

## Вычислительная физика, Осень 2020 ВШЭ. Задание 2.<sup>a</sup>

1. (7) Докажите следующие неравенства и приведите примеры вектора  $x$  и матрицы  $A$ , при которых эти неравенства насыщаются:

- $\|x\|_2 \leq \sqrt{m}\|x\|_\infty$
- $\|A\|_\infty \leq \sqrt{n}\|A\|_2$

где  $x$  – вектор длины  $m$  и  $A$  – матрица размера  $m \times n$ .

2. (10) Постройте руками SVD разложение следующих матриц:

$$(a) \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad (b) \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (c) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. (10) Напишите код на Python, который для данной действительной матрицы  $A$  строит правые сингулярные вектора  $v_1, v_2$  (вписанные в окружность) и левые сингулярные вектора  $u_1, u_2$  (вписанные в эллипс) – аналогично Fig. 4.1 Trefethen, Bau. Используйте этот код для матриц из Задачи 2.
4. (15) Рассмотрите матрицы  $X$  размером  $n \times m$ ,  $\Omega$  размером  $m \times m$  и  $\Delta$  размером  $n \times n$ . Пусть

$$f(A) = A^{-1}X(X^T A^{-1}X)^{-1}.$$

Докажите, предполагая обратимость участвующих матриц, что

$$f(X\Omega X^T + \Delta) = f(\Delta).$$

5. (15) Реализуйте LU разложение квадратной матрицы с выбором главного элемента, следуя инструкциям по ссылке.
6. (15) Ознакомьтесь с Woodbury matrix identity, справедливом для матриц подходящих размеров:

$$(A + UCV)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U(C^{-1} + VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}. \quad (1)$$

Рассмотрите частный случай диагональной  $(p \times p)$  матрицы  $A$  и единичной  $(k \times k)$  матрицы  $C$  и напишите функцию `woodbury(A, U, V)` вычисляющую  $(A + UV)^{-1}$  по формуле (1). Проверьте, что Ваша имплементация верна, сравнивая результат с полученным прямолинейным вычислением. Сравните быстроедействие этих двух способов: какой оказывается быстрее и почему? (рассмотрите случайные матрицы с  $p = 5000, k = 100$ ).

---

<sup>a</sup> Дополнительно указаны: (количество баллов за задачу)[имя задачи на nbgrader]