

Name	Gruppe 18	Klasse	Datum	Blatt 2	Seite 1
Christian Wassermann		Numerik 1	Abgabe bis 24.4.2018		Blatt

1)

Basic Tests mit ints : exakte Ergebnisse

Accuracy Tests mit FP's : Mit steigender Anzahl an Dimensionen wird Lösung immer ungenauer, wobei für $n=5$ die FP-Fehler vernachlässigbar sind (11 Nachkommastellen genau) ist für $n=20$ das Ergebnis unbrauchbar, da selbst ein Runden auf Integer ein falsches Ergebnis produziert.

2)

a)

$$\hat{A} = A + uv^T \text{ ist singular } (\Leftrightarrow) 1 + v^T A^{-1} u = 0$$

$$(\Leftrightarrow) \hat{A} = A + uv^T \text{ ist regulär } (\Leftrightarrow) 1 + v^T A^{-1} u \neq 0$$

Hinrichtung " \Rightarrow ":Angenommen aus $A + uv^T$ regulär folgt nicht $1 + v^T A^{-1} u \neq 0$

$$\text{Annahme: } 1 + v^T A^{-1} u = 0$$

$$A A^{-1} u (1 + v^T A^{-1} u) = A \cdot A^{-1} u \cdot 0$$

$$(A A^{-1} u + u v^T A^{-1} u) = \vec{0}$$

$$\underbrace{(A + uv^T)}_{\text{regulär}} \underbrace{A^{-1} u}_{\text{regulär}} \underbrace{1}_{\neq 0} = \vec{0}$$

 $\neq \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \text{Annahme war falsch, d.h.}$

$$A + uv^T \text{ regulär} \Rightarrow 1 + v^T A^{-1} u \neq 0$$

✓

Rückrichtung " \Leftarrow ":Damit $A + uv^T$ regulär ist, muss es eine

$$\text{Inverse } (A + uv^T)^{-1} \text{ geben mit: } (A + uv^T) \cdot (A + uv^T)^{-1} = I$$

$$(\text{Aus der Sherman-Morrison-Formel}) \text{ teste } (A + uv^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1} uv^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1} u} \quad \text{erlaube, da } 1 + v^T A^{-1} u \neq 0$$

$$(A + uv^T) \left(A^{-1} - \frac{A^{-1} uv^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1} u} \right) = I$$

$$A A^{-1} + u v^T A^{-1} - \frac{A A^{-1} u v^T A^{-1} + u v^T A^{-1} u v^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1} u} = I$$

$$I + u v^T A^{-1} - \frac{u (1 + v^T A^{-1} u) v^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1} u} = I$$

$$I = I \quad \checkmark$$

Nr 2

b)

$$\hat{A} = A + u v^T$$

$$\hat{A}^{-1} = A^{-1} - \alpha A^{-1} u v^T A^{-1}$$

$$\alpha = \frac{1}{1 + v^T A^{-1} u}$$

$$(A + u v^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1} u v^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1} u}$$

$$I = (A + u v^T) \left(A^{-1} - \frac{A^{-1} u v^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1} u} \right)$$

$$I = A A^{-1} - A \frac{A^{-1} u v^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1} u} + u v^T A^{-1} - u v^T \frac{A^{-1} u v^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1} u}$$

$$I = I - I \frac{u v^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1} u} + u v^T A^{-1} - u v^T \frac{A^{-1} u v^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1} u}$$

$$0 = - \frac{u v^T A^{-1} + u v^T A^{-1} u v^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1} u} + u v^T A^{-1}$$

$$0 = - \frac{u (1 + v^T A^{-1} u) v^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1} u} + u v^T A^{-1}$$

$$0 = - u v^T A^{-1} + u v^T A^{-1}$$

$$0 = 0$$



3)

$$n=4$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} -1/25 \\ -1/25 \\ -1/25 \\ -1/25 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & \sqrt{\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & \sqrt{\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1/\sqrt{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & \sqrt{\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1/\sqrt{2} & \sqrt{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$