

Вычислительная физика, Осень 2020 ВШЭ. Задание 3.^a

1. (7) Покажите, что:

- проектор P является ортогональным если и только если $P = P^+$
- если P – ортогональный проектор, то матрица $I - 2P$ унитарна (дайте геометрическую интерпретацию этого факта).

2. (7) Рассмотрите матрицы:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Выпишите ортогональные проекторы на $\text{range}(A)$ и $\text{range}(B)$.
- Постройте руками QR разложение матриц A и B .

3. (15) Допишите следующий код на Python так, чтобы он генерировал матрицу A (состоящую из 0 и 1) размера 15×28 , показанную на Рис. 1 (для визуализации матрицы использована функция `plt.imshow(A)`):

```
a = np.zeros((15, 28))
a[2:-2, 1] = 1; a[2, 2:6] = 1
a[2:7, 6] = 1; a[7:-2, 7] = 1
a[7, 2:7] = 1; a[-3, 2:7] = 1
a[2:-2, 10] = 1; a[2:-2, 14] = 1;
a[2:-2, 18] = 1; a[-3, 10:19] = 1
```

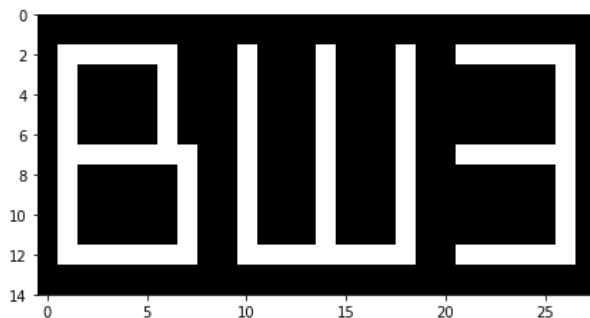


Рис. 1. Матрица A , задача 3.

- Постройте SVD разложение матрицы A . Чему равен $\text{rank}(A)$?
 - Для каждого $i = 1, 2, \dots, \text{rank}(A)$, постройте матрицу B_i ранга i , которая наилучшим образом (в 2-норме) приближает матрицу A (постройте соответствующее изображение).
4. (20) Реализуйте метод наименьших квадратов, следуя инструкциям по ссылке.
5. (15) Рассмотрите единичную массу, находящуюся при $t = 0$ в точке $x = 0$ в состоянии покоя $v = 0$ и подверженную силе f_i при $i - 1 < t \leq i$, где $i = 1, 2, \dots, 10$. Пусть $a = (x(t = 10), v(t = 10))$ – вектор, состоящий из координаты и скорости частицы в момент времени $t = 10$. Постройте матрицу A такую, что $a = Af$ (заметьте, что A имеет размер 2×10). Используя SVD разложение, найдите f минимальной нормы такое, что $a = (1, 0)$.

^a Дополнительно указаны: (количество баллов за задачу)[имя задачи на nbgrader]