APP1 Stats - Ensimag

17 Octobre 2018

Voir le fichier *app1.r* pour les commentaires associés.

I 1ère Méthode (Marius) : Méthode du moment d'ordre 1 (espérance)

I.1 Preuve que l'estimateur de Marius n'est pas biaisé (espérance)

Loi uniforme :

Si $X_1 ... X_n$ sont indépendants et de même loi $\tilde{U}(a, b)$, alors l'estimateur de $\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\Theta_{Marius}) &= \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X_i) \\
&= \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{a+b}{2} \\
&= \frac{2}{n}n\frac{a+b}{2} \\
&= b
\end{aligned} \tag{1}$$

En moyenne, notre estimateur est égal à θ, donc non biaisé.

I.2 Preuve que l'estimateur de Marius est convergent (variance)

$$\begin{aligned}
Var(\Theta_{Marius}) &= Var(\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i) \\
&= (\frac{2}{n})^2 Var(\sum_{i=1}^{n}X_i) \\
&= (\frac{2}{n})^2 \sum_{i=1}^{n}Var(X_i) \\
&= (\frac{2}{n})^2 \sum_{i=1}^{n}\frac{(b-a)^2}{12} \\
&= (\frac{2}{n})^2 n\frac{(b-a)^2}{12} \\
&= \frac{4}{n^2}n\frac{b^2}{12} = \frac{4nb^2}{n^2 12} \\
&= \frac{4b^2}{n12} = \frac{b^2}{3n} \\
&\simeq \frac{1}{n}
\end{aligned} \tag{2}$$

Donc l'estimateur est dit convergent. C'est un bon estimateur.

II 2ème Méthode (Jeannette) : Méthode du maximum de vraisemblance

On veut maximiser :

$$\begin{aligned} f_{(X_1 \dots X_n)} &= \prod_{i=1}^{n} f_{Xi} \\ &= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{b} = \frac{1}{b^n} \end{aligned} \tag{3}$$

On veut donc trouver le $\frac{1}{b^n}$ le plus grand possible. On souhaite alors trouver le b le plus petit possible, i.e. le maximum obtenu dans le jeu de données sans quoi on risque d'exclure des valeurs. Ceci correspond donc bien à la méthode d'estimation utilisée par Jeannette.

$$\Leftrightarrow max_{i=1}^{n}\{X_i\} = \Theta_{Jeannette}$$

On calcule la fonction de répartition :

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \mathbb{P}(max_{i=1}^{n} X_i \leq x) \\ &= \mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{n}\{X_i \leq x\}) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \leq x) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \frac{x-a}{b-a} \\ &= \prod_{i=1}^{n} \frac{x}{b} = \frac{x^n}{b^n} \\ f_X(x) &= F'_X(x) = n\frac{x^{n-1}}{b^n} \\ \text{Donc, on a : } \Theta_{Jeannette} = \mathbb{E}(X) &= \int_0^b x(n\frac{x^{n-1}}{b^n})dx \\ &= \int_0^b n\frac{x^n}{b^n}dx \\ &= \frac{n}{b^n}\int_0^b x^n dx \\ &= \frac{n}{b^n}[\frac{x^{n+1}}{n+1}]_0^b \\ &= \frac{n}{b^n}\frac{b^{n+1}}{n+1} \\ &= \frac{n}{n+1}b \end{aligned} \tag{4}$$

Le biais de notre estimateur est de $\frac{n}{n+1}$.