

Nr. 1

i	0	1	2	3
x_i	-1	0	1	3
y_i	-2	4	6	22

a) Lagrange

$$L_0(x) = \frac{x-0}{-1-0} \cdot \frac{x-1}{-1-1} \cdot \frac{x-3}{-1-3} = -x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) (x-1) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) (x-3)$$

$$= -\frac{1}{8} x (x-1) (x-3)$$

$$L_1(x) = \frac{x-(-1)}{0-(-1)} \cdot \frac{x-1}{0-1} \cdot \frac{x-3}{0-3} = (x+1) \cdot (-x) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) (x-3)$$

$$= \frac{1}{3} (x+1) (x-1) (x-3)$$

$$L_2(x) = \frac{x-(-1)}{1-(-1)} \cdot \frac{x-0}{1-0} \cdot \frac{x-3}{1-3} = \frac{1}{2} (x+1) \cdot x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) (x-3)$$

$$= -\frac{1}{4} x (x+1) (x-3)$$

$$L_3(x) = \frac{x-(-1)}{3-(-1)} \cdot \frac{x-0}{3-0} \cdot \frac{x-1}{3-1} = \frac{1}{4} (x+1) \cdot \frac{1}{3} x \cdot \frac{1}{2} (x-1)$$

$$= \frac{1}{24} x (x+1) (x-1)$$

$$p(x) = (-2) \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) x (x-1) (x-3) + 4 \cdot \frac{1}{3} (x+1) (x-1) (x-3)$$

$$+ 6 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) x (x+1) (x-3) + 22 \cdot \frac{1}{24} x (x+1) (x-1)$$

$$= \frac{1}{4} x (x-1) (x-3) + \frac{4}{3} (x+1) (x-1) (x-3)$$

$$- \frac{3}{2} x (x+1) (x-3) + \frac{11}{12} x (x+1) (x-1)$$

b) Newton

 λ_i j_i -1 -2

$$0 \quad 4 \rightarrow \frac{4 - (-2)}{0 - (-1)} = \frac{6}{1} = 6$$

$$1 \quad 6 \rightarrow \frac{6 - 4}{1 - 0} = \frac{2}{1} = 2 \rightarrow \frac{2 - 6}{1 - (-1)} = -\frac{4}{2} = -2$$

$$3 \quad 22 \rightarrow \frac{22 - 6}{3 - 1} = \frac{16}{2} = 8 \rightarrow \frac{8 - 2}{3 - 0} = \frac{6}{3} = 2 \rightarrow \frac{2 - (-2)}{3 - (-1)} = \frac{4}{4} = 1$$

$$p_0(x) = -2$$

$$p_1(x) = -2 + 6(x - (-1))$$

$$= -2 + 6x + 6 = 4 + 6x$$

$$p_2(x) = 4 + 6x + (-2)(x - (-1))(x - 0)$$

$$= 4 + 6x - 2(x + 1)x$$

$$= 4 + 6x - 2x^2 - 2x$$

$$= 4 + 4x - 2x^2$$

$$p_3(x) = 4 + 4x - 2x^2 + 1 \cdot (x - (-1))(x - 0)(x - 1)$$

$$= 4 + 4x - 2x^2 + (x + 1)x(x - 1)$$

Nr 2)

b)

Die Interpolationspolynome approximieren f gut in Intervall $[-2; 2]$.

Außerhalb des Intervalls sind starke Oscillationen festzustellen (besonders bei höheren Polynomgraden), sodass hier die Annäherung von f unbrauchbar ist.

c)

Bei der Wahl von nicht äquidistanten Stützpunkten entstehen gute Näherungen von f auf dem ganzen Intervall $[-5; 5]$. Hierbei ist zu bemerken, dass höhere Polynomgrade bessere Approximationen zur Folge haben (anders als bei a)).