| Name Gruppe 18 | Klasse | Datum | HA 11 | Seite 1 |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Christian Wassermann | Numerik | Abgabe bis: 26.6.2018 | | Blatt |

1)

$$f(x_1,x_2) = (\sin(x_1) - x_2)^2 + (e^{-x_2} - x_1)^2$$

$$= (\sin(x_1))^2 - 2x_2 \cdot \sin(x_1) + x_2^2 + e^{-2x_2} - 2x_1 e^{-x_2} + x_1^2$$

$$f'(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} 2 \cdot \cos(x_1) \cdot \sin(x_1) - 2x_2 \cdot \cos(x_1) - 2e^{-x_2} + 2x_1 \\ -2\sin(x_1) + 2x_2 - 2e^{-2x_2} + 2x_1 e^{-x_2} \end{pmatrix}$$

$$f''(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} -2\sin^2(x_1) + 2\cos^2(x_1) + 2x_2\sin(x_1) + 2 & -2\cos(x_1) + 2e^{-x_2} \\ -2\cos(x_1) + 2e^{-x_2} & 2 + 4e^{-2x_2} - 2x_1 e^{-x_2} \end{pmatrix}$$

Name: C. Wassermann

Seite 2

2)

a)

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2 + (x_1 + x_2)^2 + x_1$$
$$= x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + x_1$$
$$= 2x_1^2 + 2x_2^2 + x_1$$

$$f'(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 4x_1 + 1 \\ 4x_2 \end{pmatrix}$$

$$f''(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

i) über $\mathbb{R}^2$ $\quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$$f'(x_1, x_2) \overset{!}{=} 0$$

$$0 = 4x_1 + 1 \iff x_1 = -\frac{1}{4}$$
$$0 = 4x_2 \iff x_2 = 0$$

$$\det\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 16 > 0 \quad \wedge \quad 4 > 0$$

$\Rightarrow$ lokales Minimum bei $x_1 = -\frac{1}{4} \wedge x_2 = 0$

Da nur ein Extremum vorliegt, ist $(x_1, x_2) = (-\frac{1}{4}, 0)$ ein globales Minimum der Funktion $f$

ii) über Einheitskreis $\quad \Omega = \{x \mid x \in \mathbb{R}^2, \|x\|_2 \leq 1\}$

globales Minimum : $(-\frac{1}{4}, 0)$

$$\left\| \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_2 = \sqrt{\frac{1}{16} + 0} = \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4} \leq 1$$

$\Rightarrow$ Da das globale Minimum in $\Omega$ liegt, minimiert $(x_1, x_2) = (-\frac{1}{4}, 0)$ die Funktion $f$ über dem Einheitskreis.

| Name | Klasse | Datum | Seite 3 |
|---|---|---|---|
| C. Wassermann | | | Blatt |

b)

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2 + (x_1 + x_2)^2 + 8x_2$$

$$= x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 8x_2$$

$$= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 8x_2$$

$$f'(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 4x_1 \\ 4x_2 + 8 \end{pmatrix}$$

$$f''(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

i) über $\mathbb{R}^2$ $\quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$$f'(x_1, x_2) \overset{!}{=} 0$$

$$0 = 4x_1 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 0$$

$$0 = 4x_2 + 8 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = -2$$

$$\det\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 16 > 0 \quad \wedge \quad 4 > 0$$

$\Rightarrow$ lokales Minimum bei $x_1 = 0 \wedge x_2 = -2$

Da nur ein Extremum vorliegt, ist $(x_1, x_2) = (0, -2)$ ein globales Minimum der Funktion $f$.

ii) über Einheitskreis $\Omega = \{x \mid x \in \mathbb{R}^2, \|x\|_2 \leq 1\}$

globales Minimum: $(0, -2)$

$$\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\|_2 = \sqrt{0+4} = \sqrt{4} = 2 > 1$$

$\Rightarrow$ globales Minimum liegt nicht in $\Omega$

Untersuchen des Randes der Nebenbedingung

Name C. Wassermann | Klasse | Datum | Seite 4 | Blatt

Nebenbedingung für Rand:

$$g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$$

$$g'(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$$

$g'(x_1, x_2) \overset{!}{=} 0$ erfüllt für $(x_1, x_2) = (0, 0)$

$g(0,0) = -1 \neq 0$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ muss nicht gesondert betrachtet werden

$$L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda \cdot g(x_1, x_2)$$
$$= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 8x_2 + \lambda\,(x_1^2 + x_2^2 - 1)$$

$$L'(x_1, x_2, \lambda) = \begin{pmatrix} 4x_1 + 2\lambda x_1 \\ 4x_2 + 8 + 2\lambda x_2 \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 \end{pmatrix}$$

$$L''(x_1, x_2, \lambda) = \begin{pmatrix} 4 + 2\lambda & 0 & 2x_1 \\ 0 & 4 + 2\lambda & 2x_2 \\ 2x_1 & 2x_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$L'(x_1, x_2, \lambda) \overset{!}{=} 0$

$0 = 4x_1 + 2\lambda x_1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 2x_1\,(2 + \lambda)$

$0 = 4x_2 + 8 + 2\lambda x_2$

$0 = x_1^2 + x_2^2 - 1$

Name C. Wassermann | Klasse | Datum | Seite 5 | Blatt

$x_1 = 0 \quad \vee \quad \lambda = -2$

$0 = x_2^2 - 1 \qquad\qquad 0 = 4x_2 + 8 - 4x_2$

$x_2 = 1 \quad \vee \quad x_2 = -1 \qquad\qquad 0 = 8$

↯ keine Lösung

$0 = 4 + 8 + 2\lambda \qquad 0 = -4 + 8 - 2\lambda$

$2\lambda = -12 \qquad 2\lambda = 4$

$\lambda = -6 \qquad \lambda = 2$

kritische Punkte: $(x_1, x_2, \lambda)$

$(0, 1, -6): \det(L''(0,1,-6)) = -4 \cdot (4 + 2 \cdot (-6)) = -4 \cdot (-8) = 32 > 0$

$\Rightarrow$ lok. Maximum

$(0, -1, 2): \det(L''(0,-1,2)) = -4 \cdot (4 + 2 \cdot 2) = -4 \cdot 8 = -32 < 0$

$\Rightarrow$ lok. Minimum

$$\det(L''(x_1, x_2, \lambda)) = \det\begin{pmatrix} 4+2\lambda & 0 & 2x_1 \\ 0 & 4+2\lambda & 2x_2 \\ 2x_1 & 2x_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 0 + 0 + 0 - 2x_1 \cdot 2x_1 \cdot (4 + 2\lambda) - (4 + 2\lambda)\, 2x_2 \cdot 2x_2 - 0$$

$$= 4x_1^2 (4 + 2\lambda) - 4x_2^2 (4 + 2\lambda)$$

$$= (4x_1^2 - 4x_2^2)(4 + 2\lambda)$$

$\Rightarrow$ globales Minimum unter Nebenbedingung Einheitskreis $(x_1, x_2) = (0, -1)$ der Funktion $f$.