1 Induktion

1.1 Starke Induktion und das Wohlordnungsprinzip

Satz 1.1.1 (starke Induktion)**.** Seien $A(n)$ Aussagen für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

1. $A(1)$ ist wahr
2. $\forall n \in \mathbb{N} : A(1), \ldots, A(n)$ wahr $\Rightarrow A(n+1)$ ist wahr

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ ist $A(n)$ wahr

Beweis. Definiere die Aussage $B(n) := \{$alle $A(k)$ mit $k \leq n$ sind wahr$\} \Rightarrow$

1. $B(1)$ ist wahr
2. Ist $B(n)$ wahr für ein $n \in \mathbb{N}$, so ist $B(n+1)$ wahr

$\Rightarrow B(n)$ ist wahr für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Bemerkung. $(\forall n \in \mathbb{N} : A(k) \forall k < n \Rightarrow A(n)) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} A(n)$.

Satz 1.1.2 (Wohlordnungsprinzip für $\mathbb{N}$)**.** Jede nichtleere Teilmenge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ hat ein kleinstes Element.

Beweis. Sei $A(n) := \{$Jede Teilmenge $b \subset \mathbb{N}$ mit $m \in B$ hat ein kleinstes Element$\}$.
Müssen zeigen: $A(n)$ ist wahr für alle $n \in \mathbb{N}$.

1. $A(1)$ ist wahr, denn ist $B \subset \mathbb{N}$ mit $1 \in B$, so folgt $\forall k \in B : l \geq 1$. Also ist 1 kleinstes Element in B.
2. Angenommen für $n \in \mathbb{N}$ sind $A(1), \ldots, A(n)$ wahr. Sei $B \subset \mathbb{N}$ mit $n+1 \in B$.
   <u>1. Fall:</u> $\{1, \ldots, n\} \cap B = \emptyset \Rightarrow n+1$ ist kleinstes Element in B.
   <u>2. Fall:</u> $\{1, \ldots, n\} \cap B \neq \emptyset \Rightarrow \exists k \in \{1, \ldots, n\}$ mit $k \in B$.
   Aus der Induktionsannahme folgt also $A(k)$ ist wahr. $\Rightarrow B$ hat ein kleinstes Element.

In beiden Fällen hat B ein kleinstes Element, also ist $A(n+1)$ wahr.
$\overset{\text{Satz 1}}{\Rightarrow} \forall n \in \mathbb{N} A(n)$ wahr. □

Notation:
Ganze Zahlen $\mathbb{Z} := (-\mathbb{N}) \cup \mathbb{N}_0 = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.
Rationale Zahlen: $\mathbb{Q} := \{\frac{m}{n} | n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}\}$.

Korollar 1.1.3. Jede nichtleere, nach unten beschränkte Teilmenge in $\mathbb{Z}$ hat ein kleinstes Element.

Beweis. Sei $A \subsetneq \mathbb{Z}, A \neq \emptyset, A \geq \beta$ für $B \in \mathbb{Z}$
Setze $B := A + \beta + 1 = \{\alpha + |\beta| + 1 | \alpha \in A\} \subsetneq \mathbb{N}, B \neq \emptyset$
$\overset{\text{Satz 2}}{\Rightarrow} \exists n_0 := \min B \Rightarrow z_0 := n_0 - |\beta| - 1 \in \mathbb{Z}$ ist kleinstes Element von A. $\square$

1.2 Anwendungen

Lemma 1.2.1. Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$. Dann existiert $q \in \mathbb{N}_0$ mit $q \leq a < q+1$

Beweis. Ist $0 < a < 1$, so nehme $q = 0$.
Also $a \geq 1$ und setze $B := \{n \in \mathbb{N} | a < n\}$.
Da $\mathbb{N}$ nicht nach oben beschränkt ist (archim. Prinzip), gilt $B \neq \emptyset$.
$\overset{\text{Satz 2}}{\Rightarrow} m := \min B$ existiert. Da $m \in B$, ist $m > a \geq 1$.
Somit gilt nach Satz 3.5.8, dass $q := m - 1 \in \mathbb{N}$.
Da m die kleinste natürliche Zahl mit $m < a$ ist, folgt $q = m - 1 \leq a < m = q + 1$. $\square$

Bemerkung. Dieselbe Beweisidee zeigt auch

$$\forall a \in \mathbb{R} \exists q \in \mathbb{Z} \text{ mit } q \leq a < q + 1.$$

Satz 1.2.2 ($\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$)**.** Seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Dann existiert $r \in \mathbb{Q}$ mit $a < r < b$.

Beweis. O.B.d.A. $b \geq 0$, ansonsten betrachte $a' = -a, b' = -b$.
Weiter können wir $a \geq 0$ annehmen, sonst nehme $r = 0$. Also sei $0 \leq a < b \overset{\text{Archimedes}}{\Rightarrow} \exists n \in \mathbb{N} : n(b - a) > 1$.
Setze $B := \{l \in \mathbb{N} | l > na\} \subset \mathbb{N}$.

$$\overset{\text{Satz 5.1.2}}{\Rightarrow} m = \min B \text{ existiert.}$$

Da $m = \min B$ ist, gilt

$$m - a \leq na < m,$$

somit gilt auch

$$na < m = \underbrace{m - 1}_{<na} + \underbrace{1}_{<n(b-a)} = nb$$

$$\Rightarrow na < m, nb \Leftrightarrow a < \frac{m}{n} < b.$$

$\square$

Exkurs
Beh.: $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Beweis. [Beweis durch Widerspruch] Sei $r^2 = 2$ mit $r = \frac{m}{n}, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}$.
Wir definieren

$$A := \{n \in \mathbb{N} | \exists m \in \mathbb{Z} \frac{m^2}{n^2} = 2\} \neq \emptyset$$

$$\overset{\text{Satz 5.1.2}}{\Rightarrow} n_* = \min A \in \mathbb{N}$$

Also existiert $m \in \mathbb{Z}_+$ mit

$$m^2 = 2 \cdot m_*^2 \Rightarrow m > n_*$$

Außerdem gilt

$$m = \sqrt{2} n_* \overset{\sqrt{2}>1}{\Leftrightarrow} 0 < \underbrace{m - n_*}_{\in \mathbb{N}} = \overbrace{\underbrace{(\sqrt{2} - 1)}_{<1}}^{>0} n_* < n_*$$

Nun gilt:

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n_*} = \frac{m(m - n_*)}{n_*(m - n_*)} \overset{m^2 = 2n_*^2}{=} \frac{2n_*^2 - mn_*}{n_*(m - n_*)} = \frac{2n_* - m}{m - n_*}$$

$\lightning 2n_* - m \in \mathbb{Z}, m - n_* < n_*$, aber $n_* = \min A$
Somit kann kein $m \in \mathbb{Z}$ existieren, sodass $\frac{m^2}{n^2} = 2$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$.
Also ist $\sqrt{2}$ per Definition der rationalen Zahlen in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. $\square$

Satz 1.2.3. Sei $k \in \mathbb{N}$, dann gilt entweder $\sqrt{k} \in \mathbb{N}$ oder $\sqrt{k} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Beweis. Sei $k \in \mathbb{N}$ und $\sqrt{k} \notin \mathbb{N}$.
Angenommen $\sqrt{k} \in \mathbb{Q}$, also $\sqrt{k} = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$
$A := \{n \in \mathbb{N} | \exists m \in \mathbb{Z} \frac{m^2}{n^2} = k\}$

$$\overset{\text{Satz 5.1.2}}{\Rightarrow} \exists n_* = \min A \in \mathbb{N}$$

Sei $\frac{m}{n_*} = \sqrt{k}$, dann gilt

$$m - n_* = \underbrace{(\sqrt{k} - 1)}_{<1} n_*$$

Aber wähle $q \in \mathbb{N} : q \leq \sqrt{k} < q + 1$
Existiert nach Lemma 5.2.1. Da $\sqrt{k} \notin \mathbb{N}$ gilt $q < \sqrt{k} < q + 1$.
Also gilt:

$$0 \overset{q<\sqrt{k}}{<} \underbrace{m - qn_*}_{\in \mathbb{N}} = (\underbrace{\sqrt{k} - q}_{<1}) n_* < n_*$$

Somit

$$\sqrt{k} = \frac{m}{n_*} = \frac{m(m - qn_*)}{n_*(m - qn_*)} = \frac{kn_*^2 - mqn_*}{n_*(m - qn_*)} = \frac{kn_* - mq}{m - qn_*}$$

$\lightning n_* = \min A, m - qn_* < n_*$
Somit muss $\sqrt{k} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sein. $\square$