

# 알튜비튜

## 최단 경로

간선에 가중치가 있는 그래프가 주어질 때, 정점 사이의 최단 경로를 구하는 알고리즘입니다.  
대표적으로 [다익스트라](#), [플로이드-워셜](#), [벨만-포드 알고리즘](#)이 있습니다.

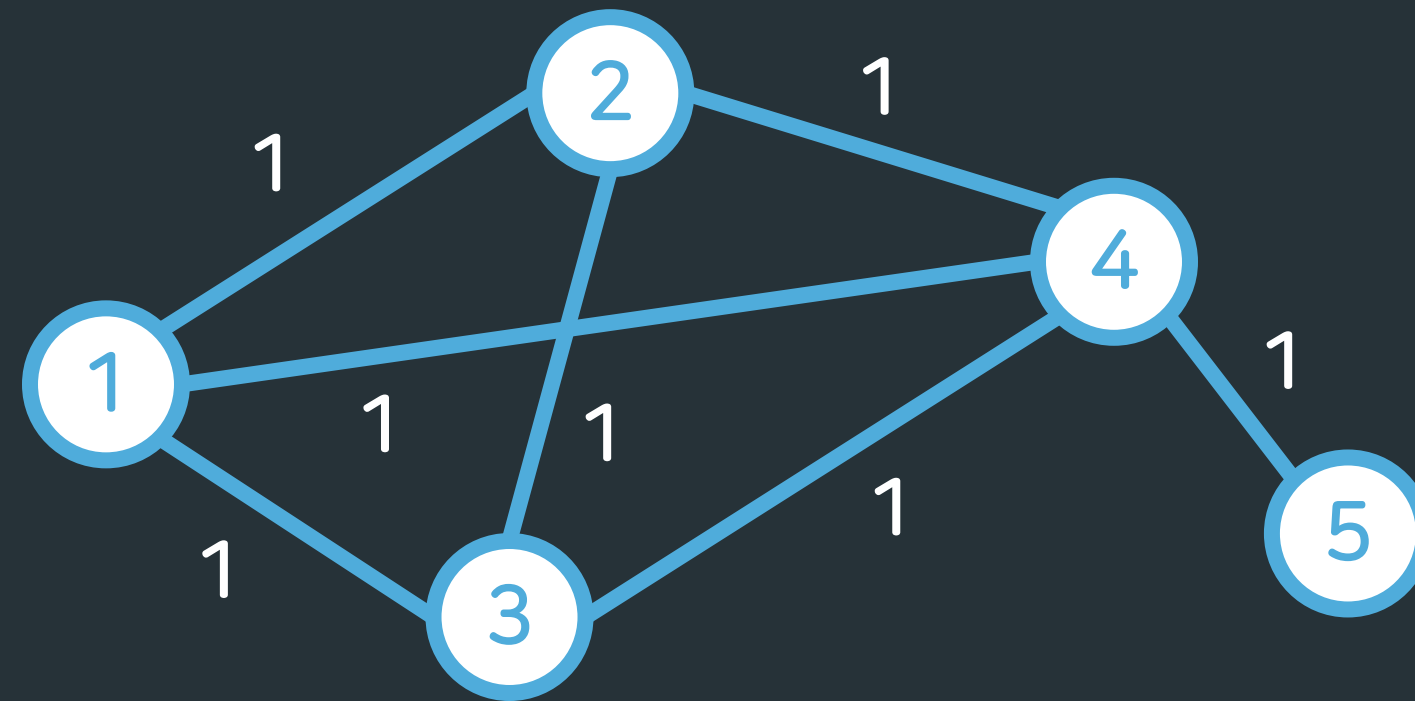
코딩테스트에 자주 나오진 않지만 한 번 나오면 난이도 있는 문제로 나오곤 해요.

■ 지난 시간에 이런 얘기를 했었어요



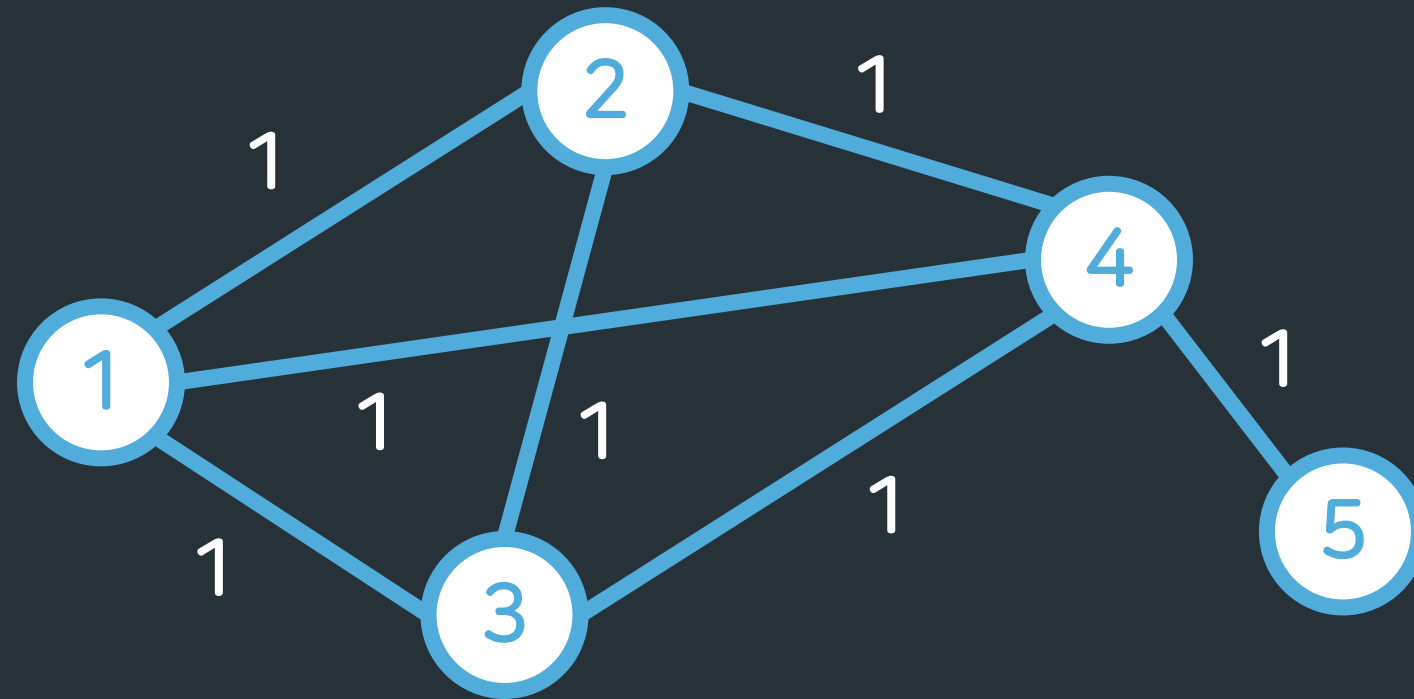
두 정점 사이의 최단 거리를 구할 땐 BFS

■ 지난 시간에 이런 얘기를 했었어요



사실은 **가중치가 1인** 그래프의 최단 경로를 구한 것과 같음

■ 지난 시간에 이런 얘기를 했었어요



사실은 **가중치가 1**인 그래프의 최단 경로를 구한 것과 같음

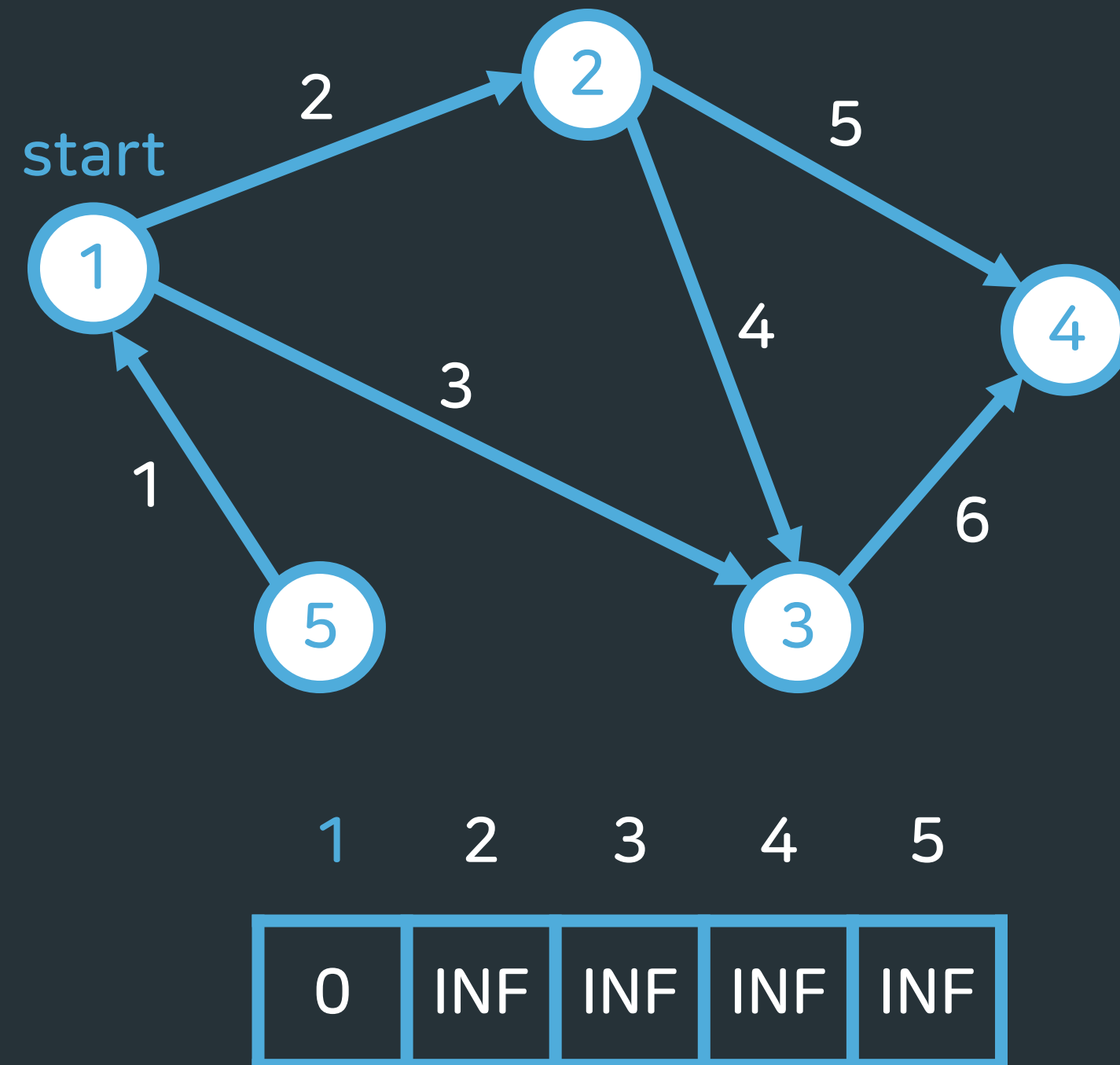
가중치가 **다양**하다면?

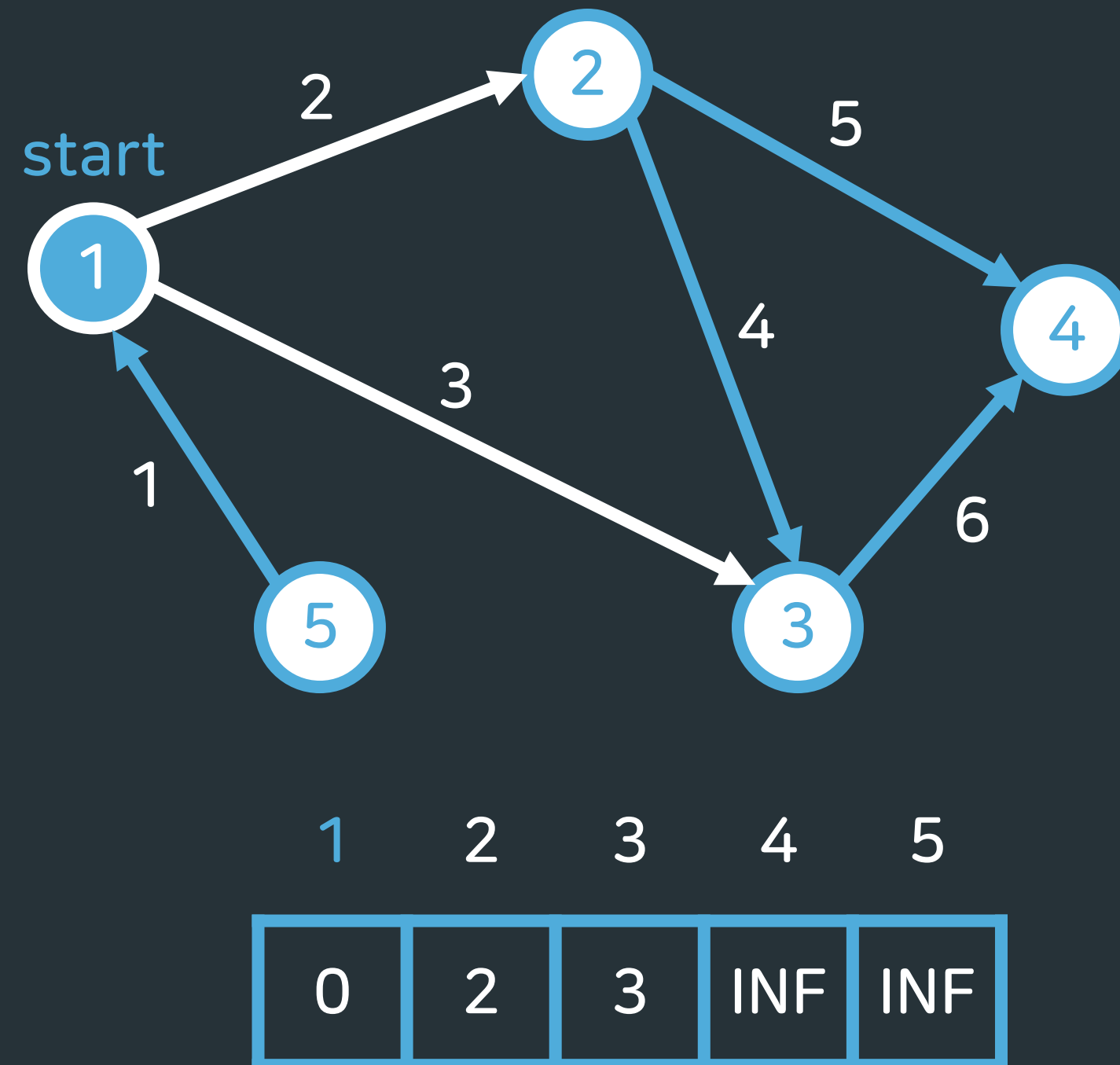
## Shortest Path

- 그래프에서 정점 사이의 최단 경로를 구하는 알고리즘
  - Single-Source (SSP) : 하나의 시작점에 대한 모든 정점까지의 최단 경로
  - Single-Destination : 모든 정점으로부터 하나의 도착점까지의 최단 경로. SSP를 뒤집어서 구현
  - Single-Pair : 특정 정점 2개 사이의 최단 경로. SSP의 sub-problem
  - All-Pairs (ASP) : 가능한 모든 정점 2개의 조합에 대한 최단 경로
- 
- SSP : 다익스트라, 벨만-포드
  - ASP : 플로이드-워셜

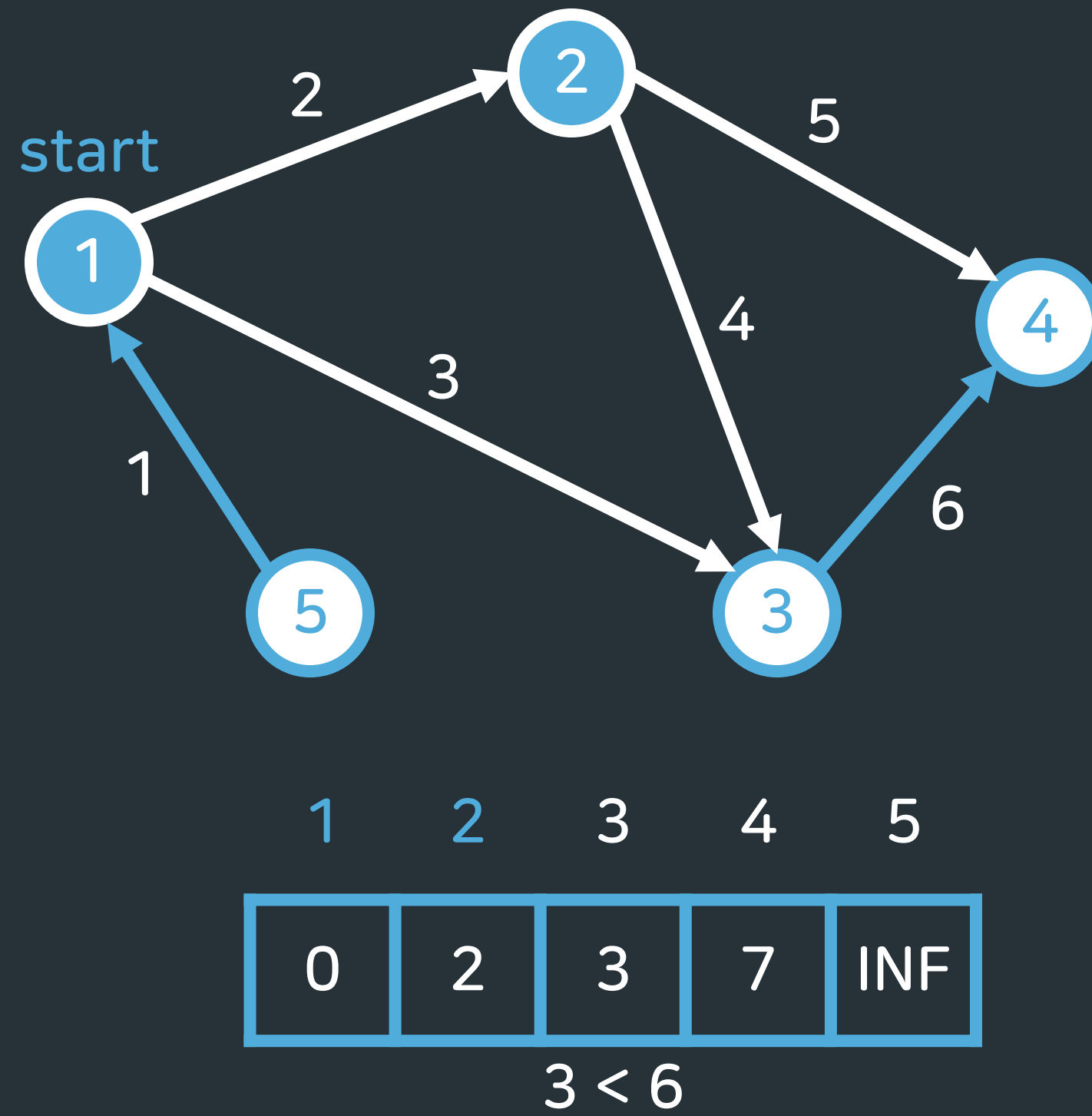
## Dijkstra

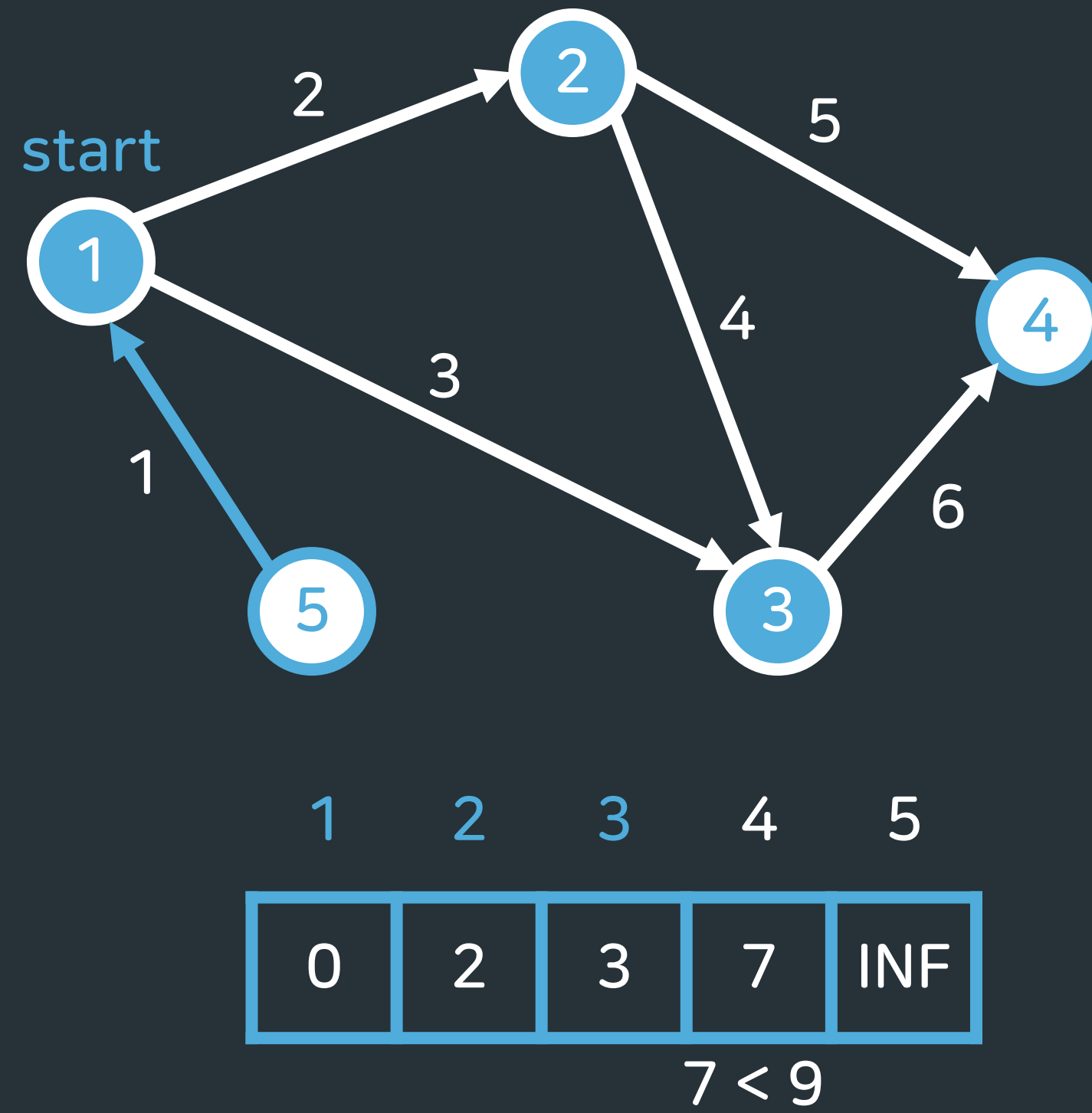
- 하나의 시작점에서 모든 정점까지의 최단 경로를 구하는 SSP 알고리즘
- 시작 정점으로부터 가장 가까운 정점부터 탐색하는 그리디적 접근
- 가중치가 음수인 간선이 있다면, 경우에 따라 무한 루프에 빠질 수 있음
- 정점의 수를  $V$ , 간선의 수를  $E$ 라고 할 때, 시간 복잡도는  $O(V \log V + E \log V)$

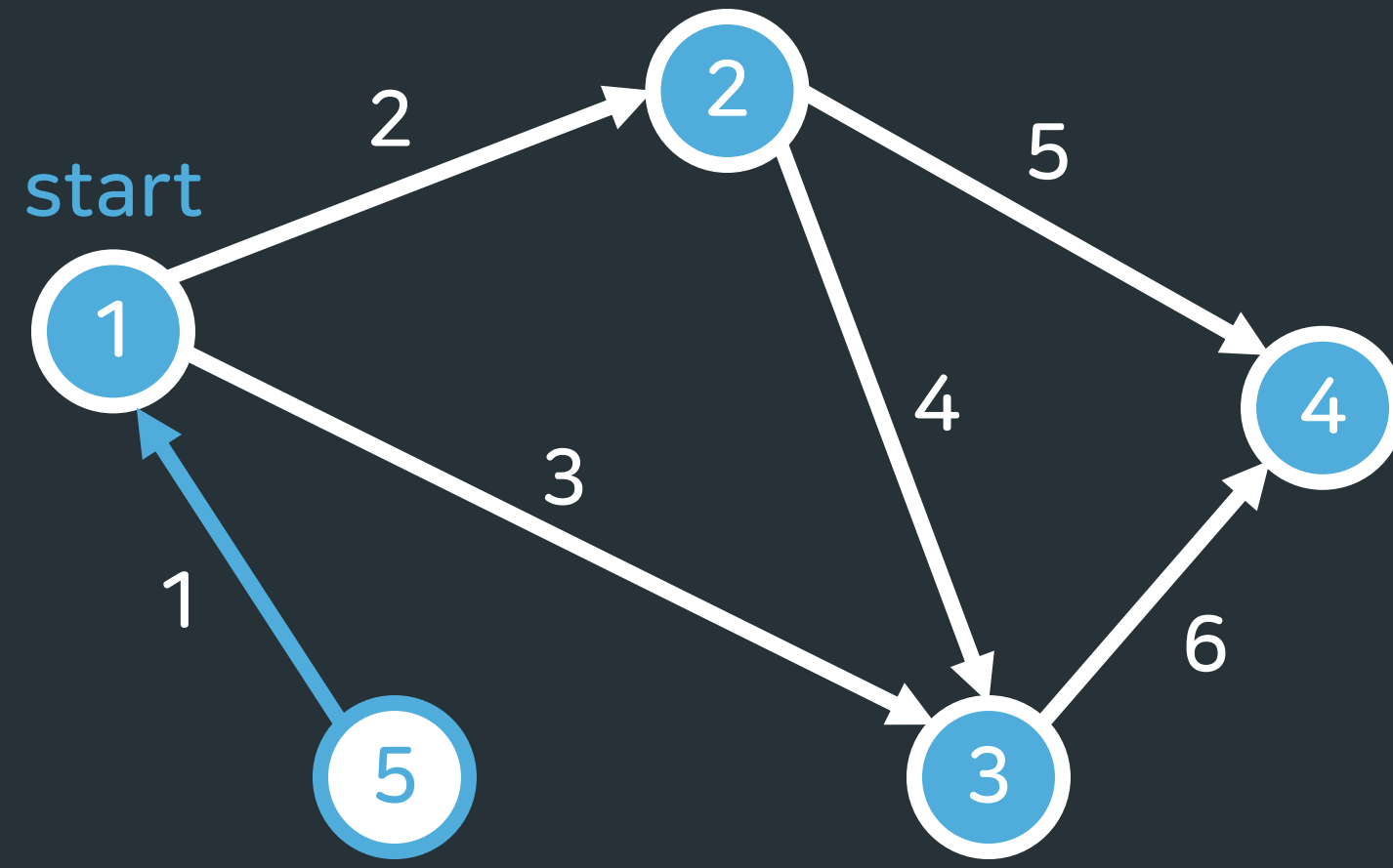








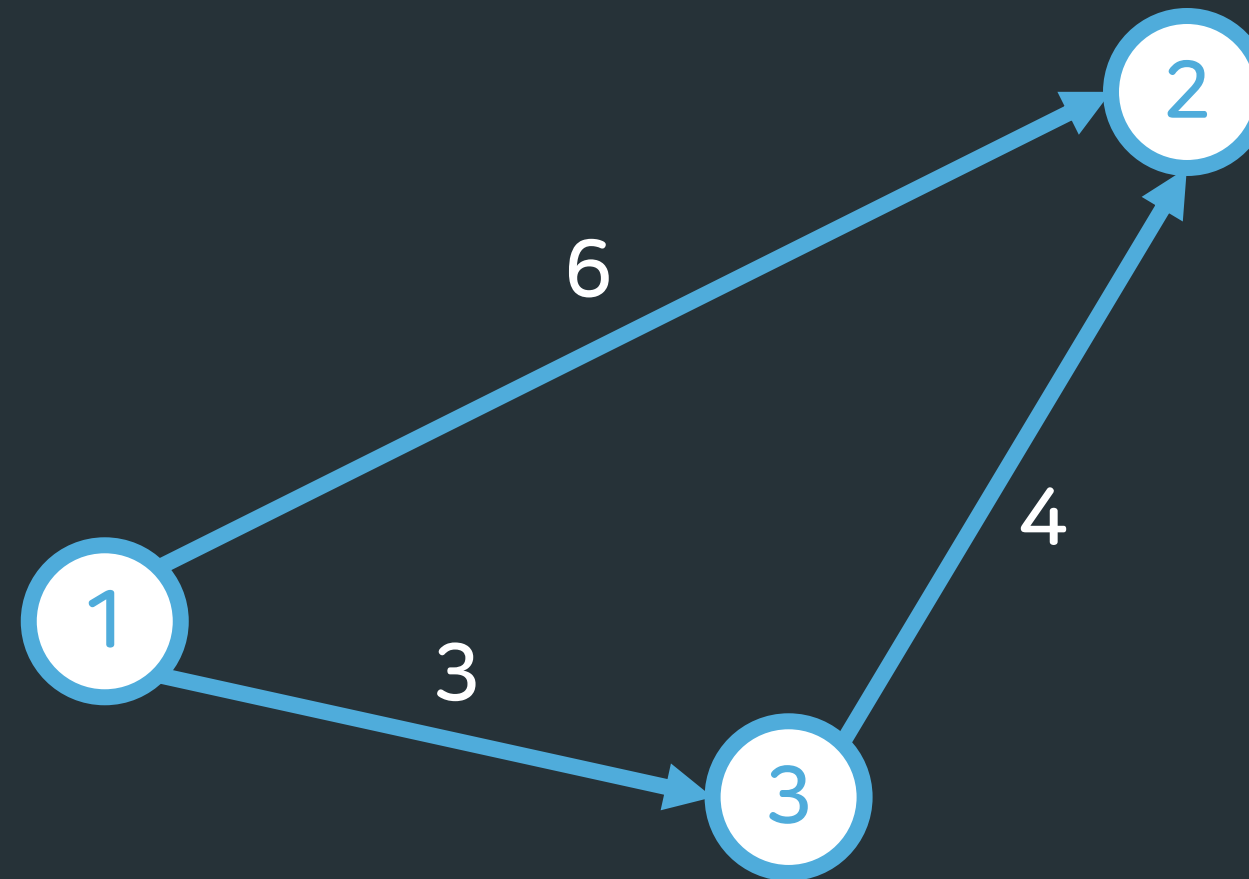




1	2	3	4	5
0	2	3	7	INF

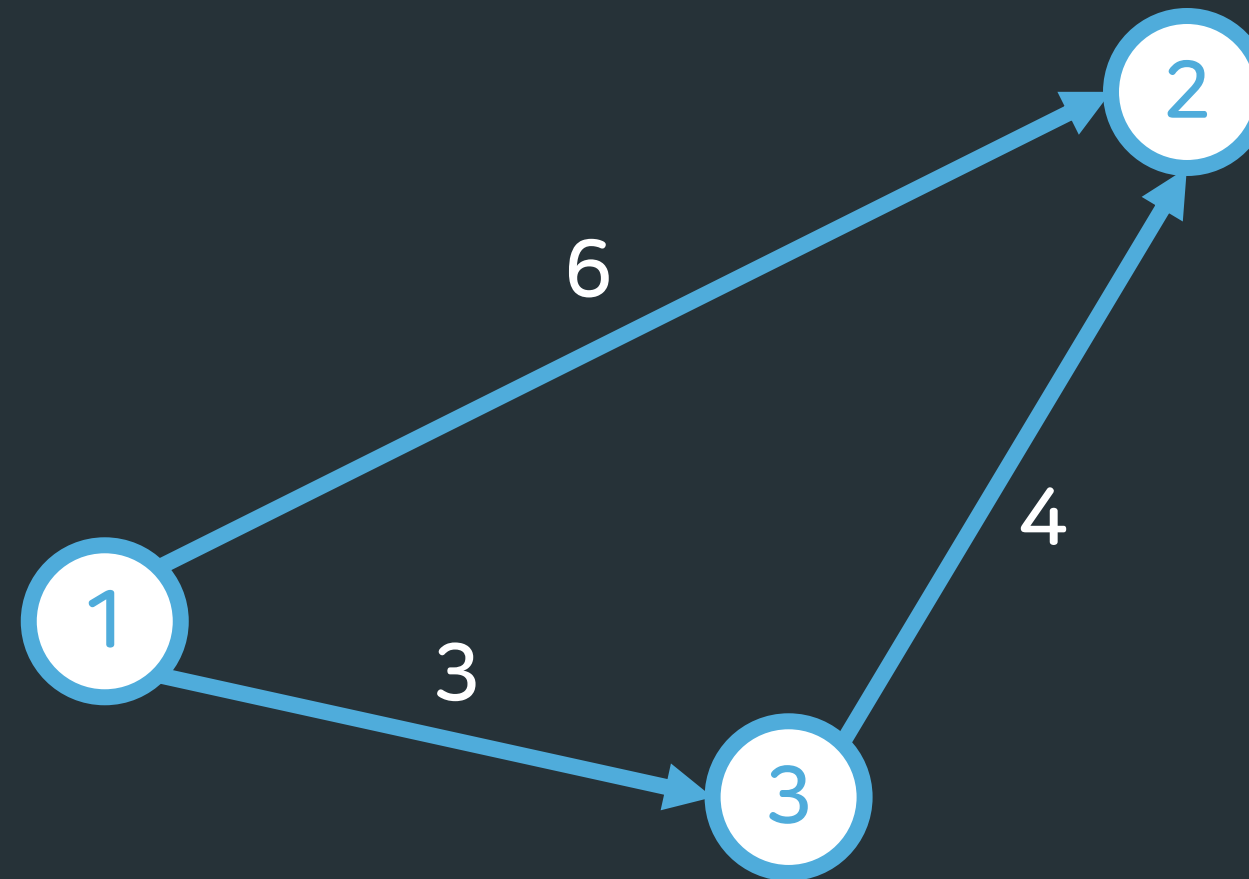
더 이상 탐색할 수 있는 정점 없음

# 정말 그리디가 가능할까?



1->3 간선을 먼저 선택하고 3->2 간선을 선택해 1->3->2로 갔는데  
알고보니 1->2로 바로 가는게 최단 경로라면?

# 정말 그리디가 가능할까?



1->3 간선을 먼저 선택했더라도 3->2 간선 하나를 고려하는게 아니라 1부터의 거리를 고려하는 것!  
그러므로 3->2를 통해 1->3->2를 가기 전 1->2 간선을 먼저 고려하게 될 것

cf) 시작점으로부터의 거리가 아니라 간선 자체의 가중치만 고려하는 것은 Prim 알고리즘



모든 정점까지의 거리를 담은 `dist` 배열을 `INF`으로 초기화  
시작 정점까지의 거리 `0`으로 초기화

```
while (갱신할 정점이 있을 때까지) {
```

```
    int v = 탐색하지 않은 정점 중 시작점에서 가장 가까운 정점
```

← 현재 가장 가까운 정점을  
정점의 수만큼(`V`) 찾아야 함

```
    for (v와 연결된 모든 정점에 대해){
```

```
        int u = v와 연결된 정점
```

```
        if(dist[v] + weight[v][u] < dist[u]){
```

```
            dist[u] = dist[v] + weight[v][u]
```

```
        }
```

```
    }
```

```
}
```

← 간선의 수만큼(`E`)  
`dist`를 갱신하게 됨



모든 정점까지의 거리를 담은 `dist` 배열을 `INF`으로 초기화  
시작 정점까지의 거리 `0`으로 초기화

```
while (갱신할 정점이 있을 때까지) {  
    int v = 탐색하지 않은 정점 중 시작점에서 가장 가까운 정점  
  
    for (v와 연결된 모든 정점에 대해){  
        int u = v와 연결된 정점  
        if(dist[v] + weight[v][u] < dist[u]){  
            dist[u] = dist[v] + weight[v][u]  
        }  
    }  
}
```

현재 가장 가까운 정점을  
정점의 수만큼( $V$ ) 찾아야 함

간선의 수만큼( $E$ )  
dist를 갱신하게 됨

$O(V)$ (가까운 정점 찾기) +  $O(E)$ (dist값 갱신하기)

# 갱신 정보는 어떤 자료구조에?

## 배열

- 갱신된 dist는 배열에 바로 삽입할 수 있음  $O(1)$
- dist 중 가장 작은 값을 찾으려면 배열 원소를 하나하나 살펴봐야 함  $O(n)$

## 우선순위 큐

- 갱신된 dist는 배열에 삽입 후 우선순위에 따라 배치됨  $O(\log n)$
- dist 중 가장 작은 값을 찾으려면 우선순위 큐(min-heap)에서 원소 하나를 삭제하면 됨  $O(\log n)$



# 갱신 정보는 어떤 자료구조에?

**배열**  $O(n^2)$

- 갱신된 dist는 배열에 바로 삽입할 수 있음  $O(1)$
- dist 중 가장 작은 값을 찾으려면 배열 원소를 하나하나 살펴봐야 함  $O(n)$

**우선순위 큐**  $O(V \log V + E \log V)$

- 갱신된 dist는 배열에 삽입 후 우선순위에 따라 배치됨  $O(\log n)$
- dist 중 가장 작은 값을 찾으려면 우선순위 큐(min-heap)에서 원소 하나를 삭제하면 됨  $O(\log n)$

## /<> 1753번 : 최단경로 - Gold 5

### 문제

- 방향 그래프에서 주어진 시작점에 대한 다른 모든 정점으로의 최단 경로를 출력

### 제한 사항

- 정점의 개수  $V$ 는  $1 \leq V \leq 20,000$
- 간선의 개수  $E$ 는  $1 \leq E \leq 300,000$
- 간선의 가중치  $w$ 는  $1 \leq w \leq 10$

\*인접 행렬로 구현할 때 필요한 공간은  $20,000 * 20,000 = 4\text{억}$  -> 불가능!

\* $V$ 와  $E$ 가 최대일 때 각 정점의 간선은 최대 15개로 적다! -> 인접 리스트로 구현

## 예제 입력 1

```
5 6
1
5 1 1
1 2 2
1 3 3
2 3 4
2 4 5
3 4 6
```

## 예제 출력 1

```
0
2
3
7
INF
```

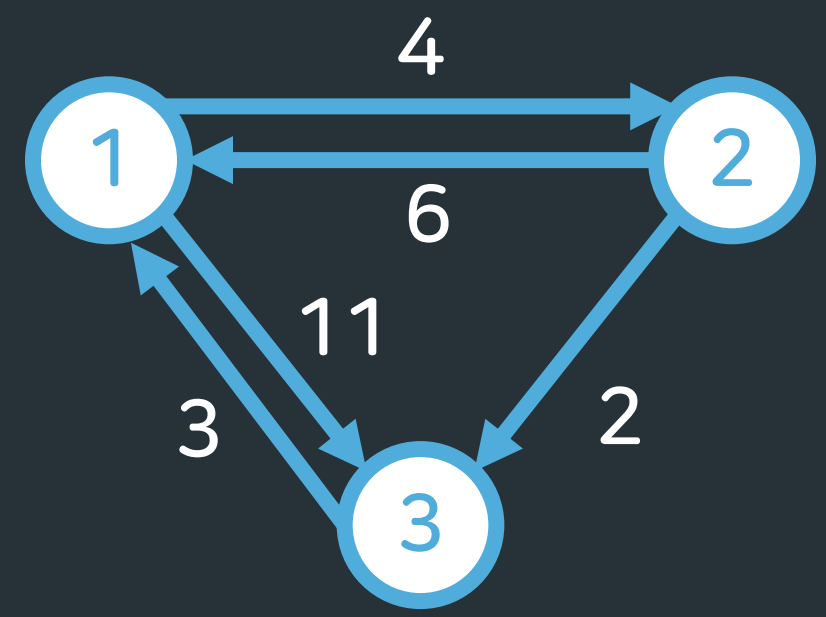
## Floyd-Warshall

- 가능한 모든 정점 2개의 조합에 대한 최단 경로를 구하는 ASP 알고리즘
- 두 정점 사이의 최단 경로에 포함될 수 있는 모든 정점의 경우를 고려하는 dp 접근
- 정점의 수를  $V$ , 간선의 수를  $E$ 라고 할 때, 시간 복잡도는  $O(V^3)$

### $V = 128, E = 8,000$ 일 때

- 다익스트라  $V$ 번 수행 :  $128 * (128 * \log(128) + 8,000 * \log(128)) = 7,282,688$
- 플로이드-워셜 :  $128 * 128 * 128 = 2,097,152$

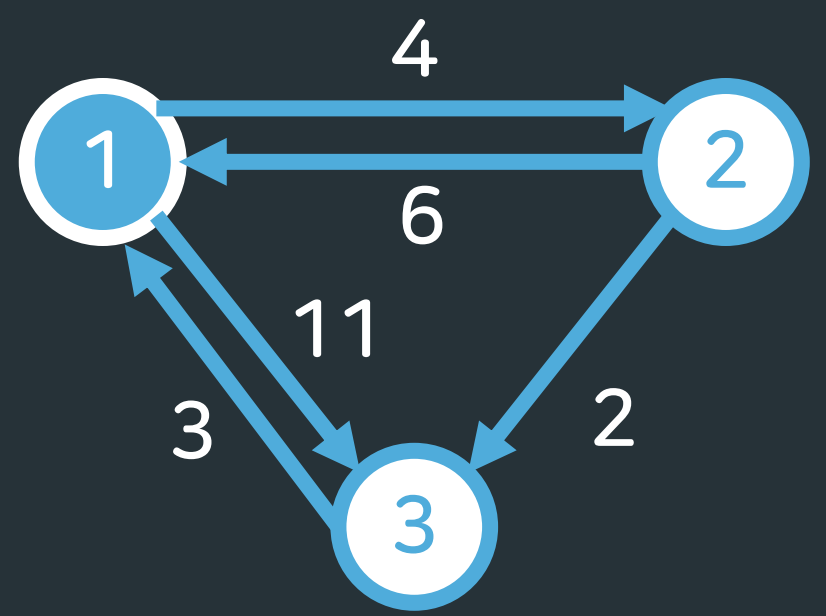
=> 모든 정점 사이의 최단 경로를 구할 땐 플로이드-워셜이 더 효율적이다!



	v1	v2	v3
v1	0	4	11
v2	6	0	2
v3	3	INF	0

- 각 정점을 중간 정점으로 해당 정점을 지나는 모든 경로에 대한 값을 계산

- 중간 정점 1



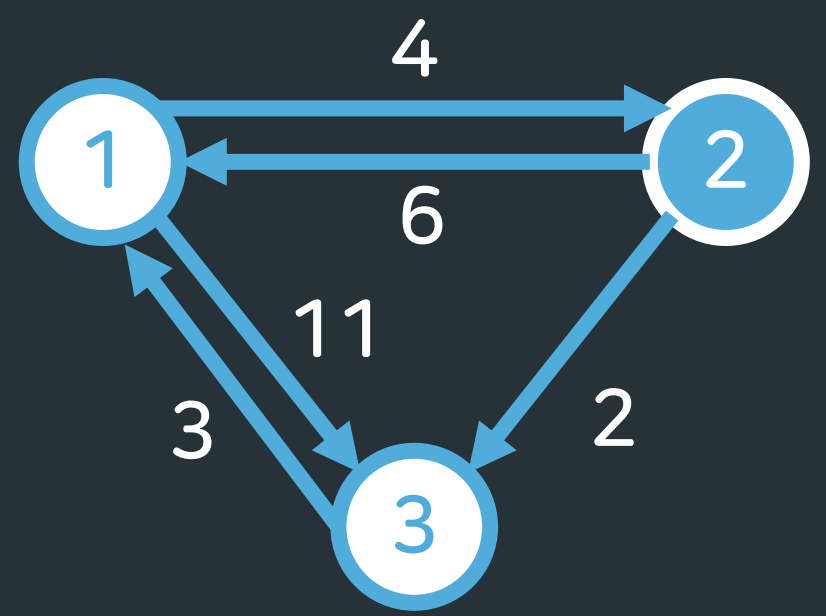
- $2 \rightarrow 1 \rightarrow 3 : 6 + 11 = 17$
- $3 \rightarrow 1 \rightarrow 2 : 3 + 4 = 7$

	v1	v2	v3
v1	0	4	11
v2	6	0	2
v3	3	7	0

$17 < 2$  (x)

$7 < \text{INF}$

## ● 중간 정점 2



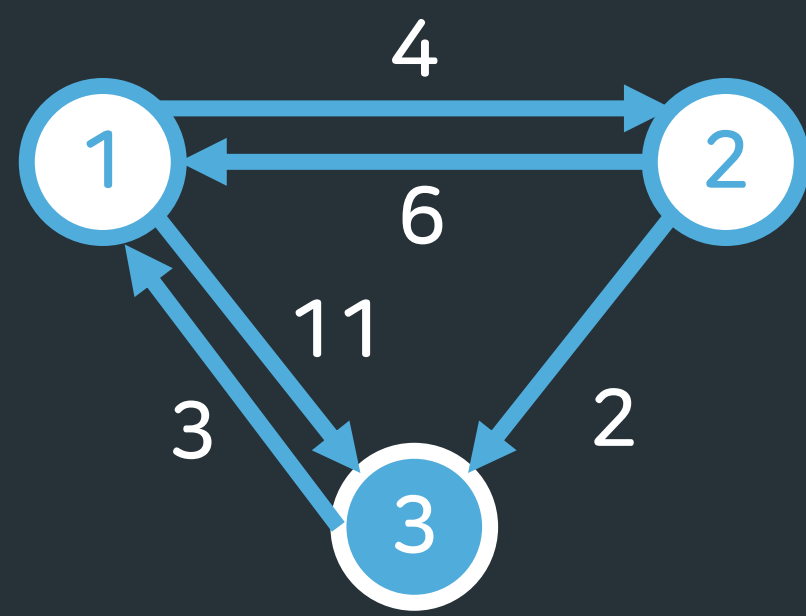
- $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 : 4 + 2 = 6$
- $3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 : 7 + 6 = 13$

	v1	v2	v3
v1	0	4	6
v2	6	0	2
v3	3	7	0

←  $6 < 11$

$13 < 3$  (x)

- 중간 정점 3

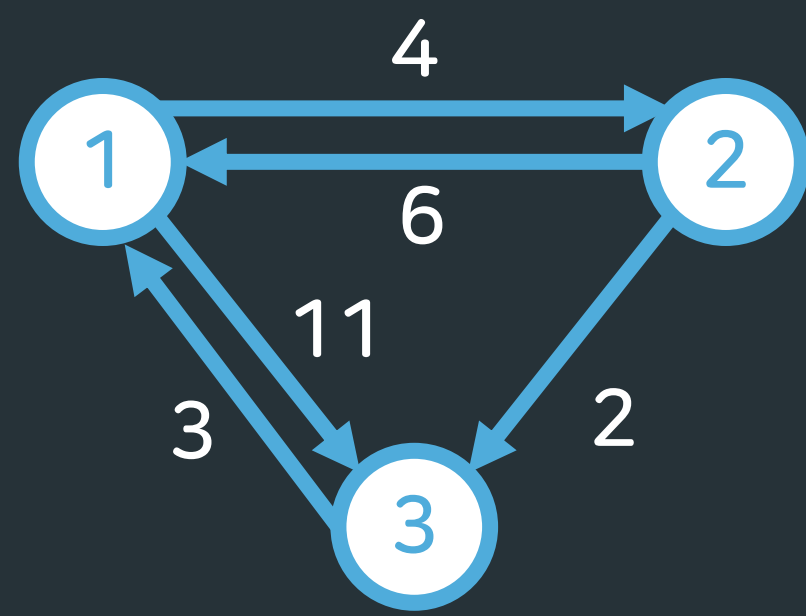


- $2 \rightarrow 3 \rightarrow 1 : 2 + 3 = 5$
- $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 : 6 + 7 = 13$

	v1	v2	v3
v1	0	4	6
v2	5	0	2
v3	3	7	0

Annotations:   
 - An arrow points from the value 6 in the cell (v1, v3) to the text  $13 < 4 (x)$ .   
 - An arrow points from the value 5 in the cell (v2, v1) to the text  $5 < 6$ .





	v1	v2	v3
v1	0	4	6
v2	5	0	2
v3	3	7	0

## /<> 11404번 : 플로이드 - Gold 4

### 문제

- 모든 도시의 쌍 (A, B)에 대해 A에서 B로 가는 비용의 최솟값은?

### 제한 사항

- 도시의 개수  $n$ 은  $1 \leq n \leq 100$
- 도시 사이를 오가는 버스의 수는  $1 \leq m \leq 100,000$
- 이동 비용  $c$ 는  $1 \leq c \leq 100,000$

\*최대 100개의 도시에 어떻게 버스의 수가 100,000개?  
-> (A, B)에 대해 간선이 여러 개일 수 있다!

## 예제 입력 1

```
5 14
1 2 2
1 3 3
1 4 1
1 5 10
2 4 2
3 4 1
3 5 1
4 5 3
3 5 10
3 1 8
1 4 2
5 1 7
3 4 2
5 2 4
```

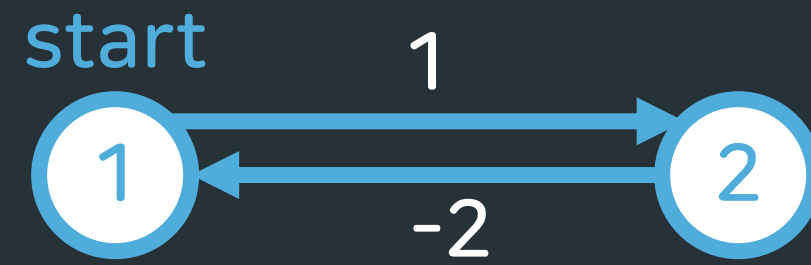
## 예제 출력 1

```
0 2 3 1 4
12 0 15 2 5
8 5 0 1 1
10 7 13 0 3
7 4 10 6 0
```

## Bellman-Ford

- 하나의 시작점에서 모든 정점까지의 최단 경로를 구하는 SSP 알고리즘
- 가중치가 음수일 때 다익스트라 대신 사용
- 모든 정점을  $V-1$ 번 갱신한 뒤, 한 번 더 갱신을 시도하는 브루트포스적 접근
- 정점의 수를  $V$ , 간선의 수를  $E$ 라고 할 때, 시간 복잡도는  $O(VE)$

# 다익스트라는 왜?



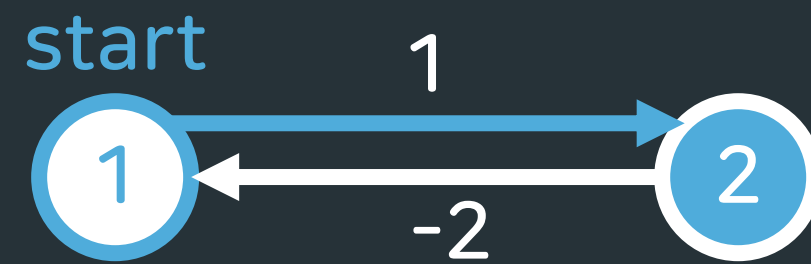
1	2
0	INF

# 다익스트라는 왜?



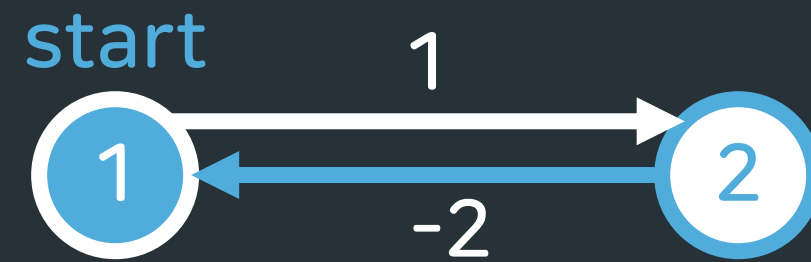
1	2
0	1

# 다익스트라는 왜?



1	2
-1	1

# 다익스트라는 왜?



1	2
-1	0



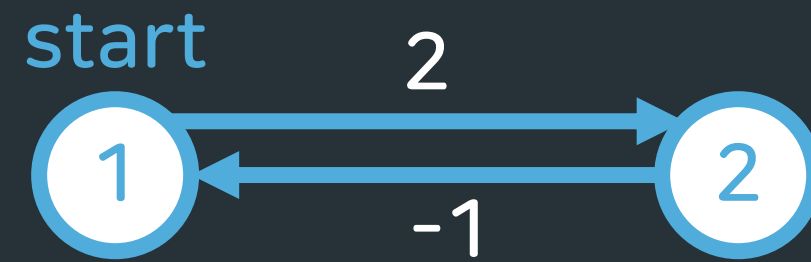
# 다익스트라는 왜?



1	2
-2	0

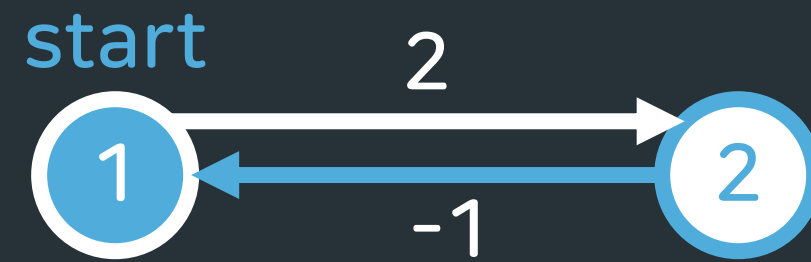
최단 경로가 무한히 갱신됨  
음의 사이클!

늘 불가능한 건 아니예요!



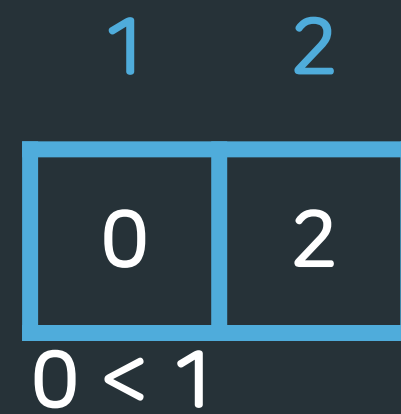
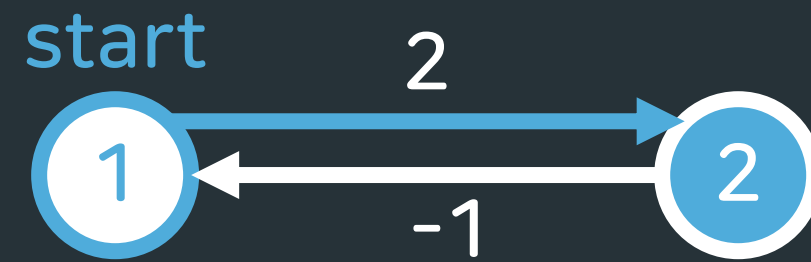
1	2
0	INF

늘 불가능한 건 아니예요!

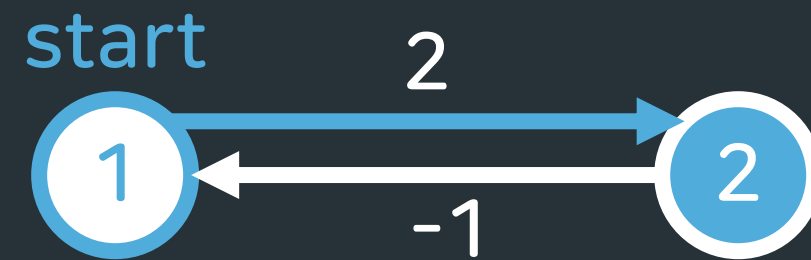


1	2
0	2

# 늘 불가능한 건 아니예요!

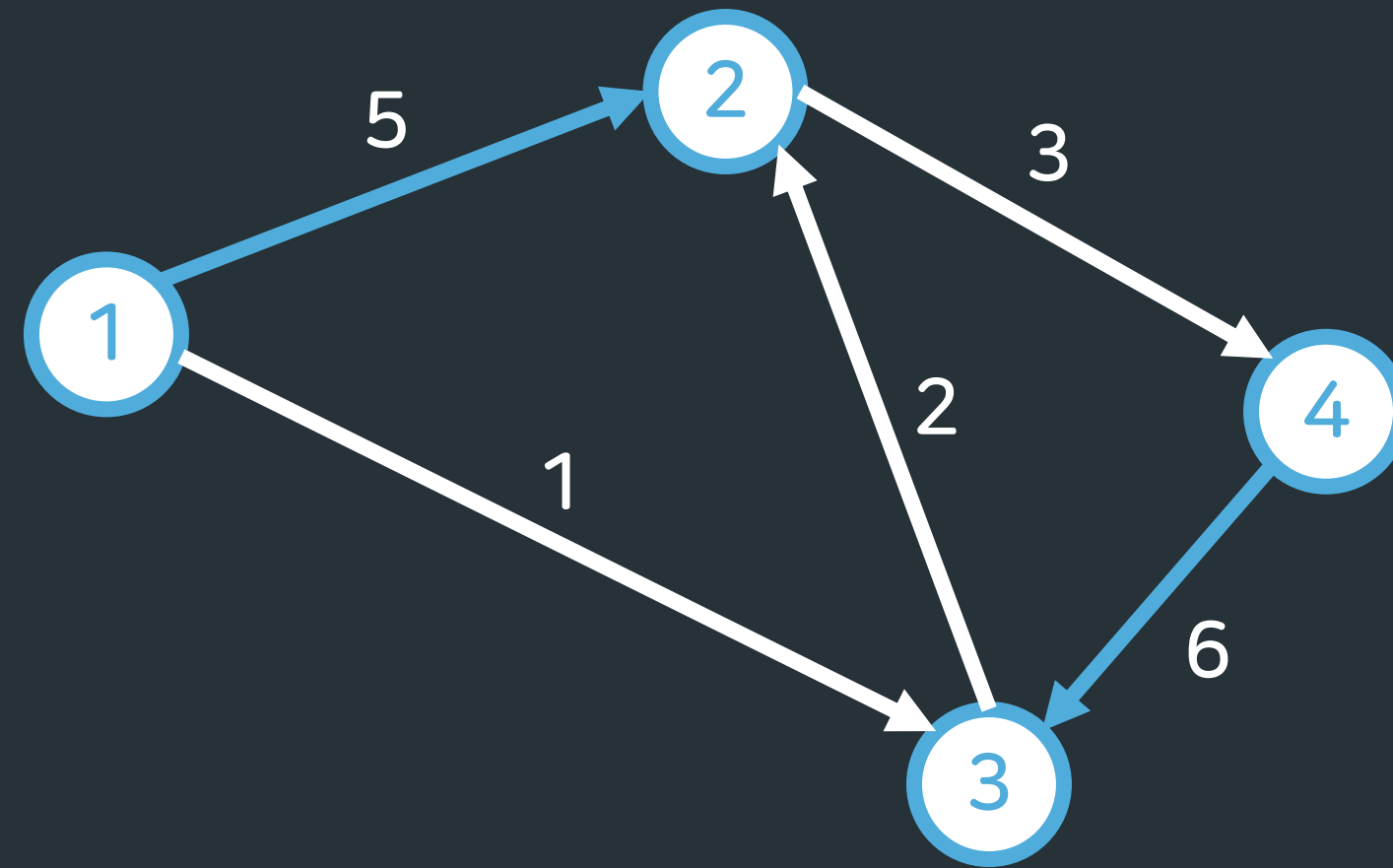


# 늘 불가능한 건 아니예요!

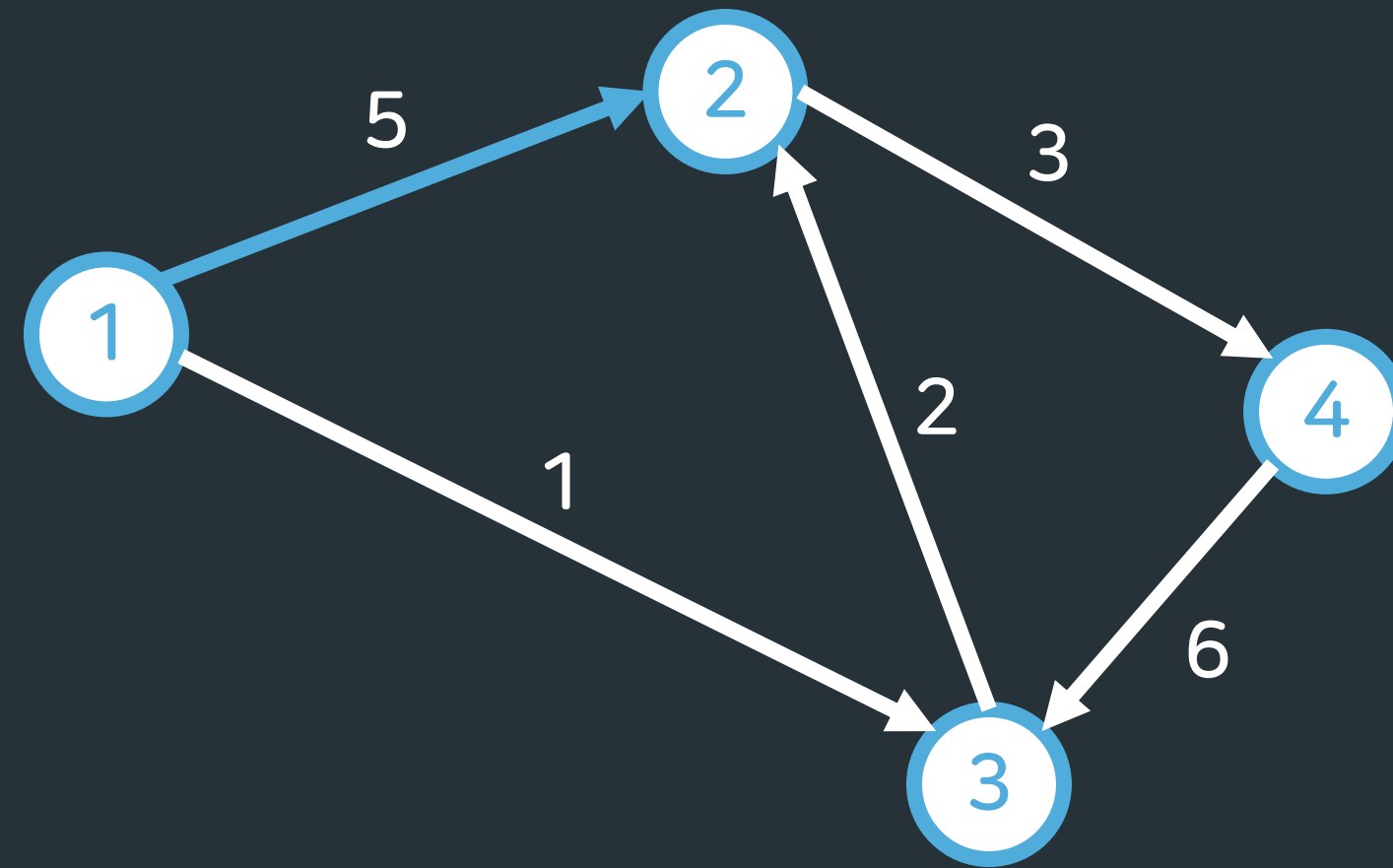


1	2
0	2

그래도 다익스트라는 음의 사이클을 잡아낼 수 없어 사용 불가



정점이  $V$ 개일 때 정점  $A \rightarrow B$ 의 경로에는 최대  $V-1$ 개의 간선이 있을 수 있음



정점이  $V$ 개일 때 정점  $A \rightarrow B$ 의 경로에는 최대  $V-1$ 개의 간선이 있을 수 있음

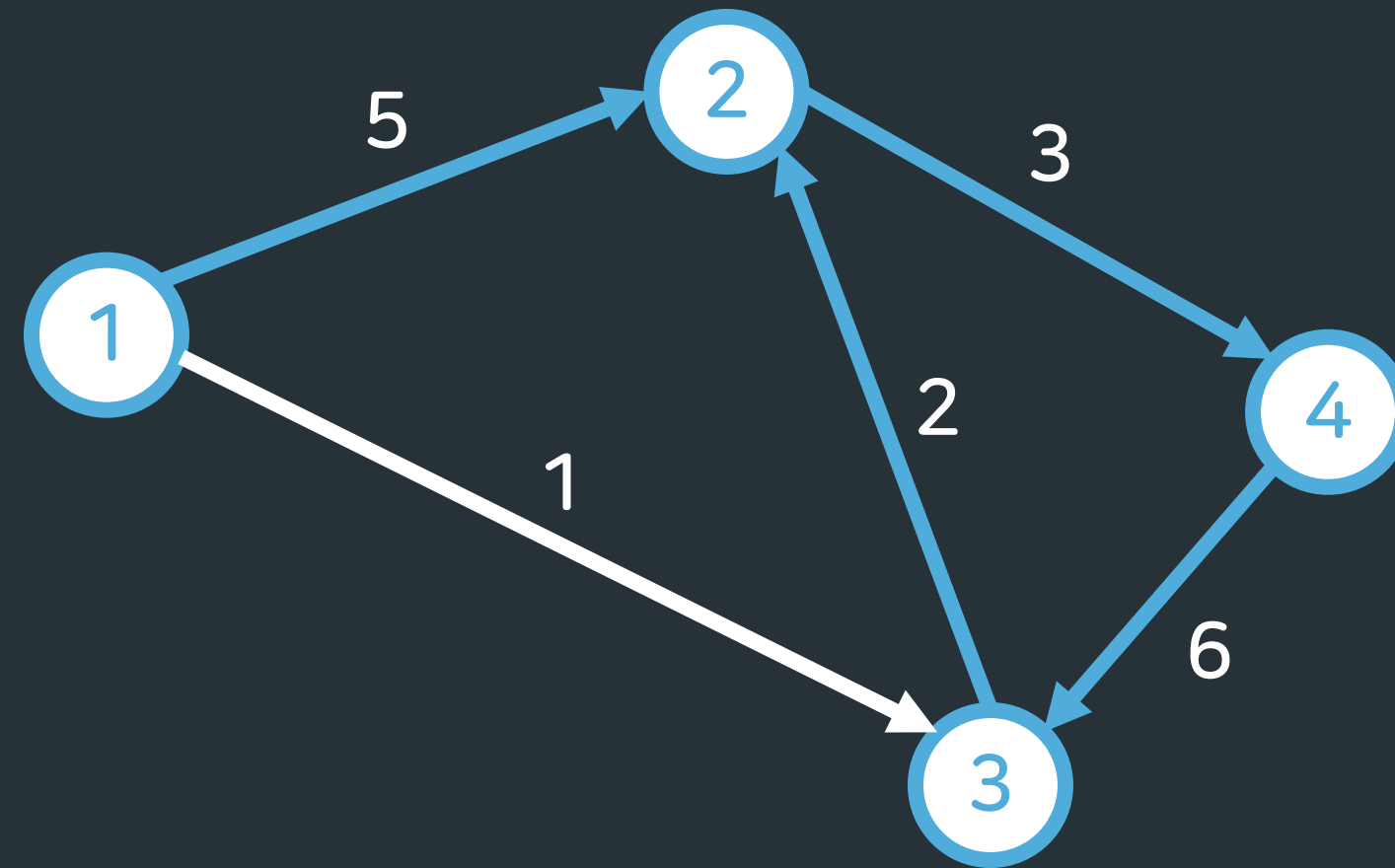
그 이상의 간선을 사용하면 **사이클** 형성!

사이클이 생겼다

= 최단 경로를 이루는 간선이  $V$ 개 이상인 정점 A, B가 있다  
=  $V$ 번 이상 갱신되는 간선이 있다

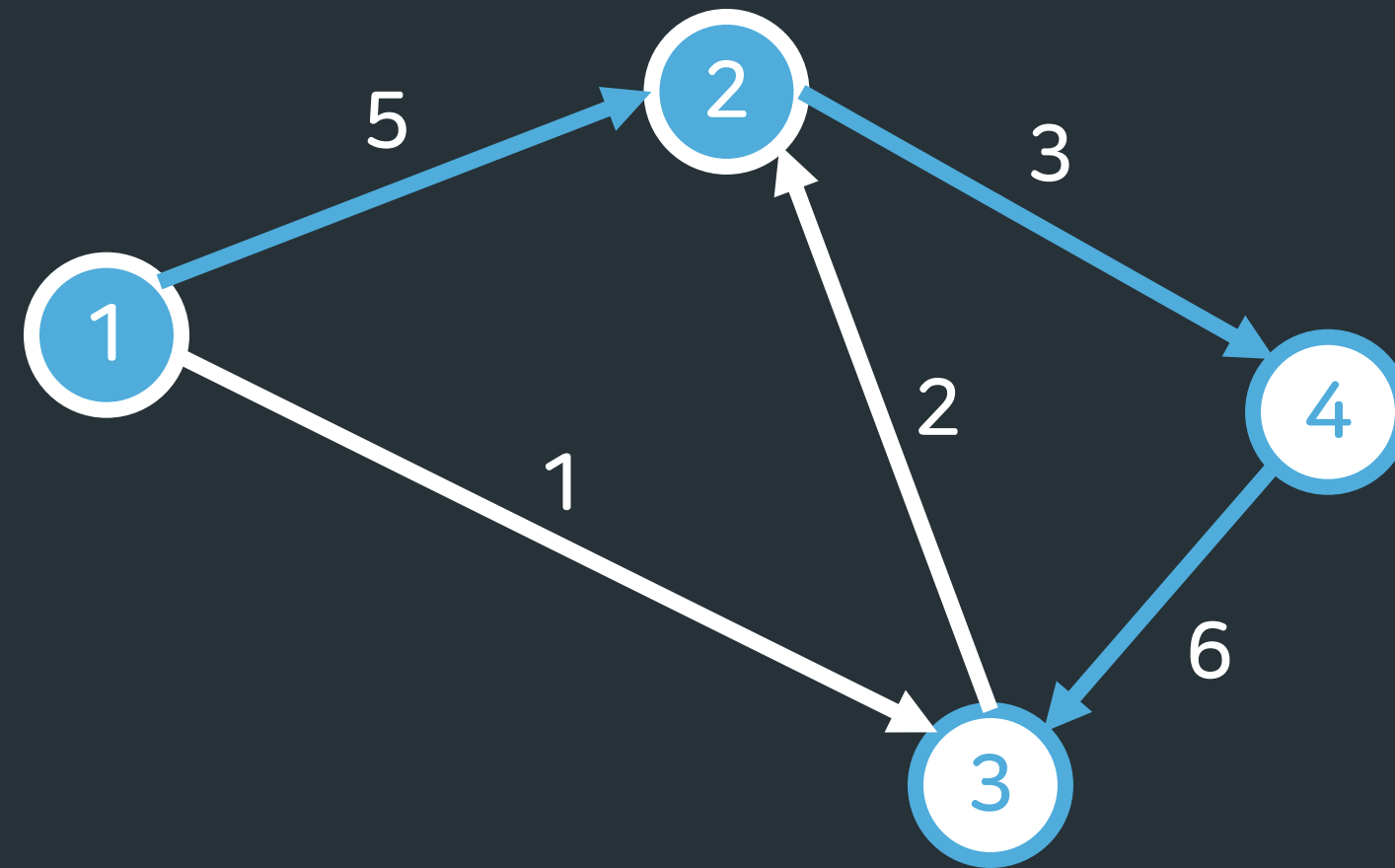


## 좀 더 직관적으로 생각해볼까요?



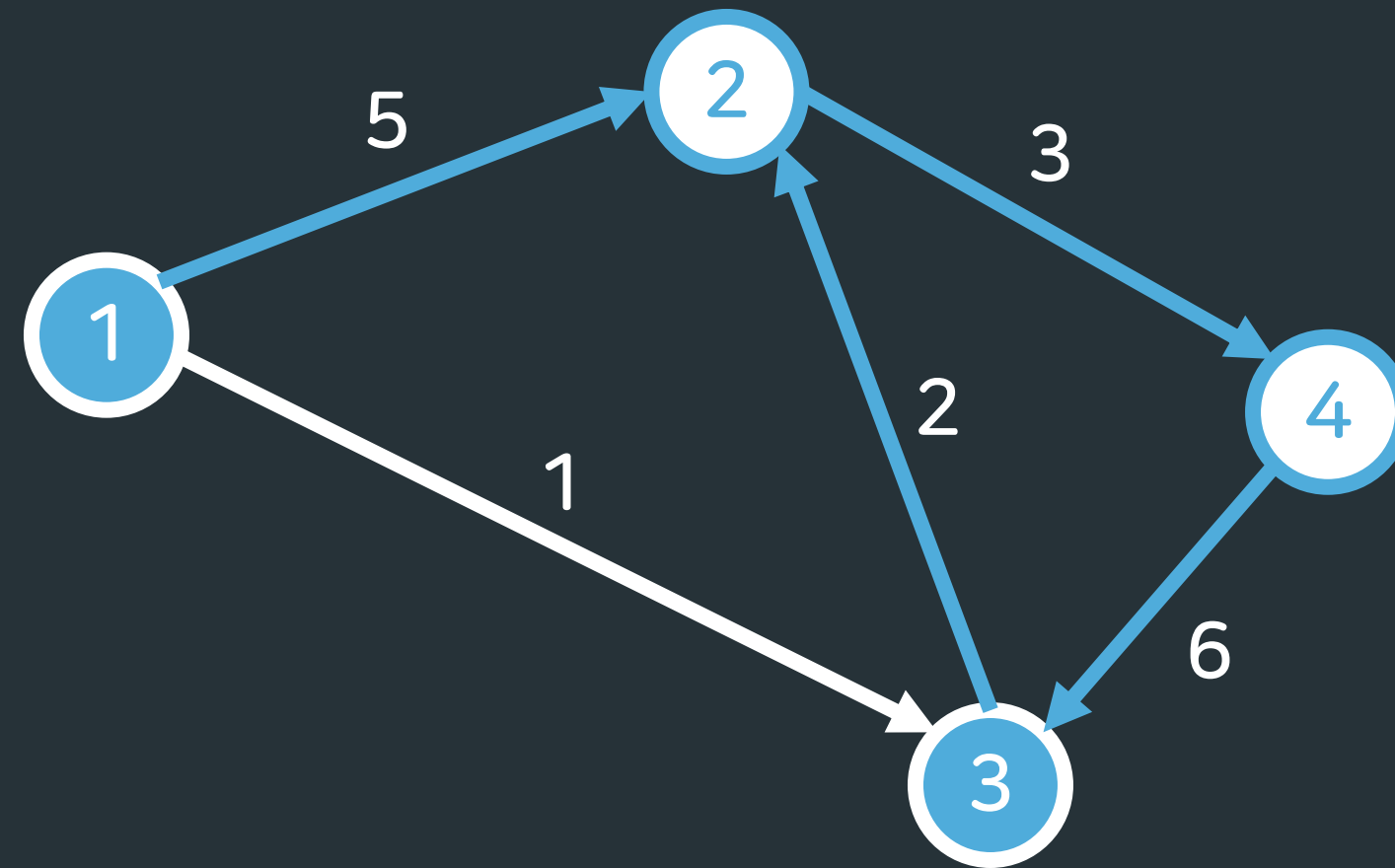
1번 정점에서 모든 정점으로의 최단 경로를 구할 때  
하얀색으로 칠한 간선은 최대 몇 번 사용될까요?

■ 좀 더 직관적으로 생각해볼까요?



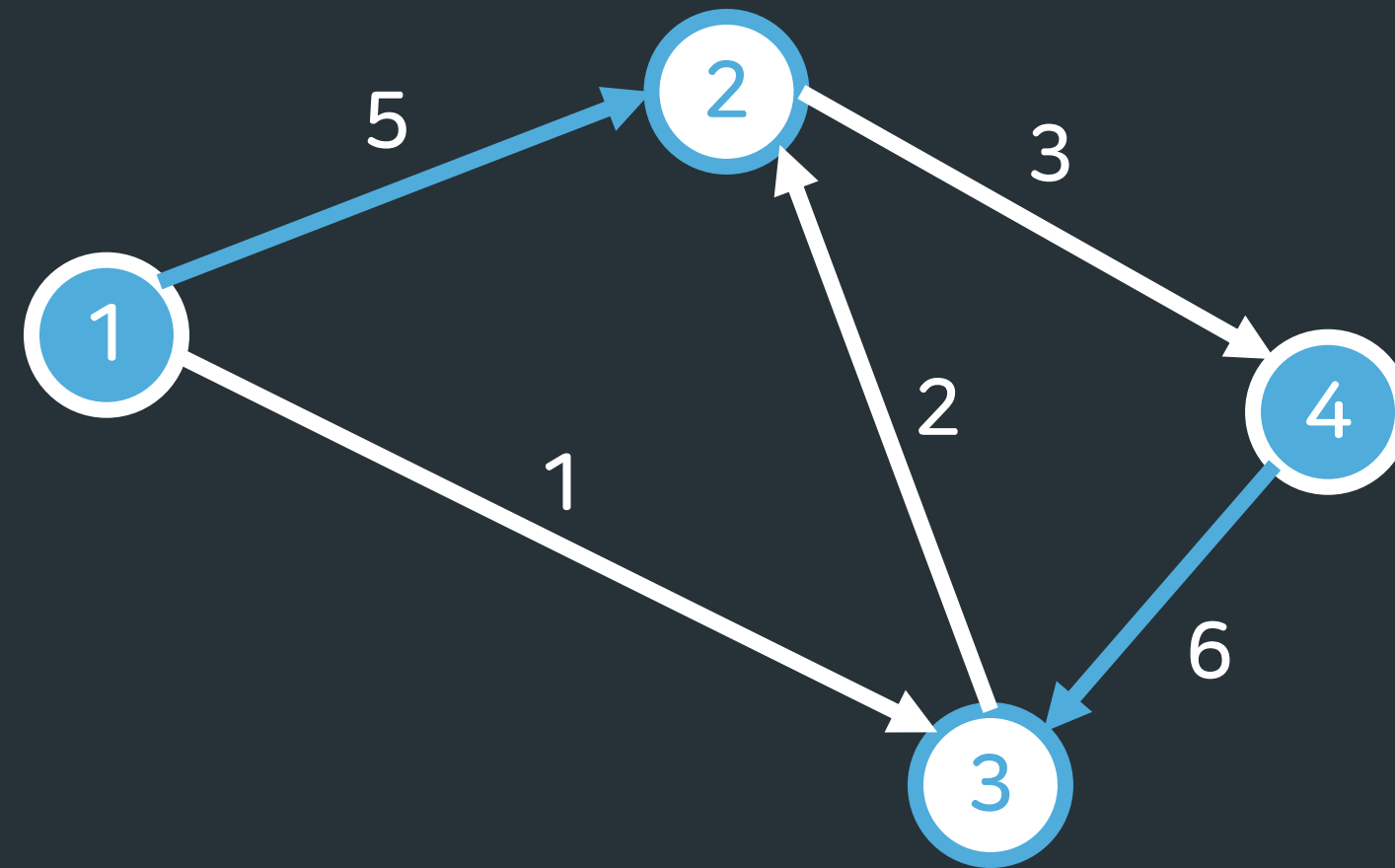
1 - 2

■ 좀 더 직관적으로 생각해볼까요?



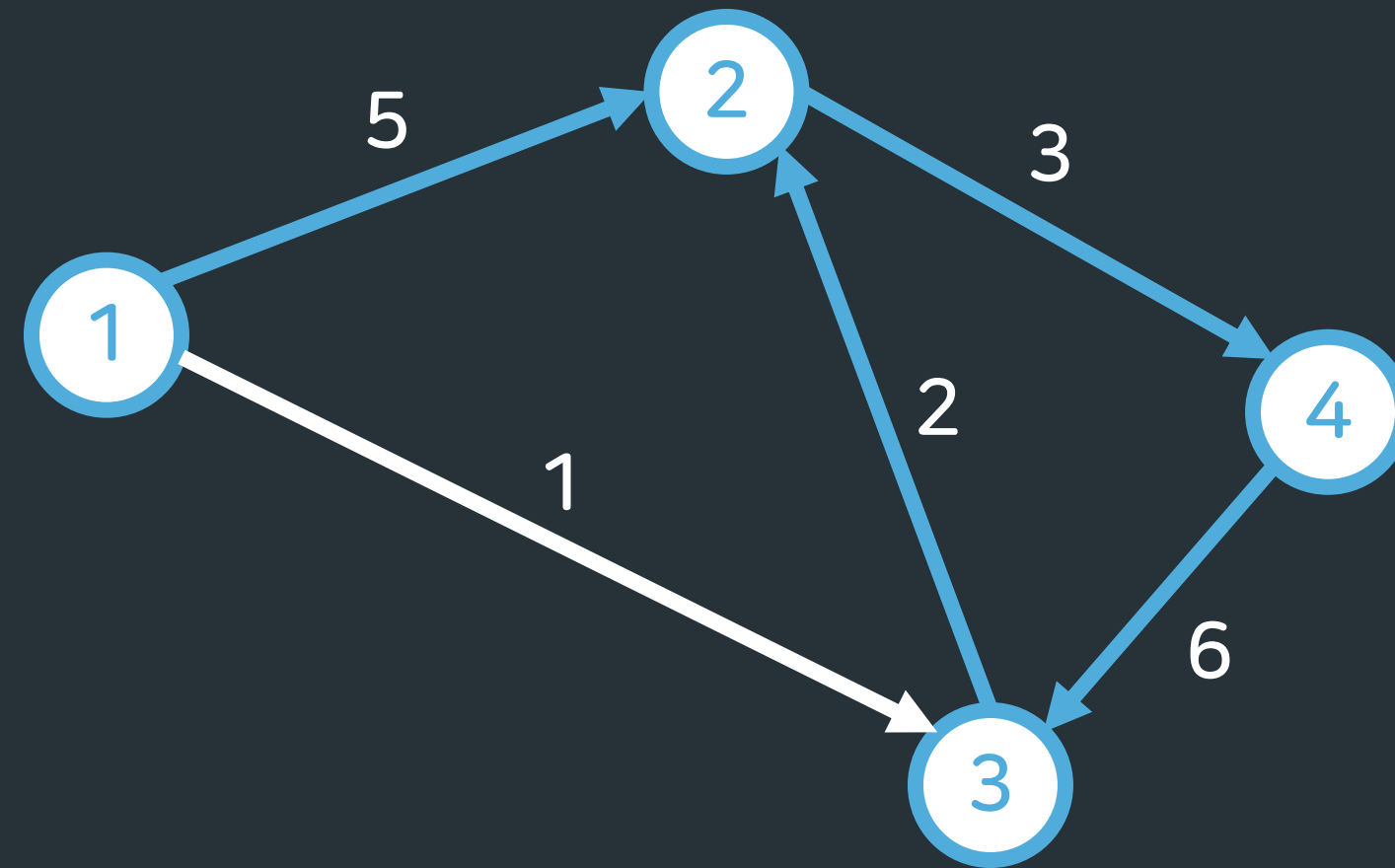
1 - 3

■ 좀 더 직관적으로 생각해볼까요?

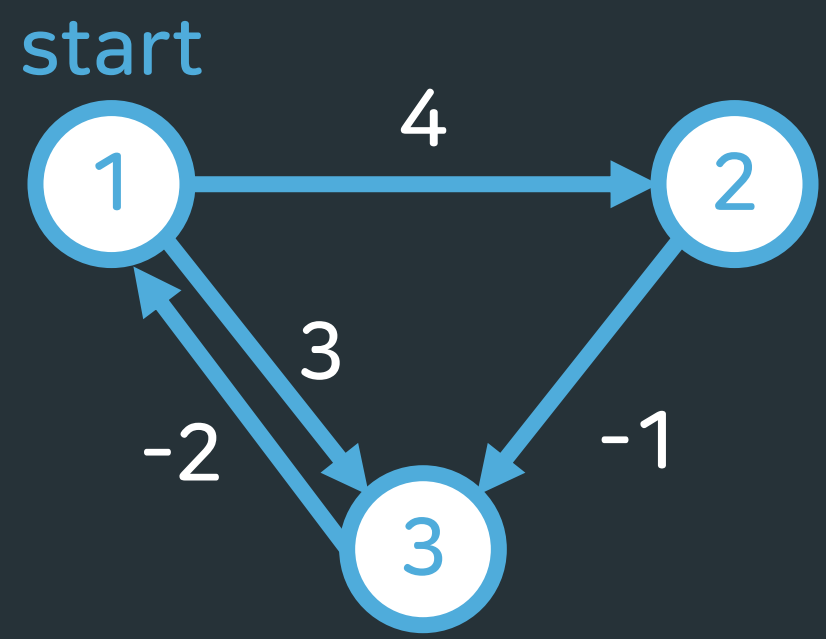


1 - 4

## 좀 더 직관적으로 생각해볼까요?

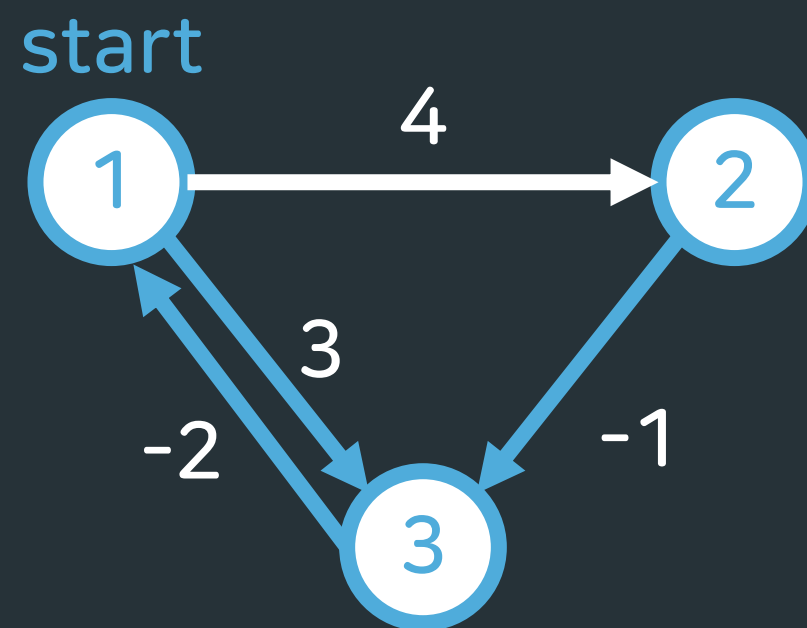


최단 경로를 구할 정점의 수가  $V-1$ 개이므로  
사이클이 없다면 특정 간선은 최대  $V-1$ 번만 사용됨!



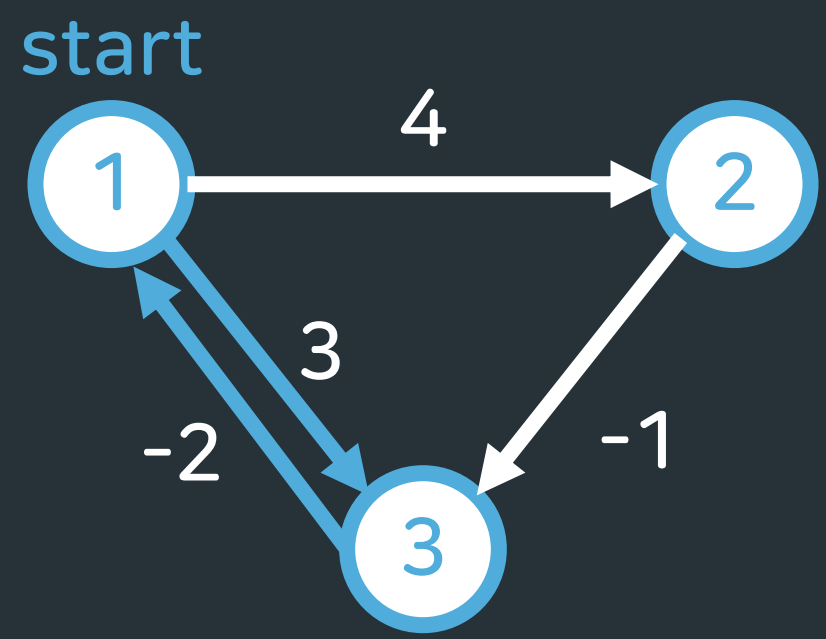
1	2	3
0	INF	INF

첫번째 반복



1	2	3
0	4	INF

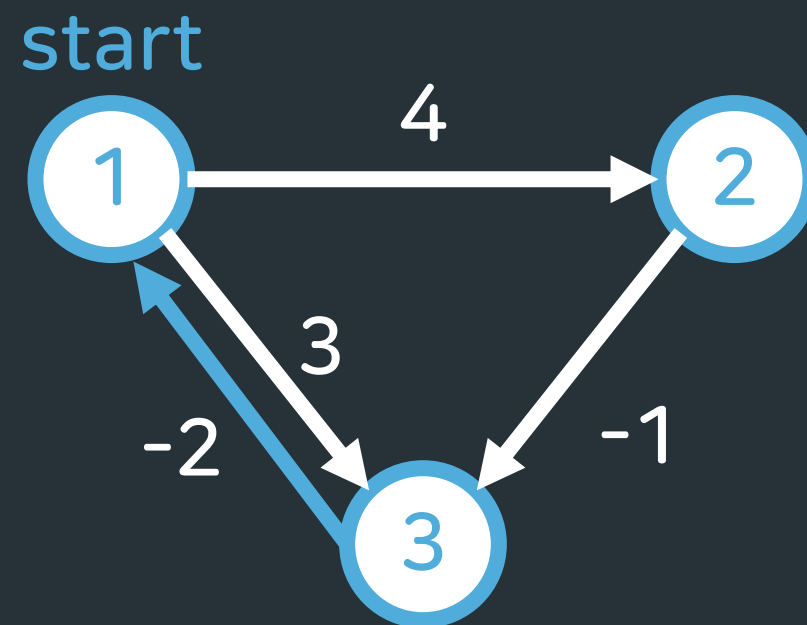
첫번째 반복



1	2	3
0	4	3

첫번째 반복

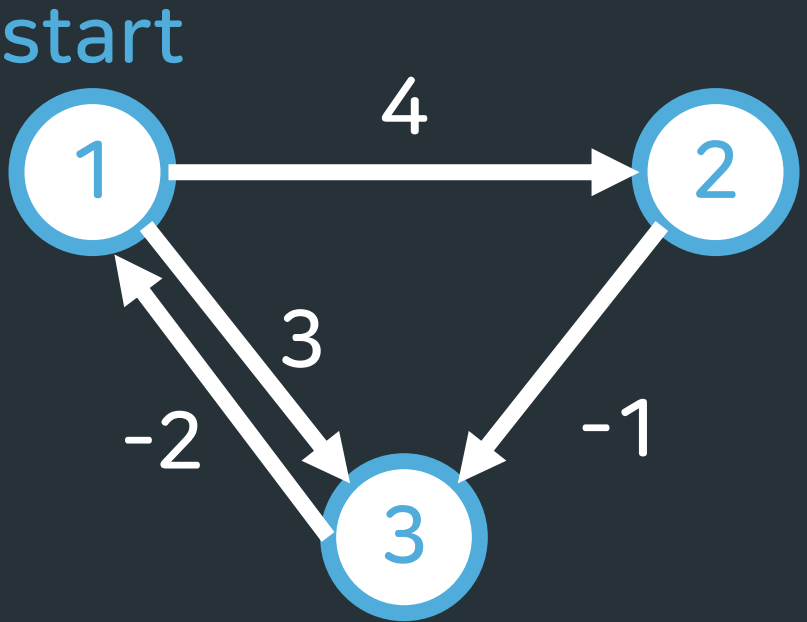




1	2	3
0	4	3

3 = 3

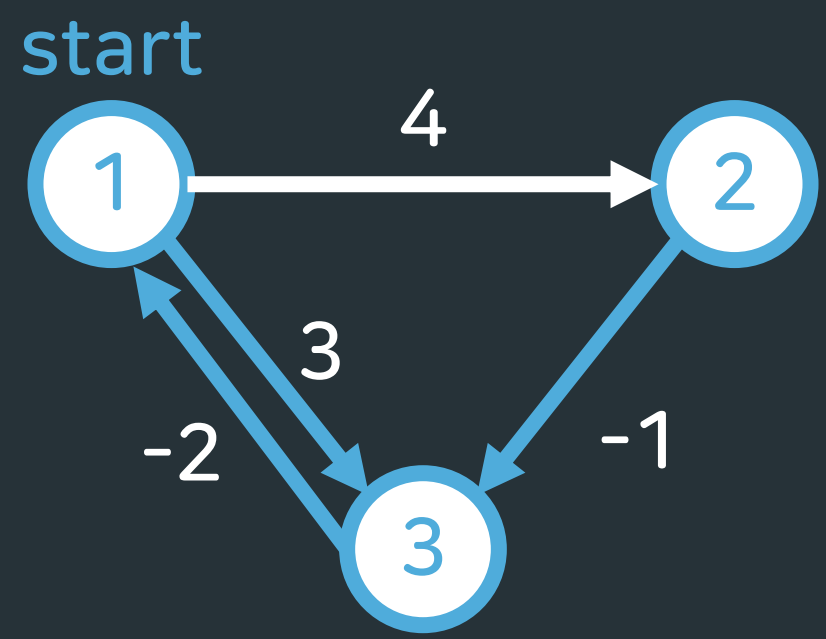
첫번째 반복



1	2	3
0	4	3

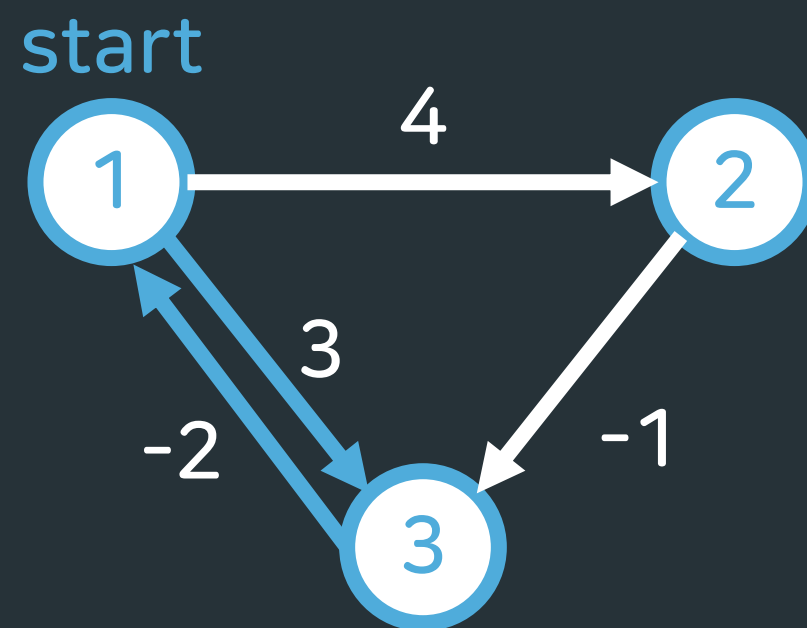
$0 < 1$

첫번째 반복



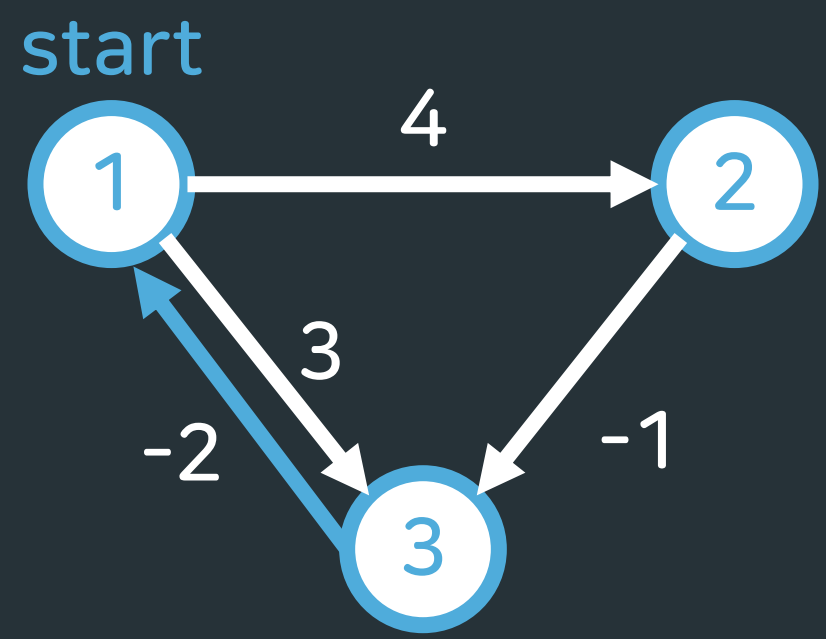
1	2	3
0	4	3

두번째 반복



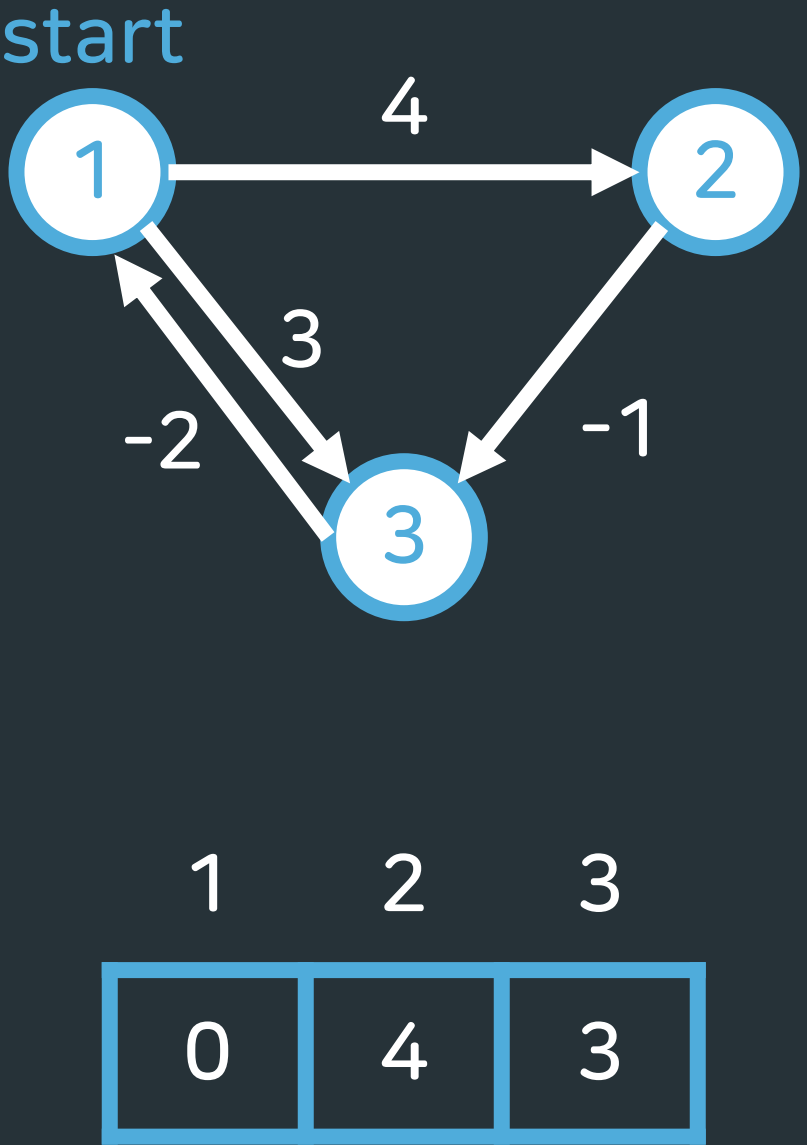
1	2	3
0	4	3

두번째 반복

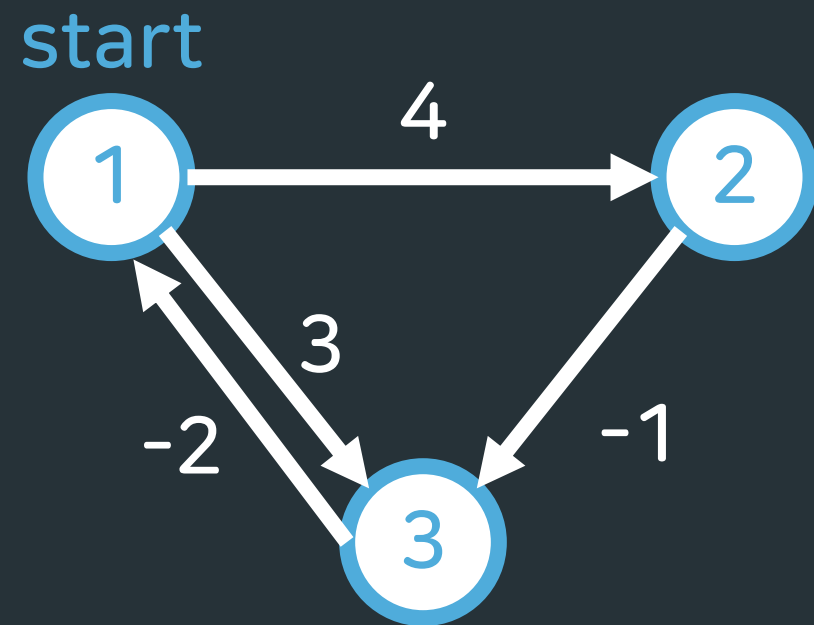


1	2	3
0	4	3

두번째 반복



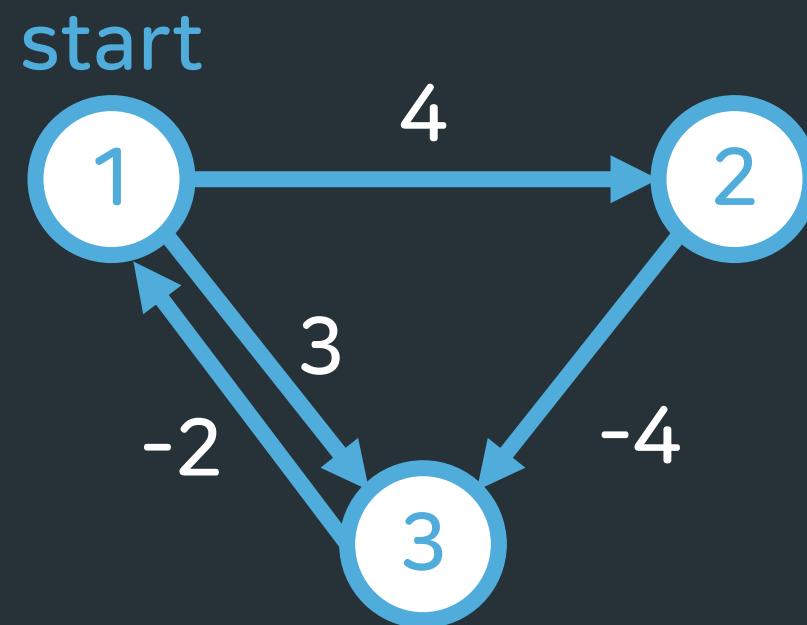
두번째 반복



1	2	3
0	4	3

더 이상 값이 갱신되지 않음  
= 음의 사이클 없음

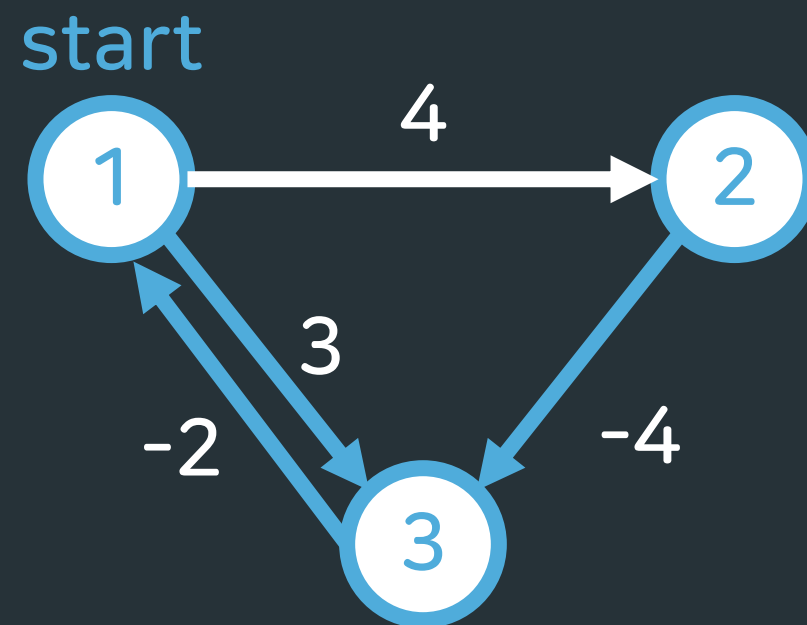
두번째 반복



1	2	3
0	INF	INF

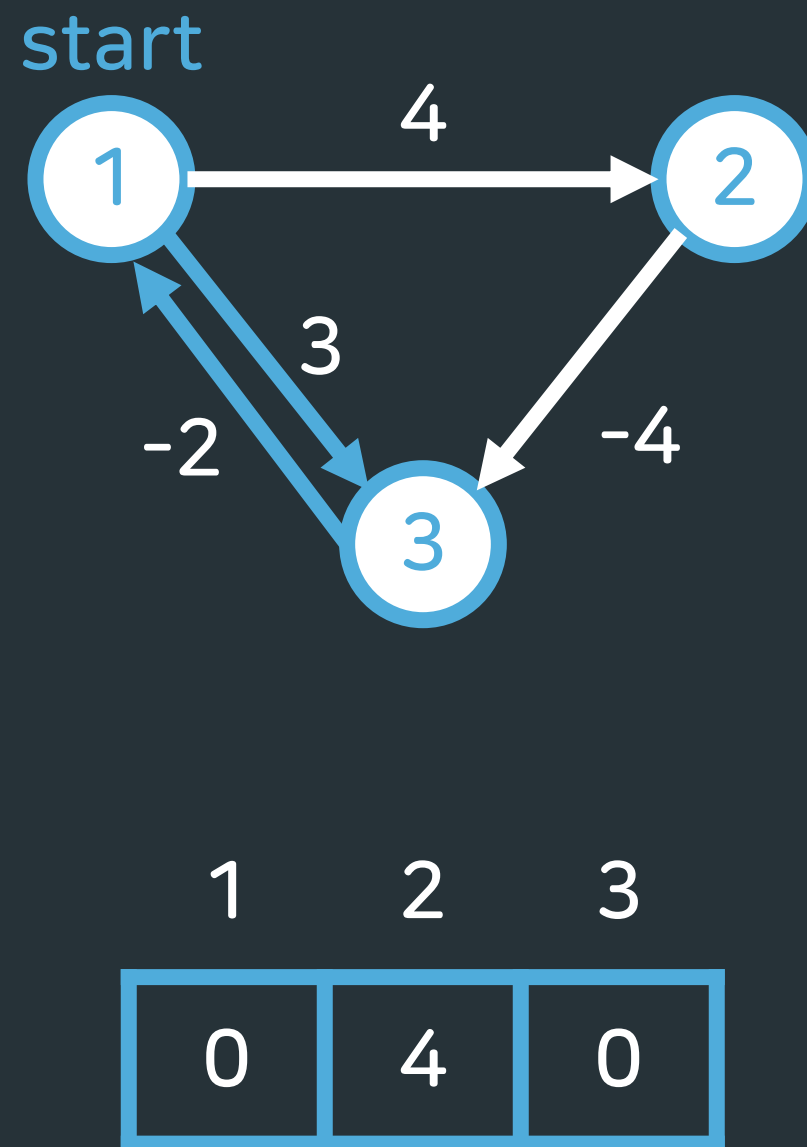
첫번째 반복



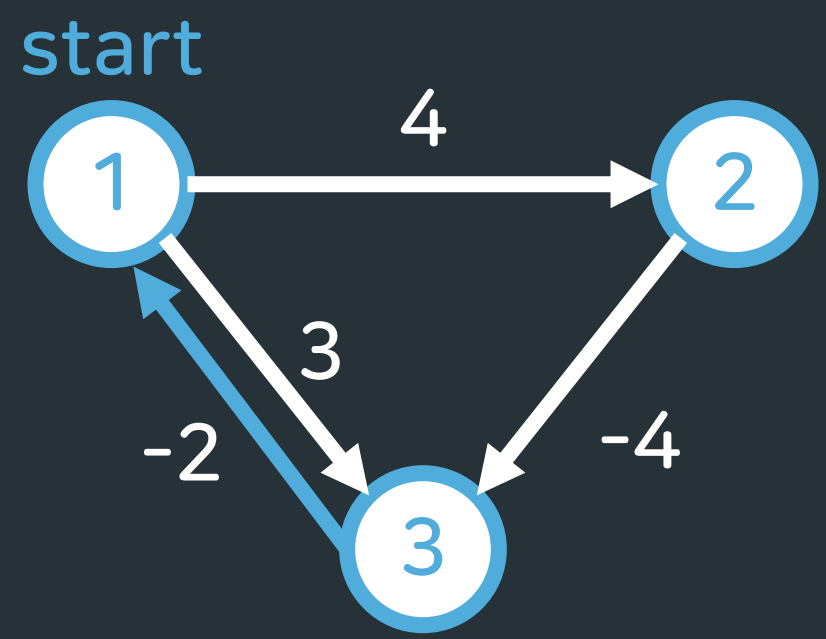


1	2	3
0	4	INF

첫번째 반복

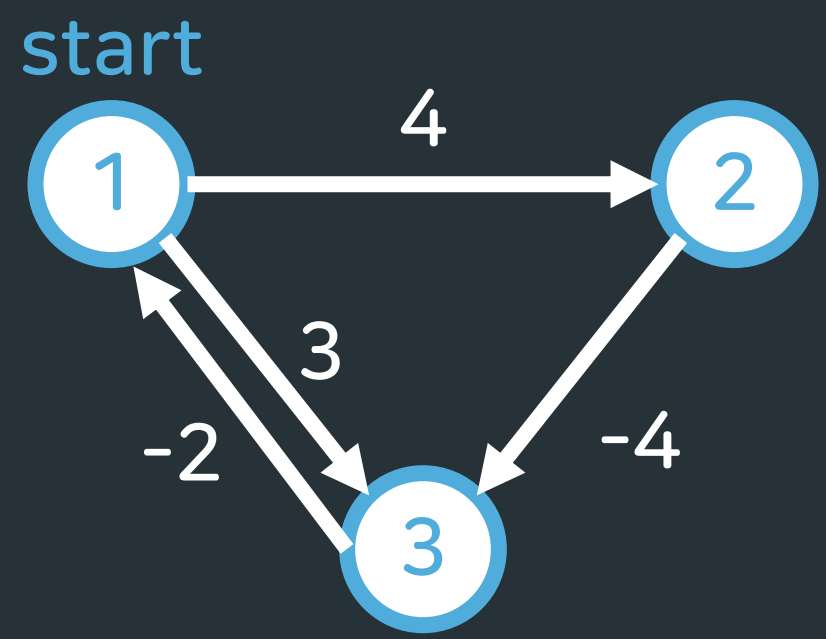


첫번째 반복



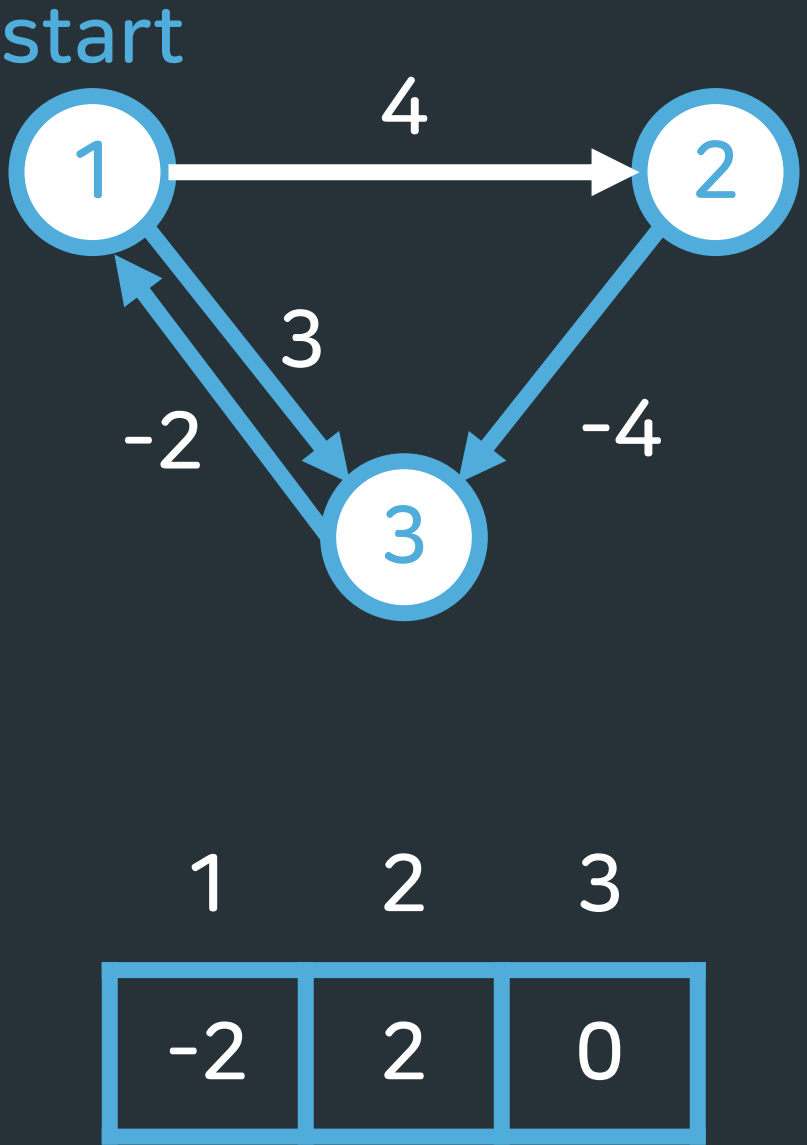
1	2	3
0	4	0

첫번째 반복

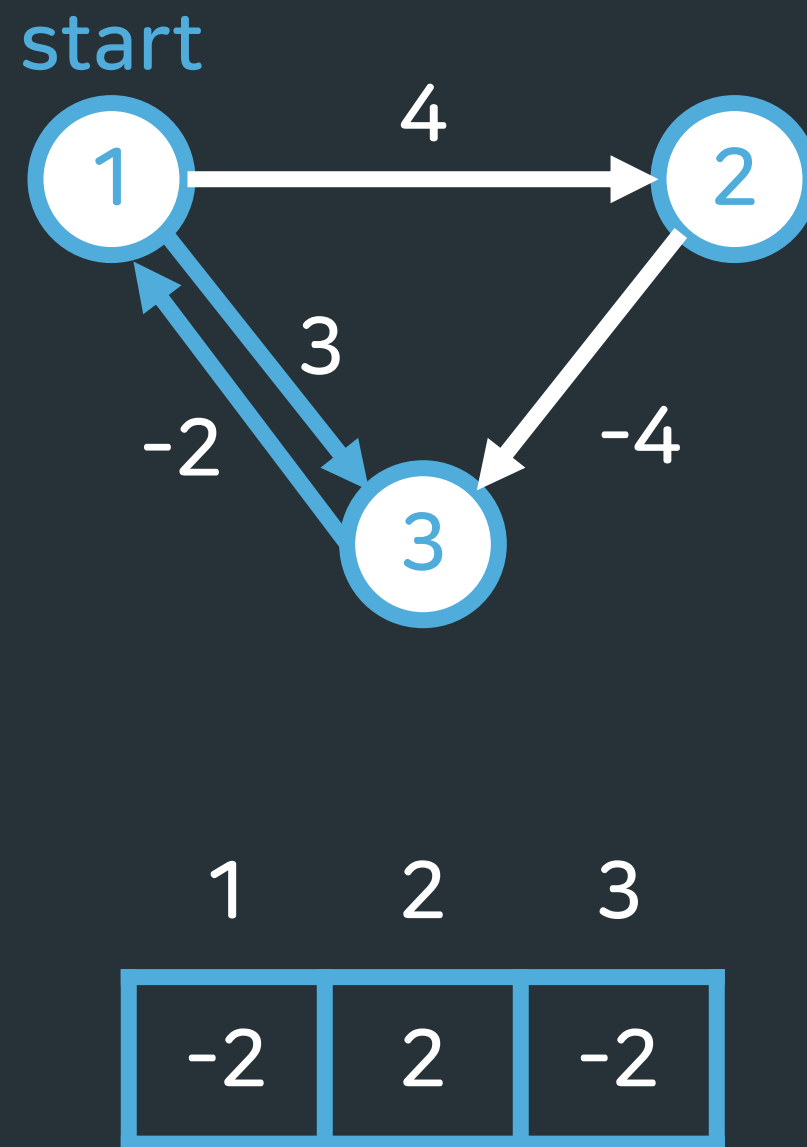


1	2	3
-2	4	0

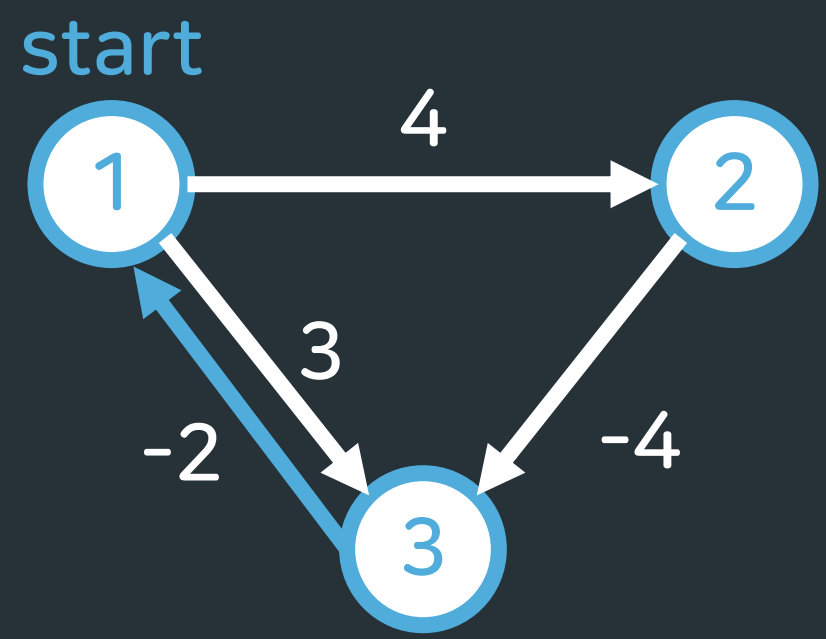
첫번째 반복



두번째 반복

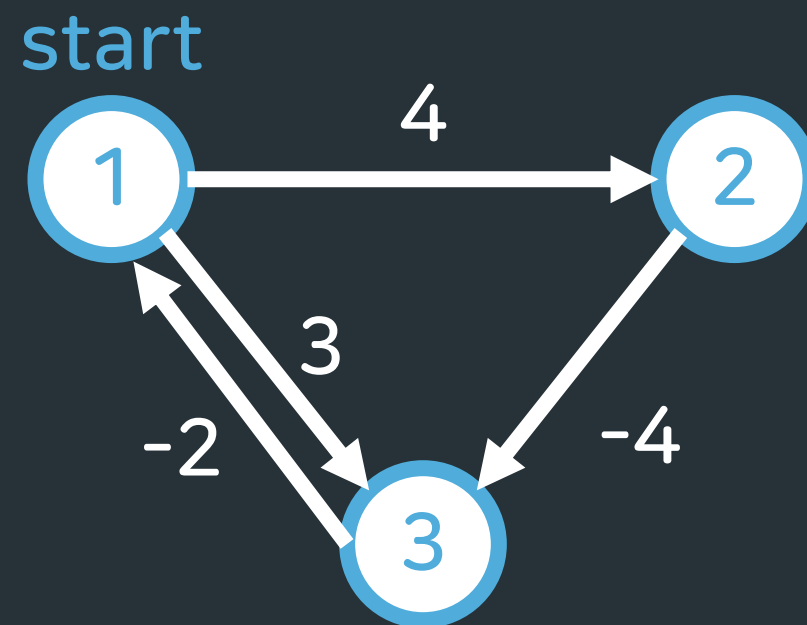


두번째 반복



1	2	3
-2	2	-2

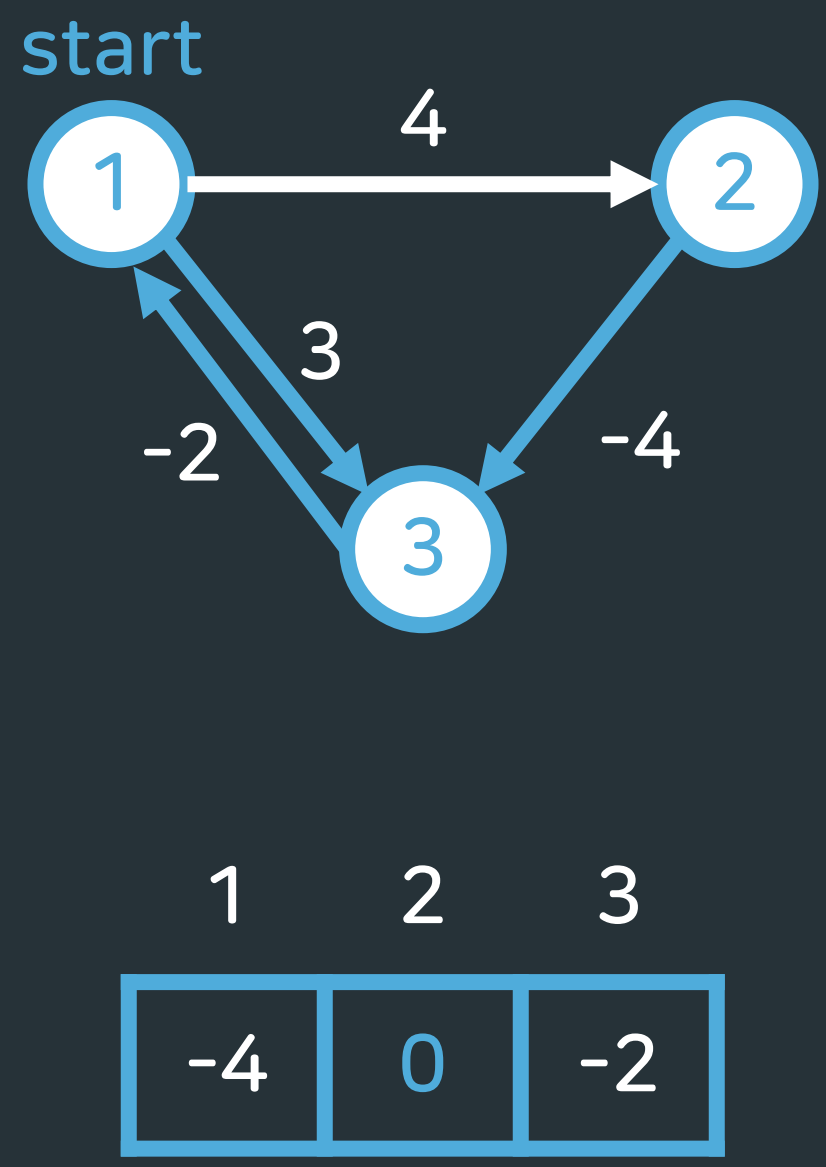
두번째 반복



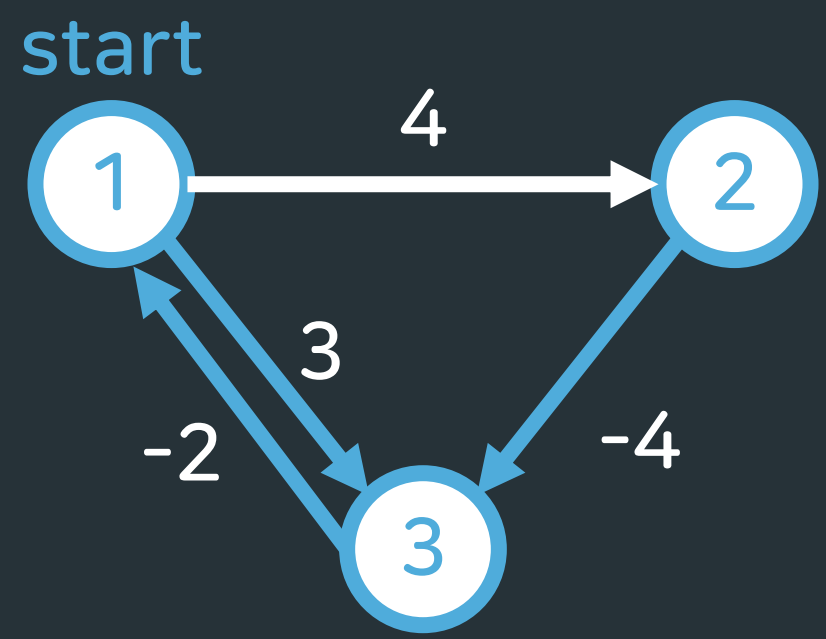
1	2	3
-4	2	-2

두번째 반복





세번째 반복 : 여기서 갱신이 또 일어나면 음의 사이클



1	2	3
-4	0	-2

갱신 확인  
= 음의 사이클 있음

세번째 반복



```
for (V-1회 루프){  
    for (모든 간선에 대해) ← (V-1) * E  
        간선을 사용하여 최단 경로 갱신  
}  
  
for (모든 간선에 대해){  
    if (간선을 사용하여 최단 경로가 갱신됨) ← E  
        음의 사이클 존재!  
}
```

$O(VE)$

## /<> 11657번 : 타임머신 - Gold 4

### 문제

- 1번 도시에서 출발해 나머지 모든 도시로 가는 가장 빠른 시간은?
- 단, 순간이동과 타임머신으로 걸리는 시간이 음수인 경우가 있을 수 있음
- 어떠한 도시로 가는 시간을 무한히 오래 전으로 돌릴 수 있음 (음의 사이클)

### 제한 사항

- 도시의 개수  $N$ 은  $1 \leq N \leq 500$
- 도시 사이를 오가는 버스의 수는  $1 \leq M \leq 6,000$
- 이동 비용  $C$ 는  $-10,000 \leq C \leq 10,000$

## 예제 입력 1

```
3 4
1 2 4
1 3 3
2 3 -1
3 1 -2
```

## 예제 출력 1

```
4
3
```

## 예제 입력 3

```
3 2
1 2 4
1 2 3
```

## 예제 출력 3

```
3
-1
```

## 예제 입력 2

```
3 4
1 2 4
1 3 3
2 3 -4
3 1 -2
```

## 예제 출력 2

```
-1
```

## 정리

- 간선에 **가중치**가 있는 그래프의 최단 경로는 **BFS**를 사용할 수 없음
- 하나의 출발지, **모든** 도착지에 대한 최단 경로는 **다익스트라**, **벨만-포드**
- 음의 **사이클**이 생기는 경우 **벨만-포드** 사용해야 함
- 모든 출발지, **모든** 도착지에 대한 최단 경로는 **플로이드-워셜**
- **다익스트라** 구현시 **프림** 알고리즘(최소 신장 트리 알고리즘)과 헷갈리지 않도록 주의!

## 이것도 알아보세요

- 다익스트라의 시간 복잡도를  $O(V \log E + E \log E)$ 라고 하는 글도 있고,  $O(E \log V)$ 라고 하는 글도 있어요.  
사실 다 같은 얘기를 다르게 기술한 것이지만 그 **차이**를 이해하면 알고리즘에 대해 더 잘 이해할 수 있어요
- 가중치가 **두 가지 종류**로만 주어진다면 어떻게 될까요? 여기에도 그냥 **다익스트라**를 적용할까요?

## 필수

- /<> 11559번 : Puyo Puyo – Gold 4
- /<> 18111번 : 마인크래프트 – Silver 2

## 3문제 이상 선택

- /<> 10282번 : 해킹 – Gold 4
- /<> 1504번 : 특정한 최단 경로 – Gold 4
- /<> 1865번 : 웜홀 – Gold 3
-  2021 KAKAO BLIND RECRUITMENT : 합승 택시 요금 – Level 3
- /<> 1719번 : 택배 – Gold 4

**코드리뷰 0 마감** ~ 5월 9일 월요일 낮 12시

**코드리뷰 X 마감** ~ 5월 9일 월요일 밤 12시 (9일에서 10일로 넘어가는 자정)

**추가제출 마감** ~ 5월 10일 화요일 밤 12시 (10일에서 11일로 넘어가는 자정)