Name	Gruppe 18	Klasse	Datum	Blatt 2	Seite 1
Christian Wassermann		Numerik 1	Abgabe bis 24.4.2018		Blatt

1)

Basic Tests mit ints : exakte Ergebnisse

Accuracy Tests mit FPs : Mit steigender Anzahl an Dimensionen wird Lösung immer ungenauer, wobei für n = 5 die FP-Fehler annehmbar sind (11 Nachkommastellen genau) ist für n = 20 das Ergebnis unbrauchbar, da selbst ein Runden auf integer ein falsches Ergebnis produziert.

Name	Klasse	Datum	Seite 2
C. Wassermann			Blatt

2)

a)

$$\hat{A} = A + uv^T \text{ ist singulär} \iff 1 + v^T A^{-1} u = 0$$

$$\iff \quad \hat{A} = A + uv^T \text{ ist regulär} \iff 1 + v^T A^{-1} u \neq 0$$

Hinrichtung "$\Rightarrow$":

$1 + v^T A^{-1} u$ genau dann regulär, wenn

$(1 + v^T A^{-1} u)\, x = \vec{0}$ nur für $x = \vec{0}$ gilt

$$A A^{-1} u (1 + v^T A^{-1} u) x = \vec{0}$$

$$(A A^{-1} u + u v^T A^{-1} u)\, x = \vec{0}$$

$$\underbrace{(A + uv^T)}_{\text{regulär}} \underbrace{A^{-1}}_{\text{regulär}} u x = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad u = \vec{0} \quad \vee \quad x = \vec{0}$$

Da aber auch $(1 + v^T A^{-1} u)\, x = \vec{0}$

$x + v^T A^{-1} u x = \vec{0}$

gilt, folgt, dass $x = \vec{0}$ sein muss. Daraus folgt, dass $1 + v^T A^{-1} u$ regulär ist.

Rückrichtung "$\Leftarrow$":

Damit $A + uv^T$ regulär ist, muss es eine Inverse $(A + uv^T)^{-1}$ geben mit: $(A + uv^T) \cdot (A + uv^T)^{-1} = I$

(Aus der Sherman-Morrison-Formel) Teste $(A + uv^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1} u v^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1} u}$

$$(A + uv^T)\left(A^{-1} - \frac{A^{-1} u v^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1} u}\right) = I$$

$$A A^{-1} + u v^T A^{-1} - \frac{A A^{-1} u v^T A^{-1} + u v^T A^{-1} u v^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1} u} = I$$

$$I + u v^T A^{-1} - \frac{u (1 + v^T A^{-1} u) v^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1} u} = I$$

$$I = I \quad \checkmark$$

Name: C. Wassermann | Klasse | Datum | Seite 3 | Blatt

Nr 2

b)

$$\hat{A} = A + u v^T$$

$$\hat{A}^{-1} = A^{-1} - \alpha A^{-1} u v^T A^{-1} \qquad \alpha = \frac{1}{1 + v^T A^{-1} u}$$

$$(A + u v^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1} u v^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1} u}$$

$$I = (A + u v^T) \left(A^{-1} - \frac{A^{-1} u v^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1} u} \right)$$

$$I = A A^{-1} - A \frac{A^{-1} u v^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1} u} + u v^T A^{-1} - u v^T \frac{A^{-1} u v^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1} u}$$

$$I = I - I \frac{u v^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1} u} + u v^T A^{-1} - u v^T \frac{A^{-1} u v^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1} u}$$

$$0 = - \frac{u v^T A^{-1} + u v^T A^{-1} u v^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1} u} + u v^T A^{-1}$$

$$0 = - \frac{u (1 + v^T A^{-1} u) v^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1} u} + u v^T A^{-1}$$

$$0 = - u v^T A^{-1} + u v^T A^{-1}$$

$$0 = 0 \quad \checkmark$$

Name			Klasse	Datum		Seite 4
C. Wassermann						Blatt

3)

$n = 4$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -1/25 \\ -1/25 \\ -1/25 \\ -1/25 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$