

# Analysis I (WS 18/19)

Pavel Zwerschke

2. November 2018

# Inhaltsverzeichnis

|          |                                      |          |
|----------|--------------------------------------|----------|
| <b>0</b> | <b>Organisatorisches</b>             | <b>2</b> |
| <b>1</b> | <b>Was ist Analysis?</b>             | <b>3</b> |
| <b>2</b> | <b>Etwas Logik</b>                   | <b>3</b> |
| 2.1      | Grundbegriffe . . . . .              | 5        |
| <b>3</b> | <b>Die reellen Zahlen</b>            | <b>8</b> |
| 3.1      | Körperaxiome (engl. field) . . . . . | 8        |

## 0 Organisatorisches

### **Dozent**

Prof. Dr. Dirk Hundertmark (20.30, 2.028)

[dirk.hundertmark@kit.edu](mailto:dirk.hundertmark@kit.edu)

### **Übungsleiter**

Dr. Markus Lange (20.30, 2.030)

[markus.lange@kit.edu](mailto:markus.lange@kit.edu)

### **Übungszettel**

Ausgabe:

donnerstags unter [www.math.kit.edu/iana1/lehre/ana12018w/](http://www.math.kit.edu/iana1/lehre/ana12018w/)

Abgabe:

bis mittwochs um 19:00 in den Abgabekästen des Foyers des Mathematikgebäudes (20.30)

getackert, mit Namen, Matrikelnummer, Tutoriennummer und Deckblatt (optional) in das Fach mit der richtigen Kennzeichnung legen

Zettel dürfen zu zweit abgegeben werden

### **Übungsschein**

Jede K-Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet. Einen Übungsschein erhält wer 50% der Punkte aller K-Aufgaben erzielt.

### **Klausur**

Die Anmeldung findet über das Online-Portal statt. Die Klausur findet in KW 8 2019 statt. Der Übungsschein ist Voraussetzung für die Teilnahme an der Klausur.

# 1 Was ist Analysis?

## Zentrale Begriffe:

Grenzwerte von Folgen und Reihen, Funktionen, stetig, differenzierbar, integrieren, Differential- und Integralrechnung, Differentialgleichungen (Newton, Maxwell, Schrödinger), unendlich dimensionale Räume

*Beispiel.*  $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$

$$2S = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} + \dots$$

$$2S = 1 + S$$

$S$  entspricht der Wahrscheinlichkeit, dass irgendwann mal Kopf in einem Münzwurf kommt.

Vorsicht!

$$S = 1 + 2 + 4 + \dots$$

$$2S = 2 + 4 + 8 + \dots = -1 + 1 + 2 + 4 + \dots = -1 + S$$

$$S = -1$$

Natürlich Quatsch!

Formales Rechnen kann gefährlich sein!

- Was sind mathematische Aussagen?
- Wie macht man Beweise, wie findet man sie? (learning by doing)
- logische Zusammenhänge

# 2 Etwas Logik

Eine (mathematische) Aussage ist ein Ausdruck, der wahr oder falsch ist.

z. B.

1.  $A$  : „ $1 + 1 = 2$ .“ (auch „ $1 + 1 = 3$ “, „ $1 + 1 = 0$ “)
2.  $B$  : „Es gibt unendlich viele Primzahlen.“
3.  $C$  : „Es gibt unendlich viele Primzahlen  $p$  für die  $p + 2$  auch eine Primzahl ist.“
4.  $D$  : „Die Gleichung  $m\ddot{x} = F$  hat geg.  $\dot{x}(0) = v_0, x(0) = x_0$  immer genau eine Lösung.“
5.  $E$  : „Jede gerade natürliche Zahl größer als 2 ist die Summe zweier Primzahlen.“
6.  $F$  : „Morgen ist das Wetter schön.“

7.  $G$  : „Ein einzelnes Atom im Vakuum mit der Kernladungszahl  $Z$  kann höchstens  $Z + 1$  Elektronen binden.“

8.  $H(k, m, n)$  : „Es gilt:  $k^2 + m^2 = n^2$ .“ (z. B.  $H(3, 4, 5)$  ist wahr.)

Gegeben für natürliche Zahlen  $n$ , Aussagen  $A(n)$ , dann gilt:

Für jede nat. Zahl  $n$  ist  $A(n)$  wahr, genau dann, wenn

1.  $A(1)$  ist wahr.
2. Unter der Annahme, dass  $A(n)$  wahr ist, folgt, dass  $A(n + 1)$  wahr ist.

$$\text{Beispiel. } A(n) : 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

*Beweis.* Vollständige Induktion

Induktionsanfang:

$$1 = \frac{1(1+1)}{2} \quad \checkmark$$

Induktionsschluss:

Wir nehmen an, dass  $A(n)$  wahr ist (für  $n \in \mathbb{N}$ )

D. h. Induktionsannahme:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Dann folgt:

$$\begin{aligned} \underbrace{1 + 2 + \dots + n}_{= \frac{n(n+1)}{2}} + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} \end{aligned}$$

□

*Bemerkung.* Gaußscher Trick:

1)

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + n = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1$$

$$2S = \underbrace{(n+1) + (n+1) + \dots + (n+1)}_{n\text{-mal}} \Leftrightarrow S = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2)

$$S_n = 0 + 1 + 2 + \dots + n$$

= Anzahl der Punkte in

$\approx$  Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks  $= \frac{1}{2} * n * n$ .

Also: Ansatz („geschicktes Raten“, „scientific guess“, englisch: ansatz):

$$S_n = \underbrace{a_2 n^2 + a_1 n + a_0}_{\text{Polynom 2. Grades in } n}$$

Polynom 2. Grades in  $n$

$$a_2 = \frac{1}{2}$$

Wie bekommt man  $a_0, a_1, (a_2)$ ?  $n = 0 : S_0 = 0 = a_2 * 0^2 + a_1 * 0 + a_0 \Rightarrow a_0 = 0$ .

$$n = 1 : S_1 = 1 = a_2 * 1^2 + a_1 * 1^2 = a_2 + a_1 = \frac{1}{2} + a_1.$$

$$\text{also: } a_1 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \text{Raten: } S_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

## 2.1 Grundbegriffe

Aussagen: Notation

|                   |  |
|-------------------|--|
| :                 | „so, dass gilt“  |
| $\exists$         | „es gibt mindestens ein“, „es existiert“               |
| $\forall$         | „für alle“   |
| $\Rightarrow$     | „impliziert“ ( $A \Rightarrow B$ „aus $A$ folgt $B$ “) |
| $\Leftrightarrow$ | „genau dann, wenn“                                     |
| $\neg A$          | nicht $A$  |
| $A \wedge B$      | $A$ und $B$  |
| $A \vee B$        | $A$ oder $B$   |
| $A := B$          | $A$ ist per Definition gleich $B$                      |

*Satz 2.1. Folgende Aussagen sind allein aus logischen Gründen immer wahr.*

|   |                                 |
|---|---------------------------------|
| $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$                            | Gesetz der doppelten Verneinung |
| $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$ | Kontraposition                  |
| $A \Rightarrow B \Leftrightarrow (\neg(A \wedge \neg B))$   | beim Widerspruchsbeweis         |
| $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$     | de Morgan                       |
| $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$     | de Morgan                       |

*Bemerkung.*  $A \Rightarrow B \Leftrightarrow B$  ist mindestens so wahr wie  $A \Leftrightarrow A$  ist mindestens so falsch wie  $B \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$ .

$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B \wedge B \Rightarrow A)$ .

*Beispiel.*  $n \in \mathbb{N}$  ist gerade, falls  $k \in \mathbb{N}$  existiert mit  $n = 2k$ .

$n \in \mathbb{N}$  ist ungerade, falls  $\exists k \in \mathbb{N}_0 : \forall n = 2k + 1$ .

Dann gilt:  $n$  ist gerade  $\Leftrightarrow n^2$  ist gerade.

*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “:  $n$  gerade  $\Rightarrow n = 2k$ , für  $k \in \mathbb{N}$

$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$  ist gerade.

Umgekehrt müssen wir zeigen:

„ $\Leftarrow$ “:  $n^2$  gerade  $\Rightarrow n$  gerade

Kontraposition:  $n$  ungerade  $\Rightarrow n^2$  ungerade

Also sei  $n = 2k+1, k \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = \underbrace{2(2k^2+2k)}_{\text{gerade}}+1 \Rightarrow$

$n^2$  ist ungerade. □

**Mengen** (nach Cantor)

informell: Eine Menge ist eine Sammlung von Objekten (Elemente) zu einem neuen Objekt.

Vorsicht: Russels Paradox

genaue Definition von Zermelo-Fraenkel Axiome ( $\rightarrow$  Logik Mengenlehre)

$a \in M$  :  $a$  ist Element von  $M$

$a \notin M$  :  $a$  ist kein Element von  $M$

z.B.:

$$M = \{1, 4\}$$

$$1 \in M$$

$$5 \notin M$$

Angabe von Mengen durch

- Auflistung

$$M = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_{17}\}$$

- Eigenschaft

$$M = \{a \mid a \text{ hat Eigenschaft } E\}$$

z.B.:

- $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$

- $\mathbb{Z} := \{x \mid x \in \mathbb{N} \vee x \in -\mathbb{N} \vee x = 0\}$

- $-\mathbb{N} := \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$

*Definition 2.1.1.* Sei  $M$  eine Menge und  $A(x)$  Aussagen mit  $x \in M$

$\forall x \in M : A(x)$  ist wahr, falls alle  $A(x)$  wahr sind.

$\exists x \in M : A(x)$  ist wahr, falls mindestens eine Aussage  $A(x)$  wahr ist.

Achtung: Zusammensetzen: Reihenfolge ist wichtig!

*Beispiel.* Töpfe := Menge der Töpfe

Deckel := Menge der Deckel

$A : \forall T \in \text{Töpfe} \exists D \in \text{Deckel} : D \text{ passt auf } T$

(Für jeden Topf gibt es einen Deckel, der passt)

$B : \exists D \in \text{Deckel} \forall T \in \text{Töpfe} : D \text{ passt auf } T$

(Es existiert mindestens ein Deckel, der auf alle Töpfe passt)

Negation:

$$\neg(\forall x \in M : A(x))$$

$$\Leftrightarrow \exists x \in M : \neg A(x)$$

$$\neg(\exists x \in M : A(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in M : \neg A(x)$$

*Definition 2.1.2* (wichtige Mengen). Seien  $M, N$  Mengen.

$\emptyset$  := die Menge ohne Elemente (leere Menge)

$M \cap N := \{x \mid x \in M \wedge x \in N\}$  (Schnitt)

$M \cup N := \{x \mid x \in M \vee x \in N\}$  (Vereinigung)

$M \setminus N := \{x \mid x \in M \wedge x \notin N\}$  (Differenzmenge)

$\mathcal{P}(M) := \{A \mid A \subset M\}$  die Menge aller Teilmengen von  $M$  (Potenzmenge)

Sei  $I$  eine Menge und für  $i \in I$  eine Menge  $M_i$ .

$$\bigcap_{i \in I} M_i := \{x \mid \forall i \in I : x \in M_i\}.$$

$$\bigcup_{i \in I} M_i := \{x \mid \exists i \in I : x \in M_i\}.$$

Ist  $M \cap N = \emptyset$ , so heißen  $M$  und  $N$  divergent.

$M \subset N$ , falls  $\forall x \in M : x \in N$  ( $M$  Teilmenge von  $N$ ).

$M = N$ , falls  $M$  und  $N$  dieselben Elemente haben.

Insbesondere ist  $(M = N) \Leftrightarrow M \subset N \wedge N \subset M$ .

$M \subsetneq N : M \subset N \wedge M \neq N$  ( $M$  echte Teilmenge von  $N$ ).

*Beispiel.*  $\emptyset \subset M$

$M = \{1, 2\} \Rightarrow \mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

1. Eigenschaften von „ $\subset$ “

- (a)  $\emptyset \subset M$
- (b)  $M \subset M$
- (c)  $M = N \Leftrightarrow M \subset N \wedge N \subset M$
- (d)  $A \subset B \wedge B \subset C \Leftrightarrow A \subset C$

2. Assoziativität

- (a)  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- (b)  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

3. Kommutativität

- (a)  $A \cup B = B \cup A$
- (b)  $A \cap B = B \cap A$

4. Distributivgesetz

- (a)  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- (b)  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$



### 3 Die reellen Zahlen

#### 3.1 Körperaxiome (engl. field)

$\mathbb{K}$  : Menge mit zwei Operationen „+“ und „·“.

$\forall a, b \in \mathbb{K}$  ist  $a + b \in \mathbb{K} \wedge a \cdot b \in \mathbb{K}$  erklärt sollen kompatibel sein.

*Definition 3.1.1* (Körperaxiome). In einem Körper gelten diese Axiome:

1. Kommutativität:  $\forall a, b \in \mathbb{K} : a + b = b + a, a \cdot b = b \cdot a$
2. Assoziativität:  $\forall a, b, c \in \mathbb{K} : a + (b + c) = (a + b) + c, a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
3. Existenz des neutralen Elements:  
 $\exists 0 \in \mathbb{K} : a + 0 = 0 + a = a \forall a \in \mathbb{K}$   
 $\exists 1 \in \mathbb{K} : a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \forall a \in \mathbb{K}$
4. Existenz eines inversen Elements:  
 $\forall a \in \mathbb{K} \exists -a \in \mathbb{K} : a + (-a) = 0$   
 $\forall a \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \exists \frac{1}{a} \in \mathbb{K} : a \cdot \frac{1}{a} = 1$   
 Es gilt:  $0 \neq 1$ .
5. Distributivgesetz:  $\forall a, b, c \in \mathbb{K} : a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

*Beispiel.*  $\mathbb{Q} = \frac{m}{n}, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}$  ist ein Körper.

$$\mathbb{F}_2 : \begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \text{ ist ein Körper.}$$

*Bemerkung.* .

1. Somit ist ein Körper  $\mathbb{K}$  mit „+“ eine kommutative Gruppe und  $\mathbb{K} \setminus \{0\}$  mit „·“ auch eine kommutative Gruppe.
2. Die neutralen Elemente sind eindeutig bestimmt.  
 z.B.: angenommen,  $0_1$  und  $0_2$  sind neutrale Elemente mit „+“.  
 $\Rightarrow 0_1 \stackrel{(3)}{=} 0_1 + 0_2 \stackrel{(1)}{=} 0_2 + 0_1 \stackrel{(2)}{=} 0_2$   
 analog für Multiplikation

*Definition 3.1.2.* Zu  $a \in \mathbb{K}$  ist  $-a$  das Inverse bzgl. der Addition  
 schreibe  $a - b := a + (-b)$ .

Zu  $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$  sei  $a^{-1}$  das Inverse bzgl. der Multiplikation.

Ist  $b \neq 0$ , so schreiben wir  $\frac{a}{b} := a \cdot b^{-1} = b^{-1} \cdot a$ .

schreibe  $(ab) := a \cdot b$ .

*Lemma 1* (Rechnen in einem Körper). .

1. *Umformen von Gleichungen*

$\forall a, b, c \in \mathbb{K} :$

aus  $a + b = c$  folgt  $a = c - b$

aus  $a \cdot b = c, b \neq 0$  folgt  $a = \frac{c}{b}$

2. *Allgemeine Rechenregeln*

$$-(-a) = a$$

$$(a^{-1})^{-1} = a, \text{ falls } a \neq 0$$

$$-(a + b) = (-a) + (-b)$$

$$(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$$

$$a \cdot 0 = 0$$

$$a(-b) = -(ab), (-a)(-b) = ab$$

$$a(b - c) = ab - ac$$

$$ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0 \text{ (Nullteilerfreiheit)}$$

*Beweis.*  $0 = a + (-a) = (-a) + a$

$$\Rightarrow -(-a) = a$$

$$(a + b) + ((-a) + (-b)) = (a + (-a)) + (b + (-b)) = 0 + 0 = 0$$

$$\Rightarrow -(a + b) = (-a) + (-b)$$

benutzen wir auch Eindeutigkeit des inversen Elements

analog zeigt man  $(a^{-1})^{-1} = a$  und  $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = a^{-1}b^{-1}$

z.B.:  $(ab) \cdot (b^{-1}a^{-1}) = a(b \cdot b^{-1})a^{-1} = (a \cdot 1)a^{-1} = a \cdot a^{-1} = 1$

Ferner  $a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0 = a \cdot 0 + 0$

$$\Rightarrow a \cdot 0 = a \cdot 0 - a \cdot 0 = 0$$

□