Вычислительная физика, Осень 2020 ВШЭ. Задание 2.[a]

1. **(7)** Докажите следующие неравенства и приведите примеры вектора x и матрицы A, при которых эти неравенства насыщаются:

   - $\|x\|_2 \leq \sqrt{m}\|x\|_\infty$
   - $\|A\|_\infty \leq \sqrt{n}\|A\|_2$

   где x – вектор длины m и A – матрица размера $m \times n$.

2. **(10)** Постройте руками SVD разложение следующих матриц:

$$(a) \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad (b) \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (c) \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. **(10)** Напишите код на Python, который для данной действительной матрицы A строит правые сингулярные вектора v_1, v_2 (вписанные в окружность) и левые сингулярные вектора u_1, u_2 (вписанные в эллипс) – аналогично Fig. 4.1 Trefethen, Bau. Используйте этот код для матриц из Задачи 2.

4. **(15)** Рассмотрите матрицы X размером $N \times m$, Ω размером $m \times m$ и Δ размером $n \times n$. Пусть

$$f(A) = A^{-1}X(X^TA^{-1}X)^{-1}.$$

   Докажите, предполагая обратимость участвующих матриц, что

$$f(X\Omega X^T + \Delta) = f(\Delta).$$

5. **(15)** Реализуйте LU разложение квадратной матрицы с выбором главного элемента, следуя инструкциям по ссылке.

6. **(15)** Ознакомьтесь с Woodbury matrix identity, справедливом для матриц подходящих размеров:

$$(A + UCV)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U\left(C^{-1} + VA^{-1}U\right)^{-1}VA^{-1}. \tag{1}$$

   Рассмотрите частный случай диагональной ($p \times p$) матрицы A и единичной ($k \times k$) матрицы C и напишите функцию ‘woodbury(A, U, V)’ вычисляющую $(A + UV)^{-1}$ по формуле (1). Проверьте, что Ваша имплементация верна, сравнивая результат с полученным прямолинейным вычислением. Сравните быстродействие этих двух способов: какой оказывается быстрее и почему? (рассмотрите случайные матрицы с $p = 5000, k = 100$).

[a] Дополнительно указаны: (количество баллов за задачу)[имя задачи на nbgrader]