1 Funktionen und Abbildungen

1.1 Funktion als Abbildung

Definition 1.1.1. Eine Funktion (oder Abbildung) von einer Menge A in eine Menge B ordnet jedem Element $a \in A$ ein eindeutiges Element $b \in B$ zu.
Wir schreiben:

$$f : A \to B, a \mapsto f(a) \quad (= b)$$

A: Definitionsbereich
B : Zielbereich (Target(space))
z.B. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$
Die Abbildung $f : A \to B$ ist

injektiv	aus $f(a) = f(a')$ $a, a' \in A$, folgt $a = a'$
surjektiv	$\forall b \in B \exists a \in A : b = f(a)$
bijektiv	sie ist injektiv und surjektiv

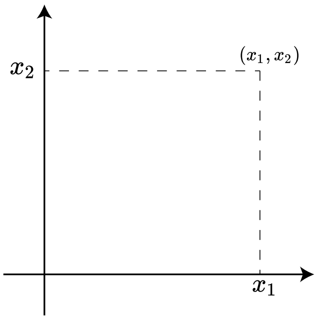
Bemerkung. $f : A \to B$ injektiv $\Leftrightarrow a, a' \in A, a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$

$f : A \to B$ ist bijektiv $\Rightarrow \forall b \in B \exists! a \in A : f(a) = b$.
Definiere, wenn bijektiv $f^{-1} : B \to A, b \mapsto a, a \in A : f(a) = b$
(inverse Funktion).
Ist $f : A \to B$ nicht bijektiv. (Verallgemeinerte Inverse)
$f^{-1} : P(B) \to P(A), M \mapsto \{a \in A | f(a) \in M\}$
Verkettung:
gegeben: $f : A \to B, g : B \to C$
$g \circ f : A \to C \qquad g \circ f(a) := g(f(a))$.
$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$
$f : A \to B$ ist bijektiv $\Rightarrow f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A, f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B$
$\mathrm{id}_A : A \to A, a \mapsto a$.

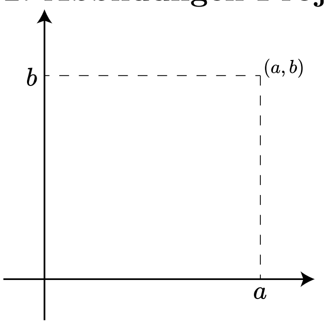
1.2 Abbildungen als Graph

Definition 1.2.1. Seien A, B Mengen. Dann ist (a, b) ein sog. Tupel.
in der Mengenlehre: $(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$.

Beachte: Reihenfolge ist wichtig! im Allg. $(a, b) \neq (b, a)$
Menge $A \times B := \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$
heißt kartesisches Produkt (von A und B)
z.B. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

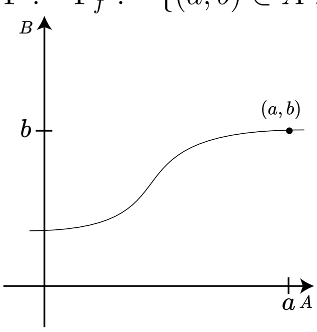


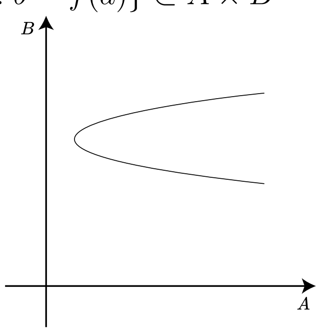
2. Abbildungen Projektionen



$\Pi_1 = \Pi_A : A \times B \to A, (a, b) \mapsto a$ (Projektion auf 1. Koordinate)
$\Pi_2 = \Pi_B : A \times B \to B, (a, b) \mapsto b$ (Projektion auf 2. Koordinate)
$\Pi_A(a, b) = a$
$\Pi_B(a, b) = b$
n-Tupel: Mengen $A_1, \dots, A_n, n \in \mathbb{N}$.
$A_1 \times A_2$ wie vorhin
$A_1 \times \cdots \times A_{n+1} := (A_1 \times \cdots \times A_n) \times A_{n+1}, n \in \mathbb{N}$ (induktiv)
Beobachtung:
$(A \times B) \times C = A \times (B \times C) + \{(a, b, c) | a \in A, b \in B, c \in C\} = ((a, b), c) = (a, (b, c))$
Genauer: $\exists$ Bijektion $\Phi : (A \times B) \times C \to A \times (B \times C)$

Definition 1.2.2 (Graph einer Abbildung)**.** Geg: $f : A \to B$ Funktion
$\Gamma := \Gamma_f := \{(a, b) \in A \times B : b = f(a)\} \subset A \times B$



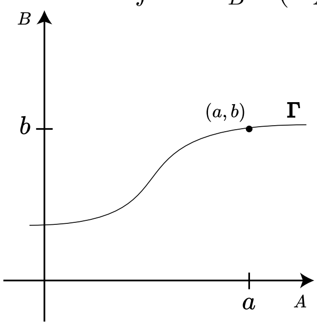


$P \subset A \times B$ ist der Graph einer Funktion genau dann, wenn aus $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in$

Γ folgt $b_1 = b_2$. (und $\forall a \in A \exists b \in B : (a,b) \in \Gamma$)

Satz 1.2.3. $\Gamma \subset A \times B$ ist genau dann Graph einer Abbildung $f : A \to B$, wenn die Projektion $\Pi_A|_\Gamma : \Gamma \to A$ bijektiv ist.
Notation: $g : D \to E, X \subset D$
$g|_X : X \to E, x \mapsto g(x)$

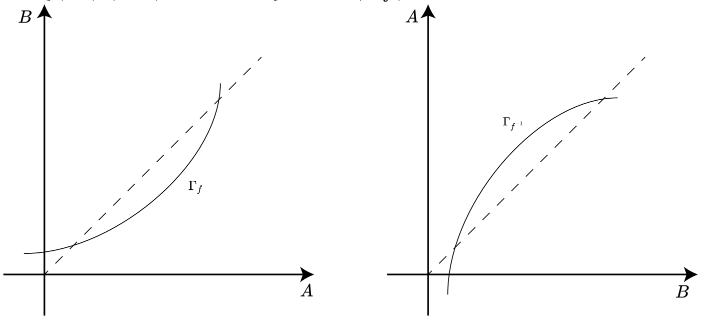
Beweis. Sei $\Gamma = \Gamma_f$ mit $f : A \to B$ Funktion
$\overset{(a,b)\in\Gamma_f \Leftrightarrow b=f(a)}{\Rightarrow} \forall a \in A$ existiert genau ein $b \in B$ mit $f(a) = b$.
$\Rightarrow \Pi_A|_\Gamma$ ist bijektiv.
Umgekehrt: Sei $\Pi_A|_\Gamma \to A$ bijektiv.
D.h. ist $(a_j, b_j) \in \Gamma, j \in \{1,2\}$
und $\Pi_A(a_1,b_1) = \Pi_A(a_2,b_2) \Rightarrow (a_1,b_1) = (a_2,b_2)$
$\Leftrightarrow a_1 = a_2, b_1 = b_2$
$\Rightarrow$ zu $a \in A \exists! b \in B, (a,b) \in \Gamma$.
Da $b = \Pi_B(a,b) = \Pi_B((\Pi_A|_\Gamma)^{-1}(a))$
Definiere $f := \Pi_B \circ (\Pi_A|_\Gamma)^{-1} : A \to B$ ist Funktion



nachrechnen $\Gamma = \Gamma_f$ □

Bemerkung. In Satz 3 gilt $f = \Pi_B \circ (\Pi_A|_\Gamma)^{-1}$

Beispiel. Ist $f : A \to B$ bijektiv
$b = f(a), \quad f^{-1}(b) = a$
Dann gilt: $\Gamma_f^{-1} = \{(b, f^{-1}(b)) | b \in B\}$
$= \{(f(a), a) : a \in A\} = S(\Gamma_f), S : A \times B \to B \times A$ (swap), $(a,b) \mapsto (b,a)$.



$\Gamma_{f^{-1}}$ = Spiegeln von Γ_f an Winkelhalbierenden.

1.3 Schubfachprinzip und endliche Mengen

Notation: Sei $n \in \mathbb{N}.[n] := \{1, \ldots, n\}$ ist gegeben durch:

$$[1] = \{1, \ldots, 1\} = \{1\}$$

$$[n+1] = \{1, \ldots, n, n+1\} = [n] \cup \{n+1\} \text{ induktive Def.} n \in \mathbb{N}$$

$$[2] = \{1, 2\}, [3] = \{1, 2, 3\}$$

Satz 1.3.1 (Schubfachprinzip)**.** Ist $f : [m] \to [n] (m, n \in \mathbb{N})$ injektiv, dann ist $m \leq n$.

Beweis. Fassen obige Aussage als $A(n)$ auf, die für alle $m \in \mathbb{N}$ zu zeigen ist.
Induktionsanfang:

$n = 1 : f : [m] \to \{1\}$ injektiv $\Rightarrow m = 1,$ da sonst $f(1) = 1 = f(2)$ ↯ zu Injektivität. ∎

Induktionsschritt:
Induktionsvoraussetzung: $A(n)$ ist wahr für $n \in \mathbb{N}$.
Zu zeigen: $A(n+1)$ ist wahr.
Angenommen, $f : [m] \to [n+1] = [n] \cup \{n+1\}$ sei injektiv.
Zu zeigen: $m \leq n+1$
Fallunterscheidung:

1. Ang. $m = 1 \Rightarrow m = 1 \leq n+1$ ✓

2. Ang. $m > 1, m \in \mathbb{N} \overset{\text{Satz 3.5.8}}{\Rightarrow} m - 1 \in \mathbb{N}$
   (∗) Beh.: $\exists$ inj. $\tilde{f} : \{1, \ldots, m-1\} \to \{1, \ldots, n\}$.

$$\overset{(*)+\text{IV}}{\Rightarrow} m - 1 \leq n, \text{ d.h. } m \leq n+1 \Rightarrow A(n+1) \text{ ist wahr.}$$

Beweis von (∗):
Angenommen, $\exists f : [m] \to [n+1]$ inj.
Dann $\exists \tilde{f} : [m+1] \to [m+1] \to [n]$ inj.
Fallunterscheidung:

- Ang. $f(k) \in [n] \forall 1 \leq k \leq m-1$. Dann setze $\tilde{f}(k) := f|_{[m-1]}$
  $\tilde{f}(k) := f(k), 1 \leq k \leq m-1$
  (Nachrechnen $\tilde{f}$ ist injektiv.)

- $\exists j \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq m-1$ mit $f(j) = n+1$.
  Dann def. $\tilde{f} : [m-1] \to [n]$

$$\tilde{f}(k) := \begin{cases} f(k), 1 \leq k \leq m-1, k \neq j \\ f(m), k = j \end{cases}$$

  Man prüfe nach $\tilde{f} : [m-1] \to [n]$ injektiv!

$\square$

Korollar 1.3.2. Sind $n, m \in \mathbb{N}$ und $f : [m] \to [n]$ bijektiv $\Rightarrow m = n$.

Beweis. Nach Voraussetzung ist $f : [m] \to [n]$ injektiv und $f^{-1} : [n] \to [m]$ auch injektiv.
$\Rightarrow m \leq n \wedge n \leq m \Rightarrow m = n$. $\square$

Definition 1.3.3. Eine Menge M ist endlich, falls $M = \emptyset$ oder falls $n \in \mathbb{N}_0$ und eine Bijektion $f : 1, \dots, n \to M$ existiert.
Die Anzahl der Elemente von M ($\#M$) ist dann $\#M := n$, setzen $\#\emptyset := 0$.
Eine Menge ist unendlich, falls sie nicht endlich ist.

Bemerkung. Ist M endlich, so ist $\#M$ wohldefiniert.
Angenommen:

$$\begin{matrix} f : [n] \to M \\ g : [m] \to M \end{matrix} \quad \text{beide bijektiv.}$$

$$[n] \xrightarrow{f} M \xleftarrow{g} [m]$$

$h := f^{-1} \circ g = [m] \to [n]$ ist auch bijektiv. $\overset{\text{Korr. 2}}{\Rightarrow} m = n$.

Weiter in Definition:
Zwei Mengen A, B heißen gleichmächtig, falls es eine Bijektion $f : A \to B$ gibt, schreiben $A \sim B$. Eine Menge A heißt abzählbar, falls A endlich ist oder es eine Bijektion $f : \mathbb{N} \to A$ gibt. Ist A abzählbar und unendlich, so heißt A abzählbar unendlich.

Bemerkung. Satz von Cantor und Berenstein:
Ang. $\exists$ Injektion $f : A \to B, f : B \to A$, dann $\exists$ Bijektion $h : A \to B$.

Beweis. Siehe Kolmogorov-Fomin: Introductory Real Analysis.
Könnten definieren $A \leq B$, falls es eine inj. Funktion $f : A \to B$ gibt.
$A \leq B \wedge B \leq A \Leftrightarrow A \sim B$. $\square$

Bemerkung. $A \leq B$ heißt Kardinalität von A ist kleiner gleich der Kardinalität von B.

1. Ist $B \subset A$ und A endlich, so ist B endlich und $\#B \leq \#A$.

2. A, B endlich und disjunkt, $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \#(A \cup B) = \#A + \#B$.

Satz 1.3.4. Zwei Aussagen:

1. Jede Teilmenge einer abzählbaren Menge ist abzählbar.

2. Sind für $j \in \mathbb{N} \quad A_j$ abzählbare Mengen. Dann ist $\bigcup_{j \in \mathbb{N}}$ abzählbar.

Beweis. Beweis unterteilen:

1. Sei A abzählbar. Ist A endlich, so ist auch jedes $B \subset A$ endlich, und somit abzählbar.
   Sei A abzählbar unendlich. Dann existiert eine Bijektion $f : \mathbb{N} \to A$ und setzen wir $a_n := f(n)$, so ist
   $$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{a_n\} = \{a_1, a_2, \ldots\}.$$
   Ist $B \subset A$, so existieren $n_j \in \mathbb{N}, 1 \leq n_1 < n_2 < \ldots$ mit
   $$B = \{a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots\}.$$
   Gibt es nur endlich viele n_j, so ist B endlich, andernfalls ist $h : \mathbb{N} \to B, g \mapsto h(j) := a_{n_j}$ eine Bijektion.

2. o.B.d.A. sind alle A_j paarweise verschieden, $A_l \cap A_m \neq \emptyset$ für $l \neq m$. Wenn nicht, betrachte
   $$B_1 := A_1, \quad B_2 := A_2 \setminus A_1,$$
   $$B_3 := A_3 \setminus \{A_1 \cup A_2\}, \ldots, \quad B_{n+1} := A_{n+1} \setminus \{A_1 \cup \ldots \cup A_n\}$$
   Dann sind B_n paarweise verschieden und
   $$\bigcup_{l \in \mathbb{N}} B_l = \bigcup_{l \in \mathbb{N}} A_l.$$
   Schreiben A_l als Liste $A_l = \{a_{1l}, a_{2l}, \ldots\}$
   Bild:

$$
\begin{tikzcd}
s_{11} \arrow[r] & s_{12} \arrow[dl] & s_{13} \arrow[r] & s_{14} \arrow[dl] & \cdots \\
s_{21} \arrow[d] & s_{22} \arrow[ur] & s_{23} \arrow[dl] & s_{24} & \cdots \\
s_{31} \arrow[ur] & s_{32} \arrow[dl] & s_{33} & s_{34} & \cdots \\
s_{41} & s_{42} & s_{43} & \cdots &
\end{tikzcd}
$$

Jetzt können wir das obige rechteckige Schema diagonal abzählen! Dies liefert uns eine Bijektion von $\mathbb{N}$ nach $\bigcup_l \in \mathbb{N} A_l$.

$\square$

Bemerkung. Als Übung: Man gebe explizit eine Bijektion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ an!

Permutationen:

Definition 1.3.5. Eine bijektive Abbildung $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ heißt Permutation.

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k$$

Satz 1.3.6.

$$n \in \mathbb{N}, S_n = \{\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\} | \sigma \text{ ist bijektiv.}\} \Rightarrow \#S_n = n!$$

Beweis. per Induktion
$n = 1$ ist klar. Beobachtung: Permutation $\sigma \in S_n$ identifizieren mit n-Tupel $(\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n))$
Induktionsannahme: $\#S_n = n!$ für ein $n \in \mathbb{N}$
Die Menge S_{n+1} ist die disjunkte Vereinigung der Teilmengen

$$S_{n+1,k} := \{\tau \in S_{n+1} | \tau_k = n + 1\} \quad k = 1, \ldots, n + 1.$$

z.B.:

$$S_{4,2} = \{(1, 4, 2, 3), (2, 4, 3, 1), (3, 4, 1, 2), (1, 4, 3, 2), (2, 4, 1, 3), (3, 4, 1, 2)\}$$

Beobachtung: Jedem $\tau = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in S_n$ können wir die Permutation $(\sigma_1, \ldots, \sigma_{k-1}, \underbrace{n+1}_{k\text{-te Stelle}}, \sigma_k, \ldots, \sigma_n) \in S_{n,k}$ zuordnen und diese Abbildung ist bijektiv (nachprüfen).

$$\Rightarrow \#S_{n+1,k} = \#S_n$$

$$S_{n+1} = \#(\bigcup_{k=1}^{n+1} S_{n+1,k}) = \sum_{k=1}^{n+1} \underbrace{\#S_{n+1,k}}_{=\#S_n=n!} = \sum_{k=1}^{n+1} n! = (n+1)n! = (n+1)!$$

□

Definition 1.3.7 (Binomialkoeffizient)**.** Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}{k!}, \text{ sowie } \binom{\alpha}{0} := 1.$$

Lemma 1.3.8 (Rekursionsformel für Binomialkoeffizienten)**.** Für $\alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\binom{\alpha+1}{k} = \binom{\alpha}{k} + \binom{\alpha}{k-1}.$$

Beweis. Für $k = 1$ ist dies einfach zu sehen. Für $k \geq 2$ gilt

$$\begin{aligned}
&\binom{\alpha}{k} + \binom{\alpha}{k-1} \\
&= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k} + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+2)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(k-1)} \\
&= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+2)(\alpha-k+1+k)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k} \\
&= \frac{(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot((\alpha-1)-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k} = \binom{\alpha+1}{k}
\end{aligned}$$

□

Bemerkung. Pascal Dreieck:

1. Ist $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$, so können wir $\binom{n}{k}$ ausrechnen mit dem Dreiecksschema von Blaise Pascal (1623-1662).

$n=0$							1						
$n=1$						1		1					
$n=2$					1		2		1				
$n=3$				1		3		3		1			
$n=4$			1		4		6		4		1		
$n=5$		1		5		10		10		5		1	
$n=6$	1		6		15		20		15		6		1

2. Ist $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$, so folgt durch Erweitern mit $(n-k)!$ für $n \in \mathbb{N}_0, k \in \{0, 1, \ldots, n\}$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}.$$

Satz 1.3.9. Zahl der Kombinationen:
Sei $n \in \mathbb{N}_0, k \in \{1, \dots, n\}$. Dann ist die Anzahl der k-elementigen Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$ gleich $\binom{n}{k}$.

Beweis. Die Behauptung gilt für $k = 0$ und beliebiges $n \in \mathbb{N}$, da die leere Menge die einzige Teilmenge von $\{1, \dots, n\}$ mit 0 Elementen ist und nach Def. ist $\binom{n}{0} = 1$.
Insbesondere gilt die Behauptung dann für $n = 0$.
Induktiv über n, wobei Behauptung für alle $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ zu zeigen ist.
Induktionsschluss: Bestimme die Anzahl der k-elementigen Teilmengen von $\{1, \dots, n+1\}$ (wobei wir $k \geq 1$ annehmen können).
Sei $A \subset \{1, \dots, n+1\}$ mit $\#A = k \geq 1$.
Diese fallen in 2 Klassen: Klasse 1: $n + 1 \notin A$.
Klasse 2: $n + 1 \in A$.
Die Mengen der Klasse 1 bestehen genau aus den k-elementigen Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$.
Die Mengen der 2. Klasse erhält man aus den $(k-1)$-elementigen Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$ durch Vereinigung mit $\{n + 1\}$.
Also ist nach Induktionsannahme

$$\begin{aligned}
&\#\{k\text{-elementige Teilmengen von } \{1, \dots, n+1\}\} \\
&= \#\{k\text{-elementige Teilmengen von } \{1, \dots, n\}\} \\
&+ \#\{(k-1)\text{-elementige Teilmengen von } \{1, \dots, n\}\} \\
&\overset{\text{IV}}{=} \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \overset{\text{Lem. 8}}{=} \binom{n+1}{k}.
\end{aligned}$$

□

Satz 1.3.10 (Binomische Formel)**.**

$$a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} : (a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Bemerkung.

$$(a + b)^1 = a + b \tag{1}$$
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \tag{2}$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \tag{3}$$

Beweis. Induktion

$$n = 1 : (a + b)^1 = a + b = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^k b^{1-k} \checkmark$$

Induktionsvoraussetzung: für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n = (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-(k-1)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= \binom{n}{n} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{0} b^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right)}_{=\binom{n+1}{k}} a^k b^{n+1-k} + \binom{n+1}{0} b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}.
\end{aligned}$$

$\square$

Notation: Geg. Menge A, sei

$$\{0,1\}^A := \{\text{Funktion } f : A \to \{0,1\}\}$$

$=$ Menge aller $\{0,1\}$-wertigen Funktionen mit Definitionsbereich A.
Allg.: A, B Mengen, $B^A := \{\text{Funktion } f : a \to B\}$.

Satz 1.3.11. Sei $A \neq \emptyset$ eine endliche Menge. Dann ist

$$\#(\{0,1\}^A) = 2^{\#A}.$$

Beweis. Sei $n := \#A \in \mathbb{N}$.
$\Rightarrow$ Bijektion $h : \{1, \ldots, n\} \to A$.
$\Rightarrow$ können annehmen $A = \{1, 2, \ldots, n\}$
z.z. $\#(\{0,1\}^{[}n]) = 2^n$.
Induktion: $n = 1 \exists$ Fkt. $f_1, f_2 : \{1\} \to \{0,1\}$

$f_1(1) = 0 \quad f_2(1) = 1$
Formel stimmt für $n = 1$. Ang. Formel stimmt für $n \geq 1$. Fkt. $f : \{1, \dots, n+1\} \to \{0, 1\}$
2 Klassen:

1. $S_0 = \{f : \{1, \dots, n\} \to \{0, 1\} : f(n + 1) = 0\}$
2. $S_1 = \{f : \{1, \dots, n\} \to \{0, 1\} : f(n + 1) = 1\}$

$$S_0 \cap S_1 = \emptyset, \{0, 1\}^{[n+1]} = S_0 \cup S_1$$

$$\underbrace{\#S_0}_{=\#S_1} = \#(\{0, 1\}^{[n]}) \overset{\text{IA}}{=} 2^n$$

$$\Rightarrow \#(\{0, 1\}^{n+1}) = \#S_0 + \#S_1 = 2^n + 2^n = 2^{n+1}.$$

□

Korollar 1.3.12. Sei A endliche Menge.
$\mathcal{P}(A) =$ Potenzmenge $= \{B | B \subseteq A\}$
$\Rightarrow \#\mathcal{P}(A = 2^{\#A})$.

Beweis. Sei $A \neq \emptyset \Rightarrow \mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}, \quad 2^0 = 1$✓
Sei $\#A \in \mathbb{N}$. Nach Satz 11 reicht eine Bijektion $\varphi : \mathcal{P} \to \underbrace{\{0, 1\}^A}_{=\{f:A \to \{0,1\}\}}$. Dies wird in Lemma 13 für bel. Mengen A gemacht. □

Lemma 1.3.13. Sei $A \neq \emptyset$. Dann sind $\mathcal{P}(A)$ und $\{0, 1\}^A$ gleichmächtig.

Beweis. Brauchen $\varphi : \mathcal{P}(A) \to \{0, 1\}^A$.
Sei $B \subseteq A$, Indikatorfunktion

$$\mathbb{1}_B(x) := \begin{cases} 1, & x \in B \\ 0, & x \in A \setminus B \end{cases}, \mathbb{1}_B : A \to \{0, 1\}.$$

Beachte: $B = \{x \in A | \mathbb{1}_B(x) = 1\}$.
Definiere $\varphi : \mathcal{P}(A) \to \{0, 1\}^A, B \mapsto \mathbb{1}_B$.
Beh.: φ ist bijektiv.

1. φ ist surjektiv.
   Sei $f : A \to \{0, 1\}$

   $B_f := f^{-1}(\{1\}) = \{a \in A | f(a) = 1\} \Rightarrow \varphi(B_f) = \mathbb{1}_{B_f} = f$ (nachrechnen).

2. φ ist injektiv.
   Seien $B_1, B_2 \subseteq A, B_1 \neq B_2$.

$$\begin{aligned} B_1 \setminus B_2 \neq \emptyset \vee B_2 \setminus B_1 \neq \emptyset \\ \text{o.B.d.A. } B_1 \setminus B_2 \neq \emptyset \Rightarrow \exists x \in B_2 \setminus B_1 \subset A \\ \mathbb{1}_{B_1}(x) = 0 \neq 1 = \mathbb{1}_{B_2}(x) \\ \Rightarrow \varphi(B_1) = \mathbb{1}_{B_1} \neq \mathbb{1}_{B_2} = \varphi(B_2). \end{aligned}$$

□

Lemma 1.3.14. Sei A Menge. Dann gibt es keine surj. Fkt. $f : A \to \mathcal{P}(A)$.

Bemerkung. Ist A endlich $\Rightarrow \#\mathcal{P}(A) = 2^{\#A} > \#A$.
$\varphi : \mathcal{P}(A) \to \{0,1\}^A, \quad A \supset B \mapsto \mathbb{1}_B$.

Beweis. Sei $f : A \to \mathcal{P}(A)$

$$f(A) \subset A \quad \forall a \in A.$$

Definiere $R := \{a \in A, a \neq f(a)\} \subset A$.
Angenommen $f : A \to \mathcal{P}(A)$ ist surjektiv.

$$\Rightarrow \forall b \in A \exists b : B = f(b) \Rightarrow \exists a \in A : R = f(a).$$

$\Rightarrow$ 2 Möglichkeiten:

1. $a \in R$
$$a \in f(a = R = \{x \in A | x \notin f(x)\}) \lightning$$

2. $a \notin R = f(a) \Rightarrow a \notin f(a) \Rightarrow a \in R$ ↯
   f kann nicht surjektiv sein!

□