

Name	Klasse	Gruppe 18	Klasse	Datum	HA69	Seite	1
Christian Wassermann			Numerik 1		Abgabe bis: 18.6.2018		
					Blatt		

1)

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

a)

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = [\arctan(x)]_0^1 = \arctan(1) \approx 0,7853981634$$

Name	Klasse	Datum	Seite
C. Wiesemann			2
			Blatt
2)			
$x_0, \dots, x_n \in [-1, 1]$			
$\beta_0, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$			
$\int_{-1}^1 p(x) dx = \sum_{i=0}^n \beta_i p(x_i)$			
$\int_{-1}^1 p(x) dx = \text{Interpolation-Polyynom durch } x_i$			
\hookrightarrow Lagrange-Polygone (existiert, da Stützstellen x_i paarweise verschieden sind)			
$\int_{-1}^1 p(x) dx = \int_{-1}^1 \sum_{i=0}^n p(x_i) \cdot L_i(x) dx$			
$= \sum_{i=0}^n p(x_i) \cdot \int_{-1}^1 L_i(x) dx$			
$= \sum_{i=0}^n p(x_i) \cdot \beta_i$		mit $\beta_i = \int_{-1}^1 L_i(x) dx$	

Name	Klasse	Datum	Seite
C. Wassermann			3
Blatt			
3) 1			
$\int_{-1}^1 p(x) dx = \sum_{i=0}^{2n+1} \beta_i p(x_i)$ $= \sum_{i=0}^{2n+1} \beta_i (q(x_i) \cdot P_{n+1}(x_i) + r(x_i))$ $= \sum_{i=0}^n \beta_i (\underbrace{q(x_i) \cdot P_{n+1}(x_i)}_{=0} + r(x_i)) + \sum_{i=n+1}^{2n+1} \beta_i (q(x_i) \cdot P_{n+1}(x_i) + r(x_i))$ $= \underbrace{\sum_{i=0}^n \beta_i r(x_i)}_{\text{Integration von Polynom vom Grad } n} + \underbrace{\sum_{i=n+1}^{2n+1} \beta_i p(x_i)}_{\text{Integration von Polynom vom Grad } n} \\ (2n+1 - (n+1) = n)$			
\Rightarrow exakte Berechnung der beiden Polynome mit $n+1$ Stützstellen (siehe 2)			
$\Rightarrow \int_{-1}^1 p(x) dx$ wird exakt berechnet			

Name	Klasse	Datum	Seite
C. Classmann			4
			Blatt

4) $\int_0^h f(x) dx$

$$\ell_0 = h :$$

$$T_0 = \frac{h}{2} (f(0) + f(h))$$

$$\ell_1 = \frac{h}{2} :$$

$$T_1 = \frac{h}{2} (f(0) + 2f\left(\frac{h}{2}\right) + f(h))$$

$$= \frac{h}{4} (f(0) + 2f\left(\frac{h}{2}\right) + f(h))$$

Extrapolation:

$$A \cdot \alpha = e$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ h^2 & \ell_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{h^2}{4} & | & 1 \\ h^2 & \frac{h^2}{4} & | & 0 \end{pmatrix} \downarrow -h^2 \cdot I$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{h^2}{4} - h^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -h^2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{h^2}{4} - h^2\right) \alpha_2 = -h^2$$

$$-\frac{3}{4} h^2 \alpha_2 = -h^2$$

$$\alpha_2 = \frac{4}{3}$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 + \frac{4}{3} = 1$$

$$\alpha_1 = -\frac{1}{3}$$

Name	Klasse	Datum	Seite
C. Wassermann			5
			Blatt

$$T = -\frac{1}{3} T_0 + \frac{4}{3} \cdot T_1$$

$$= -\frac{1}{3} \cdot \frac{h}{2} (f(0) + f(h)) + \frac{4}{3} \left(\frac{h}{4} (f(0) + 2f(\frac{h}{2}) + f(h)) \right)$$

$$= -\frac{h}{6} f(0) - \frac{h}{6} f(h) + \frac{h}{3} f(0) + \frac{2h}{3} f(\frac{h}{2}) + \frac{h}{3} f(h)$$

$$= \frac{h}{6} f(0) + \frac{2h}{3} f(\frac{h}{2}) + \frac{h}{6} f(h)$$

$$= h \left(\frac{1}{6} f(0) + \frac{2}{3} f(\frac{h}{2}) + \frac{1}{6} f(h) \right)$$

$$= (h-a) \left(\frac{1}{6} f(a) + \frac{4}{6} f(\frac{a+h}{2}) + \frac{1}{6} f(h) \right)$$

$$= (h-a) \left(\frac{1}{6} f(a) + \frac{4}{6} f(\frac{a+h}{2}) + \frac{1}{6} f(h) \right)$$

C, Simpson-Regel

Name	Klasse	Datum	Seite
C. Wassermann			6

6)

a)

Nach Satz gilt für den Fehler der Näherung mit Trapez-Regel T :

$$E = \int_{a_i}^{b_i} f(x) dx - T = -\frac{1}{12} h^3 f''(\xi) \quad \xi \in [a_i, b_i] \quad h = b_i - a_i$$

f'' nicht bekannt

Trapez-Regel auf beiden Hälften anwenden

$$m_i = \frac{a_i + b_i}{2}$$

$$E_e = \sum_{a_i}^{m_i} f(x) dx - T_e = -\frac{1}{12} \left(\frac{h}{2}\right)^3 f''(\xi_e) \quad \xi_e \in [a_i, m_i]$$

$$E_r = \sum_{m_i}^{b_i} f(x) dx - T_r = -\frac{1}{12} \left(\frac{h}{2}\right)^3 f''(\xi_r) \quad \xi_r \in [m_i, b_i]$$

neue genauere Näherung: $\tilde{T} = T_e + T_r$ für $\int_{a_i}^{b_i} f(x) dx$

$$\begin{aligned} \tilde{E} &= \int_{a_i}^{b_i} f(x) dx - \tilde{T} = E_e + E_r \\ &= -\frac{1}{12} \left(\frac{h}{2}\right)^3 (f''(\xi_e) + f''(\xi_r)) \end{aligned}$$

$$\text{Annahme: } f''(\xi_e) \approx f''(\xi_r) \approx f''(\xi)$$

$$\approx -\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{4} \cdot h^3 f''(\xi)$$

$$= \frac{1}{4} E$$

$$\tilde{T} - T = E - \tilde{E} \approx \frac{3}{4} E \approx 3\tilde{E}$$

$$\Rightarrow F = \frac{4}{3} |\tilde{T} - T| \approx E$$

$$\text{bzw. } \tilde{F} = \frac{1}{3} \cdot |\tilde{T} - T| \approx \tilde{E}$$

Name	Klasse	Datum	Seite
C. Wassermann			7
			Blatt

b)

$$\int_1^5 \frac{1}{x} dx = \left[\ln(x) \right]_1^5 = \ln(5) - \ln(1) = \ln(5)$$

$$= 1,60943791243$$

$$T_n^5 = \frac{4}{2} \left(1 + \frac{1}{5} \right) = 2 \cdot \frac{6}{5} = \frac{12}{5} = 2,4$$

$$\tilde{F}_1^5 = \frac{\left| \frac{4}{2} \left(1 + 2 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right) - \frac{12}{5} \right|}{3} = \frac{\left| \frac{28}{15} - \frac{36}{15} \right|}{3} = \frac{8}{15} \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{45} = 0,17$$

$$T_1^3 = \frac{2}{2} \left(1 + \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{3}$$

$$T_3^5 = \frac{2}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5} \right) = \frac{8}{15}$$

$$\tilde{F}_1^2 = \frac{\left| \frac{2}{2} \left(1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) - \frac{4}{3} \right|}{3} = \frac{\left| \frac{7}{6} - \frac{4}{3} \right|}{3} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{18} = 0,05$$

$$\tilde{F}_3^5 = \frac{\left| \frac{2}{2} \left(\frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right) - \frac{8}{15} \right|}{3} = \frac{\left| \frac{1}{2} \left(\frac{10}{20} + \frac{15}{20} + \frac{6}{20} \right) - \frac{8}{15} \right|}{3} = \frac{\left| \frac{31}{60} - \frac{32}{60} \right|}{3} = \frac{1}{60} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{180} = 0,0055$$

$$\tilde{F}_3^5 < 0,02$$

$$T_1^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{4}$$

$$T_2^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{5}{12}$$

$$\tilde{F}_1^2 = \frac{\left| \frac{1}{2} \left(1 + 2 \cdot \frac{1}{1,5} + \frac{1}{2} \right) - \frac{5}{12} \right|}{3} = \frac{\left| \frac{1}{2} \left(1 + \frac{4}{3} + \frac{1}{2} \right) - \frac{5}{12} \right|}{3} = \frac{\left| \frac{17}{24} - \frac{18}{24} \right|}{3} = \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{72} = 0,0138$$

$$\tilde{F}_1^2 < 0,02$$

Name	Klasse	Datum	Seite
C. Claassen			8
			Blatt

$$\begin{aligned}
 \tilde{F}_2 &= \left| \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{12} + \frac{1}{2} \right) - \frac{5}{12} \right| \\
 &= \left| \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{4}{12} + \frac{1}{2} \right) - \frac{5}{12} \right| \\
 &= \left| \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{15}{30} + \frac{24}{30} + \frac{10}{30} \right) - \frac{5}{12} \right| \\
 &= \left| \frac{\frac{49}{30}}{3} - \frac{50}{360} \right| = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{360} = 0,002\overline{7}
 \end{aligned}$$

$$\tilde{F}_2 < 0,02$$

$$\int_1^5 \frac{1}{x} dx \approx T_1^2 + T_2^3 + T_3^5$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{5}{12} + \frac{8}{15} = \frac{17}{10} = 1,7$$

Fehler zu exakter Lösung: 0,03056208752