

KOMBINATORIKA

Utari Wijayanti

1. Permutasi dan Kombinasi

1.1 Faktorial

Kita definisikan simbol ! (faktorial), sebagai berikut $0! = 1$, dan untuk bilangan asli n ,

$$n! = 1 \cdot 2 \cdots n.$$

Perhatikan $n!$ dibaca sebagai n faktorial.

Contoh 1 Berdasarkan definisi di atas, kita dapatkan

$$\begin{aligned}1! &= 1 \\2! &= 1 \cdot 2 = 2, \\3! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6, \\4! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24, \\5! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.\end{aligned}$$

Contoh 2 Perhatikan bahwa

$$\frac{7!}{4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} = 210$$

$$\frac{(n+2)!}{n!} = \frac{(n+2)(n+1)n!}{n!} = (n+2)(n+1)$$

$$\frac{(n-2)!}{(n+1)!} = \frac{(n-2)!}{(n+1)(n)(n-1)(n-2)!} = \frac{1}{(n+1)(n)(n-1)}$$

1.2 Permutasi Tanpa Pengulangan

Definisi Misalkan x_1, x_2, \dots, x_n merupakan n obyek berbeda. Suatu permutasi dari obyek-obyek ini merupakan penyusunan obyek-obyek tersebut dengan memperhatikan urutan. Untuk selanjutnya permutasi n obyek disebut sebagai n -permutasi.

Contoh 3 Terdapat 24 permutasi untuk huruf-huruf pada kata MATH, yakni

MATH, MAHT, MTAH, MTHA, MHAT, MHTA,
AMTH, AMHT, ATMH, ATHM, AHMT, AHTM,
TAMH, TAHM, TMAH, TMHA, THAM, THMA,
HAMT, HATM, HMAT, HMTA, HTAM, HTMA.

Teorema Misalkan x_1, x_2, \dots, x_n adalah n obyek yang berbeda. Maka banyaknya n – permutasi adalah $n!$ permutasi.

Contoh 4 Banyaknya permutasi dari huruf-huruf dari kata RAMBUT adalah $6! = 720$.

Contoh 5 Sebuah lemari memuat 5 buku berbahasa Jerman, 7 buku berbahasa Spanyol, dan 8 buku berbahasa Indonesia. Diketahui bahwa tidak ada dua buku yang sama.

- Berapa banyak penyusunan berbeda yang bisa dilakukan pada buku-buku ini?
- Berapa banyak penyusunan berbeda yang bisa dilakukan pada buku-buku ini jika buku-buku dari masing-masing bahasa harus diletakkan saling berdekatan?
- Berapa banyak penyusunan berbeda yang bisa dilakukan pada buku-buku ini jika semua buku berbahasa Indonesia harus saling berdekatan?
- Berapa banyak penyusunan berbeda yang bisa dilakukan pada buku-buku ini jika tidak boleh ada dua buku berbahasa Indonesia diletakkan saling berdekatan?

Jawab:

- Perhatikan bahwa kita melakukan permutasi pada $5+7+8 = 20$ buku. Maka banyaknya kemungkinan penyusunan adalah $20!$.
- Buku-buku dengan bahasa yang sama di 'ikat' sehingga saling berdekatan. Perhatikan bahwa kita melakukan permutasi pada 3 bahasa, yakni dengan $3!$ cara. Kemudian, kita lakukan permutasi pada buku-buku berbahasa Jerman dalam $5!$ cara, pada buku-buku berbahasa Spanyol dalam $7!$ cara, dan pada buku-buku berbahasa Indonesia dengan $8!$ cara. Jadi total banyaknya cara penyusunan buku adalah $3!5!7!8!$.
- Pertama-tama, kita atur dulu buku-buku berbahasa Jerman dan Spanyol. Perhatikan dengan mengatur $5 + 7 = 12$ buku-buku ini, kita mendapatkan 13 'ruang', yakni ruang sebelum buku pertama, ruang di antara buku-buku, dan ruang setelah buku terakhir. Untuk memastikan bahwa buku-buku berbahasa Indonesia saling berdekatan, buku-buku ini kita 'ikat' bersama-sama dan diletakkan pada salah satu 'ruang'. Perhatikan bahwa buku-buku berbahasa Indonesia dapat disusun dengan $8!$ cara, sedangkan buku-buku berbahasa Jerman dan Perancis dengan $12!$ cara. Sehingga total banyaknya cara adalah $13 \cdot 8!12!$.
- Pertama-tama atur buku berbahasa Jerman dan Spanyol. Dengan mengatur $5 + 7 = 12$ buku ini, diperoleh 13 'ruang'. Untuk memastikan bahwa tidak ada buku-buku berbahasa Indonesia yang saling berdekatan, kita letakkan buku-buku tersebut ke dalam 'ruang-ruang' ini. Buku pertama dapat ditempatkan ke salah satu dari 13 ruang. Buku kedua dapat ditempatkan ke sisa 12 ruang yang ada, buku ketiga dapat ditempatkan ke sisa 11 ruang yang ada, dan seterusnya, hingga buku ke 8 dapat ditempatkan ke sisa 6 ruang yang ada. Jadi total banyaknya pengaturan yang ada adalah $13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 12!$.

Latihan 6 Sebuah rak buku terdiri atas 3 novel Rusia, 4 novel Jerman, dan 5 novel Indonesia. Ada berapa banyak cara penyusunan novel-novel ini jika,

- tidak ada batasan pengelompokkan novel
- semua novel Indonesia harus berdekatan
- tidak ada novel Indonesia yang saling berdekatan

Latihan 7 Berapa banyak kemungkinan permutasi untuk kata LEMARI? Berapakah banyak permutasi yang diawali dengan huruf R dan diakhiri dengan huruf E? Berapa banyak

permutasi jika P dan U selalu bersama-sama dengan urutan PU? Berapa banyak permutasi yang ada jika tidak ada huruf vokal (A, E, I) yang berdekatan?

Latihan 8 Berapa banyak pengaturan yang bisa dilakukan pada huruf-huruf dari kata TERANG jika huruf N dan G tidak pernah terpisah?

Latihan 9 (AIME 1991) Diketahui sebuah bilangan rasional, tuliskan sebagai perbandingan paling sederhana, kemudian kalikan penyebut dengan pembilang. Tentukan berapa banyak bilangan rasional yang nilainya di antara 0 dan 1 dimana $20!$ menjadi hasil kalinya?

Latihan 10 Seekor laba-laba mempunyai sebuah kaos kaki dan sebuah sepatu untuk masing-masing dari delapan kakinya. Tentukan banyaknya kemungkinan urutan laba-laba bisa menggunakan kaos kaki dan sepatu, dengan asumsi bahwa, untuk setiap kaki, kaos kaki harus digunakan sebelum sepatu?

Latihan 11 Ada berapa banyak carakah 8 orang bisa ditempatkan dalam sebuah kursi panjang, jika:

- tidak ada batasan dalam pengaturan posisi duduk
- orang X dan Y harus duduk berdampingan
- ada 4 pria dan 4 wanita dimana tidak ada 2 pria atau 2 wanita yang duduk berdampingan
- ada 4 pasang suami-istri di mana setiap pasang suami-istri harus duduk berdampingan
- ada 4 pria dan mereka harus duduk berdekatan.

1.3 Permutasi dengan Pengulangan

Sekarang kita akan membahas permutasi di mana sebuah elemen/obyek dapat dipilih lebih dari satu kali.

Contoh 12. Ada berapa banyak carakah huruf-huruf dari kata LALALILILU dapat dipermutasi?

Jawab: Misalkan kita memberi index pada setiap huruf yang berulang sehingga menjadi

$$L_1 A_1 L_2 A_2 L_3 I_1 L_4 I_2 L_5 U.$$

Maka sekarang terdapat 10 obyek, yang dapat dipermutasi dengan $10!$ cara yang berbeda. Untuk setiap $10!$ permutasi ini, huruf $A_1 A_2$ dapat dipermutasi dengan $2!$ cara, $L_1 L_2 L_3 L_4 L_5$ dapat dipermutasi dengan $5!$ cara, dan huruf $I_1 I_2$ dapat dipermutasi dengan $2!$ cara. Jadi sebenarnya $10!$ terlalu banyak terhitung, dan dapat diperbaiki menjadi

$$\frac{10!}{2! 5! 2!}$$

Teorema Misalkan terdapat k tipe obyek, dengan: n_1 obyek bertipe 1, n_2 obyek bertipe 2, dst. Maka banyaknya cara penyusunan dari $n_1 + n_2 + \dots + n_k$ obyek ini adalah dengan

$$\frac{(n_1 + n_2 + \dots + n_k)!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

Contoh 13. Ada berapa banyak cara huruf-huruf dari kata SUMSUM bisa disusun sedemikian hingga tidak ada dua huruf yang sama berdekatan?

Jawab: Misalkan kita telah memilih SU pada dua posisi pertama, maka susunan yang mungkin bagi huruf M adalah sebagai berikut:

S	U	M		M	
---	---	---	--	---	--

S	U	M			M
---	---	---	--	--	---

S	U		M		M
---	---	--	---	--	---

Pada kasus yang pertama, terdapat $2! = 2$ kemungkinan penyusunan huruf S dan U, pada kasus kedua ada $2! = 2$ kemungkinan, sedangkan pada kemungkinan ketiga hanya ada 1 kemungkinan. Jadi jika kata yang disusun dimulai dengan huruf S dan U, maka memunculkan $2+2+1=5$ kemungkinan penyusunan. Secara umum, kita bisa memilih 3 huruf untuk posisi pertama, dan 2 huruf untuk posisi kedua. Sehingga banyaknya kemungkinan yang dicari adalah $3 \cdot 2 \cdot 5 = 30$.

Latihan 14. Ada berapa banyak bilangan yang bisa dibentuk oleh angka 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1 sehingga angka ganjil menempati posisi ganjil?

1.4 Kombinasi tanpa Pengulangan

Misalkan diberikan sebuah himpunan dengan n elemen. Pemilihan k anggota himpunan tanpa memperhatikan urutan disebut k -kombinasi, dengan $0 \leq k \leq n$. Jadi k -kombinasi adalah sebuah subhimpunan dengan k anggota (k -subhimpunan).

Banyaknya cara untuk memilih r -kombinasi dari sebuah himpunan dengan n anggota dinotasikan dengan $\binom{n}{k}$. Dengan demikian $\binom{n}{k}$ menyatakan banyaknya k -subhimpunan dari himpunan dengan n anggota. Dapat ditunjukkan bahwa $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Catatan: Perhatikan bahwa $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ sedangkan $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$.

Karena $n - (n - k) = k$, maka untuk untuk bilangan bulat n, k berlaku sifat identitas simetri, yakni

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{n-k}$$

Hal ini bisa diinterpretasikan sebagai berikut: jika ada n pinsil warna yang berbeda, maka banyaknya cara memilih k pinsil sama dengan banyaknya cara memilih $n-k$ pinsil yang tidak diambil.

Contoh 15. $\binom{11}{9} = \binom{11}{2} = 55$

$$\binom{12}{5} = \binom{12}{7} = 792.$$

Contoh 16. 2-kombinasi dari himpunan {P, Q, R, S} adalah

PQ, PR, PS, QR, QS, RS

Contoh 17. 3-kombinasi dari himpunan {P, Q, R, S} adalah

PQR, PQS, PRS, QRS

Contoh 18. Dari 10 buku tulis, kita bisa memilih 4 dengan menggunakan $\binom{10}{4} = 210$ cara.

1.5 Kombinasi dengan Pengulangan

Teorema (De Moivre) Misalkan n adalah bilangan asli. Banyaknya solusi bilangan asli yang memenuhi

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n$$

adalah

$$\binom{n+r-1}{r}$$

Bukti: Tuliskan n sebagai

$$n = 1 + 1 + \dots + 1,$$

dengan n angka 1, dan $n-1$ notasi $+$. Untuk mendekomposisi n menjadi penjumlahan r bilangan kita hanya perlu memilih $r-1$ notasi $+$, yang membuktikan teorema.

Contoh 19. Berapa banyak solusi bilangan bulat non-negatif untuk persamaan

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11$$

Jawab: Contoh ini bisa diselesaikan dengan secara langsung menggunakan Teorema De Moivre. Tetapi berikut ini akan diberikan ilustrasi sehingga bisa diperoleh gambaran lebih jelas.

Perhatikan barisan dari 14 (11+3) bintang di bawah ini.

* * * * *

Pilih tiga dari 14 bintang ini, dan ubah menjadi garis tegak. Dengan demikian, ketiga garis tegak ini membagi 11 bintang menjadi 4 kelompok (sebuah kelompok dimungkinkan untuk tidak memiliki anggota). Setiap pilihan 3 garis tegak berpadanan tepat dengan satu solusi persamaan di atas, dengan memandang banyaknya bintang yang terletak dalam suatu kelompok sebagai nilai dari sebuah variable. Sebagai contoh, susunan di bawah ini berpadanan dengan solusi

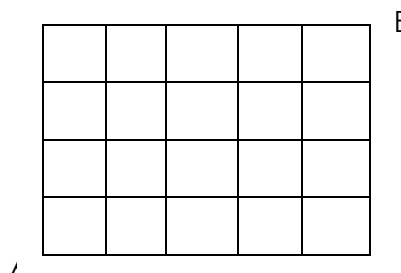
$$x_1=1, x_2=0, x_3=5, x_4=5.$$

* | | * * * * * | * * * * *

Dengan demikian banyaknya solusi dari persamaan di atas adalah

$$\binom{11+4-1}{4-1} = \binom{14}{3} = \binom{14}{11} = 364$$

Contoh 20. Tentukan banyaknya lintasan terpendek dari A ke B.



Jawab: Setiap lintasan terpendek dari A ke B harus terdiri dari 9 langkah, di mana 4 di antaranya adalah langkah ke atas dan sisanya langkah ke kanan. Dengan demikian banyaknya lintasan terpendek adalah $\binom{9}{4} = \binom{9}{5} = 126$.

Contoh 21. Misalkan terdapat sepuluh bola yang identik, dan keranjang yang dinomori 1, 2, ..., 8. Tentukan banyaknya cara untuk mendistribusikan bola ke dalam keranjang agar setiap keranjang terisi sedikitnya 1 bola.

Jawab: Banyaknya cara adalah

$$\binom{10-1}{8-1} = \binom{9}{7} = 36.$$

Jelaskan mengapa demikian!

2. Prinsip Sangkar Merpati (Pigeon-hole Principle)

Prinsip sangkar merpati menyatakan bahwa jika terdapat n barang yang didistribusikan ke dalam n buah kotak, maka sedikitnya satu kotak akan menerima lebih dari satu barang.

Untuk menghemat penulisan, pada contoh-contoh berikut prinsip ini ditulis sebagai PHP.

Contoh 1. Jika terdapat 13 orang, maka sedikitnya ada dua orang merayakan ulang tahun pada bulan yang sama

Contoh 2. kemudian jika rata-rata manusia memiliki dua juta rambut, maka setidaknya ada empat orang di Jakarta memiliki jumlah rambut yang sama di kepalanya.

Perhatikan bahwa prinsip sangkar merpati bermanfaat dalam membuktikan masalah eksistensi, yakni kita menunjukkan sesuatu ‘ada’ tanpa perlu diidentifikasi secara kongkret.

Contoh 3. (Putnam 1978) Misalkan A adalah himpunan dua puluh bilangan asli yang dipilih dari deret matematika $1, 4, \dots, 100$. Buktikan bahwa ada dua bilangan asli berbeda dalam A yang jumlahnya 104.

Jawab: Kita partisi ketigapuluh empat anggota dari deret ini menjadi delapan belas himpunan, yakni $\{1\}$, $\{52\}$, $\{4, 100\}$, $\{7, 97\}$, $\{10, 94\}$, \dots , $\{49, 55\}$. Karena kita memilih dua puluh bilangan asli dan kita mempunyai delapan belas himpunan, maka berdasarkan PHP, terdapat dua bilangan yang merupakan anggota dari himpunan yang sama. Perhatikan bahwa jumlah keduanya adalah 104.

Contoh 4. Tunjukkan bahwa di antara tujuh bilangan asli positif yang nilainya kurang atau sama dengan 126, bisa kita temukan dua diantaranya, katakan a dan b , yang memenuhi $b < a \leq 2b$.

Jawab: Bagi bilangan-bilangan $\{1, 2, 3, \dots, 126\}$ menjadi enam himpunan berikut:
 $\{1, 2\}$, $\{3, 4, 5, 6\}$, $\{7, 8, \dots, 13, 14\}$, $\{15, 16, \dots, 29, 30\}$,
 $\{31, 32, \dots, 61, 62\}$ dan $\{63, 64, \dots, 126\}$.

Berdasarkan PHP, dua dari tujuh bilangan pasti terletak dalam salah satu himpunan, dan jelas bahwa kedua bilangan tersebut akan memenuhi ketidaksamaan yang diminta.

Contoh 5. Buktikan bahwa bagaimanapun lima puluh lima bilangan dipilih dari $\{1, 2, \dots, 100\}$, pasti terdapat dua bilangan yang selisihnya 10.

Jawab: Pertama-tama perhatikan bahwa jika kita memilih $n + 1$ bilangan dari sebarang $2n$ bilangan asli berurutan, maka terdapat dua bilangan yang selisihnya n . Karena jika kita memasangkan $2n$ bilangan asli berurutan $\{a + 1, a + 2, \dots, a + 2n\}$ menjadi n pasang

$\{a+1, a+n+1\}, \{a+2, a+n+2\}, \dots, \{a+n, a+2n\}$, kemudian kita pilih $n+1$ bilangan, maka berdasarkan PHP terdapat dua bilangan berada dalam kelompok yang sama. Sekarang, kelompokkan 100 bilangan menjadi:

$$\{1, 2, \dots, 20\}, \{21, 22, \dots, 40\}, \\ \{41, 42, \dots, 60\}, \{61, 62, \dots, 80\} \text{ dan } \{81, 82, \dots, 100\}.$$

Jika kita memilih limapuluh lima bilangan, maka berdasarkan PHP, pasti terdapat suatu kelompok dimana kita memilih sedikitnya sebelas bilangan. Dengan menerapkan lemma sebelumnya pada kelompok tersebut (yakni untuk $n = 10$), maka terdapat dua bilangan dengan selisih 10.

Contoh 6. (AHSME 1994) Namai sebuah CD dengan label "1", dua CD dengan label "2", tiga CD dengan label "3", ..., dan lima puluh CD dengan label "50". Kemudian letakkan $1 + 2 + 3 + \dots + 50 = 1275$ CD berlabel ini ke dalam suatu kotak. Beberapa CD diambil dari kotak secara acak tanpa penggantian. Berapakah jumlah minimum CD yang harus diambil untuk menjamin diperoleh setidaknya sepuluh CD dengan label yang sama?

Jawab: Jika kita mengambil semua CD yang berlabel "1", ..., "9" (ada $1+2+\dots+9 = 45$ CD) dan sembilan CD dari setiap CD yang berlabel "10", ..., "50", maka kita telah mengambil $45+9 \cdot 41 = 414$ CD. Maka pengambilan CD ke-415 akan memastikan terdapat setidaknya 10 CD dengan label yang sama.

Contoh 7. (IMO 1964) Tujuhbelas orang saling berkorespondensi melalui email. Setiap orang berkorespondensi dengan keenambelas orang lainnya, dan diketahui mereka hanya membahas tiga topik yang berbeda. Jika setiap pasang korespondensi hanya membahas sebuah topik, buktikan bahwa terdapat setidaknya tiga orang saling berkorespondensi dengan topik yang sama.

Jawab: Pilih seorang dalam kelompok tersebut, misalkan Candra. Perhatikan bahwa ia berkorespondensi dengan enam belas orang lainnya. Berdasarkan PHP, setidaknya ada enam orang yang berkorespondensi dengan Candra dan membahas topik yang sama, sebut topik tersebut sebagai topik A. Jika di antara enam orang tersebut ada dua orang yang membahas topik A juga, maka masalah selesai. Karena itu berarti Candra dan mereka berdua saling berkorespondensi dengan topik yang sama, yakni topik A.

Jika di antara enam orang tersebut tidak ada dua orang yang saling berkorespondensi dengan topik A, maka keenam orang tersebut hanya boleh saling berkorespondensi dengan dua topik lainnya, sebut sebagai topik B dan C. Pilih seorang dari enam orang ini, misalkan Budi. Berdasarkan PHP, di antara lima teman korespondensi Budi ini, pasti terdapat tiga diantaranya yang saling berkorespondensi dengan topik yang sama. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan topik B. Jika ada dua dari tiga orang ini yang saling berkorespondensi dengan topik B juga, maka masalah selesai. Tetapi jika tidak, maka setiap dua dari tiga orang ini saling berkorespondensi dengan topik C, dan artinya mereka bertiga saling berkorespondensi dengan topik yang sama, yakni topik C. Terbukti.

Contoh 8. Diketahui A suatu himpunan dengan anggota sepuluh bilangan asli yang bernilai di antara 1 dan 99. Buktikan bahwa terdapat dua subhimpunan yang irisannya bukan himpunan kosong dimana jumlah anggota-anggota kedua subhimpunan adalah sama.

Jawab: Dari suatu himpunan dengan 10 anggota, kita dapat memperoleh $2^{10}-1 = 1023$ subhimpunan tidak kosong. Untuk setiap subhimpunan ini, kita tentukan jumlah dari anggota-anggotanya. Perhatikan bahwa nilai maksimal yang mungkin kita peroleh dari jumlah anggota suatu subhimpunan adalah $90 + 91 + \dots + 99 = 945 < 1023$. Akibatnya, berdasarkan PHP, terdapat setidaknya dua subhimpunan yang memiliki jumlah anggota sama.

Contoh 9. Diberikan 9 bilangan asli sebarang yang faktor primanya anggota dari himpunan $\{3, 7, 11\}$. Buktikan bahwa terdapat setidaknya dua bilangan sehingga hasil kalinya merupakan bilangan kuadrat.

Jawab: Suatu bilangan asli merupakan bilangan kuadrat jika semua pangkat dari faktor primanya merupakan bilangan genap. Perhatikan bahwa semua bilangan asli tersebut dapat dinyatakan sebagai $3^a 7^b 11^c$. Setiap triplet (a, b, c) memiliki salah satu bentuk dari 8 pola paritas berikut: (genap, genap, genap), (genap, genap, ganjil), (genap, ganjil, genap), (genap, ganjil, ganjil), (ganjil, genap, genap), ..., (ganjil, genap, ganjil), (ganjil, ganjil, genap), (ganjil, ganjil, ganjil). Karena terdapat 9 bilangan asli, maka berdasarkan PHP, terdapat dua bilangan yang triplet pangkatnya memiliki paritas yang sama. Pilih dua bilangan ini, maka hasil kalinya merupakan bilangan kuadrat, karena jumlah dari tiap pangkat yang bersesuaian merupakan bilangan genap.

LATIHAN

Latihan 10. Buktikan bahwa di antara $n + 1$ bilangan, pasti terdapat setidaknya dua bilangan yang selisihnya habis dibagi n .

Latihan 10. Tunjukkan bahwa jika lima titik sebarang semuanya pada atau di dalam suatu persegi dengan panjang sisi 1, maka terdapat sepasang titik yang jaraknya kurang atau sama dengan $\sqrt{2}/2$.

Latihan 12. (Hungarian Math Olympiad, 1947) Buktikan bahwa di antara enam orang dalam suatu ruangan terdapat tiga orang yang saling kenal, atau terdapat setidaknya tiga orang yang tidak saling kenal.

Latihan 13. Kita menyebut suatu himpunan "bebas jumlah" jika tidak ada dua anggota himpunan yang jumlahnya adalah anggota dari himpunan itu juga. Berapa maksimal banyaknya anggota subhimpunan dari himpunan $\{1, 2, \dots, 2n-1\}$ yang "bebas jumlah"?

Petunjuk: Perhatikan bahwa himpunan $\{n, n+1, n+2, \dots, 2n-1\}$ dengan n anggota adalah "bebas jumlah". Tunjukkan bahwa sebarang subhimpunan dengan $n + 1$ anggota tidak bebas jumlah.

Latihan 14. (MMPC 1992) Misalkan huruf-huruf alfabet dituliskan secara acak.

- Buktikan bahwa pasti terdapat empat huruf konsonan yang berurutan
- Tuliskan suatu daftar huruf alfabet dimana tidak terdapat lima huruf konsonan berurutan.
- Buktikan bahwa jika semua huruf diatur secara melingkar, maka terdapat lima huruf konsonan berurutan.

Latihan 15. Misalkan M adalah bilangan asli tujuh belas angka dan misalkan N adalah bilangan yang diperoleh dari M dengan menuliskan angka-angka yang sama tapi dengan

urutan terbalik. Buktikan bahwa terdapat setidaknya satu angka dari representasi bilangan $M + N$ yang genap.

Latihan 16. Tidak peduli bagaimanapun lima puluh lima bilangan asli dipilih dari $\{1, 2, \dots, 100\}$, buktikan bahwa dapat dipilih dua bilangan yang memiliki selisih 9, dua yang memiliki selisih 10, dua yang memiliki selisih 12, dan 2 yang memiliki selisih 13, tetapi tidak harus ada dua yang memiliki selisih 11.

Latihan 17. Diketahui $mn + 1$ bilangan real yang berbeda. Buktikan bahwa terdapat suatu barisan meningkat dengan setidaknya $n + 1$ anggota, atau barisan menurun dengan setidaknya $m + 1$ anggota.

Latihan 18. Jika titik-titik pada suatu bidang diwarnai dengan tiga warna, tunjukkan bahwa akan selalu terdapat dua titik dengan warna yang sama berjarak satu satuan.

Latihan 19. Tunjukkan bahwa jika titik-titik ada suatu bidang diwarnai dengan dua warna, maka akan selalu terdapat sebuah segitiga sama sisi yang titik sudut-titik sudutnya memiliki warna yang sama.

3. Paritas

Contoh 1. Misalkan dua persegi di sudut yang berseberangan dari sebuah papan catur dibuang. Tunjukkan bahwa tidak mungkin 62 persegi yang tersisa ditutup oleh 31 domino.

Jawab: Setiap domino menutup tepat satu kotak putih dan satu kotak hitam. Tetapi dua kotak persegi yang dibuang berwarna sama, sehingga jelas bahwa tidak mungkin persegi yang tersisa ditutup dengan 31 domino.

Contoh 2. Bilangan $1, 2, \dots, 10$ dituliskan dalam suatu baris. Tunjukkan bahwa bagaimanapun tanda penjumlahan atau pengurangan digunakan di depan masing-masing bilangan, maka jumlahnya tidak akan pernah menjadi 0.

Jawab: Jumlah dari $1 + 2 + \dots + 10 = 55$, suatu bilangan ganjil. Karena paritas tidak dipengaruhi oleh pemilihan tanda penjumlahan atau pengurangan, maka bagaimanapun tanda di depan masing-masing angka $1, 2, \dots, 10$ dipilih, jumlahnya tidak mungkin menjadi 0.

Definisi. Titik latis (m, n) pada suatu bidang adalah titik dengan koordinat bilangan bulat.

Definisi. Titik tengah dari suatu ruas garis yang menghubungkan (x, y) ke (x_1, y_1) adalah titik
$$\left(\frac{x + x_1}{2}, \frac{y + y_1}{2} \right)$$

Contoh 3. Lima titik latis dipilih secara acak. Buktikan bahwa kita selalu bisa memilih dua titik sehingga titik tengah yang menghubungkan keduanya juga merupakan titik latis.

Jawab: Perhatikan bahwa terdapat empat pola paritas: (genap, genap), (genap, ganjil), (ganjil, ganjil), (ganjil, genap). Berdasarkan PHP di antara lima titik latis pasti terdapat dua

titik yang memiliki paritas yang sama. Pilih dua, jelas bahwa titik tengahnya merupakan bilangan bulat juga.

Untuk contoh-contoh berikut, kita perlu mengetahui nama-nama dari tetromino berikut:



L-tetromino



T-Tetromino



Straight-tetromino



Skew-tetromino



square-tetromino

Contoh 4. Budi mengambil setiap potong dari masing-masing tetromino pada gambar di atas. Tunjukkan bahwa bagaimanapun penyusunan dilakukan, tidak mungkin dihasilkan sebuah persegi panjang.

Jawab: Jika penyusunan sebuah persegi panjang dimungkinkan, maka akan terdiri dari 20 persegi. Warnai persegi-persegi ini sebagaimana pewarnaan pada papan catur. Maka terdapat 10 persegi berwarna hitam dan 10 berwarna putih. Perhatikan bahwa T-tetromino selalu menutupi persegi berwarna hitam dengan jumlah ganjil, sedangkan tetromino lainnya selalu menutupi dengan jumlah genap. Sehingga banyaknya persegi warna hitam yang tertutupi adalah ganjil. Kontradiksi.

Contoh 5. Tunjukkan bahwa sebuah papan catur 8×8 tidak bisa ditutupi dengan 15 straight-tetromino dan sebuah L-tetromino.

Jawab: Warnai baris 1, 3, 5, 7 dengan warna hitam dan baris 2, 4, 6, 8 dengan warna putih. Straight-tetromino akan selalu menutupi persegi putih dengan jumlah genap, sedangkan L-tetromino akan selalu menutupi dengan jumlah ganjil. Jika dimungkinkan ada pengubinan yang diminta, maka kita akan menutupi ubin warna putih dengan jumlah ganjil, kontradiksi.

Latihan 6. Dua puluh anak laki-laki dan perempuan duduk di sekeliling meja bundar. Tunjukkan bahwa pasti terdapat seseorang yang diapit oleh dua orang anak perempuan.

Latihan 7. Angka 1, 2, ..., 2001 dituliskan pada papan. Seseorang menghapuskan sepasang bilangan pada papan kemudian menuliskan selisihnya di papan. Hal tersebut dilakukan berulang kali hingga tinggal tersisa sebuah bilangan. Apakah mungkin bilangan tersebut 0?

Latihan 8. Tunjukkan bahwa sebuah papan catur berukuran 10×10 tidak bisa ditutupi dengan 25 straight tetromino.

Latihan 9. Tunjukkan bahwa sebuah papan catur berukuran 8×8 tidak bisa ditutupi dengan 15 T-tetromino dan sebuah tetromino.

Latihan 10. Sebuah pertemuan dihadiri oleh n peserta. Sejumlah peserta saling berjabat tangan. Tidak ada yang berjabat tangan dengan dirinya sendiri dan setiap dua peserta berjabat tangan paling banyak satu kali. Seseorang peserta dikatakan ganjil jika banyaknya jabat tangan yang dilakukannya adalah ganjil. Tunjukkan bahwa banyaknya peserta ganjil adalah genap.

Prinsip ini digunakan untuk menentukan kardinalitas dari gabungan himpunan-himpunan yang tidak harus saling lepas. Untuk kasus di mana banyaknya himpunan adalah dua atau tiga, dengan menggunakan diagram Venn kita dapat dengan mudah menunjukkan bahwa

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|,$$

dan

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Secara umum, jika diberikan n buah himpunan maka kardinalitas dari gabungan n buah himpunan ini diberikan oleh

$$\begin{aligned} &|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| \\ &= \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{i < j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i < j < k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots (-1)^{n+1} |A_i \cap A_j \cap \dots \cap A_n| \end{aligned}$$

Contoh 1. Pada sebuah klub olahraga 10 orang menyukai tenis, 15 orang menyukai squash, 12 orang menyukai badminton. Di antara mereka, 5 orang menyukai tenis dan squash, 4 orang menyukai tenis dan badminton, 3 orang menyukai squash dan badminton, dan 2 orang menyukai ketiga olahraga ini. Berapa banyak anggota klub yang menyukai sedikitnya satu dari ketiga cabang olahraga ini?

Jawab: Misalkan T , S , B , secara berturut-turut, adalah himpunan anggota klub yang menyukai tenis, squash dan badminton. Maka

$$\begin{aligned} |T \cup S \cup B| &= |T| + |S| + |B| - |T \cap S| - |T \cap B| - |S \cap B| + |T \cap S \cap B| \\ &= 10 + 15 + 12 - 5 - 4 - 3 + 2 \\ &= 27. \end{aligned}$$