cdot a = a$$

Also ist $A \leq a$.

$$\overset{\text{Vollst.axiom}}{\Rightarrow} \alpha := \sup A \in \mathbb{R} \text{ existiert.}$$

Da $1 \in A \Rightarrow \alpha \geq 1 > 0$.
α^n ist eine reelle Zahl für die gilt nach Anordnungsaxiom entweder $\alpha^n < a, \alpha^n > a$ oder $\alpha^n = a$.
1. Fall: Annahme: $\alpha^n < a$.

Sei $0 < \delta \leq 1$. Dann gilt (binom. Formel)

$$\begin{aligned}
(\alpha+\delta)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^k \delta^{n-k} \\
&= \alpha^n + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \alpha^k \delta^{n-k} \\
&= \alpha^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k-1} \underbrace{\alpha^{k-1}}_{\leq a^{k-1}} \underbrace{\delta^{n+1-k}}_{\leq \delta \cdot \delta^{n-k} \leq \delta} \\
&\leq \alpha^n \delta \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k-1} \alpha^{k-1} \\
&\leq \alpha^n \delta \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^k \\
&= \alpha^n + \delta(a+1)^n (*)
\end{aligned}$$

$\alpha^n < a$ nach Annahme und $\delta := \frac{1}{2} \min\left(1, \frac{a-\alpha^n}{(a+1)^n}\right)$
Dann gilt $0 < \delta \leq 1$ und $(*)$

$$(\alpha+\delta)^n \leq \alpha^n + \delta(a+1)^n \leq \alpha^n + \frac{1}{2}(a-\alpha^n) = \frac{1}{2}(\alpha^n + a) < \frac{1}{2}(a+a) = a$$

Somit ist $\alpha < \alpha + \delta$ ↯ α ist $\sup A$.
2. Fall: Annahme: $\alpha^n > a, 0 < \delta \leq 1$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow (\alpha-\delta)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^{n-k} (-\delta)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^{n-k} (-1)^k \delta^k \\
&= \alpha^n + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} \alpha^{n-1-k} (-1)^{k+1} \delta^{k+1} \\
&= \alpha^n - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} \alpha^{n-1-k} (-1)^k \delta^k \\
&\geq \alpha^n - \delta \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} a^{n-k+1} \\
&= \alpha^n - \delta \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k \\
&\geq \alpha^n - \delta(a+1)^n (**)
\end{aligned}$$

Setze $\delta := \frac{1}{2} \min\left(1, \frac{\alpha^n - a}{(a+1)^n}\right)$. Dann gilt $0 \leq \delta \leq \frac{1}{2} < 1$.

$$(\alpha - \delta)^n \geq \alpha^n - \frac{1}{2}(\alpha^n + a) = \frac{1}{2}(\alpha^n + a) > \frac{1}{2}(a + a) \geq a.$$

Somit $\alpha - \delta$ eine obere Schranke für A. Da $\alpha - \delta < \alpha$, ist das ein Widerspruch zu $\alpha = \sup A$. Somit bleibt nur $\alpha^n = a$. $\square$