信号分解

信号
- 直流分量+交流分量
- 偶分量+奇分量
- 实部分量+虚部分量
- 脉冲分量
- 正交分量

分解结果是唯一的

信号分解

信号的直流分量 $f_{DC}(t)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt$ → 信号的均值

信号的交流分量 $f_{AC}(t)=f(t)-f_{DC}(t)$

信号的偶分量 $f_e(t)=Ev[f(t)]=\frac{f(t)+f(-t)}{2}$

信号的奇分量 $f_o(t)=Od[f(t)]=\frac{f(t)-f(-t)}{2}$

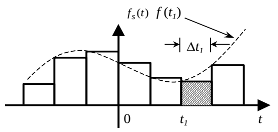
信号的实部分量 $f_r(t)=\mathrm{Re}[f(t)]=\frac{1}{2}\left(f(t)+f^*(t)\right)$

信号的虚部分量 $f_i(t)=\mathrm{Im}[f(t)]=\frac{1}{2j}\left(f(t)-f^*(t)\right)$

信号分解

信号的脉冲分量分解

信号可以近似表示为一组矩形脉冲的和的形式。



信号分解后，t_1 处宽度为 Δt_1 的矩形脉冲可以表示为

$$f_{t_1}(t)=f(t_1)[u(t-t_1)-u(t-t_1-\Delta t_1)]$$

于是原始函数可以表示为：

$$f(t)\approx\sum_{t_1=-\infty}^{\infty} f_{t_1}(t)$$

信号分解

正交函数：

如果在区间 (t_1, t_2) 上，函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 互不含有对方的分量，则称 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 在 (t_1, t_2) 上**正交**。

函数正交的充要条件是它们的内积为0 $< f_1, f_2 >=0$

函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 在 (t_1,t_2) 上的内积：

$$< f_1, f_2 >=\int_{t_1}^{t_2} f_1(t)f_2(t)dt$$

任一函数 $f(t)$在(t_1,t_2)上可表示为正交函数集内函数的线性组合。

$$f(t)\approx\sum_{n=1}^{N} c_n g_n(t)$$

正交分量的系数

信号分解

信号正交分解的作用：

1. 方便处理　　例如：旋转

2. 便于抽取特性

3. 数据压缩

信号分解

正交变换方法：

1. 傅立叶变换 **Fourier Transform**
2. 离散余弦变换 **Discrete Cosine Transform**
3. 沃尔希-哈德玛变换 **Walsh-Hadamard Transform**
4. 斜变换 **Slant Transform**
5. 哈尔变换 **Haar Transform**
6. 离散小波变换 **Discrete Wavelet Transform**
7. 离散K-L变换 **Discrete Karhunen-Leave Transform**
8. 奇异值分解SVD变换 **Singular-Value Decomposition**
9. **Z变换**

傅里叶变换

傅立叶变换

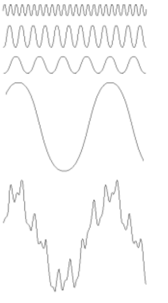
——线性系统分析中有力工具

傅氏变换在很多领域中应用很广泛，这是因为

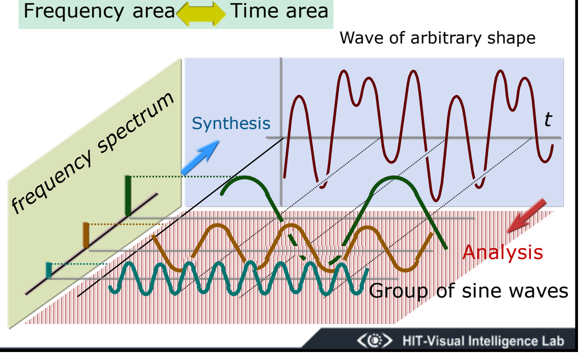
- 依靠它，建立起了非常完善的线性系统理论
  ——通信及控制论的基础
- 它被移植到光学中，形成光学信息处理的基础
  ——傅氏光学
- 在图像、语音信号处理领域，
  傅氏变换和线性系统理论是进行信号恢复和重构的重要手段。

信号分解

傅氏变换是将信号分解为



傅里叶变换



傅里叶变换

一. 一维傅立叶变换

令 $f(x)$ 为实变量 x 的连续函数，$f(x)$ 的傅立叶变换定义如下式，并记为 $\Im$ 。

$$\Im\{f(x)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-j2\pi ux}dx = F(u) \quad \text{其中 } j^2 = -1$$

傅立叶的反变换（the inverse Fourier's transform）定义为下式：

$$\Im^{-1}\{F(u)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} F(u)e^{j2\pi ux}du = f(x)$$

——傅立叶变换对（the Fourier transform pair）

傅里叶变换

一. 一维傅立叶变换

另一种形式

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

关系 $\omega = 2\pi u, \qquad t = x$

傅里叶变换

$f(x) \rightarrow F(u)$

实　　复

$$F(u) = R(u) + jI(u)$$

$$= |F(u)|e^{j\phi(u)} \text{——指数形式}$$

模： $|F(u)| = \sqrt{R^2(u) + I^2(u)}$

也称幅度函数，傅立叶谱，频谱

相角： $\phi(u) = tan^{-1}[I(u)/R(u)]$

傅里叶变换

$f(x)$ 的能量谱 $E(u)$ 为：

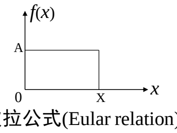
$$E(u)=|F(u)|^2=R^2(u)+I^2(u)$$

又称功率谱 $P_f(u)$ (Power spectrum)

$$P_f(u)=\Im\{R_f(\tau)\}=\Im\{f(t)*f(-t)\}$$
$$=F(u)F(-u)$$
$$=|F(u)|^2$$

傅里叶变换

例1. 简单函数$f(x)$如图所示:



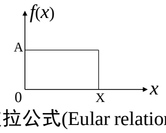
由欧拉公式(Eular relation)可知

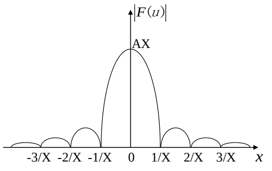
$$e^{-j2\pi ux}=\cos(2\pi ux)-j\sin(2\pi ux)$$
$$e^{j2\pi ux}=\cos(2\pi ux)+j\sin(2\pi ux)$$

$$F(u)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j2\pi ux}dx$$
$$=\int_0^X Ae^{-j2\pi ux}dx$$
$$=\frac{-A}{j2\pi u}[e^{-j2\pi ux}]_0^X$$
$$=\frac{-A}{j2\pi u}[e^{-j2\pi uX}-1]$$
$$=\frac{-A}{j2\pi u}[e^{-j\pi uX}-e^{j\pi uX}]e^{-j\pi uX}$$
$$=\frac{-A}{j2\pi u}[-2j\sin(\pi uX)]e^{-j\pi uX}$$
$$=\frac{A}{\pi u}\sin(\pi uX)e^{-j\pi uX}$$
$$|F(u)|=\frac{A}{\pi u}|\sin(\pi uX)|=AX\frac{\sin(\pi uX)}{\pi uX}$$

傅里叶变换

例1. 简单函数$f(x)$如图所示:





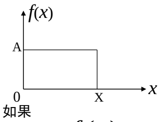
由欧拉公式(Eular relation)可知

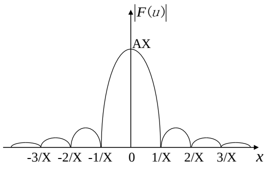
$$e^{-j2\pi ux}=\cos(2\pi ux)-j\sin(2\pi ux)$$
$$e^{j2\pi ux}=\cos(2\pi ux)+j\sin(2\pi ux)$$

$$|F(u)|=\frac{A}{\pi u}|\sin(\pi uX)|=AX\frac{\sin(\pi uX)}{\pi uX}$$

傅里叶变换

例1. 简单函数$f(x)$如图所示:





如果

$$f(x)=e^{-\pi x^2}$$

则

$$F(u)=e^{-\pi u^2}$$

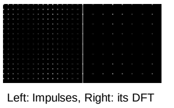
高斯函数的傅立叶变换依然是高斯函数

傅里叶变换

常用函数的傅立叶变换

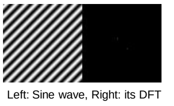
函数	$f(t)$	$F(s)$
高斯	$e^{-\pi t^2}$	$e^{-\pi s^2}$
矩形脉冲	$\Pi(t)$	$\frac{\sin(\pi s)}{\pi s}$
三角脉冲	$\Lambda(t)$	$\frac{\sin^2(\pi s)}{\pi s^2}$
冲激	$\delta(t)$	1
单位阶越	$u(t)$	$\frac{1}{2}[\delta(s)-\frac{j}{\pi s}]$
余弦	$\cos(2\pi ft)$	$\frac{1}{2}[\delta(s+f)+\delta(s-f)]$
正弦	$\sin(2\pi ft)$	$j\frac{1}{2}[\delta(s+f)-\delta(s-f)]$
复指数	$e^{j2\pi ft}$	$\delta(s-f)$

傅里叶变换

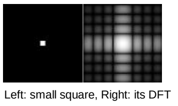


Left: Impulses, Right: its DFT

Left: Gaussian, Right: its DFT



Left: Sine wave, Right: its DFT



Left: small square, Right: its DFT

傅里叶变换

二. 双变量函数$f(x,y)$的FT (二维FT)

- 一维连续的**FT**可以很容易推广到二维连续的**FT**。

$$\Im\{f(x,y)\}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)e^{-j2\pi(ux+vy)}dxdy = F(u,v)$$

$$\Im^{-1}\{F(u,v)\}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(u,v)e^{j2\pi(ux+vy)}dxdy = f(x,y)$$

其中 u,v 是频率变量.

$F(x,y)$的傅立叶谱: $|F(u,v)|=\sqrt{R^2(u,v)+I^2(u,v)}$

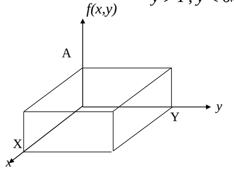
相位$\phi(u,v)$ $\qquad \phi(u,v)=\tan^{-1}[I(u,v)/R(u,v)]$

能量谱$E(u,v)$: $\qquad E(u,v)=R^2(u,v)+I^2(u,v)$

傅里叶变换

例2 给定二维函数 $f(x,y)$ 如下:

$$f(x,y)=\begin{cases} A & \text{当 } 0\le x\le X\text{时},\ 0\le y\le Y\text{时} \\ 0 & \text{当 } x>X; x<0\text{时},\ y>Y; y<0\text{时} \end{cases}$$



傅里叶变换

$$F(u,v)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)e^{-j2\pi(ux+vy)}dxdy$$

$$=A\int_0^X e^{-j2\pi ux}dx\int_0^Y e^{-j2\pi vy}dy$$

$$=A[\frac{e^{-j2\pi ux}}{-j2\pi u}]_0^X[\frac{e^{-j2\pi vy}}{-j2\pi v}]_0^Y$$

$$=\frac{A}{-j2\pi u}[e^{-j2\pi uX}-1]\cdot\frac{A}{-j2\pi v}[e^{-j2\pi vY}-1]$$

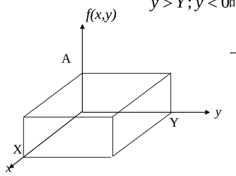
$$=AXY[\frac{\sin(\pi uX)\cdot e^{-j\pi uX}}{\pi uX}][\frac{\sin(\pi vY)\cdot e^{-j\pi vY}}{\pi vY}]$$

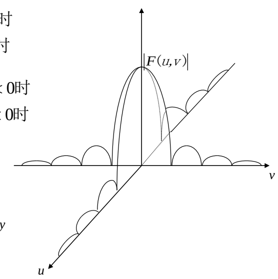
傅立叶谱: $|F(u,v)|=AXY||\frac{\sin(\pi uX)}{\pi uX}|\cdot|\frac{\sin(\pi vY)}{\pi vY}|$

傅里叶变换

例2 给定二维函数 $f(x,y)$ 如下:

$$f(x,y)=\begin{cases} A & \text{当 } 0\le x\le X\text{时},\ 0\le y\le Y\text{时} \\ 0 & \text{当 } x>X; x<0\text{时},\ y>Y; y<0\text{时} \end{cases}$$



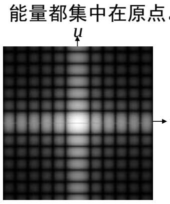


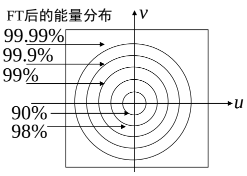
傅里叶变换

三. FT的性质

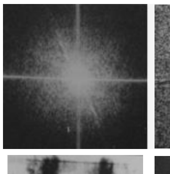
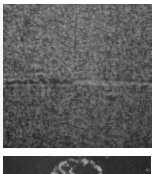
1. 振幅谱图(亮度正比于$|F(u,v)|$的幅度)
2. 能量

一般灰度图像，能量分布在整幅图上，**FT**后能量都集中在原点。另有 $F(0,0)=\bar{f}(x,y)$ 。

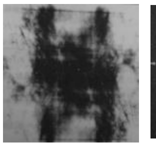




傅里叶变换

原图像	幅值谱图	相位谱图
	幅值谱图重构图像	相位谱图重构图像




傅里叶变换

3. 对称性 **symmetry properties**

(1)奇偶性

$$\text{函数}f_e(x)\text{偶函数} \Leftrightarrow f_e(x)=f_e(-x)$$

$$\text{函数}f_o(x)\text{奇函数} \Leftrightarrow f_o(x)=-f_o(-x)$$

函数非奇非偶，则可拆成奇、偶两部分:

$$f_e(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)] \quad f_o(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$$

$$f(x)=f_e(x)+f_o(x)$$

傅里叶变换

$$\begin{aligned}F(u)&=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j2\pi ux}dx\\&=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(2\pi ux)dx-j\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(2\pi ux)dx\\&=\int_{-\infty}^{\infty} f_e(x)\cos(2\pi ux)dx+\int_{-\infty}^{\infty} f_o(x)\cos(2\pi ux)dx\\&\quad-j\int_{-\infty}^{\infty} f_e(x)\sin(2\pi ux)dx-j\int_{-\infty}^{\infty} f_o(x)\sin(2\pi ux)dx\\&=\int_{-\infty}^{\infty} f_e(x)\cos(2\pi ux)dx-j\int_{-\infty}^{\infty} f_o(x)\sin(2\pi ux)dx\\&=F_e(u)-jF_o(u)\end{aligned}$$

傅氏变换的对称性列表:

a)偶分量函数在变换中产生偶分量函数;

b)奇分量函数在变换中产生奇分量函数;

c)奇分量函数在变换中引入系数-*j*;

d)偶分量函数在变换中不引入系数.

傅里叶变换

(2)虚实分量

一个复函数可表示为：

实部的偶部和奇部，虚部的偶部和奇部

傅氏变换:

a)实偶部产生一个实偶部分;

b)实奇部产生一个虚奇部分;

c)虚偶部产生一个虚偶部分;

d)虚奇部产生一个实奇部分。

通常，我们的图像是实变量函数，因此其傅氏变换为实偶部和虚奇部。因此，它具有共轭对称性。

$F(u)=F^*(-u)$ 其中*表示复共轭

傅里叶变换

4. 加法原理 **the addition theorem**

假设两个傅式变换如下:

$$\Im\{f(x)\}=F(u) \quad \Im\{g(x)\}=G(u)$$

$$\begin{aligned}\Im\{f(x)+g(x)\}&=\int_{-\infty}^{\infty}[f(x)+g(x)]e^{-j2\pi ux}dx\\&=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j2\pi ux}dx+\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-j2\pi ux}dx\\&=F(u)+G(u)\end{aligned}$$

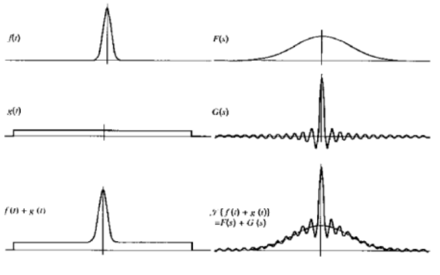
说明：(1)空域或时域中的加法，在频域中也是加法。

(2)从加法原理可得 $\Im\{cf(x)\}=cF(u)$

其中 c 是一个比例常量(rational constant)

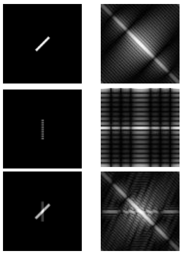
傅里叶变换

4. 加法原理 **the addition theorem**



傅里叶变换

4. 加法原理 **the addition theorem**



傅里叶变换

5. 平移原理 **the shift theorem**

$$\Im\{f(x-a)\}=\int_{-\infty}^{\infty} f(x-a)e^{-j2\pi ux}dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} f(x-a)e^{-j2\pi u(x-a)}e^{-j2\pi ua}dx$$

令 $s=x-a$ 则 $ds=dx$

$$\Im\{f(x-a)\}=e^{-j2\pi ua}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-j2\pi us}ds=e^{-j2\pi ua}F(u)$$

如果 $a=0$，则系数为单位1。

结论：函数的平移不改变其傅氏变换后的模值(幅值)
只改变其实部和虚部间的能量分布。

傅里叶变换

6.卷积定理 **the convolution theorem**

一维卷积定义:

$$f*g=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(t-x)dx=A$$

卷积满足 $\begin{cases}\text{交换律}\\ \text{对加法的分配律}\\ \text{结合律}\end{cases}$

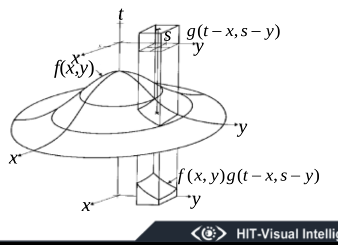
傅里叶变换

6.卷积定理 **the convolution theorem**

二维卷积定义：

$$h(t,s)=f*g=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)g(t-x,s-y)dxdy$$

体积



傅里叶变换

6.卷积定理 **the convolution theorem**

卷积定理

$$\Im\{f(x)*g(x)\}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(t-x)dx\cdot e^{-j2\pi ut}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\int_{-\infty}^{\infty} g(t-x)\cdot e^{-j2\pi ut}dtdx$$

$$\overset{\text{平移原理}}{=}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j2\pi ux}G(u)dx$$

$$=F(u)G(u)$$

$$\Im^{-1}\{F(u)G(u)\}=f(t)*g(t)$$

傅里叶变换

7. 相似性原理 **the similarity theorem**

$$\Im\{f(ax)\}=\int_{-\infty}^{\infty} f(ax)e^{-j2\pi ux}dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} f(ax)e^{-j2\pi uax/a}dx$$

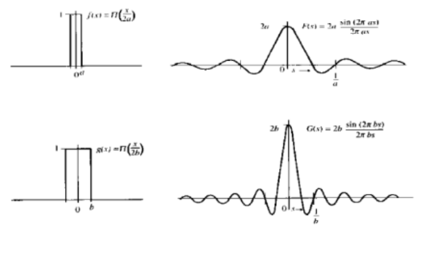
$$=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(ax)e^{-j2\pi(\frac{u}{a})(ax)}d(ax)$$

$$=\frac{1}{|a|}F(\frac{u}{a})$$

——展缩性质

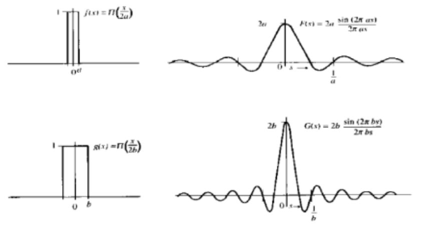
傅里叶变换

7. 相似性原理 **the similarity theorem**



傅里叶变换

7. 相似性原理 **the similarity theorem**



傅里叶变换

8. **the Rayleigh's theorem**

能量函数的定义为 $energy = \int_{-\infty}^{\infty} | f(x) |^2 dx$

Rayleigh's原理：$\int_{-\infty}^{\infty} | f(x) |^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} | F(u) |^2 du$

能量守衡：说明变换函数与原函数有相同的能量。

证明：$\int_{-\infty}^{\infty} | f(x) |^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) f^*(x) dx$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) f^*(x) e^{-j2\pi ux} dx \qquad (u=0)$$

$$\Im^{-1}\{ f(x) f^*(x)\} = F(u) * F^*(-u) \qquad (u=0)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F(s) F^*(s-u) ds \qquad (u=0)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F(s) F^*(s) ds \qquad (u=0)$$

傅里叶变换

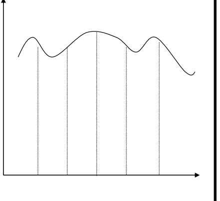
二维傅立叶变换的性质

性质	空域	频域
加法定理	$f(x,y)+g(x,y)$	$F(u,v)+G(u,v)$
相 似 性 定理	$f(ax,by)$	$\frac{1}{\lvert ab\rvert} F\left(\frac{u}{a},\frac{v}{b}\right)$
位移定理	$f(x-a,y-b)$	$e^{-j2\pi(au+bv)}F(u,v)$
卷积定理	$f(x,y)*g(x,y)$	$F(u,v)G(u,v)$
可分离乘积	$f(x)g(y)$	$F(u)G(v)$
微分	$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^m \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x,y)$	$(j2\pi u)^m (j2\pi v)^n F(u,v)$
旋转	$f(x\cos\theta + y\sin\theta, -x\sin\theta + y\cos\theta)$	$F(u\cos\theta + v\sin\theta, -u\sin\theta + v\cos\theta)$
拉普拉斯	$\nabla^2 f(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y)$	$-4\pi^2(u^2+v^2)F(u,v)$
Rayleigh 定理	$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \lvert f(x,y)\rvert^2 dxdy$	$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \lvert F(u,v)\rvert^2 dudv$

傅里叶变换

- 四. 离散的傅立叶变换 **Discrete FT**

假设：取N个相同间隔 Δx 单位的抽样方法，将连续函数 $f(x)$离散化为一个序列：



$\{ f(x_0), f(x_0+\Delta x), f(x_0+2\Delta x), \cdots, f(x_0+(N-1)\Delta x)\}$

则有 $f(x_i) = f(x_0 + i\Delta x)$

其中$x_0 = 0, x = 0,1,2,\cdots, N-1$

$\rightarrow \{ f(0), f(1), f(2), \cdots, f(N-1)\}$

傅里叶变换

一维离散的傅立叶变换时：

$$F(u) = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} f(i) e^{-j2\pi ui/N} \quad \text{其中}\ u = 0,1,2,\cdots,N-1$$

$$f(i) = \sum_{u=0}^{N-1} F(u) e^{j2\pi ui/N} \quad \text{其中}\ i = 0,1,2,\cdots,N-1$$

傅氏级数展开：

$$F_n = F(n\Delta u) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-j2\pi(n\Delta ux)} dx \quad \text{其中}T\text{是周期，}\ \Delta u = \frac{1}{T}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F(n\Delta u) e^{j2\pi(n\Delta ux)} \Delta u = \frac{1}{T}\sum_{n=0}^{\infty} F_n e^{j2\pi(\frac{n}{T}x)}$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi\frac{n}{T}x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2\pi\frac{n}{T}x)$$

$$\text{其中}a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos(2\pi\frac{n}{T}x)dx, \quad b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin(2\pi\frac{n}{T}x)dx$$

傅里叶变换

二维离散的傅立叶变换：

设 x 轴取样N点，间隔为Δx

设 y 轴取样N点，间隔为Δy

$$f(i,j) = f(i\Delta x, j\Delta y)$$

$$\text{其中}\begin{cases} i = 0,1,2,\cdots,M-1 \\ j = 0,1,2,\cdots,N-1 \end{cases}$$

同理 $F(u,v) = F(u\Delta u, v\Delta v)$

$$\text{其中}\begin{cases} u = 0,1,2,\cdots,M-1 \\ v = 0,1,2,\cdots,N-1 \end{cases}$$

傅里叶变换

于是，傅氏变换对:

$$F(u,v)=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{-j2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})}$$

其中$\begin{cases}u=0,1,2,\cdots,M-1\\ v=0,1,2,\cdots,N-1\end{cases}$

$$f(x,y)=\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1}F(u,v)e^{j2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})}$$

其中$\begin{cases}x=0,1,2,\cdots,M-1\\ y=0,1,2,\cdots,N-1\end{cases}$

傅里叶变换

二维离散傅氏变换的性质:

1. 可分离性

$$F(u,v)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}e^{-j2\pi ux/N}\cdot\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{-j2\pi vy/N}$$

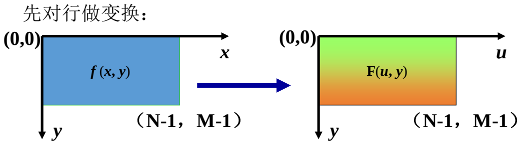
其中 $u,v=0,1,2,\cdots,N-1$

$$f(x,y)=\frac{1}{N}\sum_{u=0}^{N-1}e^{j2\pi ux/N}\cdot\sum_{v=0}^{N-1}F(u,v)e^{j2\pi vy/N}$$

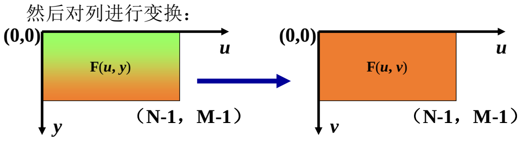
其中 $x,y=0,1,2,\cdots,N-1$

傅里叶变换

先对行做变换:

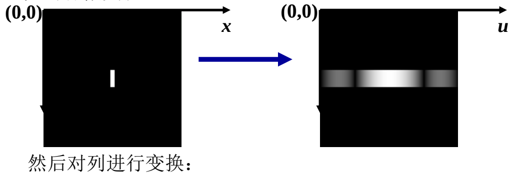


然后对列进行变换:

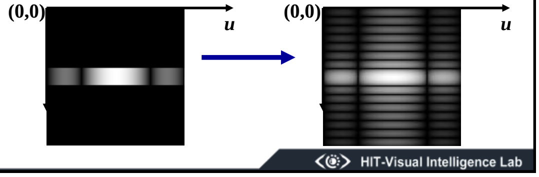


傅里叶变换

先对行做变换:



然后对列进行变换:



傅里叶变换

说明：这种可分离性的主要优点是可把二维FT分成两部，而变为一维FT处理。

$$F(u,v)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}F(x,v)e^{-j2\pi ux/N}$$

$$F(x,v)=N\cdot[\frac{1}{N}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{-j2\pi vy/N}]$$

- 2. 线性性质

$$\Im\{af(x,y)+bg(x,y)\}=a\Im\{f(x,y)\}+b\Im\{g(x,y)\}$$

其中 a, b 为常数。

傅里叶变换

3. 比例性

$$\Im\{af(x,y)\}=a\Im\{f(x,y)\}=aF(u,v)$$

$$\Im\{f(ax,by)\}=\frac{1}{|ab|}F(\frac{u}{a},\frac{v}{b})$$

4. 周期性

离散傅氏变换及其逆变换有周期性，以N为周期重复。

$F(u)=F(u+N)$ ——一维形式

傅里叶变换

10. Parseval定理

——能量保持定理

连续的二维情形:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int |f(x,y)|^2 dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}\int |F(u,v)|^2 dudv$$

离散的二维情形:

$$\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f^2(x,y) = \frac{1}{MN}\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} |F(u,v)|^2$$

傅里叶变换

- 五. 快速傅立叶变换 **Fast FT**

——用共轭性质将逆离散傅立叶变换(IDFT)

变为其共轭数的正离散傅立叶变换

共轭性质:

$(A+B)^* = A^* + B^*$　和数的共轭＝共轭数的和

$(A\cdot B)^* = A^*\cdot B^*$　乘积的共轭＝共轭数的积

$x = x^*$　当x为实数时

N = 16　FFT　傅里叶变换