1 Der Euklidische Raum $\mathbb{R}^d$, komplexe Zahlen $\mathbb{C}$ (und $\mathbb{C}^d$)

Grundlagen: $\mathbb{R}^d := \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} = \{(x_1, \ldots, x_d) | x_j \in \mathbb{R}, j \in \{1, \ldots, d\}$
Addition:

$$x, y \in \mathbb{R}^d : x + y := (x_1, \ldots, x_d) + (y_1, \ldots, y_d) = (x_1 + y_1, \ldots, x_d + y_d)$$

Skalare Multiplikation:

$$\lambda \in \mathbb{R} : \lambda x := \lambda(x_1, \ldots, x_d) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_d)$$

$\mathbb{R}^d$ ist ein (reeller) d-dim. Vektorraum.
z.B. $\mathbb{R}^2$: $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$
Bild
Länge von $x = |x| = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$

Definition 1.0.1 (Euklidische Länge und Skalarprodukt)**.**

$$x, y \in \mathbb{R}^d, x \cdot y =< x, y >:= \sum_{j=1}^{d} x_j y_j$$

$$|x| = ||x||_2 := (\sum_{j=1}^{d} x_j^2)^{1/2} =< x, x >^{1/2} = \sqrt{< x, x >}.$$

Bemerkung. Euklidisches Skalarprodukt erfüllt die Axiome eines allg. Skalarprodukts (auf reellen VR.).
(S1) $< x, y >=< y, x > \quad \forall x, y \in R^d$ (Symmetrie)
(S2) $< x, \lambda y + \mu z >= \lambda < x, y > + \mu < x, z > \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}^d, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (Bilinearität)
(S3) $< x, x > \geq 0$ und $< x, x >= 0 \Rightarrow x = 0 = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^d$
Bemerkung. (S1) und (S2) $\Rightarrow < \lambda x + \mu y, z >= \lambda < x, z > + \mu < y, z >$.

Satz 1.0.2 (Cauchy-Schwarz-Ungleichung, CSU)**.**

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d : | < x, y > | \leq |x||y|$$

und „=“ gilt, $\Leftrightarrow x, y$ sind linear abhängig.

Beweis. Haben immer $x, y \in \mathbb{R}^d, t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} 0 \leq |x+ty|^2 &= < x+ty, x+ty > \\ &\overset{(S2)}{=} < x+ty, x > +t < x+ty, y > \\ &\overset{(S1)(S2)}{=} < x, x > +t < y, x > +t < x, y > +t^2 < y, y > \\ &= |x^2| + 2t < x, y > +t^2|y|^2 =: g(t). \\ g(t) &= at^2 + 2bt + c \end{aligned}$$

Ang. $|y| > 0, a = |y|^2 > 0$

$$\begin{aligned} g(t) &= at^2 + 2bt + c \\ = a(t^2 + 2b/at + c/a + (b/a)^2 - (b/a)^2)a((t+b/a)^2 + c/a - b^2/a^2) \\ &= a(t+b/a)^2 + c - b^2/a \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow g(t) \geq 0 \quad \forall t \Leftrightarrow b^2 \leq ac(*) \Rightarrow < x, y >^2 \leq |x|^2|y|^2 \\ \text{und } g(t) > 0 \quad \forall t \Leftrightarrow b^2 < ac(**) \\ \text{Haben } a = |y|^2, c = |x|^2 \\ \Rightarrow | < x, y > | \leq |x||y|. \end{aligned}$$

Fall 1: $|y| = 0 \Leftrightarrow y = 0_v = (0, 0)$

$$< x, 0_v > = < x, 0 \cdot 0_v > = 0 \cdot < x, 0_v > = 0$$

Fall 2: $| < x, y > | < |x||y| \Leftrightarrow b^2 < ac \Leftrightarrow g(t) > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow x + ty \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x, y \text{ linear unabhängig}$$

□

Definition 1.0.3. Eine Funktion $|| \cdot || : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ heißt Norm (auf $\mathbb{R}^d$), falls $\forall x, y \in \mathbb{R}^d, \lambda \in \mathbb{R}$:

1. $||x|| \geq 0, ||x|| = 0 \Rightarrow x = 0$
2. $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$
3. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ (Dreiecksungl.)

Satz 1.0.4.

$$|x| := \sqrt{< x, x >} = \left(\sum_{j=1}^{d} x_j^2 \right)^{1/2} \quad \text{ist eine Norm.}$$

Beweis. Eigenschaften 1. und 2. sind einfach nachzurechnen.
Zu 3.:

$$\begin{aligned}|x+y|^2 =&< x+y, x+y >=< x+y, x > + < x+y, y >\\ &=< x,x > + < y,x > + < x,y > + < y,y >\\ &= |x|^2 + 2 < x,y > + |y|^2\\ \le |x|^2 + 2| < x,y > | + |y|^2 &\overset{12.0.2}{\le} |x^2| + 2|x||y| + |y|^2 = (|x|+|y|)^2\\ &\Rightarrow |x+y| \le |x| + |y|\end{aligned}$$

□

Bemerkung. Auch:

$$\begin{aligned}&|x-y| \ge 0 \text{ und } |x-y| = 0 \Leftrightarrow x = y\\ &|x-y| = |y-x|\\ &|x-y| = |x-z+z-y| \le |x-z| + |y-z| \quad \forall z \in \mathbb{R}^d\\ &||x| + |y|| \le |x-y|\end{aligned}$$

Komplexe Zahlen:
$z = x + iy \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$ und $i^2 = -1$.
$z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$

$$z_1 + z_2 := (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

$$z_1 \cdot z_2 := (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

Rigoros: $\mathbb{R}^2, z \in \mathbb{R}^2, z = (x, y)$.
Addition als addieren von Vektoren:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

neue Multiplikation:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$$

$z = x + i0 = (x, 0)$
$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0)$
$(x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1x_2, 0)$
$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = xe_1 + ye_2$ $\mathbb{R}^2$ mit obiger Addition und „komplexen " Multiplikation erfüllt alle Körperaxiome.
$e_2e_2 = (0, 1)(0, 1) = (0 - 1, 0 + 0) = (-1, 0) = -(1, 0) = -e_1$
$e_1 = 1 \cdot e_1 = (1, 0)$
$e_2^2 = -e_1 = -1(1, 0) + 0(0, 1)$

$$z = (x, y) = xe_1 + ye_2 = x \cdot 1 + y \cdot i = x + iy.$$