Name Gruppe 18 Christian Wassermann	Klasse Numerik	Datum Abgabe bis: 19.6.2018	HA10	Seite 1 Blatt

1)

$$f(x_1, x_2) = 1 - \frac{1}{1+x_1^2} + \frac{1}{1+x_2^2} + \frac{1}{4}x_2^2$$

$$= 1 - (1+x_1^2)^{-1} + (1+x_2^2)^{-1} + \frac{1}{4}x_2^2$$

$$f'(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 (1+x_1^2)^{-2} \\ -2x_2 (1+x_2^2)^{-2} + \frac{1}{2}x_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2x_1}{(1+x_1^2)^2} \\ -\frac{2x_2}{(1+x_2^2)^2} + \frac{1}{2}x_2 \end{pmatrix}$$

$$H = f''(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{2(1+x_1^2)^2 - 2x_1 \cdot 4x_1 \cdot (1+x_1)}{(1+x_1^2)^4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} + \frac{-2(1+x_2^2)^2 + 2x_2 \cdot 4x_2 (1+x_2^2)}{(1+x_2^2)^4} \end{pmatrix}$$

$$f'(x_1, x_2) \overset{!}{=} 0$$

$$0 = \frac{2x_1}{(1+x_1^2)^2} \iff x_1 = 0$$

$$0 = -\frac{2x_2}{(1+x_2^2)^2} + \frac{1}{2}x_2$$

$$0 = -2x_2 + \frac{1}{2}x_2(1+x_2^2)^2$$

$$0 = -2x_2 + \frac{1}{2}x_2(x_2^4 + 2x_2^2 + 1)$$

$$0 = -2x_2 + \frac{1}{2}x_2^5 + x_2^3 + \frac{1}{2}x_2$$

$$0 = \frac{1}{2}x_2^5 + x_2^3 - \frac{3}{2}x_2$$

Name	Klasse	Datum		Seite 2
C. Wassermann				Blatt

$$0 = x_2 \left(\frac{1}{2} x_2^4 + x_2^2 - \frac{3}{2} \right)$$

$x_2 = 0 \quad \vee \quad \frac{1}{2} x_2^4 + x_2^2 - \frac{3}{2} = 0$

$x_2^4 + 2x_2^2 - 3 = 0$

Subst. $z = x_2^2$

$z^2 + 2z - 3 = 0$

$z_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1+3}$

$= -1 \pm 2$

$z_1 = 1 \qquad z_2 = -3$

$x_2 = \pm \sqrt{z}$

$x_2 = 1 \quad \vee \quad x_2 = -1 \quad \vee \quad x_2 = \sqrt{-3} \quad \vee \quad x_2 = -\sqrt{-3}$

$P_1 (0/0)$: $\det(H) = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3/2 \end{pmatrix} = -3 < 0 \Rightarrow$ Sattelpunkt

$P_2 (0/1)$: $\det(H) = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 > 0 \wedge H_{11} > 0 \Rightarrow$ lok. Min.

$P_3 (0/-1)$: $\det(H) = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 > 0 \wedge H_{11} > 0 \Rightarrow$ lok. Min.

(Nr2) $\frac{1}{2} + \frac{-2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 2}{16} = \frac{1}{2} + \frac{-8+16}{16} = 1$

Name	Klasse	Datum		Seite 3
C. Wassermann				Blatt

2)

$$f(x_1, x_2) = (\sin(x_1) - x_2)^2 + (e^{-x_2} - x_1)^2$$

$$= \sin^2(x_1) - 2x_2 \cdot \sin(x_1) + x_2^2 + e^{-2x_2} - 2x_1 e^{-x_2} + x_1^2$$

$$f'(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2 \sin(x_1) \cdot \cos(x_1) - 2x_2 \cdot \cos(x_1) - 2e^{-x_2} + 2x_1 \\ -2 \sin(x_1) + 2x_2 - 2e^{-2x_2} + 2x_1 \cdot e^{-x_2} \end{pmatrix}$$

Name C. Wassermann | Klasse | Datum | Seite 4 | Blatt

3)

a)

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$f(y) = \lambda^T \cdot y \qquad \lambda \in \mathbb{R}^n$

$$\min_{\substack{y_i \geq 0 \\ \sum_{i=1}^n y_i = 1}} f(y)$$

Minimum von $f(y)$:

$f'(y) = \lambda \stackrel{!}{=} 0$

Fall, $\lambda = \vec{0}$: $f(y) = 0 \Rightarrow \min f(y) = \min_{i=1,\dots,n} \lambda_i = 0$

Fall, $\lambda \neq \vec{0}$:

Min liegt am Rand:

Hier: Rand $e_1, \dots, e_n$, da $y_i \geq 0 \wedge \sum_{i=1}^n y_i = 1$

$$\min_{\substack{y_i \geq 0 \\ \sum_{i=1}^n y_i = 1}} f(y) = \min(f(e_1), \dots, f(e_n))$$

$$= \min(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

$$= \min_{i=1,\dots,n} \lambda_i$$

b)

$\lambda_i \in \mathbb{R}$

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$f(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$

$$\min_{\|x\|_2 = 1} f(x) = \min_{i=1,\dots,n} \lambda_i$$

siehe a) für $y_i = x_i^2 \Rightarrow y_i \geq 0$ und da $\|x\|_2 = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^n y_i = 1$

Name Klasse Datum Seite 5

C. Wassermann

Blatt

c)

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$f(x) = x^T A x$

$\min_{\|x\|_2 = 1} f(x) = \min_{i=1,\dots,n} \lambda_i$ λ_i: Eigenwerte von A

$\min_{\|x\|_2 = 1} f(x) = \min_{\|x\|_2 = 1} x^T A x$

Symmetrie $A = UDU^T$

$= \min_{\|x\|_2 = 1} x^T U D U^T x$ mit U orthonormal Matrix, D Diagonalmatrix von Eigenwerten

$= \min_{\|x\|_2 = 1} (x^T U) D (U^T x)$

$= \min_{\|x\|_2 = 1} (U^T x)^T D (U^T x)$

siehe b) für $y = U^T x$

$\Rightarrow \min_{\|y\|_2 = 1} y^T D y = \min_{\|y\|_2 = 1} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$

$\|y\|_2 = 1$ gilt, da $\|x\|_2 = 1$ $\wedge$ U orthonormal

Name	Klasse	Datum		Seite 6
C. Wassermann				Blatt

d)

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$f(x) = x^T A x$

$A = B + C$

$B = \frac{1}{2}(A + A^T)$ Symmetrische Matrix

$C = \frac{1}{2}(A - A^T)$ Schiefsymmetrische Matrix

$$\min_{\|x\|_2 = 1} f(x) = \min_{\|x\|_2 = 1} x^T A x$$

$$= \min_{\|x\|_2 = 1} x^T (B + C) x$$

$$= \min_{\|x\|_2 = 1} \left[x^T B x + \underbrace{x^T C x}_{=0} \right]$$

$= 0$, da C schiefsymmetrisch $\Rightarrow \operatorname{diag}(C) = \vec{0}$

$\wedge \quad x = e_i$ (siehe a))

$$= \min_{\|x\|_2 = 1} x^T B x$$

$$= \min_{\|x\|_2 = 1} x^T \frac{1}{2}(A + A^T) x$$

siehe c) für $M = \frac{1}{2}(A + A^T)$

$$\min_{\|x\|_2 = 1} x^T M x = \min_{i = 1, \dots, n} \lambda_i$$

λ_i: Eigenwerte von M

Name	Klasse	Datum		Seite 7
C. Wassermann				Blatt

4)

$$q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$q(x) = \frac{1}{2} x^T A x + b^T x + c$$

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad b \in \mathbb{R}^n, \quad c \in \mathbb{R}$$

a)

$$q(x) = \frac{1}{2} x^T A x + b^T x + c$$

$$= \frac{1}{2} \cdot x^T \cdot \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} \cdot x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj} \cdot x_j \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + c$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(x_i \cdot \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \right) + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + c$$

$$q'(x) = \frac{1}{2} \cdot A x + b$$

b)

$$q'(x) = \frac{1}{2} A x + b^T + c$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} \cdot x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj} \cdot x_j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$q''(x) = \frac{1}{2} A$$

Name	Klasse	Datum		Seite 8
C. Wassermann				Blatt

c)

$$q(x) = \frac{1}{2} x^T A x + b^T x + c$$

B symmetrisch $\Leftrightarrow$ $\langle Bx, y \rangle = \langle x, By \rangle$ $x, y \in \mathbb{R}$

$$p(x) = \frac{1}{2} x^T B x + b^T x + c$$

$$= \frac{1}{2} \langle x, Bx \rangle + b^T x + c$$

$$\overset{B \text{ symmetrisch}}{=} \frac{1}{2} \langle Bx, x \rangle + b^T x + c$$

$$q(x) = \frac{1}{2} x^T A x + b^T x + c$$

$$= \frac{1}{2} \langle x, Ax \rangle + b^T x + c$$

$$\overset{\langle \cdot, \cdot \rangle \text{ symmetrisch}}{=} \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle + b^T x + c$$

$\Rightarrow$ A verhält sich aufgrund der Symmetrie der Skalarprodukte wie die symmetrische Matrix B.

Name C. Wassermann | Klasse | Datum | Seite 9 | Blatt

d)

A spd

notw. Bed.: $q'(x) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \quad \vec{0} = \frac{1}{2} A x + b$

$\frac{1}{2} A x = -b$

$A x = -2 b$

LGS hat genau eine Lösung $\bar{x}$,

da A spd ist

hinr. Bed.: $q''(x)$ positiv definit $\wedge$ $q'(x) = \vec{0}$
(für Minimum)

$q''(x) = A$

$\Rightarrow q''(x)$ ist positiv definit, da A spd ist.

$\Rightarrow$ lok. Minimum bei $\bar{x}$