

Analysis I (WS 18/19)

Pavel Zwerschke

3. November 2018

Inhaltsverzeichnis

0	Organisatorisches	2
1	Was ist Analysis?	3
2	Etwas Logik	3
2.1	Grundbegriffe	5
3	Die reellen Zahlen	8
3.1	Körperaxiome (engl. field)	8
3.2	Die Anordnungsaxiome	10
4	Funktionen und Abbildungen	14
4.1	Funktion als Abbildung	14
4.2	Abbildungen als Graph	14
4.3	Schubfachprinzip und endliche Mengen	17

0 Organisatorisches

Dozent

Prof. Dr. Dirk Hundertmark (20.30, 2.028)

dirk.hundertmark@kit.edu

Übungsleiter

Dr. Markus Lange (20.30, 2.030)

markus.lange@kit.edu

Übungszettel

Ausgabe:

donnerstags unter www.math.kit.edu/iana1/lehre/ana12018w/

Abgabe:

bis mittwochs um 19:00 in den Abgabekästen des Foyers des Mathematikgebäudes (20.30)

getackert, mit Namen, Matrikelnummer, Tutoriennummer und Deckblatt (optional) in das Fach mit der richtigen Kennzeichnung legen

Zettel dürfen zu zweit abgegeben werden

Übungsschein

Jede K-Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet. Einen Übungsschein erhält wer 50% der Punkte aller K-Aufgaben erzielt.

Klausur

Die Anmeldung findet über das Online-Portal statt. Die Klausur findet in KW 8 2019 statt. Der Übungsschein ist Voraussetzung für die Teilnahme an der Klausur.

1 Was ist Analysis?

Zentrale Begriffe:

Grenzwerte von Folgen und Reihen, Funktionen, stetig, differenzierbar, integrieren, Differential- und Integralrechnung, Differentialgleichungen (Newton, Maxwell, Schrödinger), unendlich dimensionale Räume

Beispiel. $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$

$$2S = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} + \dots$$

$$2S = 1 + S$$

S entspricht der Wahrscheinlichkeit, dass irgendwann mal Kopf in einem Münzwurf kommt.

Vorsicht!

$$S = 1 + 2 + 4 + \dots$$

$$2S = 2 + 4 + 8 + \dots = -1 + 1 + 2 + 4 + \dots = -1 + S$$

$$S = -1$$

Natürlich Quatsch!

Formales Rechnen kann gefährlich sein!

- Was sind mathematische Aussagen?
- Wie macht man Beweise, wie findet man sie? (learning by doing)
- logische Zusammenhänge

2 Etwas Logik

Eine (mathematische) Aussage ist ein Ausdruck, der wahr oder falsch ist.

z. B.

1. A : „ $1 + 1 = 2$.“ (auch „ $1 + 1 = 3$ “, „ $1 + 1 = 0$ “)
2. B : „Es gibt unendlich viele Primzahlen.“
3. C : „Es gibt unendlich viele Primzahlen p für die $p + 2$ auch eine Primzahl ist.“
4. D : „Die Gleichung $m\ddot{x} = F$ hat geg. $\dot{x}(0) = v_0, x(0) = x_0$ immer genau eine Lösung.“
5. E : „Jede gerade natürliche Zahl größer als 2 ist die Summe zweier Primzahlen.“
6. F : „Morgen ist das Wetter schön.“

7. G : „Ein einzelnes Atom im Vakuum mit der Kernladungszahl Z kann höchstens $Z + 1$ Elektronen binden.“

8. $H(k, m, n)$: „Es gilt: $k^2 + m^2 = n^2$.“ (z. B. $H(3, 4, 5)$ ist wahr.)

Gegeben für natürliche Zahlen n , Aussagen $A(n)$, dann gilt:

Für jede nat. Zahl n ist $A(n)$ wahr, genau dann, wenn

1. $A(1)$ ist wahr.

2. Unter der Annahme, dass $A(n)$ wahr ist, folgt, dass $A(n + 1)$ wahr ist.

Beispiel. $A(n) : 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Beweis. Vollständige Induktion

Induktionsanfang:

$$1 = \frac{1(1+1)}{2} \checkmark$$

Induktionsschluss:

Wir nehmen an, dass $A(n)$ wahr ist (für $n \in \mathbb{N}$)

D. h. Induktionsannahme:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Dann folgt:

$$\begin{aligned} \underbrace{1 + 2 + \dots + n}_{= \frac{n(n+1)}{2}} + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} \end{aligned}$$

□

Bemerkung. Gaußscher Trick:

1)

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + n = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1$$

$$2S = \underbrace{(n+1) + (n+1) + \dots + (n+1)}_{n\text{-mal}} \Leftrightarrow S = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2)

$$S_n = 0 + 1 + 2 + \dots + n$$

= Anzahl der Punkte in

\approx Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks $= \frac{1}{2} * n * n$.

Also: Ansatz („geschicktes Raten“, „scientific guess“, englisch: ansatz):

$$S_n = \underbrace{a_2 n^2 + a_1 n + a_0}_{\text{Polynom 2. Grades in } n}$$

Polynom 2. Grades in n

$$a_2 = \frac{1}{2}$$

Wie bekommt man $a_0, a_1, (a_2)$? $n = 0 : S_0 = 0 = a_2 * 0^2 + a_1 * 0 + a_0 \Rightarrow a_0 = 0$.

$$n = 1 : S_1 = 1 = a_2 * 1^2 + a_1 * 1^2 = a_2 + a_1 = \frac{1}{2} + a_1.$$

$$\text{also: } a_1 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \text{Raten: } S_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2.1 Grundbegriffe

Aussagen: Notation

:	„so, dass gilt“
\exists	„es gibt mindestens ein“, „es existiert“
\forall	„für alle“
\Rightarrow	„impliziert“ ($A \Rightarrow B$ „aus A folgt B “)
\Leftrightarrow	„genau dann, wenn“
$\neg A$	nicht A
$A \wedge B$	A und B
$A \vee B$	A oder B
$A := B$	A ist per Definition gleich B

Satz 2.1.1. Folgende Aussagen sind allein aus logischen Gründen immer

	$\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$	Gesetz der doppelten Verneinung
	$A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$	Kontraposition
wahr.	$A \Rightarrow B \Leftrightarrow (\neg(A \wedge \neg B))$	beim Widerspruchsbeweis
	$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$	de Morgan
	$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$	de Morgan

Bemerkung. $A \Rightarrow B \Leftrightarrow B$ ist mindestens so wahr wie $A \Leftrightarrow A$ ist mindestens so falsch wie $B \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$.

$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B \wedge B \Rightarrow A)$.

Beispiel. $n \in \mathbb{N}$ ist gerade, falls $k \in \mathbb{N}$ existiert mit $n = 2k$.

$n \in \mathbb{N}$ ist ungerade, falls $\exists k \in \mathbb{N}_0 : \forall n = 2k + 1$.

Dann gilt: n ist gerade $\Leftrightarrow n^2$ ist gerade.

Beweis. „ \Rightarrow “: n gerade $\Rightarrow n = 2k$, für $k \in \mathbb{N}$

$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ ist gerade.

Umgekehrt müssen wir zeigen:

„ \Leftarrow “: n^2 gerade $\Rightarrow n$ gerade

Kontraposition: n ungerade $\Rightarrow n^2$ ungerade

Also sei $n = 2k+1, k \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = \underbrace{2(2k^2+2k)}_{\text{gerade}}+1 \Rightarrow$

n^2 ist ungerade. □

Mengen (nach Cantor)

informell: Eine Menge ist eine Sammlung von Objekten (Elemente) zu einem neuen Objekt.

Vorsicht: Russels Paradox

genaue Definition von Zermelo-Fraenkel Axiome (\rightarrow Logik Mengenlehre)

$a \in M$: a ist Element von M

$a \notin M$: a ist kein Element von M

z.B.:

$$M = \{1, 4\}$$

$$1 \in M$$

$$5 \notin M$$

Angabe von Mengen durch

- Auflistung

$$M = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_{17}\}$$

- Eigenschaft

$$M = \{a \mid a \text{ hat Eigenschaft } E\}$$

z.B.:

- $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$

- $\mathbb{Z} := \{x \mid x \in \mathbb{N} \vee x \in -\mathbb{N} \vee x = 0\}$

- $-\mathbb{N} := \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Definition 2.1.1. Sei M eine Menge und $A(x)$ Aussagen mit $x \in M$

$\forall x \in M : A(x)$ ist wahr, falls alle $A(x)$ wahr sind.

$\exists x \in M : A(x)$ ist wahr, falls mindestens eine Aussage $A(x)$ wahr ist.

Achtung: Zusammensetzen: Reihenfolge ist wichtig!

Beispiel. Töpfe := Menge der Töpfe

Deckel := Menge der Deckel

$A : \forall T \in \text{Töpfe} \exists D \in \text{Deckel} : D \text{ passt auf } T$

(Für jeden Topf gibt es einen Deckel, der passt)

$B : \exists D \in \text{Deckel} \forall T \in \text{Töpfe} : D \text{ passt auf } T$

(Es existiert mindestens ein Deckel, der auf alle Töpfe passt)

Negation:

$$\neg(\forall x \in M : A(x))$$

$$\Leftrightarrow \exists x \in M : \neg A(x)$$

$$\neg(\exists x \in M : A(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in M : \neg A(x)$$

Definition 2.1.2 (wichtige Mengen). Seien M, N Mengen.

\emptyset := die Menge ohne Elemente (leere Menge)

$M \cap N := \{x \mid x \in M \wedge x \in N\}$ (Schnitt)

$M \cup N := \{x \mid x \in M \vee x \in N\}$ (Vereinigung)

$M \setminus N := \{x \mid x \in M \wedge x \notin N\}$ (Differenzmenge)

$\mathcal{P}(M) := \{A \mid A \subset M\}$ die Menge aller Teilmengen von M (Potenzmenge)

Sei I eine Menge und für $i \in I$ eine Menge M_i .

$$\bigcap_{i \in I} M_i := \{x \mid \forall i \in I : x \in M_i\}.$$
$$\bigcup_{i \in I} M_i := \{x \mid \exists i \in I : x \in M_i\}.$$

Ist $M \cap N = \emptyset$, so heißen M und N divergent.

$M \subset N$, falls $\forall x \in M : x \in N$ (M Teilmenge von N).

$M = N$, falls M und N dieselben Elemente haben.

Insbesondere ist $(M = N) \Leftrightarrow M \subset N \wedge N \subset M$.

$M \subsetneq N : M \subset N \wedge M \neq N$ (M echte Teilmenge von N).

Beispiel. $\emptyset \subset M$

$M = \{1, 2\} \Rightarrow \mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

1. Eigenschaften von „ \subset “

- (a) $\emptyset \subset M$
- (b) $M \subset M$
- (c) $M = N \Leftrightarrow M \subset N \wedge N \subset M$
- (d) $A \subset B \wedge B \subset C \Leftrightarrow A \subset C$

2. Assoziativität

- (a) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- (b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

3. Kommutativität

- (a) $A \cup B = B \cup A$
- (b) $A \cap B = B \cap A$

4. Distributivgesetz

- (a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- (b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

3 Die reellen Zahlen

3.1 Körperaxiome (engl. field)

\mathbb{K} : Menge mit zwei Operationen „+“ und „ \cdot “.

$\forall a, b \in \mathbb{K}$ ist $a + b \in \mathbb{K} \wedge a \cdot b \in \mathbb{K}$ erklärt sollen kompatibel sein.

Definition 3.1.1 (Körperaxiome). In einem Körper gelten diese Axiome:

1. Kommutativität: $\forall a, b \in \mathbb{K} : a + b = b + a, a \cdot b = b \cdot a$
2. Assoziativität: $\forall a, b, c \in \mathbb{K} : a + (b + c) = (a + b) + c, a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
3. Existenz des neutralen Elements:
 $\exists 0 \in \mathbb{K} : a + 0 = 0 + a = a \forall a \in \mathbb{K}$
 $\exists 1 \in \mathbb{K} : a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \forall a \in \mathbb{K}$
4. Existenz eines inversen Elements:
 $\forall a \in \mathbb{K} \exists -a \in \mathbb{K} : a + (-a) = 0$
 $\forall a \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \exists \frac{1}{a} \in \mathbb{K} : a \cdot \frac{1}{a} = 1$
 Es gilt: $0 \neq 1$.
5. Distributivgesetz: $\forall a, b, c \in \mathbb{K} : a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Beispiel. $\mathbb{Q} = \frac{m}{n}, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}$ ist ein Körper.

$$\mathbb{F}_2 : \begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \text{ ist ein Körper.}$$

Bemerkung. .

1. Somit ist ein Körper \mathbb{K} mit „+“ eine kommutative Gruppe und $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ mit „ \cdot “ auch eine kommutative Gruppe.
2. Die neutralen Elemente sind eindeutig bestimmt.
 z.B.: angenommen, 0_1 und 0_2 sind neutrale Elemente mit „+“.
 $\Rightarrow 0_1 \stackrel{(3)}{=} 0_1 + 0_2 \stackrel{(1)}{=} 0_2 + 0_1 \stackrel{(2)}{=} 0_2$
 analog für Multiplikation

Definition 3.1.2. Zu $a \in \mathbb{K}$ ist $-a$ das Inverse bzgl. der Addition
 schreibe $a - b := a + (-b)$.

Zu $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ sei a^{-1} das Inverse bzgl. der Multiplikation.

Ist $b \neq 0$, so schreiben wir $\frac{a}{b} := a \cdot b^{-1} = b^{-1} \cdot a$.

schreibe $(ab) := a \cdot b$.

Lemma 1 (Rechnen in einem Körper). .

1. Umformen von Gleichungen

$$\forall a, b, c \in \mathbb{K} :$$

$$\text{aus } a + b = c \text{ folgt } a = c - b$$

$$\text{aus } a \cdot b = c, b \neq 0 \text{ folgt } a = \frac{c}{b}$$

2. Allgemeine Rechenregeln

$$-(-a) = a$$

$$(a^{-1})^{-1} = a, \text{ falls } a \neq 0$$

$$-(a + b) = (-a) + (-b)$$

$$(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$$

$$a \cdot 0 = 0$$

$$a(-b) = -(ab), (-a)(-b) = ab$$

$$a(b - c) = ab - ac$$

$$ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0 \text{ (Nullteilerfreiheit)}$$

$$\text{Beweis. } 0 = a + (-a) = (-a) + a$$

$$\Rightarrow -(-a) = a$$

$$(a + b) + ((-a) + (-b)) = (a + (-a)) + (b + (-b)) = 0 + 0 = 0$$

$$\Rightarrow -(a + b) = (-a) + (-b)$$

benutzen wir auch Eindeutigkeit des inversen Elements

$$\text{analog zeigt man } (a^{-1})^{-1} = a \text{ und } (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = a^{-1}b^{-1}$$

$$\text{z.B.: } (ab) \cdot (b^{-1}a^{-1}) = a(b \cdot b^{-1})a^{-1} = (a \cdot 1)a^{-1} = a \cdot b^{-1} = 1$$

$$\text{Ferner } a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0 = a \cdot 0 + 0$$

$$\Rightarrow a \cdot 0 = a \cdot 0 - a \cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow a \cdot b + a \cdot (-b) = a \cdot (b + (-b)) = a \cdot 0 = 0$$

$$\stackrel{\text{Eind. d. Inv.}}{\Rightarrow} -ab = a(-b)$$

$$\text{Somit auch } (-a)(-b) = -((-a)b) = -(b(-a)) = (-ba) = -(-ab) = ab$$

$$\text{und } a(b - c) = a(b + (-c)) = ab + a(-c) = ab + (-ac) = ab - ac.$$

$$\text{ist } ab = 0 \text{ und } a \neq 0 \Rightarrow 0 = (ab)\frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot (ab) = (\frac{1}{a} \cdot a)b = 1b = b$$

$$\text{also ist } b = 0.$$

□

Satz 3.1.1 (Bruchrechnen). $a, b, c, d \in \mathbb{K}, c \neq 0, d \neq 0$.

Dann gilt

$$1. \frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ad+bc}{cd}$$

$$2. \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{ab}{cd}$$

$$3. \frac{a/c}{b/d} = \frac{ad}{bc}, \text{ falls auch } b \neq 0 \text{ ist.}$$

Beweis. Übung

□

Beispiel. rationale Zahlen sind ein Körper
schreiben $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ für einen Körper

3.2 Die Anordnungsaxiome

Definition 3.2.1. Sei \mathbb{K} (genauer $(\mathbb{K}, +, \cdot)$) ein Körper. Dann heißt $>$ eine Anordnung falls

1. Für jedes $a \in \mathbb{K}$ gilt genau eine der Aussagen $a > 0, a = 0, -a > 0$
(wenn $a \in \mathbb{K}$, mit $a > 0$ positiv)
2. Aus $a > 0$ und $b > 0$ folgt
 $a + b > 0$ und $a \cdot b > 0$

Wir nennen $(\mathbb{K}, +, \cdot, >)$ einen angeordneten Körper.

Bemerkung. Statt $-a > 0$ schreiben wir $a < 0$

Statt $a - b > 0$ schreiben wir $a > b$

Bild:



Statt $a - b < 0$ schreiben wir $a < b$.

$a \geq b$, falls $a > b \vee a = b$

$a \leq b$, falls $a < b \vee a = b$.

Satz 3.2.1. Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot, >)$ ein angeordneter Körper. Dann gilt

1. für $a, b \in \mathbb{K}$ gilt genau eine der Relationen $a > b, a = b, a < b$ (Trichotomie)
2. Aus $a > b, b > c$ folgt $a > c$ (Transitivität)
3. Aus $a > b$ folgt:
$$\begin{cases} a + c > b + c, \forall c \in \mathbb{K} \\ ac > bc, \text{ falls } c > 0 \\ ac < bc, \text{ falls } c < 0 \end{cases}.$$
4. Aus $a > b$ und $c > d$ folgt:
$$\begin{cases} a + c > b + d \\ ac > bd, \text{ falls } b, d > 0 \end{cases}$$
5. Für $a \neq 0$ ist $a^2 > 0$.

6. Aus $a > 0$ folgt $\frac{1}{a} > 0$.

7. Aus $a > b > 0$ folgt $0 < \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

8. Aus $a > b, 0 < \lambda < 1$ folgt $b < \lambda b + (1 - \lambda)a < a$.

Bemerkung. Auf \mathbb{F}_2 kann es keine Anordnung geben!

Beweis. 1. Direkt aus (A.1) und Def. von $a > b$.

$$2. \quad a - c = \underbrace{(a - b)}_{>0} + \underbrace{(b - c)}_{>0} \stackrel{(A.2)}{>} 0.$$

$$3. \quad (a + c) - (b + c) = a - b > 0$$

$$ac - bc = \underbrace{(a - b)}_{>0} \cdot c \stackrel{(A.2)}{>} 0, \text{ falls } c > 0$$

Ist $c < 0$, so ist $-c > 0$

$$\Rightarrow bc - ac = \underbrace{(a - b)}_{>0} \cdot \underbrace{(-c)}_{>0} \stackrel{(A.2)}{>} 0$$

$$ac - bd = ac - bc + bc - bd = \underbrace{(a - b)}_{>0} \cdot \underbrace{c}_{>0} + \underbrace{b}_{>0} \cdot \underbrace{(c - d)}_{>0} \stackrel{(A.2)}{>} 0.$$

$$4. \quad (a + c) - (b + d) = (a - b) + (c - d) > 0 \text{ nach (A.2)}$$

$$ac - bd = ac - bc + bc - bd = (a - b)c + b(c - d)$$

$$\text{Ist } b = 0 \Rightarrow a > b = 0 \Rightarrow ac > 0 = bd$$

$$\text{Ist } b < 0 \Rightarrow (-b)d > 0 \Rightarrow -bd > 0 \Rightarrow bd < 0 \Rightarrow ac < -bd \Rightarrow$$

$$\underbrace{ac}_{>0} + \underbrace{(-bd)}_{>0} \stackrel{(A.2)}{>} 0.$$

5. Fallunterscheidung:

$$\text{ist } a > 0 \Rightarrow a^2 = a \cdot a > 0 \text{ (A.2)}$$

$$\text{ist } a < 0 \Rightarrow a^2 = (-a) \cdot (-a) > 0 \text{ (A.2)}$$

6. sei $a > 0$:

$$\stackrel{5.}{\Rightarrow} \left(\frac{1}{a}\right) > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} = \underbrace{\left(\frac{1}{a}\right)^2}_{>0} \cdot \underbrace{a}_{>0} > 0.$$

7. aus $a > b > 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{1}{b}(a - b) \frac{1}{a} > 0.$$

$$\begin{aligned}
8. \quad & a > b, 0 > \lambda > 1 \Rightarrow \lambda > 0 \wedge 1 - \lambda > 0 \\
& b = \lambda b + \underbrace{(1 - \lambda)b}_{< (1 - \lambda)a} \\
& < \lambda b + (1 - \lambda)a < \lambda a + (1 - \lambda)a = a \\
& \Rightarrow b < \lambda b + (1 - \lambda)a = a. \\
& \text{Insbesondere } \lambda = 1/2 \Rightarrow b < 1/2b + 1/2a = \frac{a+b}{2} < a.
\end{aligned}$$

□

Definition 3.2.2 (Betrag). Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot, >)$ ein angeordneter Körper. Betrag von $a \in \mathbb{K}$ ist gegeben durch

$$|a| := \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq 0 \\ -a, & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

auch noch $a, b \in \mathbb{K}$

$$\max(a, b) := \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq b \\ b, & \text{falls } a < b \end{cases}$$

$$\min(a, b) := \begin{cases} a, & \text{falls } a \leq b \\ b, & \text{falls } a > b \end{cases}$$

Bemerkung. .

1. $a, b \in \mathbb{K}$
 $|a - b|$ = Abstand von a zu b .
 $|a| = |a - 0|$ = Abstand von a zu 0.
2. $|a| = \max(a, -a)$.

Satz 3.2.2. $(\mathbb{K}, +, \cdot, >)$ ang. Körper
Dann gilt $\forall a, b \in \mathbb{K}$:

1. $|-a| = |a|$ und $a \leq |a|$
2. $|a| \geq 0$ und $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$
3. $|ab| = |a| |b|$
4. $|a + b| \leq |a| + |b|$ (Dreiecksungleichung)
5. $||a| - |b|| \leq |a - b|$ (umgekehrte Dreiecksungleichung)

Beweis. Inhalt...

□

Beweis. .

1. Gegeben $m \in \mathbb{N} : A := \{n \in \mathbb{N} | n + m \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}$
dann ist A induktiv, also $\mathbb{N} \subset A \Rightarrow A = \mathbb{N}$.
2. Def: $B := \{n \in \mathbb{N} | n = 1 \vee (n - 1 \in \mathbb{N} \wedge n - 1 \geq 1)\} \subset \mathbb{N}$
Dann ist B induktiv, denn
 - (a) $1 \in B$
 - (b) Sei $n \in B$. Fallunterscheidung
 - $n = 1 \Rightarrow n + 1 = 1 + 1 > 1$.
und $(n + 1) - 1 = (1 + 1) - 1 = 1 \in \mathbb{N}$
 - $n \in B \wedge n \neq 1 \Rightarrow n - 1 \in \mathbb{N} [\text{ODER } B?] \wedge n - 1 \geq 1$
 $\Rightarrow n = \underbrace{(n - 1)}_{\in \mathbb{N}} + 1 \in \mathbb{N}$
 $\Rightarrow n + 1 - 1 = n \in \mathbb{N}$
 und $(n + 1) - 1 = n \in \mathbb{N}$
 und $(n + 1) - 1 = n = (n - 1) + 1 \geq 1 + 1 \geq [\text{ODER } >?]1$.
 $\Rightarrow n + 1 \in B$.
3. $C := \{n \in \mathbb{N} | \forall m \in \mathbb{N} \text{ mit } m \leq n \text{ ist } n - m \in \mathbb{N}_0\} \Rightarrow$
 - (a) $1 \in C$, dann ist $m \in \mathbb{N}$ und $m = 1$.
folgt nach b): $m = 1$
 $\Rightarrow n - m = 1 - 1 = 0 \in \mathbb{N}_0$.
 - (b) ang. $n \in C$ und $m \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n + 1$.
Fallunterscheidung:
 - $n = 1 \Rightarrow n + 1 - m = (n + 1) - 1 = n \in \mathbb{N} \checkmark$
 $\Rightarrow n + 1 \in C$.
 - $n > 1$ (und $m \leq n + 1$)
 $\xrightarrow{b)} m - 1 \in \mathbb{N}$ und $m - 1 \leq (n + 1) - 1 = n$
 Da $n \in C, m - 1 \in \mathbb{N}, m - 1 \leq n \Rightarrow \underbrace{n - (m - 1)}_{=(n+1)-m} \in \mathbb{N}_0$
 $\Rightarrow n + 1 \in C$.

4. H.A.

□

4 Funktionen und Abbildungen

4.1 Funktion als Abbildung

Definition 4.1.1. Eine Funktion (oder Abbildung) von einer Menge A in eine Menge B ordnet jedem Element $a \in A$ ein eindeutiges Element $b \in B$ zu.

Wir schreiben:

$$f : A \rightarrow B, a \mapsto f(a) \quad (= b)$$

A : Definitionsbereich

B : Zielbereich (Target(space))

z.B. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$

Die Abbildung $f : A \rightarrow B$ ist

injektiv	aus $f(a) = f(a'), a, a' \in A$, folgt $a = a'$
surjektiv	$\forall b \in B \exists a \in A : b = f(a)$
bijektiv	sie ist injektiv und surjektiv

Bemerkung. $f : A \rightarrow B$ injektiv $\Leftrightarrow a, a' \in A, a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$

$f : A \rightarrow B$ ist bijektiv $\Rightarrow \forall b \in B \exists! a \in A : f(a) = b$.

Definiere $f^{-1} : B \rightarrow A, b \mapsto a, a \in A : f(a) = b$ (inverse Funktion).

Ist $f : A \rightarrow B$ nicht bijektiv. (Verallgemeinerte Inverse)

$$f^{-1} : P(B) \rightarrow P(A), M \mapsto \{a \in A \mid f(a) \in M\}$$

Verkettung:

gegeben: $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$

$$g \circ f : A \rightarrow C \quad g \circ f(a) := g(f(a)).$$

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

$$f : A \rightarrow B \text{ ist bijektiv} \Rightarrow f^{-1} \circ f = \text{id}_A, f \circ f^{-1} = \text{id}_B$$

$$\text{id}_A : A \rightarrow A, a \mapsto a.$$

4.2 Abbildungen als Graph

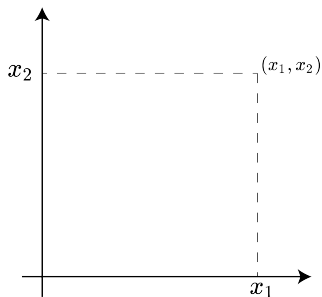
Definition 4.2.1. Seien A, B Mengen. Dann ist (a, b) ein sog. Tupel.
in der Mengenlehre: $(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$.

Beachte: Reihenfolge ist wichtig! im Allg. $(a, b) \neq (b, a)$

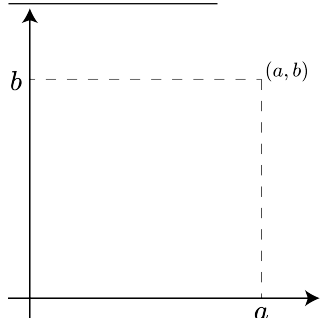
Menge $A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$

heißt kartesisches Produkt (von A und B)

z.B. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$



2. Abbildungen Projektionen



$\Pi_1 = \Pi_A : A \times B \rightarrow A, (a, b) \mapsto a$ (Projektion auf 1. Koordinate)

$\Pi_2 = \Pi_B : A \times B \rightarrow B, (a, b) \mapsto b$ (Projektion auf 2. Koordinate)

$\Pi_A(a, b) = a$

$\Pi_B(a, b) = b$

n -Tupel: Mengen $A_1, \dots, A_n, n \in \mathbb{N}$.

$A_1 \times A_2$ wie vorhin

$A_1 \times \dots \times A_{n+1} := (A_1 \times \dots \times A_n) \times A_{n+1}, n \in \mathbb{N}$ (induktiv)

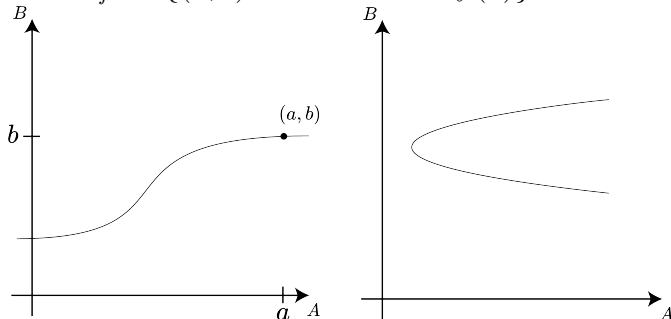
Beobachtung:

$(A \times B) \times C = A \times (B \times C) + \{(a, b, c) | a \in A, b \in B, c \in C\} = ((a, b), c) = (a, (b, c))$

Genauer: \exists Bijektion $\Phi : (A \times B) \times C \rightarrow A \times (B \times C)$

Definition 4.2.2 (Graph einer Abbildung). Geg: $f : A \rightarrow B$ Funktion

$\Gamma := \Gamma_f := \{(a, b) \in A \times B : b = f(a)\} \subset A \times B$



$P \subset A \times B$ ist der Graph einer Funktion genau dann, wenn aus $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \Gamma$ folgt $b_1 = b_2$. (und $\forall a \in A \exists b \in B : (a, b) \in \Gamma$)

Satz 4.2.1. $\Gamma \subset A \times B$ ist genau dann Graph einer Abbildung $f : A \rightarrow B$, wenn die Projektion $\Pi_A|_\Gamma : \Gamma \rightarrow A$ bijektiv ist.

Notation: $g : D \rightarrow E, X \subset D$

$g|_X : X \rightarrow E, x \mapsto g(x)$

Beweis. Sei $\Gamma = \Gamma_f$ mit $f : A \rightarrow B$ Funktion

$(a,b) \in \Gamma_f \Leftrightarrow b=f(a) \Rightarrow \forall a \in A$ existiert genau ein $b \in B$ mit $f(a) = b$.

$\Rightarrow \Pi_A|_\Gamma$ ist bijektiv.

Umgekehrt: Sei $\Pi_A|_\Gamma \rightarrow A$ bijektiv.

D.h. ist $(a_j, b_j) \in \Gamma, j \in \{1, 2\}$

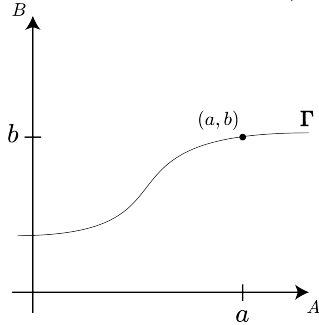
und $\Pi_A(a_1, b_1) = \Pi_A(a_2, b_2) \Rightarrow (a_1, b_1) = (a_2, b_2)$

$\Leftrightarrow a_1 = a_2, b_1 = b_2$

\Rightarrow zu $a \in A \exists! b \in B, (a, b) \in \Gamma$.

Da $b = \Pi_B(a, b) = \Pi_B((\Pi_A|_\Gamma)^{-1}(a))$

Definiere $f := \Pi_B \circ (\Pi_A|_\Gamma)^{-1} : A \rightarrow B$ ist Funktion



nachrechnen $\Gamma = \Gamma_f$

□

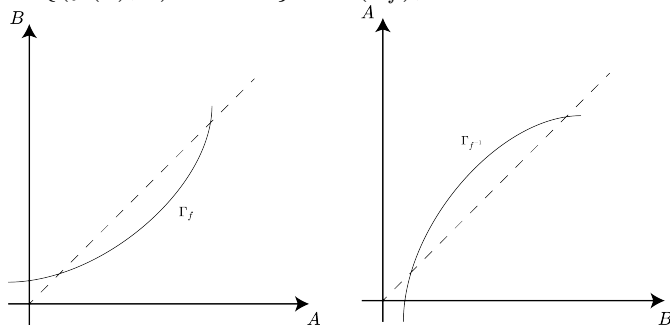
Bemerkung. In Satz 3 gilt $f = \Pi_B \circ (\Pi_A|_\Gamma)^{-1}$

Beispiel. Ist $f : A \rightarrow B$ bijektiv

$b = f(a), f^{-1}(b) = a$

Dann gilt: $\Gamma_f^{-1} = \{(b, f^{-1}(b)) | b \in B\}$

$= \{(f(a), a) : a \in A\} = S(\Gamma_f), S : A \times B \rightarrow B \times A$ (swap), $(a, b) \mapsto (b, a)$.



$\Gamma_{f^{-1}}$ = Spiegeln von Γ_f an Winkelhalbierenden.

4.3 Schubfachprinzip und endliche Mengen