1 Monotone Konvergenz

Definition 1.0.1. Eine Folge $(a_n)_n$ heißt
monoton wachsend, falls $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
monoton fallend, falls $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
Ähnlich: monoton wachsend (fallend) für fast alle $n \in \mathbb{N}$, falls $K \in \mathbb{N}$ existiert mit $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \geq K$ (bzw. $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \geq K$).
Ist
$a_n < a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, so heißt a_n streng monoton wachsend.
$a_{n+1} < a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, so heißt a_n streng monoton fallend.

Satz 1.0.2 (Monotone Konvergenz)**.** Jede monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge ist konvergent. Jede monoton fallende, nach unten beschränkte Folge ist konvergent.

Beweis. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (oder $\forall n \geq K \in \mathbb{N}$)
und $\exists C \in \mathbb{R} : a_n \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (oder $\forall n \geq K \in \mathbb{N}$)

$$B := \{a_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}, b \neq \emptyset \text{ und } B \leq C.$$

$\overset{\text{Vollst.axiom}}{\Rightarrow} L := \sup B$ die kleinste obere Schranke für B.
$\Rightarrow a_n \leq L \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
Und: L kleinste ob. Schranke $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : L - \varepsilon$ keine obere Schranke für B.

$$\Rightarrow \exists K \in \mathbb{N} : L - \varepsilon < a_K \leq a_{K+1} \leq a_{K+2} \leq \ldots \leq a_n \quad \forall n \geq K.$$
$$\forall n \geq K : L - \varepsilon < a_n \leq L < L + \varepsilon \Leftrightarrow a_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$$

$\Leftrightarrow (a_n)_n$ konvergiert gegen L.
Ist $a_{n+1} \leq a_n, a_n \geq C \quad \forall n \in \mathbb{N}$, so betrachte $b_n := -a_n \leq -C$ und $b_{n+1} \geq b_n$.
Dann ersten Fall anwenden! $\square$

Beispiel (1). $x_0 > 0, \quad x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$ konvergent gegen $\sqrt{a}, a > 0$.
Ang.: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$ existiert, dann auch $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = l, l > 0$

$$\overset{\text{Grenzwertsätze}}{\Longrightarrow} l = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(l + \frac{a}{l}\right) \Rightarrow l^2 = a, l = \sqrt{a}.$$

Beispiel (2). $f_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ existiert $=: e$.
Beh. 1: f_n ist nach oben beschränkt.
Beh. 2: f_n ist monoton wachsend.

Beweis. Beh. 1:

$$
\begin{aligned}
f_n = (1+\frac{1}{n})^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{n!}{k!(n-k)!}}_{=\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{n}{n} \underbrace{\frac{n-1}{n}}_{<1} \underbrace{\frac{n-k+1}{n}}_{<1} \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} =: e_n, \quad f_n \leq e_n \forall n \in \mathbb{N}
\end{aligned}
$$

$$
e_{n+1} = e_n + \frac{1}{(n+1)!} > 1_n.
$$

Beachte: $k! = k(k-1)(k-2)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1 \qquad k \geq 2$
$\geq 3 \cdot 3 \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3^{k-2} \cdot 2 (*)$
Also ist $n \geq 3$.

$$
\begin{aligned}
e_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} &\overset{(*)}{\leq} 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2 \cdot 3^{k-2}} \\
&= 2 + \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{l=0}^{n-2} (\frac{1}{3})^l}_{=1-(\frac{1}{3})^{n-1}} \\
&\leq 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = 2 + \frac{3}{4} = 2,75. \\
&\Rightarrow e_n \leq 2,75 \forall n \geq 2.
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow (e_n)_n$ ist nach oben beschränkt.
$\overset{Mon.Konv.}{\Rightarrow} \lim\limits_{n\to\infty} e_n$ existiert $\leq 2,75$.
Auch $f_n \leq e_n \leq 2,75 \quad \forall n \geq 2$.
$\Rightarrow (f_n)_n$ ist auch oben beschränkt. Beh. 2:

$$\frac{f_n}{f_{n-1}} = \frac{(1+\frac{1}{n})^n}{(1+\frac{1}{n})^{n-1}} \qquad n \geq 2$$

$$= \frac{(\frac{n+1}{n})^n}{(\frac{n}{n-1})^{n-1}} = \frac{n}{n-1}\frac{(\frac{n+1}{n})^n}{(\frac{n}{n-1})^n}\frac{n}{n-1}\left(\frac{\overbrace{(n+1)(n-1)}^{n^2-1}}{n^2}\right)^n$$

$$= \frac{n}{n-1}\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n = \frac{n}{n-1}\quad\underbrace{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n}_{\geq 1-n\frac{1}{n^2}\text{ (Bern. Ungl.)}}$$

$$\geq \frac{n}{n-1}(1-n\frac{1}{n^2}) = \frac{n}{n-1}(1-\frac{1}{n}) = 1 \Rightarrow f_n \geq f_{n-1} \forall n \geq 2.$$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ existiert! □

Definition 1.0.3 (Eulersche Zahl)**.** $e := \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ $(\leq 2,75)$

Bemerkung. 1. Es gilt auch $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n$ exist. $\forall x \in \mathbb{R}$ (H.A.)

2. Alternative Darstellung für e:
   Hatten gesehen: $f_n \leq e_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \quad \forall n$
   $e_n \leq 2,75, e_{n+1} > e_n$
   $\Rightarrow$ es existiert $\lim\limits_{n\to\infty} e_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} =: \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!}$ und somit auch $e = \lim\limits_{n\to\infty} f_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} e_n = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!}$.
   Beobachtung:

$$f_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}\underbrace{\frac{n}{n}\frac{(n-1)}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n}}_{\geq 0}, \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\frac{1}{n^k}.$$

Nehme $m \in \mathbb{N}$ fest.

$$n \geq m \geq \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!}1\underbrace{\frac{n-1}{n}}_{\overset{n\to\infty}{\to}1}\cdots\underbrace{\frac{n-k+1}{n}}_{\overset{n\to\infty}{\to}1}$$

Grenzwertsätze $\Rightarrow \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!}$ für $n \to \infty$. $\Rightarrow$ Für jedes $m \in \mathbb{N}$ ist

$$e_m \leq \lim_{n\to\infty} f_n = e$$

Auch, $e_m = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}$ hat den Grenzwert $m \to \infty$!

$$\overset{\text{Satz 7.1.9.}}{\lim m \to \infty e_m \leq e}.$$

$$\Rightarrow e = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} =: \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

Satz 1.0.4. *e ist irrational!*

Beweis. $e_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ approximiert e extrem gut

$$0 < e - e_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

$$e - e_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right) = \lim_{m\to\infty} \left(\sum_{k=n+1}^{n} \frac{1}{k!} \right)$$

$$\begin{aligned}
(*) \quad & k \geq n+1 \\
& k! = k(k-1)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1 \\
& \quad = \underbrace{k(k-1)\dots(n+2)}_{\geq 2^{k-n}} \underbrace{(n+1)n\dots 2 \cdot 1}_{=(n+1)!} \geq (n+1)! \\
& \quad \geq 2^{k-n}(n+1)!
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m > n : & \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k!} \\
& \overset{(*)}{\leq} \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-(n+1)} \\
& \leq \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=n+1}^{m} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-(n+1)} \\
& = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{l=0}^{m-(n+1)} (\frac{1}{2})^l = \frac{1}{(n+1)!} \frac{1 - (\frac{1}{2})^{m-(n-1)}}{1 - \frac{1}{2}} \\
& \leq \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{(n+1)!} \\
& \Rightarrow 0 < e - e_n \leq \frac{2}{(n+1)!} (*) \qquad \forall n \geq 2.
\end{aligned}$$

Wäre e rational, $\Rightarrow p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N} : e = \frac{p}{q}$

$$\Rightarrow n!e = n!\frac{p}{q} \in \mathbb{N} \forall n \geq q$$

Auch: $n!e_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow n!(e - e_n) \in \mathbb{N}_0 \qquad \forall n$, die groß genug sind

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} 0 < n!(e - e_n) \leq \frac{n!2}{(n+1)!} = \frac{2}{n+1} < 1 \quad \forall n \geq 3$$

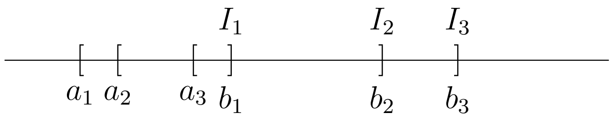
↯also ist e irrational! $\square$

Anwendungen:

Satz 1.0.5 (Invervallschachtelungsprinzip)**.** Seien $a_n \leq b_n, I_n := [a_n, b_n]$ abgeschlossene Intervalle und

$$I_{n+1} \subset I_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

sowie $|I_n| := b_n - a_n \overset{n \to \infty}{\to} 0$.
Dann besteht $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ aus genau einem Punkt!
Bild:



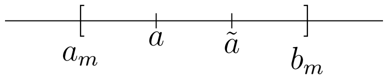
Beweis. 1. $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ besteht aus höchstens einem Punkt in $\mathbb{R}$.
Ang. $\exists a, a^2 \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \quad a \neq a^2$ (o.B.d.A. $\tilde{a} > a$).

$$I_{n+1} \subset I_n \quad \forall n \Rightarrow I_n \subset I_{n-1} \subset \ldots \subset I_m \quad \forall n > m.$$

$$\Rightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{x \in \mathbb{R} | x \in I_n \forall n \in \mathbb{N}\} \subset \{x \in \mathbb{R} | x \in I_k \quad \forall 1 \leq k \leq m\} = \bigcap_{k=1}^{m} I_k = I_m$$

$$\Rightarrow \{a, \tilde{a}\} \subset I_m \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

$$a, \tilde{a} \in I_m = [a_m, b_m].$$



$$\Rightarrow 0 < \tilde{a} - a \leq b_m - a_m = |I_m| \to 0 \quad m \to \infty$$

↯für m groß $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ hat höchstens ein Element!

2. $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \emptyset \qquad I_n = [a_n, b_n]$

$$I_{n+1} \subset I_n \Leftrightarrow a_{n+1} \geq a_n \wedge b_{n+1} \leq b_n \quad \forall n.$$

Auch: $a_n \leq b_n \leq b_{n-1} \leq \ldots \leq b_1 \Rightarrow$ Folge $(a_n)_n$ ist nach oben beschränkte monoton wachsende Folge.
$\overset{\text{Mon.Konv.}}{\Rightarrow} \; a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existiert und $a \geq a_n \quad \forall n.$
Sei $n \geq m$:

$$a - n \leq b_n \leq \ldots \leq b_m \Rightarrow a = \lim_{n\to\infty} a_n \leq b_m$$

$$\Rightarrow a_m \leq a_{n-1} \leq a_n \leq a \leq b_m.$$

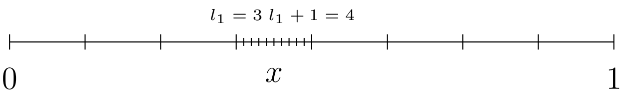
$\Rightarrow a \in I_m$ für jedes $m \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \{a\} \subset \bigcap_{m\in\mathbb{N}} I_m$$

$$\text{d. h.} \bigcap_{m\in\mathbb{N}} I_m \neq \emptyset$$

$\square$

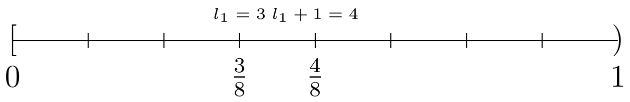
Satz 1.0.6 (k-adische Darstellung reeller Zahlen)**.** $k \in \mathbb{N}, k \geq Z$ und $x \in \mathbb{R}$. Dann gibt es $z_0 \in \mathbb{Z}$ und $l_j \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$ derart, dass $x = z_0 + \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} l_j k^{-j} = z_0 + \sum_{j=1}^{\infty} l_j k^{-j}$.
$Z_0 := \lfloor x \rfloor := \min(p \in \mathbb{Z}, p > x) - 1 = \max(q \in \mathbb{Z}, q \leq x)$.
$0 \leq x - \lfloor c \rfloor < 1$.
$\Rightarrow$ o.B.d.A. sei $0 \leq x < 1$.



iteriere diesen Prozess. $\rightarrow$ kriegen $l_j \in \{0, 1, 2, \ldots, k-1\}$ und $\sum_{j=1}^{n} l_j k^{-j} \leq x < \sum_{j=1}^{n-1} l_j k^{-j + \frac{l_n+1}{k^n}} \quad (*)$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} x = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} l_j k^{-j}.$$

Beispiel. $p := \lfloor x \rfloor := \max(z \in \mathbb{Z} : z \leq x) \Rightarrow p \leq x < p + 1 \Rightarrow \tilde{x} := x - p \in [0, 1)$. Also reicht es, $x \in [0, 1)$ zu betrachten!
Bild: $k = 8$



$l_1 = \lfloor kx \rfloor$

$$\frac{l_1}{k} \leq x < \frac{l_1 + 1}{k} \Rightarrow 0 \leq x - \frac{l_1}{k} < \frac{1}{k}$$

$$\Rightarrow 0 \leq k\left(x - \frac{l_1}{k}\right) < 1 \Leftrightarrow 0 \leq k^2[x - \frac{l_1}{k}] < k.$$

$$l_2 := \lfloor k^2\left(x - \frac{l_1}{k}\right)\rfloor \overset{\text{wie vorher}}{\Rightarrow} \frac{l_2}{k} \leq k(x - \frac{l_1}{k}) < \frac{1}{k}$$

$$\Rightarrow l_1/k + l_2/k^2 \leq x < l_1/k + \frac{l_2 + 1}{k^2}$$

induktiv weitermachen. Geg. $l_1, l_2, \ldots, l_n \in \{0, 1, 2, \ldots, k-1\}$.

$$\text{mit } l_1/k + l_2/k^2 + \ldots + l_n/k^n \leq x < l_1/k + l_2/k^2 + l_{n-1}/k^{n-1} + \frac{l_n + 1}{k^n}$$

$$\Rightarrow 0 \leq x - \sum_{j=1}^{n} \frac{l_j}{k^j} < \frac{1}{k^n}$$

$$\text{oder } k^{n+1}[x - \sum_{j=1}^{n} \frac{l_j}{k^j}] < k \in \mathbb{N}$$

$$\text{definiere } l_{n+1} := \lfloor k^{n+1}(x - \sum_{j=1}^{n} \frac{l_j}{k^j})\rfloor$$

$$\text{kriegen } a_n := \sum_{j-1}^{n} \frac{l_j}{k^j} \leq x < \sum_{j=1}^{n} l_j/k^j + 1/k^n =: b_n$$

$$\Rightarrow a_n \leq x < b_n$$

$$\text{und } b_n - a_n = 1/k^n \to 0, n \to \infty.$$

Entweder: $I_n := [a_n, b_n]$ sind geschachtelt $I_{n+1} \subset I_n$ Lange $I_n - |I_n| = b_n - a_n \to 0$. Intervallschachtelungsprinzip $\Rightarrow \{x\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \Rightarrow x = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} l_j/k^j$.

Alternative:

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &\geq a_n \\
a_n \leq b_n &= \sum_{j=1}^{n} \frac{l_j}{k^j} + \frac{1}{k^n} \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} \frac{k-1}{k^j} + \frac{1}{k^n} \\
&= (k-1) \quad \underbrace{\sum_{j=1}^{n} (\frac{1}{k})^j + \frac{1}{k^n}}_{=\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{n-1}(\frac{1}{k})^j = \frac{1}{k}\frac{1-(\frac{1}{k})^n}{1-\frac{1}{k}}} \\
&= \frac{k-1}{k} - \frac{1-(\frac{1}{k})^n}{1-\frac{1}{k}} + \frac{1}{k^n} \\
&= 1 - \left(\frac{1}{k}\right)^n + \frac{1}{k^n} = 1. \\
\overset{\text{Mon. Konv.}}{\Rightarrow} \quad a &= \lim_{n\to\infty} a_n \text{ existiert.}
\end{aligned}
$$

Beachte: $0 \leq x - a_n < \frac{1}{k^n} \to \overset{n\to\infty}{\to} 0$

$$
\begin{aligned}
a_n \leq x < a_n + \frac{1}{k^n} \overset{\text{Sandwich}}{\Rightarrow} a &= \lim_{n\to\infty} a_n \leq x \leq \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{k^n} \\
&= a + 0 = a \\
&\Rightarrow a \leq x \leq a \Rightarrow a = x
\end{aligned}
$$

Beispiel. k-adische Darstellung
$k = 10$
Behauptung: $0{,}\overline{9} = 1$

$$
\begin{aligned}
0{,}\overline{9} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{9}{10^j} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{9}{10} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{1}{10}\right)^j \\
&= \frac{9}{10} \cdot \frac{10}{9} = 1
\end{aligned}
$$

Korollar 1.0.7. Die reellen Zahlen sind überabzählbar!

Beweis. Es reicht zu zeigen $[0,1)$ ist überabzählbar. Es reicht, eine Teilmenge von $A \subset [0,1)$ anzugeben, die nicht abzählbar ist.
nehmen: $k = 3$

$$A := \{x \in [0,1) : \exists l_j \in \{0,1\} : x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{l_j}{3^j} = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{l_j}{3^j}\}.$$

A hat die gleiche Mächtigkeit wie die Menge der $\{0,1\}$-wertigen Folgen. Hat dieselbe Mächtigkeit wie $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Diese ist überabzählbar. $\square$