Marius et Jeannette veulent savoir à quelle fréquence passe le bus

Marius et Jeannette prennent le bus ensemble tous les matins pour aller au travail. Le bus passe à intervalle régulier, mais d'un jour sur l'autre la synchronisation est aléatoire en raison des embouteillages qui ont lieu en amont.
Marius et Jeannette ont relevé sur 2 semaines leur temps d'attente du bus. Les résultats (exprimés en minutes et rangés dans l'ordre croissant) sont consignés dans le tableau ci-dessous.

1,0	2,1	2,8	3,7	5,3	6,0	6,5	7,2	8,2	9,5

Marius propose d'estimer le temps d'attente maximal par deux fois la moyenne de l'échantillon, tandis que Jeannette propose plutôt de prendre la valeur maximale de l'échantillon.

Le but de votre travail est d'étudier en mode APP (Apprentissage Par Problème) qui de Marius ou Jeannette a la meilleure stratégie...

1er temps : déterminer un protocole de simulation sous R qui permette d'apporter une réponse à la question. Le mettre en œuvre.

2ème temps : justifier de manière théorique les résultats de la simulation. Est-il possible de faire mieux que ce que Marius et Jeannette proposent ? Si oui, vous devrez vérifier grâce à votre simulation que ce que vous proposez est effectivement meilleur...

Ressources :

- Consignes APP (ci-après)
- Polycopié sous Chamilo
- Une page RV de synthèse sur l'estimation ponctuelle
- Logiciel R

$$Var(\theta_M) = Var\left(\frac{2}{1}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \left(\frac{2}{n}\right)^2 Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \left(\frac{2}{n}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} Var(X_i$$

$$= \left(\frac{2}{n}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a^2}{12} = \left(\frac{2}{n}\right)^2 n \frac{(b-a)^2}{12} =$$

$$= \frac{4}{n^2} n \frac{b^2}{12} = \frac{4nb^2}{n^2 12} = \frac{4b^2}{n12}$$

$$= \frac{b^2}{3n} \sim \frac{1}{n}$$

Donc c'est un bon estimateur.

Apprentissage Par Problème

L'apprentissage par problème est une méthode pédagogique dont le but est de réaliser de nouveaux apprentissages au travers de la résolution d'un problème.
L'important n'est pas de trouver la solution au problème posé (qui n'est qu'un prétexte pour réaliser des apprentissages), mais de s'approprier de nouveaux concepts.

Travail des apprenants

- Organisation par groupes de 6 à 8, avec un animateur dont le rôle est de veiller à ce que tous les membres du groupe puissent s'exprimer, et d'organiser le travail (équilibre entre phase de travail personnel, en sous-groupes, et de mise en commun collective), et un scribe qui a pour mission de consigner les décisions et les avancées du groupe sur le travail fait et à faire.
- Le premier travail est de s'approprier la problématique, d'identifier ce qu'il faut commencer à creuser. Chacun tente de s'approprier les éléments pertinents (le plus souvent dans une phase de travail individuel), et durant des phases collectives, les éventuelles difficultés sont discutées. Si le groupe ne parvient pas à les résoudre, il s'agit de formuler une question pour un temps de restructuration que fera l'enseignant à toute la classe (voir ci-dessous).

Rôle de l'enseignant

- La plupart du temps l'enseignant a un rôle de tuteur : il questionne le groupe, s'assure que le travail va dans la bonne direction. Dans les phases de tutorat, il est censé répondre à toute question par une autre question qui permette d'orienter le groupe pour que ses membres trouvent par eux-mêmes la réponse.
- A certains moments, typiquement quand les groupes sont aux prises avec une difficulté conceptuelle importante, il peut reprendre sa casquette d'enseignant traditionnel et provoquer une phase de « restructuration » à la classe toute entière. Il demande alors aux différents groupes de formuler des questions
- Il donne également un feedback à la fin de l'APP sur le fond (la qualité du travail effectué) et sur la forme (le fonctionnement du groupe).

Intérêts de la méthode

- Rendre les apprenants actifs (on apprend mieux en faisant soi-même qu'en écoutant le professeur)
- Basée sur ce que les pédagogues appellent le socio-constructivisme
- Permet une meilleure rétention à long terme des concepts mis à l'étude
- Développe des « compétences transverses » (travail en groupe, écoute, argumentation, ...)

Formalisation ; différence entre estimateur et estimation ; biais et convergence d'un estimateur ; comparaison de 2 estimateurs

Lorsque l'on doit traiter un problème d'estimation à partir d'un échantillon de taille n, il est intéressant au niveau de la formalisation de considérer que ces valeurs sont celles de n variables aléatoires X_i indépendantes. (La solution alternative aurait été de considérer n réalisations indépendantes de la même variable.)
En effet, quand on cherche à estimer un paramètre θ à partir d'un échantillon $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on va calculer une **estimation** θ_{est} de θ sous la forme :

$$\theta_{est} = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

où f est une fonction des n valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
Si l'on utilise le formalisme introduit plus haut, on peut considérer la variable aléatoire $\Theta_{est} = f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, que l'on appelle **estimateur** de θ.
Ainsi, l'estimation θ_{est} est la valeur prise par Θ_{est} quand $X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n$ c'est à dire en notre échantillon.

L'introduction de cette variable aléatoire Θ_{est} va nous permettre d'évaluer la qualité des différentes méthodes d'estimation :

- Puisque qu'on cherche à estimer θ, il est souhaitable que $E(\Theta_{est})$ soit proche de θ, en particulier quand l'échantillon est de grande taille (quand n tend vers l'infini). Si $E(\Theta_{est})$ est différent de θ, (on dit dans ce cas que l'estimateur est **biaisé**), il est alors en général possible de supprimer ce biais en effectuant de petites transformations sur Θ_{est}.
- Il est souhaitable que la variance $V(\Theta_{est})$ tende vers 0 quand la taille de l'échantillon augmente. En effet, si la variance est faible, cela signifie que l'estimation obtenue en notre échantillon s'écarte peu de la valeur réelle du paramètre à estimer. Un estimateur dont la variance tend vers zéro quand n tend vers l'infini est dit **convergent**.
- De deux estimateurs sans biais, le meilleur sera celui qui aura la variance la plus faible.

1ère méthode : méthode du moment d'ordre 1 (espérance)

C'est la méthode la plus intuitive pour estimer les paramètres inconnus.
Principe général : soit à estimer θ, paramètre de la loi commune des variables aléatoires X_i. En général, l'espérance de X_i est fonction de θ. En d'autres termes, il existe une fonction f telle que : $E(X_i) = f(\theta)$.

A priori, la moyenne de notre échantillon $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ est proche de $E(X_i)$. Il est donc raisonnable de choisir une estimation θ_{est} de θ telle que $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = f(\theta_{est})$.

Autrement dit, $\theta_{est} = f^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$. L'estimateur associé est donc : $\Theta_{est} = f^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$.

$2^{ème}$ méthode : méthode du maximum de vraisemblance

Le principe général est le suivant : dans le cas discret, on recherche la valeur du paramètre qui maximise la probabilité que le vecteur aléatoire $(X_1,X_2,...,X_n)$ soit égal au vecteur $(x_1,x_2,...,x_n)$ des échantillons. Dans le cas continu, par analogie, on cherche à maximiser la densité de probabilité du vecteur aléatoire $(X_1,X_2,...,X_n)$ au point $(x_1,x_2,...,x_n)$; dans le cas de variables aléatoires indépendantes, la densité de probabilité du vecteur aléatoire $(X_1,X_2,...,X_n)$ est égale au produit des densités de probabilités de chacune des composantes.

Loi uniforme :

Si $X_1 \dots X_n$ sont indépendants et dans loi de $U \sim (a,b)$

Dans l'estimateur de $E(X) = \frac{a+b}{2}$ par la méthode des ~~moment est~~

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

$$E(\hat{\theta}) = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{a+b}{2} = \frac{2}{n}\, n\, \frac{a+b}{2}$$

$$= b$$

En moyenne, notre estimateur est égal à θ, donc non biaisé.

$$E(X_i) \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$\frac{+}{2}$ test / $\frac{test}{2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

$$T_{est} = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$E(T_{est}) = E\left(\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$