Analysis I (WS 18/19)

Pavel Zwerschke

7. November 2018

Inhaltsverzeichnis

0 Organisatorisches

Dozent
Prof. Dr. Dirk Hundertmark (20.30, 2.028)
dirk.hundertmark@kit.edu
Übungsleiter
Dr. Markus Lange (20.30, 2.030)
markus.lange@kit.edu
Übungszettel
Ausgabe:
donnerstags unter `www.math.kit.edu/iana1/lehre/ana12018w/`
Abgabe:
bis mittwochs um 19:00 in den Abgabekästen des Foyers des Mathematikgebäudes (20.30)
getackert, mit Namen, Matrikelnummer, Tutoriennummer und Deckblatt (optional) in das Fach mit der richtigen Kennzeichnung legen
Zettel dürfen zu zweit abgegeben werden
Übungsschein
Jede K-Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet. Einen Übungsschein erhält wer 50% der Punkte aller K-Aufgaben erzielt.
Klausur
Die Anmeldung findet über das Online-Portal statt. Die Klausur findet in KW 8 2019 statt. Der Übungsschein ist Voraussetzung für die Teilnahme an der Klausur.

1 Was ist Analysis?

Zentrale Begriffe:
Grenzwerte von Folgen und Reihen, Funktionen, stetig, differenzierbar, integrieren, Differential- und Integralrechnung, Differentialgleichungen (Newton, Maxwell, Schrödinger), unendlich dimensionale Räume

Beispiel. $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$
$2S = 1 + \frac{1}{2} + \dots + {}^1\!/_2 + \dots$
$2S = 1 + S$
S entspricht der Wahrscheinlichkeit, dass irgendwann mal Kopf in einem Münzwurf kommt.
Vorsicht!
$S = 1 + 2 + 4 + \dots$
$2S = 2 + 4 + 8 + \dots = -1 + 1 + 2 + 4 + \dots = -1 + S$
$S = -1$
Natürlich Quatsch!
Formales Rechnen kann gefährlich sein!

- Was sind mathematische Aussagen?
- Wie macht man Beweise, wie findet man sie? (learning by doing)
- logische Zusammenhänge

2 Etwas Logik

Eine (mathematische) Aussage ist ein Ausdruck, der wahr oder falsch ist.
z. B.

1. A : „$1 + 1 = 2$.“(auch „$1 + 1 = 3$“, „$1 + 1 = 0$“)
2. B : „Es gibt unendlich viele Primzahlen.“
3. C : „Es gibt unendlich viele Primzahlen p für die $p + 2$ auch eine Primzahl ist.“
4. D : „Die Gleichung $m\ddot{x} = F$ hat geg. $\dot{x}(0) = v_0, x(0) = x_0$ immer genau eine Lösung.“
5. E : „Jede gerade natürliche Zahl größer als 2 ist die Summe zweier Primzahlen.“
6. F : „Morgen ist das Wetter schön.“

7. G : „Ein einzelnes Atom im Vakuum mit der Kernladungszahl Z kann höchstens $Z + 1$ Elektronen binden.“

8. $H(k, m, n)$: „Es gilt: $k^2 + m^2 = n^2$.“(z. B. $H(3, 4, 5)$ ist wahr.)

Gegeben für natürliche Zahlen n, Aussagen $A(n)$, dann gilt:
Für jede nat. Zahl n ist $A(n)$ wahr, genau dann, wenn

1. $A(1)$ ist wahr.

2. Unter der Annahme, dass $A(n)$ wahr ist, folgt, dass $A(n + 1)$ wahr ist.

Beispiel. $A(n) : 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Beweis. Vollständige Induktion
Induktionsanfang:
$1 = \frac{1(1+1)}{2} \checkmark$
Induktionsschluss:
Wir nehmen an, dass $A(n)$ wahr ist (für $n \in \mathbb{N}$)
D. h. Induktionsannahme:
$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
Dann folgt:
$\underbrace{1 + 2 + \cdots + n}_{= \frac{n(n+1)}{2}} + (n + 1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n + 1)$
$= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$ □

Bemerkung. Gaußscher Trick:
1)
$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = n + (n - 1) + (n - 2) + \cdots + 2 + 1$
$2S = \underbrace{(n + 1) + (n + 1) + \cdots + (n + 1)}_{n\text{-mal}} \Leftrightarrow S = \frac{n(n+1)}{2}$.
2)
$S_n = 0 + 1 + 2 + \cdots + n$
$=$ Anzahl der Punkte in
$\approx$ Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks $= \frac{1}{2} * n * n$.
Also: Ansatz („geschicktes Raten“, „scientific guess“, englisch: ansatz):
$S_n = \underbrace{a_2 n^2 + a_1 n + a_0}_{\text{Polynom 2. Grades in n}}$
$a_2 = \frac{1}{2}$
Wie bekommt man $a_0, a_1, (a_2)$? $n = 0 : S_0 = 0 = a_2 * 0^2 + a_1 * 0 + a_0 \Rightarrow a_0 = 0$.
$n = 1 : S_1 = 1 = a_2 * 1^2 + a_1 * 1^2 = a_2 + a_1 = \frac{1}{2} + a_1$.
also: $a_1 = \frac{1}{2}$
$\Rightarrow$ Raten: $S_n = \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{2} n = \frac{n(n+1)}{2}$.

2.1 Grundbegriffe

Aussagen: Notation

$:$	„so, dass gilt“
$\exists$	„es gibt mindestens ein“, „es existiert“
$\forall$	„für alle“
$\Rightarrow$	„impliziert“($A \Rightarrow B$ „aus A folgt B“)
$\Leftrightarrow$	„genau dann, wenn“
$\neg A$	nicht A
$A \wedge B$	A und B
$A \vee B$	A oder B
$A := B$	A ist per Definition gleich B

Satz 2.1.1. *Folgende Aussagen sind allein aus logischen Gründen immer wahr.*

$$\begin{array}{rl} \neg(\neg A) \Leftrightarrow A & \textit{Gesetz der doppelten Verneinung} \\ A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A & \textit{Kontraposition} \\ A \Rightarrow B \Leftrightarrow (\neg(A \wedge \neg B)) & \textit{beim Widerspruchsbeweis} \\ \neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B) & \textit{de Morgan} \\ \neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B) & \textit{de Morgan} \end{array}$$

Bemerkung. $A \Rightarrow B \Leftrightarrow B$ ist mindestens so wahr wie $A \Leftrightarrow A$ ist mindestens so falsch wie $B \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$.
$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B \wedge B \Rightarrow A)$.

Beispiel. $n \in \mathbb{N}$ ist gerade, falls $k \in \mathbb{N}$ existiert mit $n = 2k$.
$n \in \mathbb{N}$ ist ungerade, falls $\exists k \in \mathbb{N}_0 : \vee n = 2k + 1$.
Dann gilt: n ist gerade $\Leftrightarrow$ n^2 ist gerade.

Beweis. „$\Rightarrow$“: n gerade $\Rightarrow n = 2k$, für $k \in \mathbb{N}$
$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ ist gerade.
Umgekehrt müssen wir zeigen:
„$\Leftarrow$“: n^2 gerade $\Rightarrow n$ gerade
Kontraposition: n ungerade $\Rightarrow n^2$ ungerade
Also sei $n = 2k+1, k \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = \underbrace{2(2k^2 + 2k)}_{\text{gerade}} + 1 \Rightarrow$
n^2 ist ungerade. □

Mengen (nach Cantor)
informell: Eine Menge ist eine Sammlung von Objekten (Elemente) zu einem neuen Objekt.
Vorsicht: Russels Paradox
genaue Definition von Zermelo-Fraenkel Axiome ($\rightarrow$ Logik Mengenlehre)
$a \in M$: a ist Element von M

$a \notin M$: a ist kein Element von M
z.B.:
$M = \{1, 4\}$
$1 \in M$
$5 \notin M$
Angabe von Mengen durch

- Auflistung
  $M = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{17}\}$

- Eigenschaft
  $M = \{a | a \text{ hat Eigenschaft } E\}$

z.B.:

- $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$
- $\mathbb{Z} := \{x | x \in \mathbb{N} \vee x \in -\mathbb{N} \vee x = 0\}$
- $-\mathbb{N} := \{-n | n \in \mathbb{N}\}$

Definition 2.1.1. Sei M eine Menge und $A(x)$ Aussagen mit $x \in M$
$\forall x \in M : A(x)$ ist wahr, falls alle $A(x)$ wahr sind.
$\exists x \in M : A(x)$ ist wahr, falls mindestens eine Aussage $A(x)$ wahr ist.

Achtung: Zusammensetzen: Reihenfolge ist wichtig!

Beispiel. Töpfe := Menge der Töpfe
Deckel := Menge der Deckel
$A : \forall T \in$ Töpfe $\exists D \in$ Deckel : D passt auf T
(Für jeden Topf gibt es einen Deckel, der passt)
$B : \exists D \in$ Deckel $\forall T \in$ Töpfe : D passt auf T
(Es existiert mindestens ein Deckel, der auf alle Töpfe passt)

Negation:
$\neg(\forall x \in M : A(x))$
$\Leftrightarrow \exists x \in M : \neg A(x)$
$\neg(\exists x \in M : A(x))$
$\Leftrightarrow \forall x \in M : \neg A(x)$

Definition 2.1.2 (wichtige Mengen)**.** Seien M, N Mengen.

$$\begin{aligned}
\emptyset &:= \text{ die Menge ohne Elemente (leere Menge)} \\
M \cap N &:= \{x | x \in M \wedge x \in N\} \text{ (Schnitt)} \\
M \cup N &:= \{x | x \in M \vee x \in N\} \text{ (Vereinigung)} \\
M \setminus N &:= \{x | x \in M \wedge x \notin N\} \text{ (Differenzmenge)} \\
\mathcal{P}(M) &:= \{A | A \subset M\} \text{ die Menge aller Teilmengen von } M \text{ (Potenzmenge)}
\end{aligned}$$

Sei I eine Menge und für $i \in I$ eine Menge M_i.

$$\bigcap_{i \in I} M_i := \{x | \forall i \in I : x \in M_i\}.$$
$$\bigcup_{i \in I} M_i := \{x | \exists i \in I : x \in M_i\}.$$

Ist $M \cap N = \emptyset$, so heißen M und N divergent.
$M \subset N$, falls $\forall x \in M : x \in N$ (M Teilmenge von N).
$M = N$, falls M und N dieselben Elemente haben.
Insbesondere ist $(M = N) \Leftrightarrow M \subset N \wedge N \subset M$.
$M \subsetneq N : M \subset N \wedge M \neq N$ (M echte Teilmenge von N).

Beispiel. $\emptyset \subset M$
$M = \{1, 2\} \Rightarrow \mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

1. Eigenschaften von „$\subset$“
   (a) $\emptyset \subset M$
   (b) $M \subset M$
   (c) $M = N \Leftrightarrow M \subset N \wedge N \subset M$
   (d) $A \subset B \wedge B \subset C \Leftrightarrow A \subset C$
2. Assoziativität
   (a) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
   (b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
3. Kommutativität
   (a) $A \cup B = B \cup A$
   (b) $A \cap B = B \cap A$
4. Distributivgesetz
   (a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
   (b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

3 Die reellen Zahlen

3.1 Körperaxiome (engl. field)

$\mathbb{K}$: Menge mit zwei Operationen „+“und „·“.
$\forall a, b \in \mathbb{K}$ ist $a + b \in \mathbb{K} \wedge a \cdot b \in \mathbb{K}$ erklärt sollen kompatibel sein.

Definition 3.1.1 (Körperaxiome)**.** In einem Körper gelten diese Axiome:

1. Kommutativität: $\forall a, b \in \mathbb{K} : a + b = b + a, a \cdot b = b \cdot a$

2. Assoziativität: $\forall a, b, c \in \mathbb{K} : a + (b + c) = (a + b) + c, a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

3. Existenz des neutralen Elements:
   $\exists 0 \in \mathbb{K} : a + 0 = 0 + a = a \forall a \in \mathbb{K}$
   $\exists 1 \in \mathbb{K} : a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \forall a \in \mathbb{K}$

4. Existenz eines inversen Elements:
   $\forall a \in \mathbb{K} \exists - a \in \mathbb{K} : a + (-a) = 0$
   $\forall a \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \exists \frac{1}{a} \in \mathbb{K} : a \cdot \frac{1}{a} = 1$
   Es gilt: $0 \neq 1$.

5. Distributivgesetz: $\forall a, b, c \in \mathbb{K} : a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Beispiel. $\mathbb{Q} = \frac{m}{n}, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}$ ist ein Körper.

$$\mathbb{F}_2 : \begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}$$ ist ein Körper.

Bemerkung. .

1. Somit ist ein Körper $\mathbb{K}$ mit „+“eine kommutative Gruppe und $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ mit „·“auch eine kommutative Gruppe.

2. Die neutralen Elemente sind eindeutig bestimmt.
   z.B.: angenommen, 0_1 und 0_2 sind neutrale Elemente mit „+“.
   $\Rightarrow 0_1 \overset{(3)}{=} 0_1 + 0_2 \overset{(1)}{=} 0_2 + 0_1 \overset{(2)}{=} 0_2$
   analog für Multiplikation

Definition 3.1.2. Zu $a \in \mathbb{K}$ ist $-a$ das Inverse bzgl. der Addition
schreibe $a - b := a + (-b)$.
Zu $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ sei $a^{/1}$ das Inverse bzgl. der Multiplikation.
Ist $b \neq 0$, so schreiben wir $\frac{a}{b} := a \cdot b^{-1} = b^{-1} \cdot a$.
schreibe $(ab) := a \cdot b$.

Lemma 1 (Rechnen in einem Körper)**.** .

1. *Umformen von Gleichungen*
   $\forall a, b, c \in \mathbb{K}$:
   aus $a + b = c$ *folgt* $a = c - b$
   aus $a \cdot b = c$, $b \neq 0$ *folgt* $a = \frac{c}{b}$

2. *Allgemeine Rechenregeln*

$$\begin{aligned} -(-a) &= a \\ (a^{-1})^{-1} &= a, \text{ falls } a \neq 0 \\ -(a+b) &= (-a) + (-b) \\ (a \cdot b)^{-1} &= b^{-1} \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1} \\ a \cdot 0 &= 0 \\ a(-b) &= -(ab), (-a)(-b) = ab \\ a(b-c) &= ab - ac \\ ab = 0 &\Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0 \text{ (Nullteilerfreiheit)} \end{aligned}$$

Beweis. $0 = a + (-a) = (-a) + a$
$\Rightarrow -(-a) = a$
$(a + b) + ((-a) + (-b)) = (a + (-a)) + (b + (-b)) = 0 + 0 = 0$
$\Rightarrow -(a + b) = (-a) + (-b)$
benutzen wir auch Eindeutigkeit des inversen Elements
analog zeigt man $(a^{-1})^{-1} = a$ und $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = a^{-1}b^{-1}$
z.B.: $(ab) \cdot (b^{-1}a^{-1}) = a(b \cdot b^{-1})a^{-1} = (a \cdot 1)a^{-1} = a \cdot b^{-1} = 1$
Ferner $a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0 = a \cdot 0 + 0$
$\Rightarrow a \cdot 0 = a \cdot 0 - a \cdot 0 = 0$
$\Rightarrow a \cdot b + a \cdot (-b) = a \cdot (b + (-b)) = a \cdot 0 = 0$
$\overset{\text{Eind. d. Inv.}}{\Rightarrow} -ab = a(-b)$
Somit auch $(-a)(-b) = -((-a)b) = -(b(-a)) = (-ba) = -(-ab) = ab$
und $a(b - c) = a(b + (-c)) = ab + a(-c) = ab + (-ac) = ab - ac$.
ist $ab = 0$ und $a \neq 0 \Rightarrow 0 = (ab)\frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot (ab) = (\frac{1}{a} \cdot a)b = 1b = b$
also ist $b = 0$. □

Satz 3.1.1 (Bruchrechnen)**.** $a, b, c, d \in \mathbb{K}, c \neq 0, d \neq 0.$
Dann gilt

1. $\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ad+bc}{cd}$

2. $\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{ab}{cd}$

3. $\frac{a/c}{b/d} = \frac{ad}{bc}$, *falls auch* $b \neq 0$ *ist.*

Beweis. Übung $\square$

Beispiel. rationale Zahlen sind ein Körper
schreiben $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ für einen Körper

3.2 Die Anordnungsaxiome

Definition 3.2.1. Sei $\mathbb{K}$ (genauer $(\mathbb{K}, +, \cdot)$) ein Körper. Dann heißt $>$ eine Anordnung falls

1. Für jedes $a \in \mathbb{K}$ gilt genau eine der Aussagen $a > 0, a = 0, -a > 0$
   (wenn $a \in \mathbb{K}$, mit $a > 0$ positiv)

2. Aus $a > 0$ und $b > 0$ folgt
   $a + b > 0$ und $a \cdot b > 0$

Wir nennen $(\mathbb{K}, +, \cdot, >)$ einen angeordneten Körper.

Bemerkung. Statt $-a > 0$ schreiben wir $a < 0$
Statt $a - b > 0$ schreiben wir $a > b$
Bild:

Statt $a - b < 0$ schreiben wir $a < b$.
$a \geq b$, falls $a > b \vee a = b$
$a \leq b$, falls $a < b \vee a = b$.

Satz 3.2.1. *Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot, >)$ ein angeordneter Körper. Dann gilt*

1. *für $a, b \in \mathbb{K}$ gilt genau eine der Relationen $a > b, a = b, a < b$ (Trichotromie)*

2. *Aus $a > b, b > c$ folgt $a > c$ (Transitivität)*

3. *Aus $a > b$ folgt:*
   $$\begin{cases} a + c > b + c, \forall c \in \mathbb{K} \\ ac > bc, \text{ falls } c > 0 \\ ac < bc, \text{ falls } c < 0 \end{cases}.$$

4. *Aus $a > b$ und $c > d$ folgt:*
   $$\begin{cases} a + c > b + d \\ ac > bd, \text{ falls } b, d > 0 \end{cases}$$

5. *Für $a \neq 0$ ist $a^2 > 0$.*

6. *Aus* $a > 0$ *folgt* $\frac{1}{a} > 0$.

7. *Aus* $a > b > 0$ *folgt* $0 < \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

8. *Aus* $a > b, 0 < \lambda < 1$ *folgt* $b < \lambda b + (1-\lambda)a < a$.

Bemerkung. Auf $\mathbb{F}_2$ kann es keine Anordnung geben!

Beweis.

1. Direkt aus (A.1) und Def. von $a > b$.

2. $a - c = \underbrace{(a-b)}_{>0} + \underbrace{(b-c)}_{>0} \overset{(A.2)}{>} 0.$

3. $(a+c) - (b+c) = a - b > 0$
   $ac - bc = \underbrace{(a-b)}_{>0} \cdot c \overset{(A.2)}{>} 0$, falls $c > 0$
   Ist $c < 0$, so ist $-c > 0$
   $\Rightarrow bc - ac = \underbrace{(a-b)}_{>0} \cdot \underbrace{(-c)}_{>0} \overset{(A.2)}{>} 0$
   $ac - bd = ac - bc + bc - bd = \underbrace{(a-b)}_{>0} \cdot \underbrace{c}_{>0} + \underbrace{b}_{>0} \cdot \underbrace{(c-d)}_{>0} \overset{(A.2)}{>} 0.$

4. $(a+c) - (b+d) = (a-b) + (c-d) > 0$ nach (A.2)
   $ac - bd = ac - bc + bc - bd = (a-b)c + b(c-d)$
   Ist $b = 0 \Rightarrow a > b = 0 \Rightarrow ac > 0 = bd$
   Ist $b < 0 \Rightarrow (-b)d > 0 \Rightarrow -bd > 0 \Rightarrow bd < 0 \Rightarrow ac < -bd \Rightarrow$
   $\underbrace{ac}_{>0} + \underbrace{(-bd)}_{>0} \overset{(A.2)}{>} 0.$

5. Fallunterscheidung:
   ist $a > 0 \Rightarrow a^2 = a \cdot a > 0$ (A.2)
   ist $a < 0 \Rightarrow a^2 = (-a) \cdot (-a) > 0$ (A.2)

6. sei $a > 0$:
   $\overset{5.}{\Rightarrow} \left(\frac{1}{a}\right) > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} = \underbrace{\left(\frac{1}{a}\right)^2}_{>0} \cdot \underbrace{a}_{>0} > 0.$

7. aus $a > b > 0$
   $\Rightarrow \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{1}{b}(a-b)\frac{1}{a} > 0.$

8. $a > b, 0 > \lambda > 1 \Rightarrow \lambda > 0 \wedge 1 - \lambda > 0$
   $b = \lambda b + \underbrace{(1-\lambda)b}_{<(1-\lambda)a}$
   $< \lambda b + (1-\lambda)a < \lambda a + (1-\lambda)a = a$
   $\Rightarrow b < \lambda b + (1-\lambda)a = a.$
   Insbesondere $\lambda = 1/2 \Rightarrow b < 1/2 b + 1/2 a = \frac{a+b}{2} < a.$

$\square$

Definition 3.2.2 (Betrag)**.** Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot, >)$ ein angeordneter Körper.
Betrag von $a \in \mathbb{K}$ ist gegeben durch
$|a| := \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq 0 \\ -a, & \text{falls } a < 0 \end{cases}$
auch noch $a, b \in \mathbb{K}$
$\max(a,b) := \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq b \\ b, & \text{falls } a < b \end{cases}$
$\min(a,b) := \begin{cases} a, & \text{falls } a \leq b \\ b, & \text{falls } a > b \end{cases}$

Bemerkung. .

1. $a, b \in \mathbb{K}$
   $|a - b| =$ Abstand von a zu b.
   $|a| = |a - 0| =$ Abstand von a zu 0.

2. $|a| = \max(a, -a)$.

Satz 3.2.2. $(\mathbb{K}, +, \cdot, >)$ *ang. Körper*
Dann gilt $\forall a, b \in \mathbb{K}:$

1. $|-a| = |a|$ *und* $a \leq |a|$

2. $|a| \geq 0$ *und* $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$

3. $|ab| = |a|\,|b|$

4. $|a + b| \leq |a| + |b|$ *(Dreiecksungleichung)*

5. $||a| - |b|| \leq |a - b|$ *(umgekehrte Dreiecksungleichung)*

Beweis. .

1. $|-a| = \begin{cases} -a, -a \geq 0 \\ -(-a), -a \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} -a, a \leq 0 \\ a, a \geq 0 \end{cases} = |a|$

   $|a| - a = \begin{cases} a - a, a \geq 0 \\ -a - a, a < 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, a \geq 0 \\ -(a+a), a < 0 \end{cases} \geq 0.$

   alternativ: $a \leq \max(a, -a) = |a|$.

2.

3. Hier ändern sich die linke und rechte Seite <u>nicht</u>, wenn man a bzw. b durch $-a$ bzw. $-b$ ersetzt.

   Also, o.B.d.A. können wir annehmen, dass $a, b \geq 0$.

   $\Rightarrow |ab| = ab = |a|\,|b|$.

4. $\overset{\text{Satz 1 (5)}}{\Rightarrow} |a+b|^2 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = |a|^2 + 2\underbrace{ab} \leq |ab| + |b|^2$

   $\overset{(2)}{\leq} |a|^2 + 2\,|ab| + |b|^2$

   $\overset{(3)}{}$

   $|a|^2 + 2\,|a|\,|b| + |b|^2$.

   Also $(a+b)^2 \leq (|a| + |b|)^2$

   $\overset{\text{H.A.}}{\Rightarrow} |a+b| \leq |a| + |b|$.

   H.A. aus $|c|^2 \leq |d|^2$ folgt $|c| \leq |d|$ (Kontraposition).

5. $|a| = |a - b + b| = |(a-b) + b| \overset{(4)}{\leq} |a-b| + |b|$

   $|a| - |b| \leq |a-b|\, \forall a, b \in \mathbb{K}$.

   Jetzt: Symmetrieargument. (Vertausch von a und b)

   $\Rightarrow |b| - |a| \leq |b - a| = |(-b-a)| = |a-b|$

   also $|b| - |a| \leq |a-b|$

   $|a| - |b| \leq |a-b|$

   $||a| - |b|| = \max(|a| - |b|\,, -(|a| - |b|)) = \max(|a| - |b|, |b| - |a|) \leq |a - b|$.

□

Beispiel. Sei $a, b \in \mathbb{K}$ ein angeordneter Körper. Aus $|b - a| \leq {}^b\!/\!_2, 2 = 1 + 1$ folgt $a \geq {}^b\!/\!_2$ Bild:

Beweis. $b - a \leq |b - a| \leq {}^b\!/\!_2 \Rightarrow a \geq b - {}^b\!/\!_2 = {}^b\!/\!_2$. □

Korollar 1 („geometrisch-arithmetische Ungleichung“)**.** *Sei* $(\mathbb{K}, +, \cdot, >)$ *ein ang. Körper,* $a, b \in \mathbb{K}$

$\Rightarrow ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$.

Wenn Gleichheit gilt, so folgt $a = b$.

Beweis. In Übung □

Fakt:

- In jedem angeordneten Körper gilt $0 < 1$!
- Es gibt keine Anordnung, die $\mathbb{F}_2$ zu einem angeordneten Körper macht. (H.A.)

3.3 Obere und untere Schranken, Supremum und Infimum

Notation: a ist nicht negativ, falls $a \geq 0$.
natürlich $a = b \Leftrightarrow a \leq b \wedge a \geq b$.
Im Folgenden ist $\mathbb{K}$ immer ein angeordneter Körper. $A, B \subset \mathbb{K}, A, B \neq \emptyset$ und $\gamma \in \mathbb{K}$, so bedeutet $A \leq \gamma : \forall a \in A : a \leq \gamma$ (γ it obere Schranke für A).
$B \geq \beta : \forall b \in B : b \geq \beta$ (β ist untere Schranke für B).
Analog sind $a < \gamma, A > \gamma, A < B$, usw. definiert.
Hat A eine obere Schranke, so heißt A nach oben beschränkt. Hat B eine untere Schranke, so ist B nach unten beschränkt. A ist beschränkt, falls es nach oben und unten beschränkt ist.
Ist $A \leq \alpha$ und $\alpha \in A$, so heißt α größtes (maximales) Element von A, schreibe $\alpha = \max A$ (Maximum).
Ist $B \geq \beta$ und $\beta \in B$, so heißt B kleinstes (minimales) Element von B, schreibe $\beta = \min B$ (Minimum).
Man zeige, dass max und min eindeutig sind, sofern sie existieren.
$[0, 1) := \{x \in \mathbb{K} | 0 \leq x \leq 1\}$ hat kein Maximum bzw. kein maximales Element.

Definition 3.3.1. Sei $A \subset \mathbb{K}, A \neq \emptyset$. Dann ist $\gamma \in \mathbb{K}$ die kleinste obere Schranke (oder Supremum), falls $A \leq \gamma$ und aus $A \leq n$ folgt $\gamma \leq n$.
Schreibe $\gamma = \sup A = \sup(A)$.
Analog: β it die größte untere Schranke von A (Infimum), falls $\beta \leq A$ und aus $\eta \leq A$ folgt $\eta \leq \beta$
Schreibe $\beta = \inf A = \inf(A)$.

Beispiel. $P := \{x \in \mathbb{K} | x > 0\}$
$\Rightarrow$

1. P ist nicht nach oben beschränkt.
2. P hat kein Minimum, aber $\inf P = 0$.

Beweis. .

1. Ang. γ ist obere Schranke für P. D.h. $\forall x \in P$ folgt $0 < x \leq \gamma \Rightarrow \gamma > 0 \Rightarrow \gamma \in P \Rightarrow 0 < \gamma = \gamma + 0 < \gamma + 1 \in P \Rightarrow \gamma + 1 \in P$ und $\gamma + 1 > \gamma \gamma$ ist nicht obere Schranke für P (Widerspruch!)

2. $2 := 1 + 1 > 1 > 0$
   Ang. $\min P := \eta$ existiert. $\Rightarrow \eta \in P, \eta > 0, \tilde{x} := \frac{\eta}{2} = \frac{0+\eta}{2} < \eta$.
   Es gilt $0 = \inf P$.
   Sicherlich $0 < P$, also ist 0 eine untere Schranke für P.
   0 ist die größte untere Schranke, denn nach obigem Argument ist jede Zahl > 0 keine untere Schranke für P!

$\square$

Lemma 2. *$A \subset \mathbb{K}, A \neq \emptyset$.*

1. $\alpha := \sup A \Leftrightarrow \alpha \geq A \wedge \forall \varepsilon > 0 \exists a \in A : \alpha - \varepsilon < a$.

2. $\beta := \inf B \Leftrightarrow \beta \leq B \wedge \forall \varepsilon > 0 \exists b \in B : b < \beta + \varepsilon$.

Beweis. Inhalt... $\square$

Beweis. .

1. Gegeben $m \in \mathbb{N} : A := \{n \in \mathbb{N} | n + m \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}$
   dann ist A induktiv, also $\mathbb{N} \subset A \Rightarrow A = \mathbb{N}$.

2. Def: $B := \{n \in \mathbb{N} | n = 1 \vee (n - 1 \in \mathbb{N} \wedge n - 1 \geq 1)\} \subset \mathbb{N}$
   Dann ist B induktiv, denn

   (a) $1 \in B$

   (b) Sei $n \in B$. Fallunterscheidung

   - $n = 1 \Rightarrow n + 1 = 1 + 1 > 1$.
     und $(n + 1) - 1 = (1 + 1) - 1 = 1 \in \mathbb{N}$
   - $n \in B \wedge n \neq 1 \Rightarrow n - 1 \in \mathbb{N}$[ODER B?] $\wedge\, n - 1 \geq 1$
     $\Rightarrow n = \underbrace{(n - 1)}_{\in \mathbb{N}} + 1 \in \mathbb{N}$
     $\Rightarrow n + 1 - 1 = n \in \mathbb{N}$
     und $(n + 1) - 1 = n \in \mathbb{N}$
     und $(n + 1) - 1 = n = (n - 1) + 1 \geq 1 + 1 \geq$ [ODER $>$?]1.
     $\Rightarrow n + 1 \in B$.

3. $C := \{n \in \mathbb{N} | \forall m \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$ ist $n - m \in \mathbb{N}_0\} \Rightarrow$

   (a) $1 \in C$, dann ist $m \in \mathbb{N}$ und $m = 1$.
   folgt nach b): $m = 1$
   $\Rightarrow n - m = 1 - 1 = 0 \in \mathbb{N}_0$.

   (b) ang. $n \in C$ und $m \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n + 1$.
   Fallunterscheidung:

   - $n = 1 \Rightarrow n + 1 - m = (n + 1) - 1 = n \in \mathbb{N}.\checkmark$
     $\Rightarrow n + 1 \in C$.
   - $n > 1$ (und $m \leq n + 1$)
     $\overset{b)}{\Rightarrow} m - 1 \in \mathbb{N}$ und $m - 1 \leq (n + 1) - 1 = n$
     Da $n \in C, m - 1 \in \mathbb{N}, m - 1 \leq n \Rightarrow \underbrace{n - (m - 1)}_{=(n+1)-m} \in \mathbb{N}_0$
     $\Rightarrow n + 1 \in C$.

4. H.A.

$\square$

4 Funktionen und Abbildungen

4.1 Funktion als Abbildung

Definition 4.1.1. Eine Funktion (oder Abbildung) von einer Menge A in eine Menge B ordnet jedem Element $a \in A$ ein <u>eindeutiges</u> Element $b \in B$ zu.
Wir schreiben:

$$f : A \to B, a \mapsto f(a) \quad (= b)$$

A: Definitionsbereich
B : Zielbereich (Target(space))
z.B. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$
Die Abbildung $f : A \to B$ ist

injektiv	aus $f(a) = f(a'), a, a' \in A$, folgt $a = a'$
surjektiv	$\forall b \in B \exists a \in A : b = f(a)$
bijektiv	sie ist injektiv und surjektiv

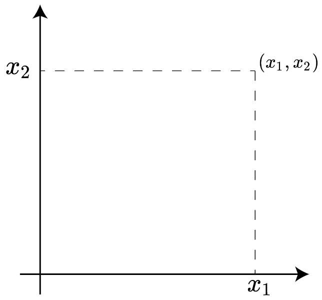
Bemerkung. $f : A \to B$ injektiv $\Leftrightarrow a, a' \in A, a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$

$f : A \to B$ ist bijektiv $\Rightarrow \forall b \in B \exists! a \in A : f(a) = b$.
Definiere $f^{-1} : B \to A, b \mapsto a, a \in A : f(a) = b$ (inverse Funktion).
Ist $f : A \to B$ nicht bijektiv. (Verallgemeinerte Inverse)
$f^{-1} : P(B) \to P(A), M \mapsto \{a \in A | f(a) \in M\}$
Verkettung:
gegeben: $f : A \to B, g : B \to C$
$g \circ f : A \to C \qquad g \circ f(a) := g(f(a))$.
$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$
$f : A \to B$ ist bijektiv $\Rightarrow f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A, f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B$
$\mathrm{id}_A : A \to A, a \mapsto a$.

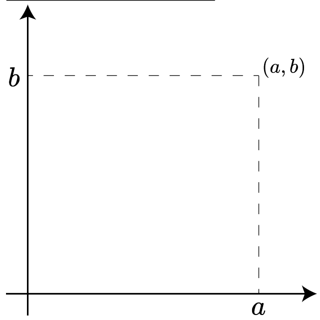
4.2 Abbildungen als Graph

Definition 4.2.1. Seien A, B Mengen. Dann ist (a, b) ein sog. <u>Tupel</u>.
in der Mengenlehre: $(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$.

Beachte: Reihenfolge ist wichtig! im Allg. $(a, b) \neq (b, a)$
Menge $A \times B := \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$
heißt kartesisches Produkt (von A und B)
z.B. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

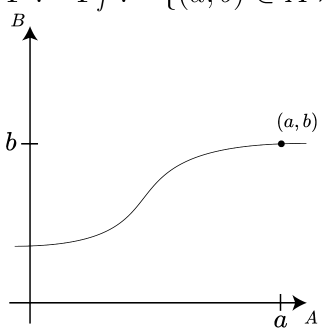


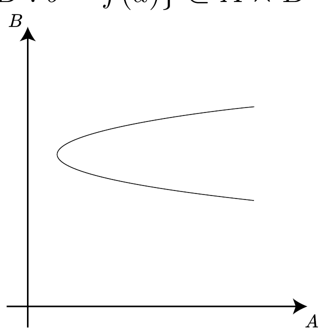
2. Abbildungen Projektionen



$\Pi_1 = \Pi_A : A \times B \to A, (a,b) \mapsto a$ (Projektion auf 1. Koordinate)
$\Pi_2 = \Pi_B : A \times B \to B, (a,b) \mapsto b$ (Projektion auf 2. Koordinate)
$\Pi_A(a,b) = a$
$\Pi_B(a,b) = b$
n-Tupel: Mengen $A_1, \dots, A_n, n \in \mathbb{N}$.
$A_1 \times A_2$ wie vorhin
$A_1 \times \cdots \times A_{n+1} := (A_1 \times \cdots \times A_n) \times A_{n+1}, n \in \mathbb{N}$ (induktiv)
Beobachtung:
$(A \times B) \times C = A \times (B \times C) + \{(a,b,c) | a \in A, b \in B, c \in C\} = ((a,b),c) = (a,(b,c))$
Genauer: $\exists$ Bijektion $\Phi : (A \times B) \times C \to A \times (B \times C)$

Definition 4.2.2 (Graph einer Abbildung)**.** Geg: $f : A \to B$ Funktion
$\Gamma := \Gamma_f := \{(a,b) \in A \times B : b = f(a)\} \subset A \times B$

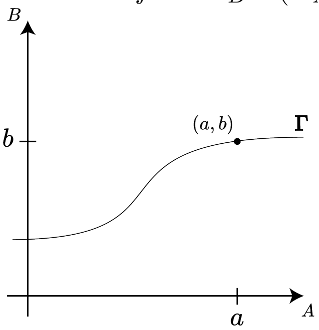




$P \subset A \times B$ ist der Graph einer Funktion genau dann, wenn aus $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \Gamma$ folgt $b_1 = b_2$. (und $\forall a \in A \exists b \in B : (a,b) \in \Gamma$)

Satz 4.2.1. *$\Gamma \subset A \times B$ ist genau dann Graph einer Abbildung $f : A \to B$, wenn die Projektion $\Pi_A|_\Gamma : \Gamma \to A$ bijektiv ist.*
Notation: $g : D \to E, X \subset D$
$g|_X : X \to E, x \mapsto g(x)$

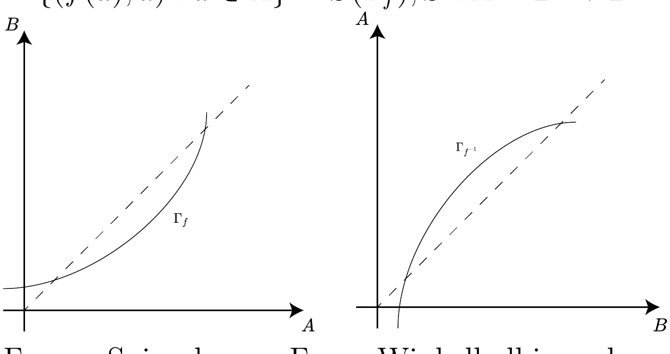
Beweis. Sei $\Gamma = \Gamma_f$ mit $f : A \to B$ Funktion
$\overset{(a,b)\in\Gamma_f \Leftrightarrow b=f(a)}{\Rightarrow} \forall a \in A$ existiert genau ein $b \in B$ mit $f(a) = b$.
$\Rightarrow \Pi_A|_\Gamma$ ist bijektiv.
Umgekehrt: Sei $\Pi_A|_\Gamma \to A$ bijektiv.
D.h. ist $(a_j, b_j) \in \Gamma, j \in \{1, 2\}$
und $\Pi_A(a_1, b_1) = \Pi_A(a_2, b_2) \Rightarrow (a_1, b_1) = (a_2, b_2)$
$\Leftrightarrow a_1 = a_2, b_1 = b_2$
$\Rightarrow$ zu $a \in A \exists! b \in B, (a, b) \in \Gamma$.
Da $b = \Pi_B(a, b) = \Pi_B((\Pi_A|_\Gamma)^{-1}(a))$
Definiere $f := \Pi_B \circ (\Pi_A|_\Gamma)^{-1} : A \to B$ ist Funktion



nachrechnen $\Gamma = \Gamma_f$ □

Bemerkung. In Satz 3 gilt $f = \Pi_B \circ (\Pi_A|_\Gamma)^{-1}$

Beispiel. Ist $f : A \to B$ bijektiv
$b = f(a), \quad f^{-1}(b) = a$
Dann gilt: $\Gamma_f^{-1} = \{(b, f^{-1}(b)) | b \in B\}$
$= \{(f(a), a) : a \in A\} = S(\Gamma_f), S : A \times B \to B \times A$ (swap), $(a, b) \mapsto (b, a)$.



$\Gamma_{f^{-1}}$ = Spiegeln von Γ_f an Winkelhalbierenden.

4.3 Schubfachprinzip und endliche Mengen