Name	Gruppe 18	Klasse	Datum	HA07	Seite 1
Christian Wassermann		Numerik 1	Abgabe bis 29.5.2018		Blatt

Nr. 1

i	0	1	2	3
x_i	-1	0	1	3
y_i	-2	4	6	22

a) Lagrange

$$L_0(x) = \frac{x-0}{-1-0} \cdot \frac{x-1}{-1-1} \cdot \frac{x-3}{-1-3} = -x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)(x-1) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot (x-3)$$

$$= -\frac{1}{8}\, x\, (x-1)\,(x-3)$$

$$L_1(x) = \frac{x-(-1)}{0-(-1)} \cdot \frac{x-1}{0-1} \cdot \frac{x-3}{0-3} = (x+1) \cdot (-(x-1)) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)(x-3)$$

$$= \frac{1}{3}\,(x+1)\,(x-1)\,(x-3)$$

$$L_2(x) = \frac{x-(-1)}{1-(-1)} \cdot \frac{x-0}{1-0} \cdot \frac{x-3}{1-3} = \frac{1}{2}(x+1) \cdot x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)(x-3)$$

$$= -\frac{1}{4}\, x\, (x+1)\,(x-3)$$

$$L_3(x) = \frac{x-(-1)}{3-(-1)} \cdot \frac{x-0}{3-0} \cdot \frac{x-1}{3-1} = \frac{1}{4}(x+1) \cdot \frac{1}{3}x \cdot \frac{1}{2}(x-1)$$

$$= \frac{1}{24}\, x\, (x+1)\,(x-1)$$

$$p(x) = (-2) \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) x\,(x-1)(x-3) + 4 \cdot \frac{1}{3}(x+1)(x-1)(x-3)$$
$$+ 6 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) x\,(x+1)(x-3) + 22 \cdot \frac{1}{24}\, x\,(x+1)(x-1)$$

$$= \frac{1}{4}\, x\,(x-1)(x-3) + \frac{4}{3}(x+1)(x-1)(x-3)$$
$$- \frac{3}{2}\, x\,(x+1)(x-3) + \frac{11}{12}\, x\,(x+1)(x-1)$$

Name	Klasse	Datum		Seite 2
C. Wassermann				Blatt

b) Newton

x_i	y_i			
-1	-2			
0	4	$\frac{4-(-2)}{0-(-1)} = \frac{6}{1} = 6$		
1	6	$\frac{6-4}{1-0} = \frac{2}{1} = 2$	$\frac{2-6}{1-(-1)} = -\frac{4}{2} = -2$	
3	22	$\frac{22-6}{3-1} = \frac{16}{2} = 8$	$\frac{8-2}{3-0} = \frac{6}{3} = 2$	$\frac{2-(-2)}{3-(-1)} = \frac{4}{4} = 1$

$p_0(x) = -2$

$p_1(x) = -2 + 6(x-(-1))$

$= -2 + 6x + 6 = 4 + 6x$

$p_2(x) = 4 + 6x + (-2)(x-(-1))(x-0)$

$= 4 + 6x - 2(x+1)x$

$= 4 + 6x - 2x^2 - 2x$

$= 4 + 4x - 2x^2$

$p_3(x) = 4 + 4x - 2x^2 + 1 \cdot (x-(-1))(x-0)(x-1)$

$= 4 + 4x - 2x^2 + (x+1)x(x-1)$

Name	Klasse	Datum		Seite 3
C. Wassermann				Blatt

Nr 2)

b)

Die Interpolationspolynome approximieren f gut im Intervall $[-2; 2]$. Außerhalb des Intervalls sind starke Oszillationen festzustellen (besonders bei höheren Polynomgraden), sodass hier die Annäherung von f unbrauchbar ist.

c)

Bei der Wahl von nicht äquidistanten Stützpunkten entstehen gute Näherungen von f auf dem ganzen Intervall $[-5; 5]$. Hierbei ist zu bemerken, dass höhere Polynomgrade bessere Approximationen zur Folge haben (anders als bei a)).

Name: C. Wassermann | Klasse | Datum | Seite 4 | Blatt

Nr 3)

Approximation von f^{-1}, um Nullstelle über $f^{-1}(0) = x$ zu berechnen

Gegebene Punkte: (x_0, y_0)

(x_1, y_1)

werden von den Komponenten her vertauscht um f^{-1} anzunähern:

(y_0, x_0)

(y_1, x_1)

Iteration: Punkte: (y_k, x_k)

(y_{k+1}, x_{k+1})

→ Interpolationspolynom durch Punkte bilden (hier: Gerade)

$$q(y) = \frac{x_{k+1} - x_k}{y_{k+1} - y_k} (y - y_k) + x_k$$

$$x_{k+2} = q(0) = \frac{x_{k+1} - x_k}{y_{k+1} - y_k} (0 - y_k) + x_k$$

$$\left. = x_k - y_k \cdot \frac{x_{k+1} - x_k}{y_{k+1} - y_k} \right\} \text{Approximation der Nullstelle}$$

neue Punkte: (y_{k+1}, x_{k+1})

$(y_{k+2} = f(x_{k+2}), x_{k+2})$

Name	Klasse	Datum	Seite 5
C. Wassermann			Blatt

Vergleich zu Sekantenverfahren (vgl. Skript):

Punkte: $(x_{k-2}, f(x_{k-2}) = y_{k-2})$

$(x_{k-1}, f(x_{k-1}) = y_{k-1})$

Iteration:

$$x_k = x_{k-2} - \frac{x_{k-1} - x_{k-2}}{y_{k-1} - y_{k-2}} y_{k-2}$$ } Approximation der Nullstelle

$\Rightarrow$ Stimmt mit obigem Verfahren überein (angepasste Indizes)

$\hookrightarrow$ gleiche Approximation + gleicher Iterationsschritt