1 Folgen und Konvergenz

1.1 Grundlagen

Definition 1.1.1. Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge. Eine Folge (mit Werten in X oder auch X-wertige Folge) ist eine Funktion

$$f : \mathbb{N} \to X, n \mapsto f(n) \in X$$

Wir setzen $a_n := f(n), n \in \mathbb{N}$.
a_n heißt n-tes Folgenglied. Wir schreiben auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder kurz $(a_n)_n$.
Ist $X = \mathbb{R}$, so heißt die Folge reellwertig oder reelle Folge (Folge reeller Zahlen). $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$.

Definition 1.1.2 (Konvergenz (reeller Folgen))**.** Eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert (mit $n \to \infty$) gegen ein $a \in \mathbb{R}$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N} : \forall n \geq k \text{ folgt } |a_n - a| < \varepsilon.$$

Die Zahl a heißt Grenzwert der Folge, wir schreiben $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ oder $a_n \to a$ (für $n \to \infty$).
Eine (reelle) Folge heißt konvergent, falls ein $a \in \mathbb{R}$ der Grenzwert der Folge ist, andernfalls heißt die Folge divergent.

Bemerkung.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N} : \forall n \geq k \text{ folgt } |a_n - a| < \varepsilon.$$

Beispiel. Beweis mit ε-Methode:

1. $a_n := \frac{1}{n}$ konvergiert gegen 0. Denn zu geg. $\varepsilon > 0$ wähle $k \in \mathbb{N}$ mit $k > \frac{1}{\varepsilon}$. Dann gilt für $n \geq k$

$$|a_n - a| = |\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{k} < \varepsilon.$$

2. Konstante Folge . Sei $a \in \mathbb{R}$ und sei $a_n = a$ für $n \in \mathbb{N}$.
Dann folgt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, denn für $\varepsilon > 0$

$$|a_n - a| = |a - a| = 0 < \varepsilon, \text{ wähle } k = 1$$

3. Sei $a_n := (-1)^n$, also $a_1 = -1, a_2 = 1, a_3 = -1, \ldots$
Dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht konvergent.

Beweis. Angenommen: $(a_n)_n$ konvergiert und $a \in \mathbb{R}$ ist Grenzwert. Zu $\varepsilon = 1$ existiert dann $k \in \mathbb{N}$ so, dass $|a_n - a| < \varepsilon = 1 \quad \forall n \geq k$
Also gilt für $n \geq k$:

$$2 = |a_n - a_{n+1}| = |a_n - a + a - a_{n+1}| \leq |a_n - a| + |a - a_{n+1}| < 1 + 1 = 2 \lightning$$

$\square$

4. Die Folge (a_n) konvergiert gegen a. Dann konvergiert auch $(|a_n|)_n$ gegeen $|a|$. (Hinweis: Umgekehrte Dreiecksungleichung)

5. Geometrische Folge:
   Sei $q \in \mathbb{R}, |q| < 1$. Dann gilt

$$\lim_{n \to \infty} q^n = 0.$$

Beweis. Annahme: $q \neq 0$, dann gilt $\frac{1}{|q|} > 1$ und es existiert $x > 0$, sodass $\frac{1}{|q|} = 1 + x$.
Aus Bernoullischer Ungleichung folgt

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

und somit

$$|q^n - 0| = |q^n| = |q|^n = \frac{1}{(1 + x)^n} \leq \frac{1}{1 + nx}.$$

Also zu $\varepsilon > 0$ wähle $k \in \mathbb{N} \forall n \geq k$ gilt $nx > \frac{1}{\varepsilon}$.

$$|q^n - 0| \leq \frac{1}{1 + nx} \leq \frac{1}{nx} < \varepsilon \text{ für } n \geq k.$$

$\square$

6. Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$. Dann konvergiert die $a_n = a^{1/n}$ gegen 1.

Beweis. Fall 1: Die Beh. stimmt für $a = 1$.
Fall 2: $a > 1$. Dann ist $a_n = a^{1/n} > 1$ und somit $q_n := a_n - 1 = a^{1/n} - 1 > 0$.
$a_n = a^{\frac{1}{n}} = 1 + q_n \Rightarrow a = (1 + q_n)^n \underset{\text{Bern. Ungl.}}{\geq} 1 + nq_n$

$$\Rightarrow 0 \leq q_n \leq \frac{a - 1}{n} \forall n \in \mathbb{N}$$

Zu $\varepsilon > 0$ wähle $K \in \mathbb{N}$ mit $K > \frac{a-1}{\varepsilon}$.
Dann $n \geq K$

$$|a_n - 1| = |a^{1/n} - 1| = a^{1/n} - 1 = q_n \leq \frac{a-1}{n} < \varepsilon.$$

Fall 3: $0 < a < 1$. Dann ist $b := \frac{1}{a} > 1$.

$$\overset{\text{Fall 2}}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty} b^{\frac{1}{n}} = 1$$

$$\begin{aligned} |a^{1/n} - 1| &= a^{1/n} \left|1 - \frac{a}{a^{1/n}}\right| \\ &= a^{1/n} \left|1 - \left(\frac{a}{a}\right)^{1/n}\right| \\ &= a^{1/n} \left|1 - b^{1/n}\right| \\ &\leq \left|1 - b^{1/n}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = 1$$

□

7. Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$.

   Beweis. 1. Versuch:
   Setze $q_n := n^{1/n} - 1 > 0$ für $n > 1$

   $$\begin{aligned} &\Rightarrow n = (1 + q_n)^n \geq 1 + nq_n \\ &\Rightarrow |n^{1/n} - 1| = q_n \leq \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n} \end{aligned}$$

   funktioniert nicht...
   Frage: Kann Bernoullische Ungleichung verbessert werden?

$$
\begin{aligned}
(1+q)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} q^k 1^{n-k} \\
&= 1 + \binom{n}{1} q + \binom{n}{2} q^2 + \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} q^k 1^{n-k} \\
&\geq 1 + nq + \frac{n(n-1)}{2} q^2 \\
&\geq 1 + \frac{n(n-1)}{2} q^2 \quad \text{falls } q \geq 0. \\
(*)
\end{aligned}
$$

Setzen $q_n := n^{1/n} - 1 > 0$ für $n \geq 2$.

$$\Rightarrow n = (1+q_n)^n \overset{(*)}{\geq} 1 + \frac{n(n-1)}{2} q_n^2$$

$$\Rightarrow q_n^2 \leq \frac{2(n-1)}{n(n-1)} = \frac{2}{n}$$

$$\Rightarrow q_n \leq \sqrt{\frac{2}{n}} \forall n \geq 2$$

Zu $\varepsilon > 0$ wähle $K \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt{\frac{2}{K}} < \varepsilon$.

$$\Rightarrow |n^{1/n} - 1| = q_n \leq \sqrt{\frac{2}{n}} \overset{n \geq K}{<} \varepsilon.$$

Somit gilt $\forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N}$, sodass für $n \geq K$ gilt

$$|n^{1/n} - 1| < \varepsilon.$$

Also per Definition

$$\lim_{n \to \infty} n^{1/n} = 1.$$

□

Satz 1.1.3. Falls die reelle Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert, so ist ihr Grenzwert eindeutig bestimmt.

Beweis. Annahme: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen a und $b \in \mathbb{R}$. Und $a \neq b$ o.B.d.A. gilt $a < b$. Wissen:

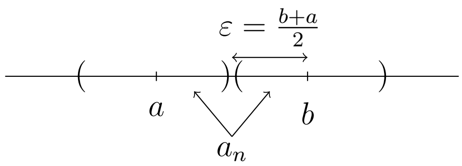
$$\forall\varepsilon > 0 \exists K_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq K_1 \quad |a_n - a| < \varepsilon$$
$$\forall\varepsilon > 0 \exists K_2 \in \mathbb{N} : \forall n \geq K_2 \quad |a_n - b| < \varepsilon$$

Setze $\varepsilon := \frac{b-a}{2} > 0$.
Dann folgt für $n \geq \max\{K_1, K_2\}$

$$b - a = b - a_n + a_n - a \leq \underbrace{|b - a|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|a_n - a|}_{<\varepsilon} < 2\varepsilon = b - a\text{↯}$$

Somit muss $a = b$ gelten! $\square$

Bild:



Definition 1.1.4 (ε-Umgebung)**.** Die ε-Umgebung um $a \in \mathbb{R}$ ist die Menge

$$U_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon).$$

Beobachtung: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent gegen $a \in \mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists K \in \mathbb{N} : a_n \in U_\varepsilon(a) \forall n \geq K.$$

Definition 1.1.5 (Beschränktheit von Folgen)**.** Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ heißt
beschränkt, wenn für $C \geq 0$ gilt $|a_n| \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N}$
nach oben beschränkt, wenn es ein $C \in \mathbb{R}$ gibt mit $a_n \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N}$
nach unten beschränkt, wenn es ein $C \in \mathbb{R}$ gibt mit $a_n \geq C \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Bemerkung. beschränkt $\Leftrightarrow$ nach oben und nach unten beschränkt

Satz 1.1.6. Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Beweis. Sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Zu $\varepsilon = 1$ wähle $K \in \mathbb{N}$. $|a_n - a| < 1 \quad \forall n \geq K$.

$$n \geq K \Rightarrow |a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|$$
$$n \leq K - 1 \Rightarrow |a_n| \leq \max\{|a_1|, \ldots, |a_{K-1}|\}.$$

Setze $C := \max\{|a_1|, \ldots, |a_{K-1}|, 1 + |a|\}$, so folgt

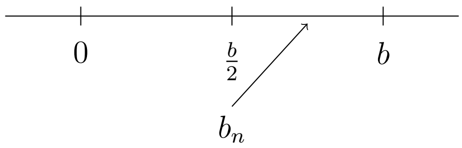
$$|a_n| \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$\square$

Lemma 1.1.7. Die Folge $(b_n)_n \subset \mathbb{R}$ konvergiert gegen $b \neq 0$. Dann existiert $K \in \mathbb{N}$, sodass

$$|b_n| \geq \frac{|b|}{2}.$$

Beweis. Bild:



Setze $\varepsilon := \frac{|b|}{2} > 0$. Dann existiert $K \in \mathbb{N}$ mit

$$|b_n - b| < \varepsilon = \frac{|b|}{2} \quad \forall n \geq K, n \geq K$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow |b| = |b - b_n + b_n| \leq |b - b_n| + |b_n| \overset{n \geq K}{<} \frac{|b|}{2} + |b_n| \\
&\Rightarrow |b_n| > |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2} \quad \forall n \geq K.
\end{aligned}$$

□

Satz 1.1.8 (Rechenregel für Grenzwerte)**.** Es gelte $a_n \to a, b_n \to b$ für $n \to \infty$.

1. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist $(\lambda a_n + \mu b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent mit Grenzwert

$$\lim_{n \to \infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda a + \mu b.$$

2. Die Folge $(a_n b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert mit Grenzwert

$$\lim_{n \to \infty} (a_n b_n) = ab.$$

3. Falls $b \neq 0$, so gibt es ein $K_0 \in \mathbb{N}$ mit $b_n \neq 0 \quad \forall n \geq K$ und die Folge $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \geq K_0}$ ist konvergent mit Grenzwert

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

Beweis. 1. 1. Fall $\lambda = \mu = 1$.
Zu $\varepsilon > 0 \exists K_1, K_2 \in \mathbb{N}$, sodass

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq K_1$$
$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq K_2$$

Setze $K := \max\{K_1, K_2\}$. Dann folgt

$$|a_n+b_n-(a+b)| = |(a_n-a)+(b_n-b)| \leq |a_n-a|+|b_n-b| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall n \geq K$$

. Also ist $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = a + b$. Fall 2: allg. $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
Aus 2. folgt

$$\lim_{n\to\infty} \lambda a_n = \lambda \lim_{n\to\infty} a_n$$
$$\lim_{n\to\infty} \mu b_n = \mu \lim_{n\to\infty} b_n \qquad (*)$$

$\overset{\text{Fall 1}}{\Rightarrow} \lambda a_n + \mu b_n$ ist konvergent und

$$\lim_{n\to\infty}(\lambda a_n+\mu b_n) = \lim_{n\to\infty}(\lambda a_n)+\lim_{n\to\infty}(\mu b_n) \overset{(*)}{=} \lambda \lim_{n\to\infty} a_n+\mu \lim_{n\to\infty} b_n = \lambda a+\mu b.$$

2. Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt $a_nb_n - ab = a_nb_n - a_nb + a_nb - ab = a_n(b_n - b) + (a_n - a)b$

$$\Rightarrow |a_nb_n - ab| \leq |a_n||b_n - b| + |a_n - a||b|.$$

Nach Satz 6 existiert $C \geq 0$ mit $|a_n| \leq C \forall n \in \mathbb{N}$. Setze $D := \max\{C, |b|\}$.

$$|a_nb_n - ab| \leq D(|a_n - a| + |b_n - b|) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Zu $\varepsilon > 0$ wähle $K_1, K_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2(0+1)} \quad \forall n \in K_1$$

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2(0+1)} \quad \forall n \in K_2$$

Dann folgt $\forall n \geq K := \max\{K_1, K_2\}$

$$|a_nb_n - ab| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Also $\lim_{n\to\infty} a_nb_n = ab$.

3. o.B.d.A. $a_n = 1$. (aus 2. folgt dann der allg. Fall mit $\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n}$)
   Da $b_n \to b \neq 0$, folgt mit Lemma 7, dass ein $K_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $|b_n| > \frac{|b|}{2}$ für $n \geq K_0$

$$\frac{1}{b_n} \text{ ist wohldefiniert } \forall n \geq K_0.$$

   Es gilt: $\frac{1}{b} - \frac{1}{b_n} = \frac{b_n - b}{bb_n}$ und somit

$$\left|\frac{1}{b} - \frac{1}{b_n}\right| = \frac{|b_n - b|}{|b| \cdot |b_n|} \leq \frac{2|b_n - b|}{|b|^2}.$$

   Zu $\varepsilon > 0$ wähle $K_1 \in \mathbb{N}$ mit $|b_n - b| < \frac{|b|^2 \varepsilon}{2} \quad \forall n \geq K_1$.
   Dann folgt

$$\left|\frac{1}{b} - \frac{1}{b_n}\right| \leq \frac{2 \cdot |b_n - b|}{|b|^2} < \varepsilon \quad \forall n \geq \max\{K_0, K_1\}.$$

   Somit folgt $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$ (für $n \to \infty$). Somit folgt die allg. Aussage aus Teil 2 von Satz 7.1.8.

□

reelle Folgen $f = (f_n)_n, g = (g_n)_n$

$$(f+g)_n := f_n + g_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

$x(\lambda f)_n := \lambda f_n \Rightarrow (\lambda f + \mu g)_n = \lambda f_n + \mu g_n$ ist eine Linearkombination.
$\Rightarrow$ Raum der reellen Folgen ist ein reeller Vektorraum.

$$\begin{aligned}
&\{\text{Raum der (reellen) Folgen}\}\\
&\supsetneq \{\text{Raum der beschränkten (reellen) Folgen}\}\\
&\supsetneq \{\text{Raum der (reellen) konvergenten Folgen}\}\\
&\supsetneq \{\text{Raum der (reellen) Nullfolgen}\}.
\end{aligned}$$

$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge, falls $\lim\limits_{n \to \infty} f_n = 0$.

Beispiel (1). p, q Polynome vom Grad $m, n \in \mathbb{N}$.
D. h.

$$p(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0 \quad b_n \neq 0 \neq a_m$$

$$
\begin{aligned}
k \in \mathbb{N}. \frac{p(k)}{q(k)} &= \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0} \\
&= k^{m-n} \frac{a_m + a_{m-1}k^{-1} + \ldots + a_1 k^{1-m} + a_0 k^{-m}}{b_n + b_{n-1}k^{-1} + \ldots + b_1 k^{1-n} + b_0 k^{-n}} \\
&\xrightarrow{\text{Satz 8}} \begin{cases} 0, & \text{falls } n > m. \\ \frac{a_n}{b_n}, & \text{falls } n = m. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Beispiel (Geometrische Reihe).

$$
\begin{aligned}
-1 < q < 1.& \\
a_n &:= 1 + q + q^2 + \ldots + q^n \\
&= \sum_{l=0}^{n} q^l \overset{\text{Satz 3.5.7}}{=} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \\
\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n &= \frac{1 - \lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}.
\end{aligned}
$$

Da $q^n \to 0, n \to \infty$, Bsp. 6 oben. Schreiben hierfür

$$
\sum_{l=0}^{n} q^l = \frac{1}{1-q}, \quad -1 < q < 1
$$

Beispiel. Ist $(b_n)_n$ beschränkt, $(a_n)_n$ Nullfolge. $\Rightarrow$ $(b_n a_n)_n$ Nullfolge. (Hausaufgabe)

Notation: Wir sagen die Aussagen $A(n), n \in \mathbb{N}$ gelten für fast alle $n \in \mathbb{N}$, falls $K_0 \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $A(n)$ wahr ist für alle $n \geq K_0$ (d. h. für alle genügend großen n, d. h. $A(n)$ wahr für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}$).

Beispiel.

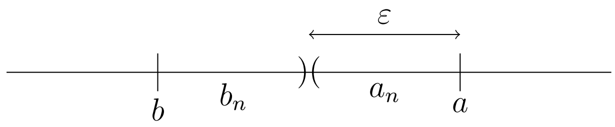
$$
a_n \to a, n \to \infty \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0 \text{ ist } a_n \in U_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon \text{ für fast alle } n.)
$$

Satz 1.1.9. Seien $(a_n)_n, (b_n)_n$ konvergente reelle Folgen, $a_n \to a, b_n \to b, n \to \infty$. Dann gilt

1. Aus $a_n \leq b_n$ für fast alle n folgt $a \leq b$.
2. Sind $c, d \in \mathbb{R}, c \leq a_n \leq d$ für fast alle $n \Rightarrow c \leq a \leq d$
3. (Sandwichlemma) Ist $a_n \leq c_n \leq b_n$ für fast alle n ($(c_n)_n$ weitere reelle Folge) und $a = b \Rightarrow (c_n)_n$ konvergiert und $\lim\limits_{b\to\infty} c_n = a$ $(= b)$.

Beweis. .

1. Bild: Ang. $a > b$
   $\varepsilon = \frac{b-a}{2} > 0$

   $\Rightarrow b_n > a_n$ ↯

   Formal: $\exists K_0 \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n \quad \forall n \geq K_0$.

   $$\begin{array}{lll} \forall\varepsilon > 0 \exists K_1 \in \mathbb{N}, K_2 \in \mathbb{N} : & a_n \in U_\varepsilon(a) \forall n \geq K_1, & a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \\ \Rightarrow K := \max(K_0, K_1, K_2) & b_n \in U\varepsilon(b) \forall n \geq K_2, & b - \varepsilon < b_n < b + \varepsilon. \end{array}$$

   Ang. $a > b : \varepsilon := \frac{a-b}{2} > 0 \Rightarrow$
   K wie oben $:\Rightarrow a < a_n + \varepsilon \leq b_n + \varepsilon < b + e\varepsilon = b + 2\frac{a-b}{2} = a \Rightarrow a < a$
   ↯$\Rightarrow a \leq b$✓. Andere Möglichkeit:

   $$a_n \leq b_n, \forall\varepsilon > 0 : a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon, b - \varepsilon < b_n < b + \varepsilon \quad \forall n \geq K.$$
   $$a < a_n + \varepsilon \leq b_n + \varepsilon < b + 2\varepsilon \Rightarrow \underbrace{a - b < 2\varepsilon \quad \forall\varepsilon > 0}_{\Rightarrow a-b\leq 0 \Leftrightarrow a \leq b.}.$$

2. Nehme $b_n = c, b_n \to c$.
   Da $b_n = c \leq a_n \overset{1.}{\Rightarrow} c = \lim b_n \leq \lim a_n = a$.
   Nehme auch $b_n = d, a_n \leq d = b_n \overset{1.}{\Rightarrow} a \leq \lim b_n = d$.✓

3. Haben $\forall\varepsilon > 0$.

   $$\begin{array}{lr} \exists K_0 \in \mathbb{N} : & a_n \leq c_n \leq b_n \quad \forall n \geq K_0 \\ \exists K_1, K_2 \in \mathbb{N} : & a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \quad \forall n \geq K_1 \\ & \underbrace{b - \varepsilon}_{=a-\varepsilon} < b_n < \underbrace{b + \varepsilon}_{=a+\varepsilon} \quad \forall n \geq K_2 .(\text{ da })b = a \end{array}$$

   $$\forall n \geq K : a - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \varepsilon$$
   $$\Rightarrow a - \varepsilon < c_n < a_n + \varepsilon \Leftrightarrow c_n \in U_\varepsilon(a) \quad \forall n \geq K$$

   $\Leftrightarrow$ konvergiert $(c_n)_n$ gegen a!

□

Achtung! $a_n < b_n \forall n, a_n \to a, b_n \to b \not\Rightarrow a < b$.
Bsp. $a_n = 0, b_n = \frac{1}{n}$.

Definition 1.1.10 (Uneigentliche Konvergenz)**.** Die Folge $(a_n)_n$ konvergiert uneigentlich (divergiert bestimmt) gegen $+\infty$, falls

$$\forall R > 0 \exists K \in \mathbb{N} \text{ mit } a_n > R \quad \forall n \geq K.$$

Schreiben $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ oder $a_n \to +\infty, n \to \infty$ Analog für $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, falls

$$\forall R < 0 \exists K \in \mathbb{N} : a_n < R \forall n \geq K.$$

Beispiel. Ist $a > 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} q^n = +\infty, 0 < \frac{1}{q} < 1$.

Beweis. $\frac{1}{q^n} = \left(\frac{1}{q}\right)^n \to 0, n \to \infty$
d. h. zu $R > 0 \exists K \in \mathbb{N} : \frac{1}{q^n} < \frac{1}{R} \quad \forall n \geq K$.
$\Leftrightarrow q^n > R \quad \forall n \geq K$. Also $\lim q^n = +\infty$ nach Def.
Insgesamt:

$$\begin{aligned}
q &> 1 && \Rightarrow \lim_{n\to\infty} q^n = +\infty. \\
q &= 1 && \Rightarrow \lim_{n\to\infty} q^n = 1. \\
-1 < q &< 1 && \Rightarrow \lim_{n\to\infty} q^n = 0. \\
q &\leq 1 && \Rightarrow (q^n)_n \text{ ist nicht konvergent.}
\end{aligned}$$

Ist $q < 1 \Rightarrow (q_n)_n$ nicht beschränkt ist. □

Satz 1.1.11 (Kehrwerte)**.**

1. Aus $|a_n| \to \infty, n \to \infty$ folgt $\frac{1}{a_n} \to 0, n \to \infty$.

2. Aus $a_n \to 0, a_n > 0$ (bzw. $a_n < 0$) $\forall n$ folgt $\frac{1}{a_n} \to \infty, n \to \infty$ ($\frac{1}{a_n} \to -\infty, n \to \infty$).

Beweis. Übungsaufgabe □