1 Etwas Logik

Eine (mathematische) Aussage ist ein Ausdruck, der wahr oder falsch ist.
z.B.

1. A : „$1 + 1 = 2$." (auch „$1 + 1 = 3$", „$1 + 1 = 0$")
2. B : „Es gibt unendlich viele Primzahlen."
3. C : „Es gibt unendlich viele Primzahlen p, für die $p + 2$ auch eine Primzahl ist." (Primzahlzwillingsvermutung)
4. D : „Die Gleichung $m\ddot{x} = F$ hat, gegeben $\dot{x}(0) = v_0, x(0) = x_0$, immer genau eine Lösung." (Lösung der Newtonschen Gleichung)
5. E : „Jede gerade natürliche Zahl größer als 2 ist die Summe zweier Primzahlen." (Goldbachsche Vermutung)
6. F : „Morgen ist das Wetter schön."
7. G : „Ein einzelnes Atom im Vakuum mit der Kernladungszahl Z kann höchstens $Z + 1$ Elektronen binden." (Ionisierungsvermutung, es ist noch nicht einmal bekannt, ob es eine Zahl Z gibt, sodass höchstens $Z + 1$ Elektronen gebunden werden.)
8. $H(k, m, n)$: „Es gilt: $k^2 + m^2 = n^2$." (z. B. $H(3, 4, 5)$ ist wahr.)

Sei $A(n)$ eine Aussage für jede natürliche Zahl n. Dann gilt:
Für jede nat. Zahl n ist $A(n)$ wahr, genau dann, wenn

1. $A(1)$ ist wahr.
2. Unter der Annahme, dass $A(n)$ wahr ist, folgt, dass $A(n + 1)$ wahr ist.

Beispiel. $A(n) : 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Beweis. Vollständige Induktion
Induktionsanfang:
$1 = \frac{1(1+1)}{2} \checkmark$
Induktionsschluss:
Wir nehmen an, dass $A(n)$ wahr ist (für $n \in \mathbb{N}$)
D. h. Induktionsannahme:
$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
Dann folgt:
$\underbrace{1 + 2 + \cdots + n}_{=\frac{n(n+1)}{2}} + (n + 1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n + 1)$
$= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$ $\square$

Bemerkung. Gaußscher Trick:
1)
$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1$
$2S = \underbrace{(n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1)}_{n\text{-mal}} \Leftrightarrow S = \frac{n(n+1)}{2}$.
2)
$S_n = 0 + 1 + 2 + \cdots + n$
$=$ Anzahl der Punkte in
$\approx$ Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks $= \frac{1}{2} * n * n$.
Also: Ansatz („geschicktes Raten", „scientific guess", englisch: ansatz):
$S_n = \underbrace{a_2 n^2 + a_1 n + a_0}_{\text{Polynom 2. Grades in n}}$
$a_2 = \frac{1}{2}$
Wie bekommt man $a_0, a_1, (a_2)$? $n = 0 : S_0 = 0 = a_2 * 0^2 + a_1 * 0 + a_0 \Rightarrow a_0 = 0$.
$n = 1 : S_1 = 1 = a_2 * 1^2 + a_1 * 1^2 = a_2 + a_1 = \frac{1}{2} + a_1$.
also: $a_1 = \frac{1}{2}$
$\Rightarrow$ Raten: $S_n = \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{2} n = \frac{n(n+1)}{2}$.

1.1 Grundbegriffe

Aussagen: Notation

$:$	„so, dass gilt"
$\exists$	„es gibt mindestens ein", „es existiert"
$\forall$	„für alle"
$\Rightarrow$	„impliziert"($A \Rightarrow B$ „aus A folgt B")
$\Leftrightarrow$	„genau dann, wenn"
$\neg A$	nicht A
$A \wedge B$	A und B
$A \vee B$	A oder B
$A := B$	A ist per Definition gleich B

Satz 1.1.1. Folgende Aussagen sind allein aus logischen Gründen immer wahr.

$\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$	Gesetz der doppelten Verneinung
$A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$	Kontraposition
$A \Rightarrow B \Leftrightarrow (\neg(A \wedge \neg B))$	beim Widerspruchsbeweis
$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$	de Morgan
$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$	de Morgan

Bemerkung. $A \Rightarrow B \Leftrightarrow B$ ist mindestens so wahr wie $A \Leftrightarrow A$ ist mindestens so falsch wie $B \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$.
$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B \wedge B \Rightarrow A)$.

Beispiel. $n \in \mathbb{N}$ ist gerade, falls $k \in \mathbb{N}$ existiert mit $n = 2k$.
$n \in \mathbb{N}$ ist ungerade, falls $\exists k \in \mathbb{N}_0 : \vee n = 2k + 1$.
Dann gilt: n ist gerade $\Leftrightarrow n^2$ ist gerade.

Beweis. „$\Rightarrow$“: n gerade $\Rightarrow n = 2k$, für $k \in \mathbb{N}$
$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ ist gerade.
Umgekehrt müssen wir zeigen:
„$\Leftarrow$“: n^2 gerade $\Rightarrow n$ gerade
Kontraposition: n ungerade $\Rightarrow n^2$ ungerade
Also sei $n = 2k+1, k \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = \underbrace{2(2k^2 + 2k)}_{\text{gerade}} +1 \Rightarrow$
n^2 ist ungerade. $\square$

Mengen (nach Cantor)
informell: Eine Menge ist eine Sammlung von Objekten (Elemente) zu einem neuen Objekt.
Vorsicht: Russels Paradox
genaue Definition von Zermelo-Fraenkel Axiome ($\rightarrow$ Logik Mengenlehre)
$a \in M$: a ist Element von M
$a \notin M$: a ist kein Element von M
z.B.:
$M = \{1, 4\}$
$1 \in M$
$5 \notin M$
Angabe von Mengen durch

- Auflistung
  $M = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_{17}\}$
- Eigenschaft
  $M = \{a | a \text{ hat Eigenschaft } E\}$

z.B.:

- $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$
- $\mathbb{Z} := \{x | x \in \mathbb{N} \vee x \in -\mathbb{N} \vee x = 0\}$
- $-\mathbb{N} := \{-n | n \in \mathbb{N}\}$

Definition 1.1.2. Sei M eine Menge und $A(x)$ Aussagen mit $x \in M$
$\forall x \in M : A(x)$ ist wahr, falls alle $A(x)$ wahr sind.
$\exists x \in M : A(x)$ ist wahr, falls mindestens eine Aussage $A(x)$ wahr ist.

Achtung: Zusammensetzen: Reihenfolge ist wichtig!

Beispiel. Töpfe := Menge der Töpfe
Deckel := Menge der Deckel
$A : \forall T \in$ Töpfe $\exists D \in$ Deckel : D passt auf T
(Für jeden Topf gibt es einen Deckel, der passt)
$B : \exists D \in$ Deckel $\forall T \in$ Töpfe : D passt auf T
(Es existiert mindestens ein Deckel, der auf alle Töpfe passt)

Negation:
$\neg(\forall x \in M : A(x))$
$\Leftrightarrow \exists x \in M : \neg A(x)$
$\neg(\exists x \in M : A(x))$
$\Leftrightarrow \forall x \in M : \neg A(x)$

Definition 1.1.3 (wichtige Mengen)**.** Seien M, N Mengen.

$$\begin{aligned}
\emptyset &:= \text{ die Menge ohne Elemente (leere Menge)}\\
M \cap N &:= \{x | x \in M \wedge x \in N\} \text{ (Schnitt)}\\
M \cup N &:= \{x | x \in M \vee x \in N\} \text{ (Vereinigung)}\\
M \setminus N &:= \{x | x \in M \wedge x \notin N\} \text{ (Differenzmenge)}\\
\mathcal{P}(M) &:= \{A | A \subset M\} \text{ die Menge aller Teilmengen von } M \text{ (Potenzmenge)}
\end{aligned}$$

Sei I eine Menge und für $i \in I$ eine Menge M_i.

$$\bigcap_{i \in I} M_i := \{x | \forall i \in I : x \in M_i\}.$$
$$\bigcup_{i \in I} M_i := \{x | \exists i \in I : x \in M_i\}.$$

Ist $M \cap N = \emptyset$, so heißen M und N divergent.
$M \subset N$, falls $\forall x \in M : x \in N$ (M Teilmenge von N).
$M = N$, falls M und N dieselben Elemente haben.
Insbesondere ist $(M = N) \Leftrightarrow M \subset N \wedge N \subset M$.
$M \subsetneq N : M \subset N \wedge M \neq N$ (M echte Teilmenge von N).

Beispiel. $\emptyset \subset M$
$M = \{1, 2\} \Rightarrow \mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

1. Eigenschaften von „$\subset$"

   (a) $\emptyset \subset M$

   (b) $M \subset M$

(c) $M = N \Leftrightarrow M \subset N \wedge N \subset M$

(d) $A \subset B \wedge B \subset C \Leftrightarrow A \subset C$

2. Assoziativität

   (a) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

   (b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

3. Kommutativität

   (a) $A \cup B = B \cup A$

   (b) $A \cap B = B \cap A$

4. Distributivgesetz

   (a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

   (b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$