Analysis I (WS 18/19)

Pavel Zwerschke

2. November 2018

Inhaltsverzeichnis

0 Organisatorisches

Dozent
Prof. Dr. Dirk Hundertmark (20.30, 2.028)
dirk.hundertmark@kit.edu
Übungsleiter
Dr. Markus Lange (20.30, 2.030)
markus.lange@kit.edu
Übungszettel
Ausgabe:
donnerstags unter `www.math.kit.edu/iana1/lehre/ana12018w/`
Abgabe:
bis mittwochs um 19:00 in den Abgabekästen des Foyers des Mathematikgebäudes (20.30)
getackert, mit Namen, Matrikelnummer, Tutoriennummer und Deckblatt (optional) in das Fach mit der richtigen Kennzeichnung legen
Zettel dürfen zu zweit abgegeben werden
Übungsschein
Jede K-Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet. Einen Übungsschein erhält wer 50% der Punkte aller K-Aufgaben erzielt.
Klausur
Die Anmeldung findet über das Online-Portal statt. Die Klausur findet in KW 8 2019 statt. Der Übungsschein ist Voraussetzung für die Teilnahme an der Klausur.

1 Was ist Analysis?

Zentrale Begriffe:
Grenzwerte von Folgen und Reihen, Funktionen, stetig, differenzierbar, integrieren, Differential- und Integralrechnung, Differentialgleichungen (Newton, Maxwell, Schrödinger), unendlich dimensionale Räume

Beispiel. $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \ldots$
$2S = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + {}^1\!/_2 + \ldots$
$2S = 1 + S$
S entspricht der Wahrscheinlichkeit, dass irgendwann mal Kopf in einem Münzwurf kommt.
Vorsicht!
$S = 1 + 2 + 4 + \ldots$
$2S = 2 + 4 + 8 + \cdots = -1 + 1 + 2 + 4 + \cdots = -1 + S$
$S = -1$
Natürlich Quatsch!
Formales Rechnen kann gefährlich sein!

- Was sind mathematische Aussagen?
- Wie macht man Beweise, wie findet man sie? (learning by doing)
- logische Zusammenhänge

2 Etwas Logik

Eine (mathematische) Aussage ist ein Ausdruck, der wahr oder falsch ist.
z. B.

1. A : „$1 + 1 = 2$.“(auch „$1 + 1 = 3$“, „$1 + 1 = 0$“)
2. B : „Es gibt unendlich viele Primzahlen.“
3. C : „Es gibt unendlich viele Primzahlen p für die $p + 2$ auch eine Primzahl ist.“
4. D : „Die Gleichung $m\ddot{x} = F$ hat geg. $\dot{x}(0) = v_0, x(0) = x_0$ immer genau eine Lösung.“
5. E : „Jede gerade natürliche Zahl größer als 2 ist die Summe zweier Primzahlen.“
6. F : „Morgen ist das Wetter schön.“

7. G : „Ein einzelnes Atom im Vakuum mit der Kernladungszahl Z kann höchstens $Z+1$ Elektronen binden.“

8. $H(k,m,n)$: „Es gilt: $k^2+m^2=n^2$.“(z. B. $H(3,4,5)$ ist wahr.)

Gegeben für natürliche Zahlen n, Aussagen $A(n)$, dann gilt:
Für jede nat. Zahl n ist $A(n)$ wahr, genau dann, wenn

1. $A(1)$ ist wahr.

2. Unter der Annahme, dass $A(n)$ wahr ist, folgt, dass $A(n+1)$ wahr ist.

Beispiel. $A(n): 1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

Beweis. Vollständige Induktion
Induktionsanfang:
$1=\frac{1(1+1)}{2}$ ✓
Induktionsschluss:
Wir nehmen an, dass $A(n)$ wahr ist (für $n \in \mathbb{N}$)
D. h. Induktionsannahme:
$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$
Dann folgt:
$\underbrace{1+2+\cdots+n}_{=\frac{n(n+1)}{2}}+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)$
$=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}=\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$ □

Bemerkung. Gaußscher Trick:
1)
$S=1+2+3+\cdots+n=n+(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1$
$2S=\underbrace{(n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)}_{n\text{-mal}} \Leftrightarrow S=\frac{n(n+1)}{2}$.
2)
$S_n=0+1+2+\cdots+n$
$=$ Anzahl der Punkte in
$\approx$ Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks $=\frac{1}{2}*n*n$.
Also: Ansatz („geschicktes Raten“, „scientific guess“, englisch: ansatz):
$S_n=\underbrace{a_2n^2+a_1n+a_0}_{\text{Polynom 2. Grades in n}}$
$a_2=\frac{1}{2}$
Wie bekommt man $a_0,a_1,(a_2)$? $n=0: S_0=0=a_2*0^2+a_1*0+a_0 \Rightarrow a_0=0$.
$n=1: S_1=1=a_2*1^2+a_1*1^2=a_2+a_1=\frac{1}{2}+a_1$.
also: $a_1=\frac{1}{2}$
$\Rightarrow$ Raten: $S_n=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n=\frac{n(n+1)}{2}$.

2.1 Grundbegriffe

Aussagen: Notation

$:$	„so, dass gilt“
$\exists$	„es gibt mindestens ein“, „es existiert“
$\forall$	„für alle“
$\Rightarrow$	„impliziert“($A \Rightarrow B$ „aus A folgt B“)
$\Leftrightarrow$	„genau dann, wenn“
$\neg A$	nicht A
$A \wedge B$	A und B
$A \vee B$	A oder B
$A := B$	A ist per Definition gleich B

Satz 2.1. *Folgende Aussagen sind allein aus logischen Gründen immer wahr.*

$\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$	*Gesetz der doppelten Verneinung*
$A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$	*Kontraposition*
$A \Rightarrow B \Leftrightarrow (\neg(A \wedge \neg B))$	*beim Widerspruchsbeweis*
$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$	*de Morgan*
$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$	*de Morgan*

Bemerkung. $A \Rightarrow B \Leftrightarrow B$ ist mindestens so wahr wie $A \Leftrightarrow A$ ist mindestens so falsch wie $B \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$.
$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B \wedge B \Rightarrow A)$.

Beispiel. $n \in \mathbb{N}$ ist gerade, falls $k \in \mathbb{N}$ existiert mit $n = 2k$.
$n \in \mathbb{N}$ ist ungerade, falls $\exists k \in \mathbb{N}_0 : \vee n = 2k + 1$.
Dann gilt: n ist gerade $\Leftrightarrow$ n^2 ist gerade.

Beweis. „$\Rightarrow$“: n gerade $\Rightarrow n = 2k$, für $k \in \mathbb{N}$
$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ ist gerade.
Umgekehrt müssen wir zeigen:
„$\Leftarrow$“: n^2 gerade $\Rightarrow n$ gerade
Kontraposition: n ungerade $\Rightarrow n^2$ ungerade
Also sei $n = 2k+1, k \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = \underbrace{2(2k^2 + 2k)}_{\text{gerade}} +1 \Rightarrow$
n^2 ist ungerade. □

Mengen (nach Cantor)
informell: Eine Menge ist eine Sammlung von Objekten (Elemente) zu einem neuen Objekt.
Vorsicht: Russels Paradox
genaue Definition von Zermelo-Fraenkel Axiome ($\rightarrow$ Logik Mengenlehre)
$a \in M$: a ist Element von M

$a \notin M$: a ist kein Element von M
z.B.:
$M = \{1, 4\}$
$1 \in M$
$5 \notin M$
Angabe von Mengen durch

- Auflistung
  $M = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_{17}\}$
- Eigenschaft
  $M = \{a | a \text{ hat Eigenschaft } E\}$

z.B.:

- $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$
- $\mathbb{Z} := \{x | x \in \mathbb{N} \vee x \in -\mathbb{N} \vee x = 0\}$
- $-\mathbb{N} := \{-n | n \in \mathbb{N}\}$

Definition 2.1.1. Sei M eine Menge und $A(x)$ Aussagen mit $x \in M$
$\forall x \in M : A(x)$ ist wahr, falls alle $A(x)$ wahr sind.
$\exists x \in M : A(x)$ ist wahr, falls mindestens eine Aussage $A(x)$ wahr ist.

Achtung: Zusammensetzen: Reihenfolge ist wichtig!
Beispiel. Töpfe := Menge der Töpfe
Deckel := Menge der Deckel
$A : \forall T \in$ Töpfe $\exists D \in$ Deckel : D passt auf T
(Für jeden Topf gibt es einen Deckel, der passt)
$B : \exists D \in$ Deckel $\forall T \in$ Töpfe : D passt auf T
(Es existiert mindestens ein Deckel, der auf alle Töpfe passt)

Negation:
$\neg(\forall x \in M : A(x))$
$\Leftrightarrow \exists x \in M : \neg A(x)$
$\neg(\exists x \in M : A(x))$
$\Leftrightarrow \forall x \in M : \neg A(x)$

Definition 2.1.2 (wichtige Mengen). Seien M, N Mengen.

$$\begin{aligned}
\emptyset &:= \text{ die Menge ohne Elemente (leere Menge)} \\
M \cap N &:= \{x | x \in M \wedge x \in N\} \text{ (Schnitt)} \\
M \cup N &:= \{x | x \in M \vee x \in N\} \text{ (Vereinigung)} \\
M \setminus N &:= \{x | x \in M \wedge x \notin N\} \text{ (Differenzmenge)} \\
\mathcal{P}(M) &:= \{A | A \subset M\} \text{ die Menge aller Teilmengen von } M \text{ (Potenzmenge)}
\end{aligned}$$

Sei I eine Menge und für $i \in I$ eine Menge M_i.

$$\bigcap_{i \in I} M_i := \{x | \forall i \in I : x \in M_i\}.$$
$$\bigcup_{i \in I} M_i := \{x | \exists i \in I : x \in M_i\}.$$

Ist $M \cap N = \emptyset$, so heißen M und N divergent.
$M \subset N$, falls $\forall x \in M : x \in N$ (M Teilmenge von N).
$M = N$, falls M und N dieselben Elemente haben.
Insbesondere ist $(M = N) \Leftrightarrow M \subset N \wedge N \subset M$.
$M \subsetneq N : M \subset N \wedge M \neq N$ (M echte Teilmenge von N).

Beispiel. $\emptyset \subset M$
$M = \{1, 2\} \Rightarrow \mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

1. Eigenschaften von „$\subset$“
   (a) $\emptyset \subset M$
   (b) $M \subset M$
   (c) $M = N \Leftrightarrow M \subset N \wedge N \subset M$
   (d) $A \subset B \wedge B \subset C \Leftrightarrow A \subset C$
2. Assoziativität
   (a) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
   (b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
3. Kommutativität
   (a) $A \cup B = B \cup A$
   (b) $A \cap B = B \cap A$
4. Distributivgesetz
   (a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
   (b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

3 Die reellen Zahlen

3.1 Körperaxiome (engl. field)

$\mathbb{K}$: Menge mit zwei Operationen „+“und „·“.
$\forall a, b \in \mathbb{K}$ ist $a + b \in \mathbb{K} \wedge a \cdot b \in \mathbb{K}$ erklärt sollen kompatibel sein.

Definition 3.1.1 (Körperaxiome)*.* In einem Körper gelten diese Axiome:

1. Kommutativität: $\forall a, b \in \mathbb{K} : a + b = b + a, a \cdot b = b \cdot a$

2. Assoziativität: $\forall a, b, c \in \mathbb{K} : a + (b + c) = (a + b) + c, a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

3. Existenz des neutralen Elements:
   $\exists 0 \in \mathbb{K} : a + 0 = 0 + a = a \forall a \in \mathbb{K}$
   $\exists 1 \in \mathbb{K} : a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \forall a \in \mathbb{K}$

4. Existenz eines inversen Elements:
   $\forall a \in \mathbb{K} \exists - a \in \mathbb{K} : a + (-a) = 0$
   $\forall a \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \exists \frac{1}{a} \in \mathbb{K} : a \cdot \frac{1}{a} = 1$
   Es gilt: $0 \neq 1$.

5. Distributivgesetz: $\forall a, b, c \in \mathbb{K} : a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Beispiel. $\mathbb{Q} = \frac{m}{n}, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}$ ist ein Körper.

$$\mathbb{F}_2 : \begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}$$ ist ein Körper.

Bemerkung. .

1. Somit ist ein Körper $\mathbb{K}$ mit „+“eine kommutative Gruppe und $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ mit „·“auch eine kommutative Gruppe.