Name Gruppe 18	Klasse	Datum WA05	Seite 1
Christian Wassermann	Numerik 1	Abgabe bis: 15.5.2018	Blatt

Nr. 1)

$$A \cdot x = b$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

a)

Jacobi

$$A = D - E - F$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_J = D^{-1}(E+F) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Spektralradius B_J:

$$\det(B_J - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\lambda & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$= -\lambda \cdot \det \begin{pmatrix} -\lambda & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$= -\lambda \cdot \left(\lambda^2 - \frac{1}{4}\right)$$

$$= -\lambda \cdot \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \stackrel{!}{=} 0$$

Eigenwerte:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = \frac{1}{2} \\ \lambda_3 = -\frac{1}{2} \end{array}\right\} \quad \rho(B_J) = \max\{|0|; |\tfrac{1}{2}|; |-\tfrac{1}{2}|\} = \frac{1}{2} < 1$$

$\Rightarrow$ Jacobi konvergiert

Name C. Wassermann | Klasse | Datum | Seite 2 | Blatt

Gauß-Seidel

$$A = D - E - F$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_{gs} = (D-E)^{-1} F$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

NR: Invertierung $(D-E)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \downarrow -\tfrac{1}{2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} 1:2 \\ \\ 1:2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Spektralradius B_{gs}:

$$\det(B_{gs} - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= -\lambda \cdot \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= -\lambda \cdot \left(-\lambda \cdot \left(\tfrac{1}{4} - \lambda\right)\right)$$

$$= \lambda^2 \left(\tfrac{1}{4} - \lambda\right) \overset{!}{=} 0$$

Eigenwerte: $\left.\begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = \frac{1}{4} \end{array}\right\}$ $\rho(B_{gs}) = \max\{|0|; |\tfrac{1}{4}|\} = \tfrac{1}{4} < 1$

$\Rightarrow$ Gauß-Seidel konvergiert

Name C. Wassermann | Klasse | Datum | Seite 3 | Blatt

b)

Jacobi:

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{2} \cdot (4 - 1 \cdot 0) = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$$

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{1} \cdot (0 - 0) = 0$$

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{2} \cdot (5 - 1 \cdot 0) = \frac{1}{2} \cdot 5 = \frac{5}{2}$$

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5/2 \end{pmatrix}$$

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{2} \left(4 - 1 \cdot \frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2} \quad \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$$

$$x_2^{(2)} = \frac{1}{1} \cdot (0 - 0) = 0$$

$$x_3^{(2)} = \frac{1}{2} \quad (5 - 1 \cdot 2) = \frac{1}{2} \quad 3 = \frac{3}{2}$$

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 0 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

$$x_1^{(3)} = \frac{1}{2} \left(4 - 1 \cdot \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{4}$$

$$x_2^{(3)} = 0$$

$$x_3^{(3)} = \frac{1}{2} \left(5 - 1 \cdot \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{17}{4} = \frac{17}{8}$$

$$x^{(3)} = \begin{pmatrix} 5/4 \\ 0 \\ 17/8 \end{pmatrix}$$

$$x_1^{(4)} = \frac{1}{2} \left(4 - 1 \cdot \frac{17}{8}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{15}{8} = \frac{15}{16}$$

$$x_2^{(4)} = 0$$

$$x_3^{(4)} = \frac{1}{2} \left(5 - 1 \cdot \frac{5}{4}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{15}{4} = \frac{15}{8}$$

$$x^{(4)} = \begin{pmatrix} 15/16 \\ 0 \\ 15/8 \end{pmatrix}$$

Name	Klasse	Datum	Seite 4
C. Wassermann			Blatt

Gauß-Seidel:

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{2} \cdot (4 - 1 \cdot 0) = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$$

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{1} \cdot (0 - 0) = 0$$

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{2} \cdot (5 - 1 \cdot 2) = \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2}$$

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{2} \left(4 - 1 \cdot \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{4}$$

$$x_2^{(2)} = 0$$

$$x_3^{(2)} = \frac{1}{2} \left(5 - 1 \cdot \frac{5}{4}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{15}{4} = \frac{15}{8}$$

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 5/4 \\ 0 \\ 15/8 \end{pmatrix}$$

$$x_1^{(3)} = \frac{1}{2} \left(4 - 1 \cdot \frac{15}{8}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{17}{8} = \frac{17}{16}$$

$$x_2^{(3)} = 0$$

$$x_3^{(3)} = \frac{1}{2} \left(5 - 1 \cdot \frac{17}{16}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{63}{16} = \frac{63}{32}$$

$$x^{(3)} = \begin{pmatrix} 17/16 \\ 0 \\ 63/32 \end{pmatrix}$$

$$x_1^{(4)} = \frac{1}{2} \left(4 - 1 \cdot \frac{63}{32}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{65}{32} = \frac{65}{64}$$

$$x_2^{(4)} = 0$$

$$x_3^{(4)} = \frac{1}{2} \left(5 - 1 \cdot \frac{65}{64}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{255}{64} = \frac{255}{128}$$

$$x^{(4)} = \begin{pmatrix} 65/64 \\ 0 \\ 255/128 \end{pmatrix}$$

Name: C. Wassermann | Klasse | Datum | Seite 5 | Blatt

4)

Eigenwerte weichen von der exakten Lösung um 4 - 7 Nachkommastellen ab:

- minimale absolute Differenz zur exakten Lösung $\approx 5{,}8755 \cdot 10^{-8}$
- maximale absolute Differenz zur exakten Lösung $\approx 3{,}7585 \cdot 10^{-5}$

Die Genauigkeit kann jedoch durch die Wahl eines kleineren Epsilons erhöht werden.

Anmerkung zu 2 b)

für Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ $\quad a_{ij} = \begin{cases} 0 & j > i \\ 1 & j = i \\ i+j & j < i \end{cases}$

erhalte ich (trotz einer meines Erachtens richtigen Implementierung) falsche Ergebnisse. Wenn ich allerdings die Matrix

$A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ $\quad a_{ij} = \begin{cases} 0 & j < i \\ 1 & j = i \\ i+j & j > i \end{cases}$

wähle, erhalte ich das in der Aufgabenstellung beschriebene korrekte Ergebnis $(1, 0, \dots, 0)^T$.

Deshalb ist im Python-Code die zweite Version der Matrix A implementiert.