1 Die reellen Zahlen

1.1 Körperaxiome (engl. field)

$\mathbb{K}$: Menge mit zwei Operationen „+“und „·“.
$\forall a, b \in \mathbb{K}$ ist $a + b \in \mathbb{K} \wedge a \cdot b \in \mathbb{K}$ erklärt sollen kompatibel sein.

Definition 1.1.1 (Körperaxiome)**.** In einem Körper gelten diese Axiome:

1. Kommutativität: $\forall a, b \in \mathbb{K} : a + b = b + a, a \cdot b = b \cdot a$

2. Assoziativität: $\forall a, b, c \in \mathbb{K} : a + (b + c) = (a + b) + c, a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

3. Existenz des neutralen Elements:
   $\exists 0 \in \mathbb{K} : a + 0 = 0 + a = a \forall a \in \mathbb{K}$
   $\exists 1 \in \mathbb{K} : a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \forall a \in \mathbb{K}$

4. Existenz eines inversen Elements:
   $\forall a \in \mathbb{K} \exists -a \in \mathbb{K} : a + (-a) = 0$
   $\forall a \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \exists \frac{1}{a} \in \mathbb{K} : a \cdot \frac{1}{a} = 1$
   Es gilt: $0 \neq 1$.

5. Distributivgesetz: $\forall a, b, c \in \mathbb{K} : a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Beispiel. $\mathbb{Q} = \frac{m}{n}, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}$ ist ein Körper.

$$\mathbb{F}_2 : \begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}$$ ist ein Körper.

Bemerkung. .

1. Somit ist ein Körper $\mathbb{K}$ mit „+“eine kommutative Gruppe und $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ mit „·“auch eine kommutative Gruppe.

2. Die neutralen Elemente sind eindeutig bestimmt.
   z.B.: angenommen, 0_1 und 0_2 sind neutrale Elemente mit „+“.
   $\Rightarrow 0_1 \overset{(3)}{=} 0_1 + 0_2 \overset{(1)}{=} 0_2 + 0_1 \overset{(2)}{=} 0_2$
   analog für Multiplikation

Definition 1.1.2. Zu $a \in \mathbb{K}$ ist $-a$ das Inverse bzgl. der Addition
schreibe $a - b := a + (-b)$.
Zu $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ sei $a^{/1}$ das Inverse bzgl. der Multiplikation.
Ist $b \neq 0$, so schreiben wir $\frac{a}{b} := a \cdot b^{-1} = b^{-1} \cdot a$.
schreibe $(ab) := a \cdot b$.

Lemma 1.1.3 (Rechnen in einem Körper)**.** .

1. Umformen von Gleichungen
   $\forall a, b, c \in \mathbb{K}:$
   aus $a + b = c$ folgt $a = c - b$
   aus $a \cdot b = c$, $b \neq 0$ folgt $a = \frac{c}{b}$

2. Allgemeine Rechenregeln
$$\begin{aligned} -(-a) &= a \\ (a^{-1})^{-1} &= a, \text{ falls } a \neq 0 \\ -(a+b) &= (-a) + (-b) \\ (a \cdot b)^{-1} &= b^{-1} \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1} \\ a \cdot 0 &= 0 \\ a(-b) &= -(ab), (-a)(-b) = ab \\ a(b-c) &= ab - ac \\ ab = 0 &\Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0 \text{ (Nullteilerfreiheit)} \end{aligned}$$

Beweis. $0 = a + (-a) = (-a) + a$
$\Rightarrow -(-a) = a$
$(a+b) + ((-a) + (-b)) = (a + (-a)) + (b + (-b)) = 0 + 0 = 0$
$\Rightarrow -(a+b) = (-a) + (-b)$
benutzen wir auch Eindeutigkeit des inversen Elements
analog zeigt man $(a^{-1})^{-1} = a$ und $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = a^{-1}b^{-1}$
z.B.: $(ab) \cdot (b^{-1}a^{-1}) = a(b \cdot b^{-1})a^{-1} = (a \cdot 1)a^{-1} = a \cdot b^{-1} = 1$
Ferner $a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0 = a \cdot 0 + 0$
$\Rightarrow a \cdot 0 = a \cdot 0 - a \cdot 0 = 0$
$\Rightarrow a \cdot b + a \cdot (-b) = a \cdot (b + (-b)) = a \cdot 0 = 0$
$\overset{\text{Eind. d. Inv.}}{\Rightarrow} -ab = a(-b)$
Somit auch $(-a)(-b) = -((-a)b) = -(b(-a)) = (-ba) = -(-ab) = ab$
und $a(b - c) = a(b + (-c)) = ab + a(-c) = ab + (-ac) = ab - ac.$
ist $ab = 0$ und $a \neq 0 \Rightarrow 0 = (ab)\frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot (ab) = (\frac{1}{a} \cdot a)b = 1b = b$
also ist $b = 0$. $\square$

Satz 1.1.4 (Bruchrechnen)**.** $a, b, c, d \in \mathbb{K}, c \neq 0, d \neq 0.$
Dann gilt

1. $\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ad+bc}{cd}$

2. $\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{ab}{cd}$

3. $\frac{a/c}{b/d} = \frac{ad}{bc}$, falls auch $b \neq 0$ ist.

Beweis. Übung $\square$

Beispiel. rationale Zahlen sind ein Körper
schreiben $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ für einen Körper

1.2 Die Anordnungsaxiome

Definition 1.2.1. Sei $\mathbb{K}$ (genauer $(\mathbb{K}, +, \cdot)$) ein Körper. Dann heißt $>$ eine Anordnung falls

1. Für jedes $a \in \mathbb{K}$ gilt genau eine der Aussagen $a > 0, a = 0, -a > 0$
   (wenn $a \in \mathbb{K}$, mit $a > 0$ positiv)

2. Aus $a > 0$ und $b > 0$ folgt
   $a + b > 0$ und $a \cdot b > 0$

Wir nennen $(\mathbb{K}, +, \cdot, >)$ einen angeordneten Körper.

Bemerkung. Statt $-a > 0$ schreiben wir $a < 0$
Statt $a - b > 0$ schreiben wir $a > b$
Bild:

Statt $a - b < 0$ schreiben wir $a < b$.
$a \geq b$, falls $a > b \vee a = b$
$a \leq b$, falls $a < b \vee a = b$.

Satz 1.2.2. Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot, >)$ ein angeordneter Körper. Dann gilt

1. für $a, b \in \mathbb{K}$ gilt genau eine der Relationen $a > b, a = b, a < b$ (Trichotromie)

2. Aus $a > b, b > c$ folgt $a > c$ (Transitivität)

3. Aus $a > b$ folgt:
   $$\begin{cases} a + c > b + c, \forall c \in \mathbb{K} \\ ac > bc, & \text{falls } c > 0 \\ ac < bc, & \text{falls } c < 0 \end{cases}.$$

4. Aus $a > b$ und $c > d$ folgt:
   $$\begin{cases} a + c > b + d \\ ac > bd, & \text{falls } b, d > 0 \end{cases}$$

5. Für $a \neq 0$ ist $a^2 > 0$.

6. Aus $a > 0$ folgt $\frac{1}{a} > 0$.
7. Aus $a > b > 0$ folgt $0 < \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.
8. Aus $a > b, 0 < \lambda < 1$ folgt $b < \lambda b + (1-\lambda)a < a$.

Bemerkung. Auf $\mathbb{F}_2$ kann es keine Anordnung geben!

Beweis. 1. Direkt aus (A.1) und Def. von $a > b$.

2. $a - c = \underbrace{(a-b)}_{>0} + \underbrace{(b-c)}_{>0} \overset{\text{(A.2)}}{>} 0$.

3. $(a+c) - (b+c) = a - b > 0$
   $ac - bc = \underbrace{(a-b)}_{>0} \cdot c \overset{\text{(A.2)}}{>} 0$, falls $c > 0$
   Ist $c < 0$, so ist $-c > 0$
   $\Rightarrow bc - ac = \underbrace{(a-b)}_{>0} \cdot \underbrace{(-c)}_{>0} \overset{\text{(A.2)}}{>} 0$
   $ac - bd = ac - bc + bc - bd = \underbrace{(a-b)}_{>0} \cdot \underbrace{c}_{>0} + \underbrace{b}_{>0} \cdot \underbrace{(c-d)}_{>0} \overset{\text{(A.2)}}{>} 0$.

4. $(a+c) - (b+d) = (a-b) + (c-d) > 0$ nach (A.2)
   $ac - bd = ac - bc + bc - bd = (a-b)c + b(c-d)$
   Ist $b = 0 \Rightarrow a > b = 0 \Rightarrow ac > 0 = bd$
   Ist $b < 0 \Rightarrow (-b)d > 0 \Rightarrow -bd > 0 \Rightarrow bd < 0 \Rightarrow ac < -bd \Rightarrow \underbrace{ac}_{>0} + \underbrace{(-bd)}_{>0} \overset{\text{(A.2)}}{>} 0$.

5. Fallunterscheidung:
   ist $a > 0 \Rightarrow a^2 = a \cdot a > 0$ (A.2)
   ist $a < 0 \Rightarrow a^2 = (-a) \cdot (-a) > 0$ (A.2)

6. sei $a > 0$:
   $\overset{5.}{\Rightarrow} \left(\frac{1}{a}\right) > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} = \underbrace{\left(\frac{1}{a}\right)^2}_{>0} \cdot \underbrace{a}_{>0} > 0$.

7. aus $a > b > 0$
   $\Rightarrow \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{1}{b}(a-b)\frac{1}{a} > 0$.

8. $a > b, 0 > \lambda > 1 \Rightarrow \lambda > 0 \wedge 1 - \lambda > 0$
   $b = \lambda b + \underbrace{(1-\lambda)b}_{<(1-\lambda)a}$
   $< \lambda b + (1-\lambda)a < \lambda a + (1-\lambda)a = a$
   $\Rightarrow b < \lambda b + (1-\lambda)a = a.$
   Insbesondere $\lambda = 1/2 \Rightarrow b < 1/2 b + 1/2 a = \frac{a+b}{2} < a.$

$\square$

Definition 1.2.3 (Betrag)**.** Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot, >)$ ein angeordneter Körper.
Betrag von $a \in \mathbb{K}$ ist gegeben durch

$$|a| := \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq 0 \\ -a, & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

auch noch $a, b \in \mathbb{K}$

$$\max(a,b) := \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq b \\ b, & \text{falls } a < b \end{cases}$$

$$\min(a,b) := \begin{cases} a, & \text{falls } a \leq b \\ b, & \text{falls } a > b \end{cases}$$

Bemerkung. .

1. $a, b \in \mathbb{K}$
   $|a - b| =$ Abstand von a zu b.
   $|a| = |a - 0| =$ Abstand von a zu 0.

2. $|a| = \max(a, -a)$.

Satz 1.2.4. $(\mathbb{K}, +, \cdot, >)$ ang. Körper
Dann gilt $\forall a, b \in \mathbb{K}:$

1. $|-a| = |a|$ und $a \leq |a|$

2. $|a| \geq 0$ und $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$

3. $|ab| = |a|\,|b|$

4. $|a + b| \leq |a| + |b|$ (Dreiecksungleichung)

5. $||a| - |b|| \leq |a - b|$ (umgekehrte Dreiecksungleichung)

Beweis. .

1. $|-a| = \begin{cases} -a, -a \geq 0 \\ -(-a), -a \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} -a, a \leq 0 \\ a, a \geq 0 \end{cases} = |a|$

   $|a| - a = \begin{cases} a - a, a \geq 0 \\ -a - a, a < 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, a \geq 0 \\ -(a+a), a < 0 \end{cases} \geq 0.$

   alternativ: $a \leq \max(a, -a) = |a|$.

2.

3. Hier ändern sich die linke und rechte Seite nicht, wenn man a bzw. b durch $-a$ bzw. $-b$ ersetzt.
   Also, o.B.d.A. können wir annehmen, dass $a, b \geq 0$.
   $\Rightarrow |ab| = ab = |a|\,|b|$.

4. $\overset{\text{Satz 1 (5)}}{\Rightarrow} |a+b|^2 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = |a|^2 + 2\underbrace{ab} \leq |ab| + |b|^2$
   $\overset{(2)}{\leq} |a|^2 + 2\,|ab| + |b|^2$
   $\overset{(3)}{|a|^2} + 2\,|a|\,|b| + |b|^2$.
   Also $(a+b)^2 \leq (|a| + |b|)^2$
   $\overset{\text{H.A.}}{\Rightarrow} |a+b| \leq |a| + |b|$.
   H.A. aus $|c|^2 \leq |d|^2$ folgt $|c| \leq |d|$ (Kontraposition).

5. $|a| = |a - b + b| = |(a-b) + b| \overset{(4)}{\leq} |a-b| + |b|$
   $|a| - |b| \leq |a-b| \, \forall a, b \in \mathbb{K}$.
   Jetzt: Symmetrieargument. (Vertausch von a und b)
   $\Rightarrow |b| - |a| \leq |b - a| = |(-b-a)| = |a - b|$
   also $|b| - |a| \leq |a - b|$
   $|a| - |b| \leq |a - b|$
   $||a| - |b|| = \max(|a| - |b|, -(|a| - |b|)) = \max(|a| - |b|, |b| - |a|) \leq |a - b|$.

$\square$

Beispiel. Sei $a, b \in \mathbb{K}$ ein angeordneter Körper. Aus $|b - a| \leq b/2, 2 = 1 + 1$ folgt $a \geq b/2$ Bild:

Beweis. $b - a \leq |b - a| \leq b/2 \Rightarrow a \geq b - b/2 = b/2$. $\square$

Korollar 1.2.5 („geometrisch-arithmetische Ungleichung“)**.** Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot, >)$ ein ang. Körper, $a, b \in \mathbb{K}$
$\Rightarrow ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$.
Wenn Gleichheit gilt, so folgt $a = b$.

Beweis. In Übung □

Fakt:

- In jedem angeordneten Körper gilt $0 < 1$!
- Es gibt keine Anordnung, die $\mathbb{F}_2$ zu einem angeordneten Körper macht. (H.A.)

1.3 Obere und untere Schranken, Supremum und Infimum

Notation: a ist nicht negativ, falls $a \geq 0$.
natürlich $a = b \Leftrightarrow a \leq b \wedge a \geq b$.
Im Folgenden ist $\mathbb{K}$ immer ein angeordneter Körper. $A, B \subset \mathbb{K}, A, B \neq \emptyset$ und $\gamma \in \mathbb{K}$, so bedeutet $A \leq \gamma : \forall a \in A : a \leq \gamma$ (γ it obere Schranke für A).
$B \geq \beta : \forall b \in B : b \geq \beta$ (β ist untere Schranke für B).
Analog sind $a < \gamma, A > \gamma, A < B$, usw. definiert.
Hat A eine obere Schranke, so heißt A nach oben beschränkt. Hat B eine untere Schranke, so ist B nach unten beschränkt. A ist beschränkt, falls es nach oben und unten beschränkt ist.
Ist $A \leq \alpha$ und $\alpha \in A$, so heißt α größtes (maximales) Element von A, schreibe $\alpha = \max A$ (Maximum).
Ist $B \geq \beta$ und $\beta \in B$, so heißt B kleinstes (minimales) Element von B, schreibe $\beta = \min B$ (Minimum).
Man zeige, dass max und min eindeutig sind, sofern sie existieren.
$[0, 1) := \{x \in \mathbb{K} | 0 \leq x \leq 1\}$ hat kein Maximum bzw. kein maximales Element.

Definition 1.3.1. Sei $A \subset \mathbb{K}, A \neq \emptyset$. Dann ist $\gamma \in \mathbb{K}$ die kleinste obere Schranke (oder Supremum), falls $A \leq \gamma$ und aus $A \leq n$ folgt $\gamma \leq n$.
Schreibe $\gamma = \sup A = \sup(A)$.
Analog: β it die größte untere Schranke von A (Infimum), falls $\beta \leq A$ und aus $\eta \leq A$ folgt $\eta \leq \beta$
Schreibe $\beta = \inf A = \inf(A)$.

Beispiel. $P := \{x \in \mathbb{K} | x > 0\}$
$\Rightarrow$

1. P ist nicht nach oben beschränkt.
2. P hat kein Minimum, aber $\inf P = 0$.

Beweis. .

1. Ang. γ ist obere Schranke für P. D.h. $\forall x \in P$ folgt $0 < x \leq \gamma \Rightarrow \gamma > 0 \Rightarrow \gamma \in P \Rightarrow 0 < \gamma = \gamma + 0 < \gamma + 1 \in P \Rightarrow \gamma + 1 \in P$ und $\gamma + 1 > \gamma \gamma$ ist nicht obere Schranke für P (Widerspruch!) $\lightning$

2. $2 := 1 + 1 > 1 > 0$
   Ang. $\min P := \eta$ existiert. $\Rightarrow \eta \in P, \eta > 0, \tilde{x} := \frac{\eta}{2} = \frac{0+\eta}{2} < \eta$.
   Es gilt $0 = \inf P$.
   Sicherlich $0 < P$, also ist 0 eine untere Schranke für P.
   0 ist die größte untere Schranke, denn nach obigem Argument ist jede Zahl > 0 keine untere Schranke für P!

$\square$

Lemma 1.3.2. $A \subset \mathbb{K}, A \neq \emptyset$.

1. $\alpha := \sup A \Leftrightarrow \alpha \geq A \wedge \forall \varepsilon > 0 \exists a \in A : \alpha - \varepsilon < a$.

2. $\beta := \inf B \Leftrightarrow \beta \leq B \wedge \forall \varepsilon > 0 \exists b \in B : b < \beta + \varepsilon$.

Beweis. .

1. „$\Rightarrow$“: Sei $\alpha = \sup A$. Also α ist die kleinste obere Schranke für A. D.h. $\alpha \geq A$ und $\forall \varepsilon > 0$ ist $\varepsilon > 0 < \alpha$, also ist $\alpha - \varepsilon$ keine obere Schranke für A. D.h. $\exists a \in A : \alpha - \varepsilon < a$.
   „$\Leftarrow$“: Sei $\alpha \geq A \wedge \forall \varepsilon > 0 \exists a \in A : \alpha - \varepsilon < a$. Also ist α eine obere Schranke für A. Sei $\tilde{\alpha} < \alpha$.
   Setze $\varepsilon := \alpha - \tilde{\alpha} > 0 \Rightarrow \exists a \in A : \tilde{\alpha} = \alpha - \varepsilon < a \Rightarrow \tilde{\alpha}$ ist keine obere Schranke für a. $\Rightarrow \alpha$ ist die kleinste obere Schranke.

2. $A := -B = \{-b | b \in B\}$. Beachte: $\sup A = \sup(-B) = -\inf B$.

$\square$

1.4 Das Vollständigkeitsaxiom

Definition 1.4.1. Ein angeordneter Körper $(\mathbb{K}, +, \cdot, >)$ erfüllt das Vollständigkeitsaxiom, falls

Jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge hat ein Supremum.

Solch einen Körper nennt man ordnungsvollständig. $\mathbb{R}$, der Körper der reellen Zahlen, ist <u>der</u> ordnungsvollständige Körper. (Im Wesentlichen gibt es nur einen!)

$\mathbb{Q}; A := \{r \in \mathbb{Q} | r^2 < 2\}$
Notation: $a, b \in \mathbb{R} \quad a < b$
$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$ abgeschlossenes Intervall
$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$ offenes Intervall
$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$ nach rechts halboffenes Intervall
$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$ nach links halboffenes Intervall
Intervalllänge: $b - a$
unbeschränkte Intervalle:
$(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} | x \leq a\}$
$[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} | x \geq a\}$
$(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} | x < a\}$
$(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} | x > a\}$.

1.5 Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$

(als Teilmenge von $\mathbb{R}$)
n natürliche Zahl, $n = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n\text{-mal}}$ (zirkulär $\lightning$)

Definition 1.5.1. Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ heißt induktiv, falls

1. $1 \in M$
2. Aus $x \in M$ folgt $x + 1 \in M$

Beispiel. $[1, \infty)$ ist induktiv.
$\mathbb{R}$ ist induktiv.
$(1, \infty)$ ist nicht induktiv.
$\{1\} \cup [1 + 1, \infty)$ ist induktiv.

Beobachtung: Ein beliebiger Schnitt induktiver Mengen ist wieder induktiv.
J: Indexmenge A_0 induktiv $\forall j \in J$
$\Rightarrow \forall i \in J : 1 \in A_j \Rightarrow 1 \in \bigcap\limits_{j \in J} A_j$
Ist $x \in \bigcap\limits_{j \in J} A_j \Rightarrow \forall j \in J : x \in A_j \Rightarrow x + 1 \in A_j \Rightarrow x + 1 \in \bigcap\limits_{j \in J} A_j$.

Definition 1.5.2 (natürliche Zahlen)**.** .
$\mathbb{N} := \{x \in \mathbb{R} :$ für jede induktive Teilmenge $M \in \mathbb{R}$ gilt $x \in M\} := \bigcap\limits_{M \subset \mathbb{R} \text{ ist induktiv}} M$

Bemerkung. $\mathbb{N}$ ist induktiv und $\mathbb{N}$ ist die kleinste induktive Teilmenge von $\mathbb{R}$.

Satz 1.5.3 (Archimedisches Prinzip für $\mathbb{R}$). .

1. $\mathbb{N}$ ist (in $\mathbb{R}$) <u>nicht</u> nach oben beschränkt!
2. $\forall x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0 \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < x$.

Beweis. 1. Angenommen, $\mathbb{N} \subset R$ ist nach oben beschränkt.
$\mathbb{N} \neq \emptyset$ (da $1 \in \mathbb{N}$)
Vollständigkeitsaxiom $\Rightarrow \alpha := \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$.
Setze $\varepsilon = 1$ in Lemma 3.3.2
$\alpha - 1$ ist nicht obere Schranke für $\mathbb{N}$.
$\exists n \in \mathbb{N} : n > \alpha - 1$
$\Rightarrow n + 1 > \alpha \in \mathbb{N}$ $\lightning$zu α ist obere Schranke von $\mathbb{N}$.

2. Sei $x > 0 \overset{\text{Satz 3.2.1 (6)}}{\Rightarrow} \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : n > \frac{1}{x} \underset{\text{Satz 3.2.1 (7)}}{\Rightarrow} x = \dfrac{1}{1/x} > \frac{1}{n}$.

□

Satz 1.5.4 (Induktionsprinzip). Sei $M \subset \mathbb{N}$ mit

1. $1 \in M$
2. Ist $x \in M \Rightarrow x + 1 \in M$

Dann ist $M = \mathbb{N}$.

Beweis. $\Rightarrow M$ ist induktiv. $\mathbb{N}$ kleinste induktive Teilmenge von $\mathbb{R}$
$\Rightarrow \mathbb{N} \subset M$
$M \subset \mathbb{N} \wedge \mathbb{N} \subset M \Leftrightarrow M = \mathbb{N}$. □

Korollar 1.5.5 (Vollständige Induktion). Für $n \in \mathbb{N}$ seien $A(n)$ Aussagen. Es gelte:

1. $A(1)$ ist wahr.
2. aus $A(n)$ ist wahr folgt $A(n+1)$ ist wahr.

Beweis. Definiere $M := \{n \in \mathbb{N} | A(n) \text{ ist wahr}\} \subset \mathbb{N}$.

1. $\Rightarrow 1 \in M$, da $A(1)$ wahr ist
2. $\Rightarrow$ sei $n \in M$, d.h. $A(n)$ ist wahr $\Rightarrow A(n+1)$ ist wahr, d.h. $n + 1 \in M$.

$\overset{\text{Ind.prinzip Satz 4}}{\Rightarrow} M = \mathbb{N}$, also sind alle $A(n)$ wahr! □

Notation: Induktive Definition von Summen und Produkten.
$a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ vage ...
Summe:

$$\sum_{k=1}^{1} a_k := a_1, (n = 1), \sum_{k=1}^{n+1} a_k := \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) + a_{n+1}, n \in \mathbb{N}$$

Allgemein: untere Grenze $k = m$, obere Grenze $k = n$, Laufindex kann verschoben werden.
z.B.: $k = j + 1$

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{j=m-1}^{n-1} a_{j+1} = \ldots = \sum_{l=0}^{n-m} a_{l+m}$$

Ist $m > n$, definieren $\sum_{k=m}^{n-m} a_k := 0$ (leere Summe)
Produkt:

$$\prod_{k=1}^{1} a_k := a_1, \prod_{k=1}^{n+1} a_k := \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) \cdot a_{n+1}, n \in \mathbb{N}$$

Ähnlich $\prod_{k=m}^{n} a_n$, setzen für $m > n \prod_{k=m} .a_k := 1$ (leeres Produkt)
z.B.

$$a \in \mathbb{R}, a^n = \prod_{k=1}^{n} a, \text{ d.h. } a^1 = a, a^{n+1} = a^n \cdot a, n \in \mathbb{N} \text{ (induktive Definition)}$$

Rechenregeln gelten z.B.

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k a_j, b_j \in \mathbb{R}, j = 1, \ldots, n$$

$$c \in \mathbb{R}, \sum_{n}^{k=1} (c \cdot a_k) = c \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Satz 1.5.6 (Bernoullische Ungleichung)**.**

$$x \in \mathbb{R}, x \geq -1, n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$$

gilt $(1 + x)^n \geq 1 + n + x (\forall m \in \mathbb{N}, x \geq -1)$
mit „>“, falls $n > 1, x \neq 0$
$(\forall n \in \mathbb{N}, x \geq -1 (1 + x)^n \geq 1 + nx)$

Beweis. Vollständige Induktion:
Induktionsanfang:

$$n = 0 : (1 + x)^0 = 1 = 1 + 0x\checkmark$$

$$n = 1 : (1 + x)^1 = 1 + x = 1 + 1x\checkmark$$

Induktionsschritt: Induktionsvoraussetzung: es gelte für ein festes, aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
(1 + x)^n &\geq 1 + nx \\
(1 + x)^{n+1} &= \underbrace{(1 + x)^n}_{\geq 1+nx} \cdot \underbrace{(1 + x)}_{>0} \geq (1 + nx)(1 + x) = 1 + (n + 1)x + nx^2 \\
&= \begin{cases} \geq 1 + (n + 1)x, x > -1 \\ > 1 + (n + 1)x, x > -1, x \neq 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

□

Satz 1.5.7 (geometrische Summe)**.** Sei $x \neq 1$, dann ist

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Beweis. Vollständige Induktion:
IA:

$$n = 0 : \sum_{k=0}^{0} x^k = x^0 = 1 = \frac{1 - 0}{1 + 0}\checkmark$$

$$n = 1 : \sum_{n=0}^{1} x^k = 1 + x = \frac{1 - x}{1 - x}(1 + x) = \frac{1 - x^2}{1 - x}\checkmark$$

IS:
IV: Es gelte für ein festes, aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} x^k + x^{n+1} \overset{\text{IV}}{=} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} + x^{n+1} \\
&= \frac{1 - x^{n+1} + (1 - x)x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1 - x^{n+2}}{1 - x}.
\end{aligned} \tag{1}$$

□

Beweis. ohne vollständige Induktion:

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} x^k$$
$$x \cdot S_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{k=0}^{n} x^{k+1} = \sum_{j=1}^{n+1} x^j,$$
$$\Rightarrow (1-x)S_n = S_n - xS_n = \sum_{k=0}^{n} x^k - \sum_{k=1}^{n+1} x^k = x^0 - x^{n+1} = 1 - x^{n+1}$$
$$\Rightarrow S_n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

□

Satz 1.5.8 (Eigenschaften von $\mathbb{N}$)**.** Es gilt

1. $\forall m, n \in \mathbb{N} : n + m \in \mathbb{N}$ imd $n \cdot m \in \mathbb{N}$.
2. $\forall n \in \mathbb{N} : n = 1$ oder ($n > 1$ und demnach $n - 1 \in \mathbb{N}$).
3. $\forall m, n \in \mathbb{N} : m \leq n : n - m \in \mathbb{N}_0$.
4. $\forall n \in \mathbb{N}$ gibt es kein $m \in \mathbb{N} : n < m < n + 1$.

Beweis. .

1. Gegeben $m \in \mathbb{N} : A := \{n \in \mathbb{N} | n + m \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}$

   (a) $1 \in A$, denn $m \in \mathbb{N} : 1 + m = m + 1 \in \mathbb{N}$.

   (b) Angenommen, $n \in A \Rightarrow (n+1) + m = \underbrace{n+m}_{\in \mathbb{N}} + 1 \in \mathbb{N}$

   $\Rightarrow n + 1 \in A$

   somit ist A induktiv, also $\mathbb{N} \subset A \Rightarrow A = \mathbb{N}$.

2. Definiere $B := \{n \in \mathbb{N} | n = 1 \vee (n - 1 \in \mathbb{N} \wedge n - 1 \geq 1)\} \subset \mathbb{N}$
   Dann ist B induktiv, denn

   (a) $1 \in B, 2 = 1 + 1 \in B$

   (b) Sei $1 \neq n \in B$, so folgt $1 \leq n - 1$ und somit $n = (\underbrace{n-1}_{\in \mathbb{N}}) + 1 \in \mathbb{N}$

   $\Rightarrow n+1 \in \mathbb{N}$ und $(n+1) - 1 = n \geq 1 + 1 > 1$. Somit ist $n + 1 \in B$.

3. $C := \{n \in \mathbb{N} | \forall m \in \mathbb{N} \text{ mit } m \leq n \text{ ist } n - m \in \mathbb{N}_0\} \Rightarrow$

   (a) $1 \in C$, denn ist $m \in \mathbb{N}$ und $m = 1$.
   folgt nach b): $m = 1$
   $\Rightarrow n - m = 1 - 1 = 0 \in \mathbb{N}_0$.

   (b) ang. $n \in C$ und $m \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n + 1$.
   Fallunterscheidung:

   - $n = 1 \Rightarrow n + 1 - m = (n + 1) - 1 = n \in \mathbb{N}.\checkmark$
     $\Rightarrow n + 1 \in C$.
   - $n > 1$ (und $m \leq n + 1$)
     $\overset{b)}{\Rightarrow} m - 1 \in \mathbb{N}$ und $m - 1 \leq (n + 1) - 1 = n$
     Da $n \in C, m - 1 \in \mathbb{N}, m - 1 \leq n \Rightarrow \underbrace{n - (m - 1)}_{=(n+1)-m} \in \mathbb{N}_0$
     $\Rightarrow n + 1 \in C$.

4. H.A.

$\square$