

1 Die reellen Zahlen

1.1 Körperaxiome (engl. field)

\mathbb{K} : Menge mit zwei Operationen „+“ und „ \cdot “.

$\forall a, b \in \mathbb{K}$ ist $a + b \in \mathbb{K} \wedge a \cdot b \in \mathbb{K}$ erklärt sollen kompatibel sein.

Definition 1.1.1 (Körperaxiome). In einem Körper gelten diese Axiome:

1. Kommutativität: $\forall a, b \in \mathbb{K} : a + b = b + a, a \cdot b = b \cdot a$
2. Assoziativität: $\forall a, b, c \in \mathbb{K} : a + (b + c) = (a + b) + c, a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
3. Existenz des neutralen Elements:
 $\exists 0 \in \mathbb{K} : a + 0 = 0 + a = a \forall a \in \mathbb{K}$
 $\exists 1 \in \mathbb{K} : a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \forall a \in \mathbb{K}$
4. Existenz eines inversen Elements:
 $\forall a \in \mathbb{K} \exists -a \in \mathbb{K} : a + (-a) = 0$
 $\forall a \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \exists \frac{1}{a} \in \mathbb{K} : a \cdot \frac{1}{a} = 1$
 Es gilt: $0 \neq 1$.
5. Distributivgesetz: $\forall a, b, c \in \mathbb{K} : a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Beispiel. $\mathbb{Q} = \frac{m}{n}, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}$ ist ein Körper.

\mathbb{F}_2 :

+	0	1
0	0	1
1	1	0

\cdot	0	1
0	0	0
1	0	0

 ist ein Körper.

Bemerkung. .

1. Somit ist ein Körper \mathbb{K} mit „+“ eine kommutative Gruppe und $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ mit „ \cdot “ auch eine kommutative Gruppe.
2. Die neutralen Elemente sind eindeutig bestimmt.
 z.B.: angenommen, 0_1 und 0_2 sind neutrale Elemente mit „+“.
 $\Rightarrow 0_1 \stackrel{(3)}{=} 0_1 + 0_2 \stackrel{(1)}{=} 0_2 + 0_1 \stackrel{(2)}{=} 0_2$
 analog für Multiplikation

Definition 1.1.2. Zu $a \in \mathbb{K}$ ist $-a$ das Inverse bzgl. der Addition
 schreibe $a - b := a + (-b)$.

Zu $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ sei a^{-1} das Inverse bzgl. der Multiplikation.

Ist $b \neq 0$, so schreiben wir $\frac{a}{b} := a \cdot b^{-1} = b^{-1} \cdot a$.

schreibe $(ab) := a \cdot b$.

Lemma 1.1.3 (Rechnen in einem Körper). .

1. Umformen von Gleichungen

$$\forall a, b, c \in \mathbb{K} :$$

$$\text{aus } a + b = c \text{ folgt } a = c - b$$

$$\text{aus } a \cdot b = c, b \neq 0 \text{ folgt } a = \frac{c}{b}$$

2. Allgemeine Rechenregeln

$$-(-a) = a$$

$$(a^{-1})^{-1} = a, \text{ falls } a \neq 0$$

$$-(a + b) = (-a) + (-b)$$

$$(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$$

$$a \cdot 0 = 0$$

$$a(-b) = -(ab), (-a)(-b) = ab$$

$$a(b - c) = ab - ac$$

$$ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0 \text{ (Nullteilerfreiheit)}$$

$$\text{Beweis. } 0 = a + (-a) = (-a) + a$$

$$\Rightarrow -(-a) = a$$

$$(a + b) + ((-a) + (-b)) = (a + (-a)) + (b + (-b)) = 0 + 0 = 0$$

$$\Rightarrow -(a + b) = (-a) + (-b)$$

benutzen wir auch Eindeutigkeit des inversen Elements

$$\text{analog zeigt man } (a^{-1})^{-1} = a \text{ und } (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = a^{-1}b^{-1}$$

$$\text{z.B.: } (ab) \cdot (b^{-1}a^{-1}) = a(b \cdot b^{-1})a^{-1} = (a \cdot 1)a^{-1} = a \cdot b^{-1} = 1$$

$$\text{Ferner } a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0 = a \cdot 0 + 0$$

$$\Rightarrow a \cdot 0 = a \cdot 0 - a \cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow a \cdot b + a \cdot (-b) = a \cdot (b + (-b)) = a \cdot 0 = 0$$

$$\stackrel{\text{Eind. d. Inv.}}{\Rightarrow} -ab = a(-b)$$

$$\text{Somit auch } (-a)(-b) = -((-a)b) = -(b(-a)) = (-ba) = -(-ab) = ab$$

$$\text{und } a(b - c) = a(b + (-c)) = ab + a(-c) = ab + (-ac) = ab - ac.$$

$$\text{ist } ab = 0 \text{ und } a \neq 0 \Rightarrow 0 = (ab)\frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot (ab) = (\frac{1}{a} \cdot a)b = 1b = b$$

$$\text{also ist } b = 0.$$

□

Satz 1.1.4 (Bruchrechnen). $a, b, c, d \in \mathbb{K}, c \neq 0, d \neq 0$.

Dann gilt

$$1. \frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ad+bc}{cd}$$

$$2. \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{ab}{cd}$$

$$3. \frac{a/c}{b/d} = \frac{ad}{bc}, \text{ falls auch } b \neq 0 \text{ ist.}$$

Beweis. Übung

□

Beispiel. rationale Zahlen sind ein Körper
schreiben $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ für einen Körper

1.2 Die Anordnungsaxiome

Definition 1.2.1. Sei \mathbb{K} (genauer $(\mathbb{K}, +, \cdot)$) ein Körper. Dann heißt $>$ eine Anordnung falls

1. Für jedes $a \in \mathbb{K}$ gilt genau eine der Aussagen $a > 0, a = 0, -a > 0$
(wenn $a \in \mathbb{K}$, mit $a > 0$ positiv)
2. Aus $a > 0$ und $b > 0$ folgt
 $a + b > 0$ und $a \cdot b > 0$

Wir nennen $(\mathbb{K}, +, \cdot, >)$ einen angeordneten Körper.

Bemerkung. Statt $-a > 0$ schreiben wir $a < 0$

Statt $a - b > 0$ schreiben wir $a > b$

Bild:



Statt $a - b < 0$ schreiben wir $a < b$.

$a \geq b$, falls $a > b \vee a = b$

$a \leq b$, falls $a < b \vee a = b$.

Satz 1.2.2. Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot, >)$ ein angeordneter Körper. Dann gilt

1. für $a, b \in \mathbb{K}$ gilt genau eine der Relationen $a > b, a = b, a < b$ (Trichotomie)
2. Aus $a > b, b > c$ folgt $a > c$ (Transitivität)
3. Aus $a > b$ folgt:
$$\begin{cases} a + c > b + c, \forall c \in \mathbb{K} \\ ac > bc, \text{ falls } c > 0 \\ ac < bc, \text{ falls } c < 0 \end{cases}.$$
4. Aus $a > b$ und $c > d$ folgt:
$$\begin{cases} a + c > b + d \\ ac > bd, \text{ falls } b, d > 0 \end{cases}$$
5. Für $a \neq 0$ ist $a^2 > 0$.

6. Aus $a > 0$ folgt $\frac{1}{a} > 0$.

7. Aus $a > b > 0$ folgt $0 < \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

8. Aus $a > b, 0 < \lambda < 1$ folgt $b < \lambda b + (1 - \lambda)a < a$.

Bemerkung. Auf \mathbb{F}_2 kann es keine Anordnung geben!

Beweis. 1. Direkt aus (A.1) und Def. von $a > b$.

$$2. \quad a - c = \underbrace{(a - b)}_{>0} + \underbrace{(b - c)}_{>0} \stackrel{(A.2)}{>} 0.$$

$$3. \quad (a + c) - (b + c) = a - b > 0$$

$$ac - bc = \underbrace{(a - b)}_{>0} \cdot c \stackrel{(A.2)}{>} 0, \text{ falls } c > 0$$

Ist $c < 0$, so ist $-c > 0$

$$\Rightarrow bc - ac = \underbrace{(a - b)}_{>0} \cdot \underbrace{(-c)}_{>0} \stackrel{(A.2)}{>} 0$$

$$ac - bd = ac - bc + bc - bd = \underbrace{(a - b)}_{>0} \cdot \underbrace{c}_{>0} + \underbrace{b}_{>0} \cdot \underbrace{(c - d)}_{>0} \stackrel{(A.2)}{>} 0.$$

$$4. \quad (a + c) - (b + d) = (a - b) + (c - d) > 0 \text{ nach (A.2)}$$

$$ac - bd = ac - bc + bc - bd = (a - b)c + b(c - d)$$

$$\text{Ist } b = 0 \Rightarrow a > b = 0 \Rightarrow ac > 0 = bd$$

$$\text{Ist } b < 0 \Rightarrow (-b)d > 0 \Rightarrow -bd > 0 \Rightarrow bd < 0 \Rightarrow ac < -bd \Rightarrow$$

$$\underbrace{ac}_{>0} + \underbrace{(-bd)}_{>0} \stackrel{(A.2)}{>} 0.$$

5. Fallunterscheidung:

$$\text{ist } a > 0 \Rightarrow a^2 = a \cdot a > 0 \text{ (A.2)}$$

$$\text{ist } a < 0 \Rightarrow a^2 = (-a) \cdot (-a) > 0 \text{ (A.2)}$$

6. sei $a > 0$:

$$\stackrel{5.}{\Rightarrow} \left(\frac{1}{a}\right) > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} = \underbrace{\left(\frac{1}{a}\right)^2}_{>0} \cdot \underbrace{a}_{>0} > 0.$$

7. aus $a > b > 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{1}{b}(a - b) \frac{1}{a} > 0.$$

$$\begin{aligned}
8. \quad & a > b, 0 > \lambda > 1 \Rightarrow \lambda > 0 \wedge 1 - \lambda > 0 \\
& b = \lambda b + \underbrace{(1 - \lambda)b}_{< (1 - \lambda)a} \\
& < \lambda b + (1 - \lambda)a < \lambda a + (1 - \lambda)a = a \\
& \Rightarrow b < \lambda b + (1 - \lambda)a = a. \\
& \text{Insbesondere } \lambda = 1/2 \Rightarrow b < 1/2b + 1/2a = \frac{a+b}{2} < a.
\end{aligned}$$

□

Definition 1.2.3 (Betrag). Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot, >)$ ein angeordneter Körper. Betrag von $a \in \mathbb{K}$ ist gegeben durch

$$|a| := \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq 0 \\ -a, & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

auch noch $a, b \in \mathbb{K}$

$$\max(a, b) := \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq b \\ b, & \text{falls } a < b \end{cases}$$

$$\min(a, b) := \begin{cases} a, & \text{falls } a \leq b \\ b, & \text{falls } a > b \end{cases}$$

Bemerkung. .

1. $a, b \in \mathbb{K}$
 $|a - b|$ = Abstand von a zu b .
 $|a| = |a - 0|$ = Abstand von a zu 0.
2. $|a| = \max(a, -a)$.

Satz 1.2.4. $(\mathbb{K}, +, \cdot, >)$ ang. Körper
Dann gilt $\forall a, b \in \mathbb{K}$:

1. $|-a| = |a|$ und $a \leq |a|$
2. $|a| \geq 0$ und $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$
3. $|ab| = |a| |b|$
4. $|a + b| \leq |a| + |b|$ (Dreiecksungleichung)
5. $||a| - |b|| \leq |a - b|$ (umgekehrte Dreiecksungleichung)

Beweis. .

$$1. \quad \begin{aligned} |-a| &= \begin{cases} -a, & -a \geq 0 \\ -(-a), & -a \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} -a, & a \leq 0 \\ a, & a \geq 0 \end{cases} = |a| \\ |a| - a &= \begin{cases} a - a, & a \geq 0 \\ -a - a, & a < 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & a \geq 0 \\ -(a + a), & a < 0 \end{cases} \geq 0. \end{aligned}$$

alternativ: $a \leq \max(a, -a) = |a|$.

2.

3. Hier ändern sich die linke und rechte Seite nicht, wenn man a bzw. b durch $-a$ bzw. $-b$ ersetzt.

Also, o.B.d.A. können wir annehmen, dass $a, b \geq 0$.

$$\Rightarrow |ab| = ab = |a| |b|.$$

$$4. \quad \begin{aligned} &\stackrel{\text{Satz 1 (5)}}{\Rightarrow} |a + b|^2 = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = |a|^2 + 2 \underbrace{ab}_{\geq 0} \leq |ab| + |b|^2 \\ &\stackrel{(2)}{\leq} |a|^2 + 2|ab| + |b|^2 \\ &\stackrel{(3)}{|a|^2 + 2|a||b| + |b|^2}. \\ &\text{Also } (a + b)^2 \leq (|a| + |b|)^2 \\ &\stackrel{\text{H.A.}}{\Rightarrow} |a + b| \leq |a| + |b|. \\ &\text{H.A. aus } |c|^2 \leq |d|^2 \text{ folgt } |c| \leq |d| \text{ (Kontraposition)}. \end{aligned}$$

$$5. \quad \begin{aligned} |a| &= |a - b + b| = |(a - b) + b| \stackrel{(4)}{\leq} |a - b| + |b| \\ |a| - |b| &\leq |a - b| \quad \forall a, b \in \mathbb{K}. \\ \text{Jetzt: Symmetrieargument. (Vertausch von } a \text{ und } b) \\ \Rightarrow |b| - |a| &\leq |b - a| = |(-b - a)| = |a - b| \\ \text{also } |b| - |a| &\leq |a - b| \\ |a| - |b| &\leq |a - b| \\ ||a| - |b|| &= \max(|a| - |b|, -(|a| - |b|)) = \max(|a| - |b|, |b| - |a|) \leq |a - b|. \end{aligned}$$

□

Beispiel. Sei $a, b \in \mathbb{K}$ ein angeordneter Körper. Aus $|b - a| \leq b/2, 2 = 1 + 1$ folgt $a \geq b/2$ Bild:

$$\text{Beweis. } b - a \leq |b - a| \leq b/2 \Rightarrow a \geq b - b/2 = b/2.$$

□

Korollar 1.2.5 („geometrisch-arithmetische Ungleichung“). Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot, >)$ ein ang. Körper, $a, b \in \mathbb{K}$

$$\Rightarrow ab \leq \left(\frac{a + b}{2} \right)^2.$$

Wenn Gleichheit gilt, so folgt $a = b$.

Beweis. In Übung

□

Fakt:

- In jedem angeordneten Körper gilt $0 < 1$!
- Es gibt keine Anordnung, die \mathbb{F}_2 zu einem angeordneten Körper macht. (H.A.)

1.3 Obere und untere Schranken, Supremum und Infimum

Notation: a ist nicht negativ, falls $a \geq 0$.

natürlich $a = b \Leftrightarrow a \leq b \wedge a \geq b$.

Im Folgenden ist \mathbb{K} immer ein angeordneter Körper. $A, B \subset \mathbb{K}$, $A, B \neq \emptyset$ und $\gamma \in \mathbb{K}$, so bedeutet $A \leq \gamma : \forall a \in A : a \leq \gamma$ (γ ist obere Schranke für A).

$B \geq \beta : \forall b \in B : b \geq \beta$ (β ist untere Schranke für B).

Analog sind $a < \gamma$, $A > \gamma$, $A < B$, usw. definiert.

Hat A eine obere Schranke, so heißt A nach oben beschränkt. Hat B eine untere Schranke, so ist B nach unten beschränkt. A ist beschränkt, falls es nach oben und unten beschränkt ist.

Ist $A \leq \alpha$ und $\alpha \in A$, so heißt α größtes (maximales) Element von A , schreibe $\alpha = \max A$ (Maximum).

Ist $B \geq \beta$ und $\beta \in B$, so heißt β kleinstes (minimales) Element von B , schreibe $\beta = \min B$ (Minimum).

Man zeige, dass \max und \min eindeutig sind, sofern sie existieren.

$[0, 1) := \{x \in \mathbb{K} \mid 0 \leq x < 1\}$ hat kein Maximum bzw. kein maximales Element.

Definition 1.3.1. Sei $A \subset \mathbb{K}$, $A \neq \emptyset$. Dann ist $\gamma \in \mathbb{K}$ die kleinste obere Schranke (oder Supremum), falls $A \leq \gamma$ und aus $A \leq n$ folgt $\gamma \leq n$.

Schreibe $\gamma = \sup A = \sup(A)$.

Analog: β ist die größte untere Schranke von A (Infimum), falls $\beta \leq A$ und aus $\eta \leq A$ folgt $\eta \leq \beta$.

Schreibe $\beta = \inf A = \inf(A)$.

Beispiel. $P := \{x \in \mathbb{K} \mid x > 0\}$

\Rightarrow

1. P ist nicht nach oben beschränkt.
2. P hat kein Minimum, aber $\inf P = 0$.

Beweis. .

1. Ang. γ ist obere Schranke für P . D.h. $\forall x \in P$ folgt $0 < x \leq \gamma \Rightarrow \gamma > 0 \Rightarrow \gamma \in P \Rightarrow 0 < \gamma = \gamma + 0 < \gamma + 1 \in P \Rightarrow \gamma + 1 \in P$ und $\gamma + 1 > \gamma$ ist nicht obere Schranke für P (Widerspruch!) \nexists
2. $2 := 1 + 1 > 1 > 0$
 Ang. $\min P := \eta$ existiert. $\Rightarrow \eta \in P, \eta > 0, \tilde{x} := \frac{\eta}{2} = \frac{0+\eta}{2} < \eta$.
 Es gilt $0 = \inf P$.
 Sicherlich $0 < P$, also ist 0 eine untere Schranke für P .
 0 ist die größte untere Schranke, denn nach obigem Argument ist jede Zahl > 0 keine untere Schranke für P !

□

Lemma 1.3.2. $A \subset \mathbb{K}, A \neq \emptyset$.

1. $\alpha := \sup A \Leftrightarrow \alpha \geq A \wedge \forall \varepsilon > 0 \exists a \in A : \alpha - \varepsilon < a$.
2. $\beta := \inf B \Leftrightarrow \beta \leq B \wedge \forall \varepsilon > 0 \exists b \in B : b < \beta + \varepsilon$.

Beweis. .

1. „ \Rightarrow “: Sei $\alpha = \sup A$. Also α ist die kleinste obere Schranke für A . D.h. $\alpha \geq A$ und $\forall \varepsilon > 0$ ist $\varepsilon > 0 < \alpha$, also ist $\alpha - \varepsilon$ keine obere Schranke für A . D.h. $\exists a \in A : \alpha - \varepsilon < a$.
 „ \Leftarrow “: Sei $\alpha \geq A \wedge \forall \varepsilon > 0 \exists a \in A : \alpha - \varepsilon < a$. Also ist α eine obere Schranke für A . Sei $\tilde{\alpha} < \alpha$.
 Setze $\varepsilon := \alpha - \tilde{\alpha} > 0 \Rightarrow \exists a \in A : \tilde{\alpha} = \alpha - \varepsilon < a \Rightarrow \tilde{\alpha}$ ist keine obere Schranke für a . $\Rightarrow \alpha$ ist die kleinste obere Schranke.
2. $A := -B = \{-b | b \in B\}$. Beachte: $\sup A = \sup(-B) = -\inf B$.

□

1.4 Das Vollständigkeitsaxiom

Definition 1.4.1. Ein angeordneter Körper $(\mathbb{K}, +, \cdot, >)$ erfüllt das Vollständigkeitsaxiom, falls

Jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge hat ein Supremum.

Solch einen Körper nennt man ordnungsvollständig. \mathbb{R} , der Körper der reellen Zahlen, ist der ordnungsvollständige Körper. (Im Wesentlichen gibt es nur einen!)

$\mathbb{Q}; A := \{r \in \mathbb{Q} | r^2 < 2\}$
 Notation: $a, b \in \mathbb{R} \quad a < b$
 $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$ abgeschlossenes Intervall
 $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$ offenes Intervall
 $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$ nach rechts halboffenes Intervall
 $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$ nach links halboffenes Intervall
 Intervalllänge: $b - a$
 unbeschränkte Intervalle:
 $(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} | x \leq a\}$
 $[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} | x \geq a\}$
 $(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} | x < a\}$
 $(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} | x > a\}$.

1.5 Die natürlichen Zahlen \mathbb{N}

(als Teilmenge von \mathbb{R})

n natürliche Zahl, $n = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n\text{-mal}}$ (zirkulär \nexists)

Definition 1.5.1. Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ heißt induktiv, falls

1. $1 \in M$
2. Aus $x \in M$ folgt $x + 1 \in M$

Beispiel. $[1, \infty)$ ist induktiv.

\mathbb{R} ist induktiv.

$(1, \infty)$ ist nicht induktiv.

$\{1\} \cup [1 + 1, \infty)$ ist induktiv.

Beobachtung: Ein beliebiger Schnitt induktiver Mengen ist wieder induktiv.

J : Indexmenge A_0 induktiv $\forall j \in J$

$\Rightarrow \forall i \in J : 1 \in A_j \Rightarrow 1 \in \bigcap_{j \in J} A_j$

Ist $x \in \bigcap_{j \in J} A_j \Rightarrow \forall j \in J : x \in A_j \Rightarrow x + 1 \in A_j \Rightarrow x + 1 \in \bigcap_{j \in J} A_j$.

Definition 1.5.2 (natürliche Zahlen). .

$\mathbb{N} := \{x \in \mathbb{R} : \text{für jede induktive Teilmenge } M \in \mathbb{R} \text{ gilt } x \in M\} := \bigcap_{M \subset \mathbb{R} \text{ ist induktiv}} M$

Bemerkung. \mathbb{N} ist induktiv und \mathbb{N} ist die kleinste induktive Teilmenge von \mathbb{R} .

Satz 1.5.3 (Archimedisches Prinzip für \mathbb{R}). .

1. \mathbb{N} ist (in \mathbb{R}) nicht nach oben beschränkt!
2. $\forall x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0 \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < x$.

Beweis. 1. Angenommen, $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ ist nach oben beschränkt.

$\mathbb{N} \neq \emptyset$ (da $1 \in \mathbb{N}$)

Vollständigkeitsaxiom $\Rightarrow \alpha := \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$.

Setze $\varepsilon = 1$ in Lemma 3.3.2

$\alpha - 1$ ist nicht obere Schranke für \mathbb{N} .

$\exists n \in \mathbb{N} : n > \alpha - 1$

$\Rightarrow n + 1 > \alpha \in \mathbb{N}$ ~~zu~~ α ist obere Schranke von \mathbb{N} .

2. Sei $x > 0 \xrightarrow{\text{Satz 3.2.1 (6)}} \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : n > \frac{1}{x} \xrightarrow{\text{Satz 3.2.1 (7)}} x = \frac{1}{1/x} > \frac{1}{n}$. □

Satz 1.5.4 (Induktionsprinzip). Sei $M \subset \mathbb{N}$ mit

1. $1 \in M$
2. Ist $x \in M \Rightarrow x + 1 \in M$

Dann ist $M = \mathbb{N}$.

Beweis. $\Rightarrow M$ ist induktiv. \mathbb{N} kleinste induktive Teilmenge von \mathbb{R}

$\Rightarrow \mathbb{N} \subset M$

$M \subset \mathbb{N} \wedge \mathbb{N} \subset M \Leftrightarrow M = \mathbb{N}$. □

Korollar 1.5.5 (Vollständige Induktion). Für $n \in \mathbb{N}$ seien $A(n)$ Aussagen. Es gelte:

1. $A(1)$ ist wahr.
2. aus $A(n)$ ist wahr folgt $A(n + 1)$ ist wahr.

Beweis. Definiere $M := \{n \in \mathbb{N} | A(n) \text{ ist wahr}\} \subset \mathbb{N}$.

1. $\Rightarrow 1 \in M$, da $A(1)$ wahr ist
2. \Rightarrow sei $n \in M$, d.h. $A(n)$ ist wahr $\Rightarrow A(n + 1)$ ist wahr, d.h. $n + 1 \in M$.

Ind.prinzip $\xRightarrow{\text{Satz 4}} M = \mathbb{N}$, also sind alle $A(n)$ wahr! □

Notation: Induktive Definition von Summen und Produkten.

$a_1 + a_2 + \dots + a_n$ vage \dots

Summe:

$$\sum_{k=1}^1 a_k := a_1, (n=1), \sum_{k=1}^{n+1} a_k := \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) + a_{n+1}, n \in \mathbb{N}$$

Allgemein: untere Grenze $k = m$, obere Grenze $k = n$, Laufindex kann verschoben werden.

z.B.: $k = j + 1$

$$\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{j=m-1}^{n-1} a_{j+1} = \dots = \sum_{l=0}^{n-m} a_{l+m}$$

Ist $m > n$, definieren $\sum_{k=m}^{n-m} a_k := 0$ (leere Summe)

Produkt:

$$\prod_{k=1}^1 a_k := a_1, \prod_{k=1}^{n+1} a_k := \left(\prod_{k=1}^n a_k \right) \cdot a_{n+1}, n \in \mathbb{N}$$

Ähnlich $\prod_{k=m}^n a_k$, setzen für $m > n$ $\prod_{k=m}^n a_k := 1$ (leeres Produkt)

z.B.

$$a \in \mathbb{R}, a^n = \prod_{k=1}^n a, \text{ d.h. } a^1 = a, a^{n+1} = a^n \cdot a, n \in \mathbb{N} \text{ (induktive Definition)}$$

Rechenregeln gelten z.B.

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k, b_j \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, n$$

$$c \in \mathbb{R}, \sum_{k=1}^n (c \cdot a_k) = c \cdot \sum_{k=1}^n a_k$$

Satz 1.5.6 (Bernoullische Ungleichung).

$$x \in \mathbb{R}, x \geq -1, n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$$

gilt $(1+x)^n \geq 1 + nx$ ($\forall n \in \mathbb{N}, x \geq -1$)

mit „ $>$ “, falls $n > 1, x \neq 0$

($\forall n \in \mathbb{N}, x \geq -1, (1+x)^n \geq 1 + nx$)

Beweis. Vollständige Induktion:

Induktionsanfang:

$$n = 0 : (1 + x)^0 = 1 = 1 + 0x \checkmark$$

$$n = 1 : (1 + x)^1 = 1 + x = 1 + 1x \checkmark$$

Induktionsschritt: Induktionsvoraussetzung: es gelte für ein festes, aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} (1 + x)^n &\geq 1 + nx \\ (1 + x)^{n+1} &= \underbrace{(1 + x)^n}_{\geq 1 + nx} \cdot \underbrace{(1 + x)}_{> 0} \geq (1 + nx)(1 + x) = 1 + (n + 1)x + nx^2 \\ &= \begin{cases} \geq 1 + (n + 1)x, & x > -1 \\ > 1 + (n + 1)x, & x > -1, x \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

□

Satz 1.5.7 (geometrische Summe). Sei $x \neq 1$, dann ist

$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Beweis. Vollständige Induktion:

IA:

$$n = 0 : \sum_{k=0}^0 x^k = x^0 = 1 = \frac{1 - 0}{1 - 0} \checkmark$$

$$n = 1 : \sum_{k=0}^1 x^k = 1 + x = \frac{1 - x}{1 - x}(1 + x) = \frac{1 - x^2}{1 - x} \checkmark$$

IS:

IV: Es gelte für ein festes, aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n x^k &= \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \\ \Rightarrow \sum_{k=0}^n x^k + x^{n+1} &\stackrel{\text{IV}}{=} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} + x^{n+1} \\ &= \frac{1 - x^{n+1} + (1 - x)x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1 - x^{n+2}}{1 - x}. \end{aligned} \tag{1}$$

□

Beweis. ohne vollständige Induktion:

$$\begin{aligned}
 S_n &:= \sum_{k=0}^n x^k \\
 x \cdot S_n &= \sum_{k=0}^n x^k = \sum_{k=0}^n x^{k+1} = \sum_{j=1}^{n+1} x^j, \\
 \Rightarrow (1-x)S_n &= S_n - xS_n = \sum_{k=0}^n x^k - \sum_{k=1}^{n+1} x^k = x^0 - x^{n+1} = 1 - x^{n+1} \\
 \Rightarrow S_n &= \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}
 \end{aligned}$$

□

Satz 1.5.8 (Eigenschaften von \mathbb{N}). Es gilt

1. $\forall m, n \in \mathbb{N} : n + m \in \mathbb{N}$ und $n \cdot m \in \mathbb{N}$.
2. $\forall n \in \mathbb{N} : n = 1$ oder $(n > 1 \text{ und demnach } n - 1 \in \mathbb{N})$.
3. $\forall m, n \in \mathbb{N} : m \leq n : n - m \in \mathbb{N}_0$.
4. $\forall n \in \mathbb{N}$ gibt es kein $m \in \mathbb{N} : n < m < n + 1$.

Beweis. .

1. Gegeben $m \in \mathbb{N} : A := \{n \in \mathbb{N} | n + m \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}$

(a) $1 \in A$, denn $m \in \mathbb{N} : 1 + m = m + 1 \in \mathbb{N}$.

(b) Angenommen, $n \in A \Rightarrow (n + 1) + m = \underbrace{n + m}_{\in \mathbb{N}} + 1 \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow n + 1 \in A$$

somit ist A induktiv, also $\mathbb{N} \subset A \Rightarrow A = \mathbb{N}$.

2. Definiere $B := \{n \in \mathbb{N} | n = 1 \vee (n - 1 \in \mathbb{N} \wedge n - 1 \geq 1)\} \subset \mathbb{N}$
Dann ist B induktiv, denn

(a) $1 \in B, 2 = 1 + 1 \in B$

(b) Sei $1 \neq n \in B$, so folgt $1 \leq n - 1$ und somit $n = \underbrace{(n - 1)}_{\in \mathbb{N}} + 1 \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow n + 1 \in \mathbb{N} \text{ und } (n + 1) - 1 = n \geq 1 + 1 > 1. \text{ Somit ist } n + 1 \in B.$$

3. $C := \{n \in \mathbb{N} \mid \forall m \in \mathbb{N} \text{ mit } m \leq n \text{ ist } n - m \in \mathbb{N}_0\} \Rightarrow$

(a) $1 \in C$, denn ist $m \in \mathbb{N}$ und $m = 1$.

folgt nach b): $m = 1$

$\Rightarrow n - m = 1 - 1 = 0 \in \mathbb{N}_0$.

(b) ang. $n \in C$ und $m \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n + 1$.

Fallunterscheidung:

- $n = 1 \Rightarrow n + 1 - m = (n + 1) - 1 = n \in \mathbb{N}. \checkmark$
 $\Rightarrow n + 1 \in C$.

- $n > 1$ (und $m \leq n + 1$)

$\stackrel{\text{b)}}{\Rightarrow} m - 1 \in \mathbb{N} \text{ und } m - 1 \leq (n + 1) - 1 = n$

Da $n \in C, m - 1 \in \mathbb{N}, m - 1 \leq n \Rightarrow \underbrace{n - (m - 1)}_{=(n+1)-m} \in \mathbb{N}_0$

$\Rightarrow n + 1 \in C$.

4. H.A.

□