Name Gruppe 18	Klasse	Datum	Blatt 1	Seite 1
Christian Wassermann	Numerik 1	Abgabe bis 17.4.2018		Blatt

Nr 1

Zweite Methode ist genauer für alle Werte von p.

Vermutung: Bei Addition in Methode 1 geht "mehr" Genauigkeit verloren, als in der Division in Methode 2

Nr 2

Für größere n wird e Annäherung immer genauer.

Allerdings sinkt die Genauigkeit für große x stark ab.

Die Genauigkeit der beiden Verfahren ist gleich.

Nr 3

$$\int_{0,1}^{10} \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{0,1}^{10} = -\frac{1}{10} + \frac{1}{0,1} = -0,1 + 10 = 9,9$$

$$\int_1^2 \ln(x)\,dx = \left[x\cdot(\ln(x)-1)\right]_1^2$$

$$= 2\cdot(\ln(2)-1) - 1\cdot(\ln(1)-1)$$

$$= 2\cdot\ln(2) - 2 + 1$$

$$= 2\cdot\ln(2) - 1$$

$$\approx 0,386294361$$

NR:

$$\int \ln(x)\,dx = \int \underset{u'}{1}\cdot \underset{v}{\ln(x)}\,dx$$

$$= x\cdot\ln(x) - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

$$= x\cdot\ln(x) - \int 1\,dx$$

$$= x\cdot\ln(x) - x$$

$$= x\cdot(\ln(x)-1)$$

Für größere n (mehr Rechtecke, Trapeze) wird Annäherung immer genauer.

Die Genauigkeit der Trapez-Methode ist größer (8 bzw 9 Nachkommastellen), wobei die Rechteck-Methode (bei n = 10.000.000) nur 4 bzw. 7 genaue Nachkommastellen erzielt.

Name			Klasse	Datum		Seite 2
C. Wassermann						Blatt

Nr 5

a)

1)

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4} \cdot x^{-\frac{3}{2}}$$

$$f'''(x) = \frac{3}{8} \cdot x^{-\frac{5}{2}}$$

$$f^{(i)}(x) = (-1)^{i+1} \cdot \frac{(2i-2)!}{2^{2i-1}(i-1)!} \cdot x^{\frac{1}{2}-i}$$

$$a_i = \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x-x_0)^i$$

$$\frac{a_i}{a_{i-1}} = \frac{\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x-x_0)^i}{\frac{f^{(i-1)}(x_0)}{(i-1)!} (x-x_0)^{i-1}}$$

$$= \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x-x_0)^i \cdot \frac{(i-1)!}{f^{(i-1)}(x_0)} \cdot \frac{1}{(x-x_0)^{i-1}}$$

$$= \frac{f^{(i)}(x_0)}{f^{(i-1)}(x_0)} \cdot \frac{(x-x_0)}{i}$$

$$= \frac{(-1)^{i+1} \cdot \frac{(2i-2)!}{2^{2i-1}(i-1)!} \cdot x_0^{\frac{1}{2}-i}}{(-1)^i \cdot \frac{(2(i-1)-2)!}{2^{2(i-1)-1} \cdot (i-1-1)!} \cdot x_0^{\frac{1}{2}-(i-1)}} \cdot \frac{(x-x_0)}{i}$$

$$= -\frac{1}{x_0} \cdot \frac{(x-x_0)}{i} \frac{(2i-2)!}{2^{2i-1}(i-1)!} \cdot \frac{2^{2i-3} \cdot (i-2)!}{(2i-4)!}$$

$$= -\frac{\left(\frac{x}{x_0}-1\right)}{i} \cdot 2^{2i-3-2i+1} \frac{(2i-2)!}{(2i-4)!} \cdot \frac{(i-2)!}{(i-1)!}$$

Name			Klasse	Datum		Seite 3
C. Wassermann						Blatt

$$= -\frac{\left(\frac{x}{x_0}-1\right)}{i} \cdot \frac{1}{4} \cdot (2i-2)(2i-3) \cdot \frac{1}{(i-1)}$$

$$= -\left(\frac{x}{x_0}-1\right) \frac{(2i-2)(2i-3)}{4\, i \cdot (i-1)}$$

$$= -\left(\frac{x}{x_0}-1\right) \frac{2(i-1)(2i-3)}{4(i-1)\; i}$$

$$= -\left(\frac{x}{x_0}-1\right) \frac{2i-3}{2i}$$

$$= -\left(\frac{x}{x_0}-1\right) \left(1-\frac{3}{2i}\right)$$

$$= \left(\frac{x}{x_0}-1\right) \left(\frac{3}{2i}-1\right)$$

IA: $k=0$: $\quad y_0 = \sqrt{x_0} = \sum_{i=0}^{0} \frac{f^{0}(x_0)}{i!} (x-x_0)^i = \frac{\sqrt{x_0}}{1} \cdot 1 = \sqrt{x_0}$

IV $\quad y_{k-1} = y_{k-2} + a_{k-1} = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x-x_0)^i \quad$ für beliebiges, feste $n \geq 0$

$\quad$ mit $a_{k-1} = \left(\frac{3}{2(k-1)}-1\right)\left(\frac{x}{x_0}-1\right) a_{k-2}$

IB: $\quad y_k = y_{k-1} + a_k = \sum_{i=0}^{k} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x-x_0)^i$

$\quad$ mit $a_k = \left(\frac{3}{2k}-1\right)\left(\frac{x}{x_0}-1\right) a_{k-1}$

IS: $\quad y_k = y_{k-1} + a_k \overset{IV}{=} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x-x_0)^i + a_k$

$\quad$ (siehe oben: $a_k = \left(\frac{3}{2k}-1\right)\left(\frac{x}{x_0}-1\right) a_{k-1} = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$)

$$= \sum_{i=0}^{k-1} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x-x_0)^i + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x-x_0)^i \qquad \square \text{ q.e.d.}$$

Aus IA, IV, IB und IS folgt die Behauptung.

Name	Klasse	Datum	Seite 4
C. Wassermann			Blatt

Nr 5

a) 2)

		Abweichung für $k=10$
$x_0 = 1$	Benötigte Schritte: $k=3$	$\approx 0{,}0043$
$x_0 = 4$	Benötigte Schritte: $k=4$	$\approx 1{,}3990 \cdot 10^{-5}$

b)

$x_0 = 1$	Benötigte Schritte: $k=2$	$\approx 2{,}2204 \cdot 10^{-16}$
$x_0 = 4$	Benötigte Schritte: $k=2$	$\approx 2{,}2204 \cdot 10^{-16}$

ersten 15 Stellen stimmen überein

↳ genauer geht es bei FP doubles nicht

$\Longrightarrow$ Heron-Verfahren konvergiert schneller gegen den korrekten Wurzel-Wert