Name Gruppe 18	Klasse	Datum	HA06	Seite 1
Christian Wassermann	Numerik 1	Abgabe bis	: 22.5.2018	Blatt

Nr 1

$$b(x) = \frac{a}{1 - ce^{-dx}}$$

$$b'(x) = \frac{-a \cdot (cde^{-dx})}{(1 - ce^{-dx})^2} = -\frac{acde^{-dx}}{(1 - ce^{-dx})^2}$$

Zeitpunkt 9-Milliarden-Grenze: $\approx$ Jahr 2069,4822

Genauigkeit der beiden Verfahren ist gleich

Newton-Verfahren konvergiert schneller

Maschinengenauigkeit nach:
- 6 Iterationen (Newton)
  $\hookrightarrow$ 6 * 2 = 12 Funktionsauswertungen
- 8 Iterationen (Sekante)
  $\hookrightarrow$ 1 + 8 * 1 = 9 Funktionsauswertungen

Obwohl das Newton-Verfahren weniger Iterationen zur Konvergenz bis Maschinengenauigkeit benötigt, ist die Anzahl der nötigen Funktionsauswertungen beim Sekantenverfahren geringer!

Name C. Wassermann | Klasse | Datum | Seite 2 | Blatt

Nr 2

$$f(x) = x + \ln(x) - 2 \qquad X = [1;2]$$

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$\phi(y) = y - \frac{f(y)}{f'(y)} = y - \frac{y + \ln(y) - 2}{1 + \frac{1}{y}}$$

$$= \frac{y(1+\frac{1}{y}) - y - \ln(y) + 2}{1 + \frac{1}{y}}$$

$$= \frac{y + 1 - y - \ln(y) + 2}{1 + \frac{1}{y}}$$

$$= \frac{3 - \ln(y)}{1 + \frac{1}{y}}$$

a)

Kontraktion:

I) $\phi(x) \subset X \qquad \forall x \in X = [1;2] \Rightarrow \phi(x) \in X = [1;2]$

Randwerte:

$$\phi(1) = \frac{3-0}{1+1} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

$$\phi(2) = \frac{3 - \ln(2)}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{3 - \ln(2)}{\frac{3}{2}} \approx 1{,}5379$$

lokale Extrema:

$$\phi'(x) \overset{!}{=} 0$$

$$\phi'(x) = \frac{f(x) \cdot f''(x)}{f'(x)}$$

$$f(x) = 0 \quad \vee \quad f''(x) = 0$$

$$1 + \frac{1}{x} = 0 \qquad\qquad -\frac{1}{x^2} = 0$$

$$\frac{1}{x} = -1 \qquad\qquad -1 = 0$$

$$1 = -x \qquad\qquad ⚡ \text{ keine Nullstelle}$$

$$x = -1$$

↳ außerhalb von $X = [1;2]$ $\qquad \Longrightarrow \phi(x) \in X$

Name C. Wassermann | Klasse | Datum | Seite 3 | Blatt

II

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq \alpha |x-y| \quad \forall x,y \in X \quad \alpha = \frac{1}{4}$$

ϕ ist stetig differenzierbar $\Rightarrow$ Mittelwertsatz

$$|\phi(x) - \phi(y)| = |\phi'(\sigma)|\,|x-y| \quad \sigma \in co(x,y)$$

$$\alpha \leq \max_{\sigma \in X} |\phi'(\sigma)| < 1$$

$$\phi(x) = \frac{3-\ln(x)}{1+\frac{1}{x}}$$

$$|\phi'(x)| = \left| \frac{-\frac{1}{x}\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right) - (3-\ln(x))\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2} \right|$$

$$= \left| \frac{-\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^2} - \frac{\ln(x)}{x^2}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2} \right|$$

$$= \left| \frac{-\frac{1}{x} + \frac{2-\ln(x)}{x^2}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2} \right|$$

$$\max |\phi(\sigma)| = \max_{\sigma \in X} \frac{\left|-\frac{1}{\sigma} + \frac{2-\ln(\sigma)}{\sigma^2}\right|}{\left(1+\frac{1}{\sigma}\right)^2}$$

$$\leq \frac{\max \left|-\frac{1}{\sigma} + \frac{2-\ln(\sigma)}{\sigma^2}\right|}{\min \left(1+\frac{1}{\sigma}\right)^2} \overset{\text{siehe unten}}{\leq} \frac{1}{4}$$

$$\min \underbrace{\left(1+\frac{1}{\sigma}\right)^2}_{\text{mon fallend auf } X = [1,2]} = \left(1+\frac{1}{1}\right)^2 = 4$$

Name	Klasse	Datum		Seite 4
C. Wassermann				Blatt

$$\max \left| -\frac{1}{\sigma} + \frac{2-\ln(\sigma)}{\sigma^2} \right|$$

$$= \max \left| \frac{-\sigma + 2 - \ln(\sigma)}{\sigma^2} \right|$$

$$\leq \frac{\max |-\sigma + 2 - \ln(\sigma)|}{\min \sigma^2} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\min \sigma^2 \overset{\text{monoton wachsend}}{=} 1$$

$$\max \underbrace{|-\sigma + 2 - \ln(\sigma)|}_{\substack{\text{mon. fallend } \geq 0 \\ \text{auf } x = [1;2]}} = |-1 + 2 - \ln(1)| = 1$$

$$\Rightarrow \alpha \leq |\phi(\sigma)| \leq \frac{1}{4} \quad \forall \sigma \in [1;2]$$

b)

a-priori Fehlerabschätzung

$$|x - x_k| \leq \frac{\alpha^k}{1-\alpha} |x_1 - x_0|$$

für $x_0 = 1$ und $\alpha = \frac{1}{4}$

Iterationen für Grenze $10^{-6} = \frac{1}{1000000}$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{1+0-2}{1+\frac{1}{1}} = 1 - \frac{-1}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

$$\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^k}{\frac{3}{4}} |1{,}5 - 1|$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^k \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{6 \cdot 4^{k-1}}$$

Name	Klasse	Datum	Seite 5
C. Wassermann			Blatt

Iteration	a-priori	
1	$1/6$	
2	$1/24$	
3	$1/96$	
4	$1/384$	
5	$1/1.536$	
6	$1/6.144$	
7	$1/24.576$	
8	$1/98.304$	
9	$1/393.216$	
$\boxed{10}$	$1/1.572.864$	$< \frac{1}{1.000.000}$

Name C. Wassermann | Klasse | Datum | Seite 6 | Blatt

3)
a)

$f(x) = \arctan(x) - x$ $\qquad f(0) = 0$

$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1$ $\qquad f'(0) = 0$

$f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$ $\qquad f''(0) = 0$

$\Rightarrow$ mehrfache Nullstelle bei $x = 0$

$\Rightarrow$ Newton - Verfahren konvergiert nur linear

Name	Klasse	Datum		Seite 7
C. Wassermann				Blatt

4)

$f(x) = 0$

$f'(x) \neq 0$

$f''(x) = 0$

Fixpunkt x

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \overset{f(x)=0}{=} x$$

$$\phi'(x) = \frac{f(x) \cdot f''(x)}{f'(x)} \overset{f''(x)=0}{=} 0$$

$$\phi''(x) = \frac{(f'(x) \cdot f''(x) + f(x) \cdot f'''(x)) \cdot f'(x) + (f(x) \cdot f''(x)) f''(x)}{(f'(x))^2}$$

$$\overset{f''(x)=0}{=} \frac{f(x) \cdot f'''(x) \cdot f'(x)}{(f'(x))^2}$$

$$\overset{f(x)=0}{=} 0$$

$$\phi'(x) = \phi''(x) = 0$$

(Satz 1.63)

$\Longrightarrow$

es gibt ein abgeschlossenes Intervall $X = [x - \delta ; x + \delta]$ $\delta > 0$, sodass die Iteration $x_{k+1} = \phi(x_k)$ für alle $x_0 \in X$ mindestens mit Ordnung 3 konvergiert.

Name	Klasse	Datum		Seite 8
C. Wassermann				Blatt

Nr 5

$f: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \sin(x) - y \\ e^{-y} - x \end{pmatrix}$

Jacobi Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos(x) & -1 \\ -1 & -e^{-y} \end{pmatrix}$$