알튜비튜
최단 경로

간선에 가중치가 있는 그래프가 주어질 때, 정점 사이의 최단 경로를 구하는 알고리즘입니다.
대표적으로 다익스트라, 플로이드-워셜, 벨만-포드 알고리즘이 있습니다.

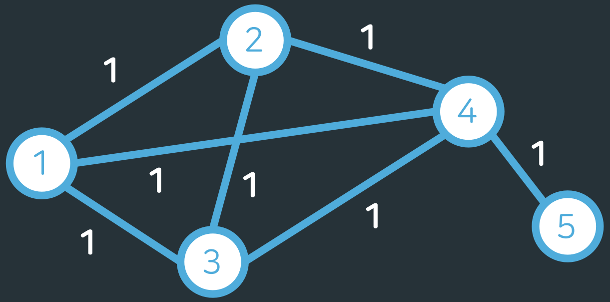
코딩테스트에 자주 나오진 않지만 한 번 나오면 난이도 있는 문제로 나오곤 해요.

지난 시간에 이런 얘기를 했었어요

두 정점 사이의 최단 거리를 구할 땐 BFS

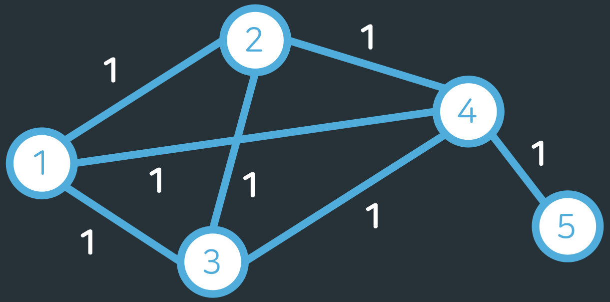
지난 시간에 이런 얘기를 했었어요

#알튜비튜



사실은 가중치가 1인 그래프의 최단 경로를 구한 것과 같음

지난 시간에 이런 얘기를 했었어요



사실은 가중치가 1인 그래프의 최단 경로를 구한 것과 같음

가중치가 다양하다면?

#알튜비튜

Shortest Path

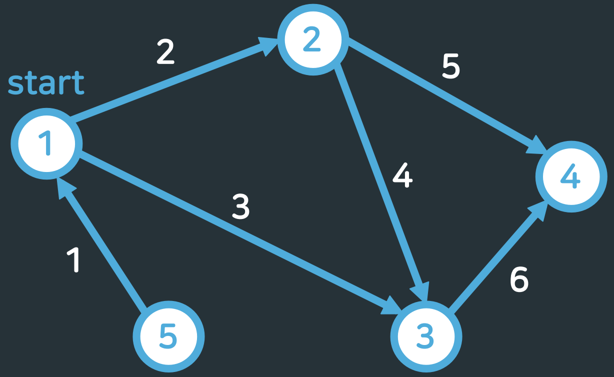
- 그래프에서 정점 사이의 최단 경로를 구하는 알고리즘
- Single-Source (SSP) : 하나의 시작점에 대한 모든 정점까지의 최단 경로
- Single-Destination : 모든 정점으로부터 하나의 도착점까지의 최단 경로. SSP를 뒤집어서 구현
- Single-Pair : 특정 정점 2개 사이의 최단 경로. SSP의 sub-problem
- All-Pairs (ASP) : 가능한 모든 정점 2개의 조합에 대한 최단 경로

- SSP : 다익스트라, 벨만-포드
- ASP : 플로이드-워셜

Dijkstra

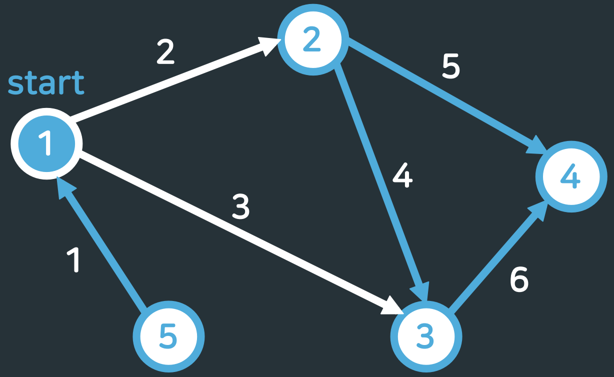
- 하나의 시작점에서 모든 정점까지의 최단 경로를 구하는 SSP 알고리즘
- 시작 정점으로부터 가장 가까운 정점부터 탐색하는 그리디적 접근
- 가중치가 음수인 간선이 있다면, 경우에 따라 무한 루프에 빠질 수 있음
- 정점의 수를 V, 간선의 수를 E라고 할 때, 시간 복잡도는 O(VlogV + ElogV)

다익스트라



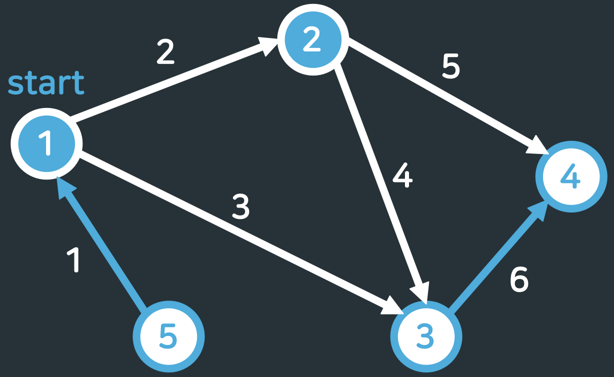
1	2	3	4	5
0	INF	INF	INF	INF

다익스트라



1	2	3	4	5
0	2	3	INF	INF

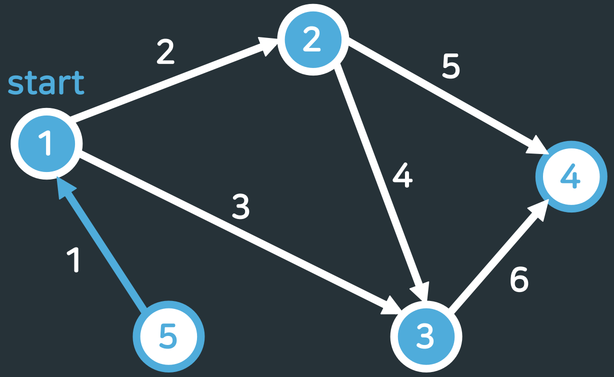
다익스트라



1	2	3	4	5
0	2	3	7	INF

$3 < 6$

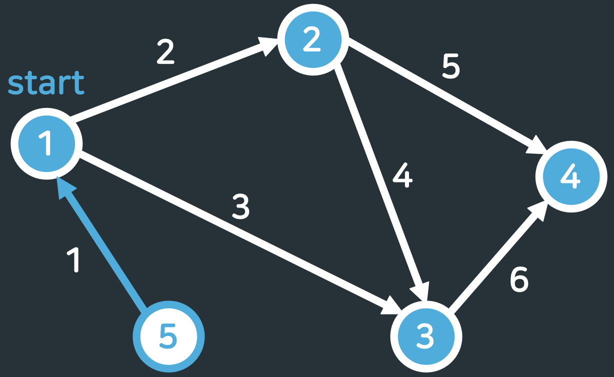
다익스트라



1	2	3	4	5
0	2	3	7	INF

7 < 9

다익스트라

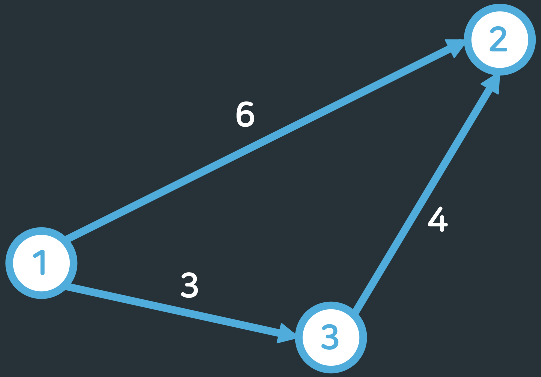


1	2	3	4	5
0	2	3	7	INF

더 이상 탐색할 수 있는 정점 없음

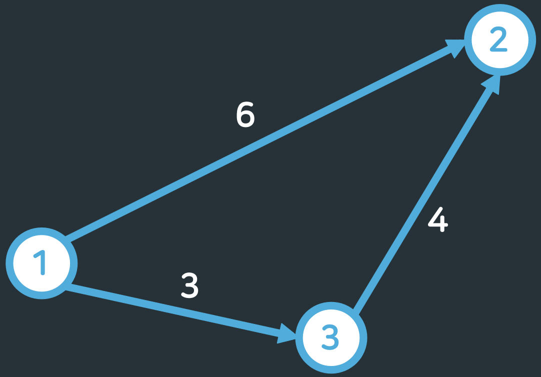
정말 그리디가 가능할까?

#알튜비튜



1->3 간선을 먼저 선택하고 3->2 간선을 선택해 1->3->2로 갔는데
알고보니 1->2로 바로 가는게 최단 경로라면?

정말 그리디가 가능할까?



1->3 간선을 먼저 선택했더라도 3->2 간선 하나를 고려하는게 아니라 1부터의 거리를 고려하는 것!
그러므로 3->2를 통해 1->3->2를 가기 전 1->2 간선을 먼저 고려하게 될 것

cf) 시작점으로부터의 거리가 아니라 간선 자체의 가중치만 고려하는 것은 Prim 알고리즘

의사 코드


```
모든 정점까지의 거리를 담은 dist 배열을 INF으로 초기화
시작 정점까지의 거리 0으로 초기화

while (갱신할 정점이 있을 때까지) {
    int v = 탐색하지 않은 정점 중 시작점에서 가장 가까운 정점

    for (v와 연결된 모든 정점에 대해){
        int u = v와 연결된 정점
        if(dist[v] + weight[v][u] < dist[u]){
            dist[u] = dist[v] + weight[v][u]
        }
    }
}
```

현재 가장 가까운 정점을
정점의 수만큼(V) 찾아야 함

간선의 수만큼(E)
dist를 갱신하게 됨

갱신 정보는 어떤 자료구조에?

#알튜비튜

1) 배열의 경우
모든 정점에 대하여 O(V)
*
최소 값인 정점을 찾는 시간 O(V)

2) 우선 순위 큐일 경우

정점을 꺼내서 E번 간선 업데이트
O(logV * E)
\+
V번 정점 추가 O(V * logV)

배열

- O(V*V)

우선순위 큐

- O(V*logV + ElogV)

1753번 : 최단경로 – Gold 5

문제

- 방향 그래프에서 주어진 시작점에 대한 다른 모든 정점으로의 최단 경로를 출력

제한 사항

- 정점의 개수 V는 1 <= V <= 20,000
- 간선의 개수 E는 1 <= E <= 300,000
- 간선의 가중치 w는 1 <= w <= 10

*인접 행렬로 구현할 때 필요한 공간은 20,000 * 20,000 = 4억 -> 불가능!
*V와 E가 최대일 때 각 정점의 간선은 최대 15개로 적다! -> 인접 리스트로 구현

예제

예제 입력 1

```
5 6
1
5 1 1
1 2 2
1 3 3
2 3 4
2 4 5
3 4 6
```

예제 출력 1

```
0
2
3
7
INF
```

플로이드-워셜

Floyd-Warshall

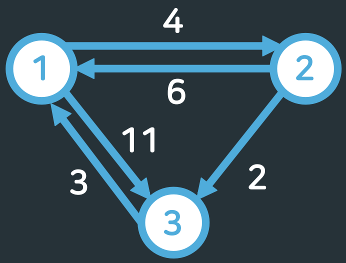
- 가능한 모든 정점 2개의 조합에 대한 최단 경로를 구하는 ASP 알고리즘
- 두 정점 사이의 최단 경로에 포함될 수 있는 모든 정점의 경우를 고려하는 dp 접근
- 정점의 수를 V, 간선의 수를 E라고 할 때, 시간 복잡도는 $O(V^3)$

V = 128, E = 8,000일 때

- 다익스트라 V번 수행 : 128*(128*log(128) + 8,000*log(128)) = 7,282,688
- 플로이드-워셜 : 128*128*128 = 2,097,152

=> 모든 정점 사이의 최단 경로를 구할 땐 플로이드-워셜이 더 효율적이다!

플로이드-워셜

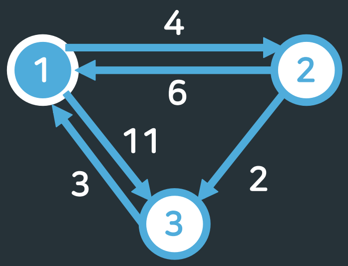


	v1	v2	v3
v1	0	4	11
v2	6	0	2
v3	3	INF	0

- 각 정점을 중간 정점으로 해당 정점을 지나는 모든 경로에 대한 값을 계산

플로이드-워셜

- 중간 정점 1



	v1	v2	v3
v1	0	4	11
v2	6	0	2
v3	3	7	0

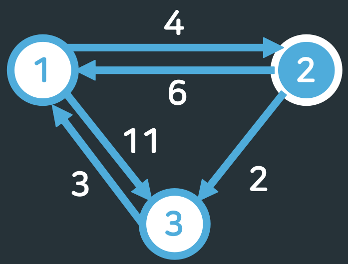
17 < 2 (x)

7 < INF

- 2 → 1 → 3 : 6 + 11 = 17
- 3 → 1 → 2 : 3 + 4 = 7

플로이드-워셜

- 중간 정점 2



- 1 → 2 → 3 : 4 + 2 = 6
- 3 → 2 → 1 : 7 + 6 = 13

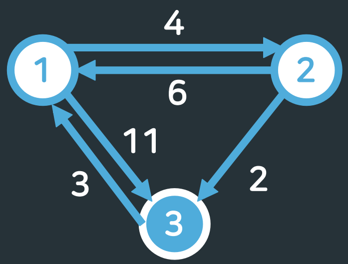
	v1	v2	v3
v1	0	4	6
v2	6	0	2
v3	3	7	0

6 < 11

13 < 3 (x)

플로이드-워셜

- 중간 정점 3



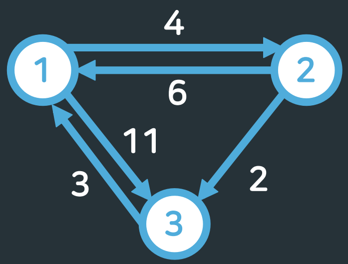
- 2 → 3 → 1 : 2 + 3 = 5
- 1 → 3 → 2 : 6 + 7 = 13

	v1	v2	v3
v1	0	4	6
v2	5	0	2
v3	3	7	0

13 < 4 (x)

5 < 6

플로이드-워셜



	v1	v2	v3
v1	0	4	6
v2	5	0	2
v3	3	7	0

11404번 : 플로이드 – Gold 4

문제

- 모든 도시의 쌍 (A, B)에 대해 A에서 B로 가는 비용의 최솟값은?

제한 사항

- 도시의 개수 n은 1 <= n <= 100
- 도시 사이를 오가는 버스의 수는 1 <= m <= 100,000
- 이동 비용 c는 1 <= c <= 100,000

*최대 100개의 도시에 어떻게 버스의 수가 100,000개?
 -> (A, B)에 대해 간선이 여러 개일 수 있다!

예제

예제 입력 1

```
5 14
1 2 2
1 3 3
1 4 1
1 5 10
2 4 2
3 4 1
3 5 1
4 5 3
3 5 10
3 1 8
1 4 2
5 1 7
3 4 2
5 2 4
```

예제 출력 1

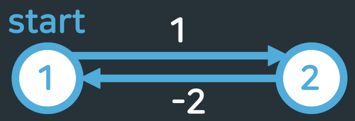
```
0 2 3 1 4
12 0 15 2 5
8 5 0 1 1
10 7 13 0 3
7 4 10 6 0
```

벨만-포드

Bellman-Ford

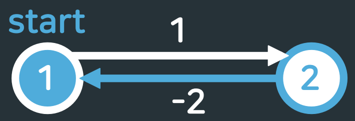
- 하나의 시작점에서 모든 정점까지의 최단 경로를 구하는 SSP 알고리즘
- 가중치가 음수일 때 다익스트라 대신 사용
- 모든 정점을 V-1번 갱신한 뒤, 한 번 더 갱신을 시도하는 브루트포스적 접근
- 정점의 수를 V, 간선의 수를 E라고 할 때, 시간 복잡도는 O(VE)

다익스트라는 왜?



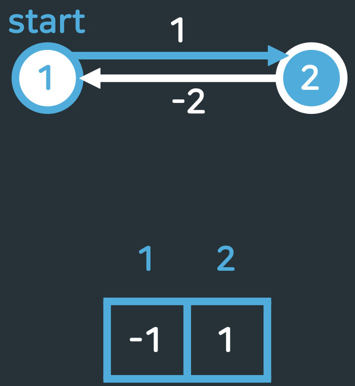
1	2
0	INF

다익스트라는 왜?

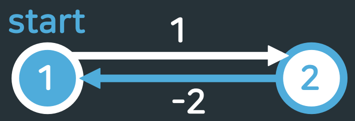


1	2
0	1

다익스트라는 왜?

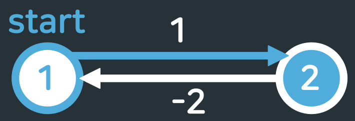


다익스트라는 왜?



1	2
-1	0

다익스트라는 왜?

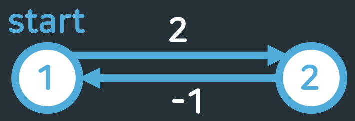


1	2
-2	0

최단 경로가 무한히 갱신됨

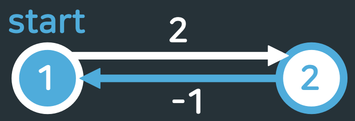
음의 사이클!

늘 불가능한 건 아니예요!



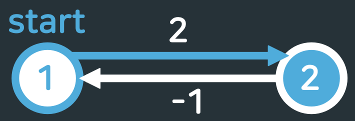
1	2
0	INF

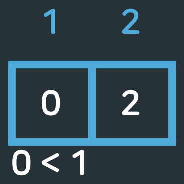
늘 불가능한 건 아니예요!



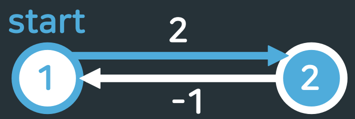
1	2
0	2

늘 불가능한 건 아니예요!





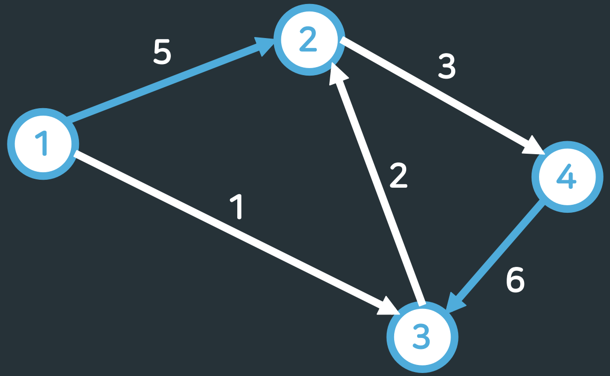
늘 불가능한 건 아니예요!



1	2
0	2

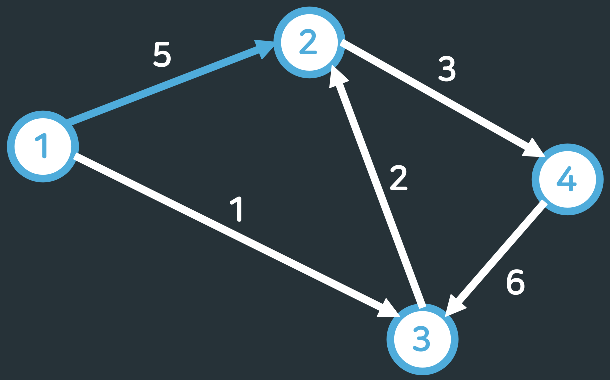
그래도 다익스트라는 음의 사이클을 잡아낼 수 없어 사용 불가

기본 아이디어



정점이 V개일 때 정점 A->B의 경로에는 최대 V-1개의 간선이 있을 수 있음

기본 아이디어



정점이 V개일 때 정점 A->B의 경로에는 최대 V-1개의 간선이 있을 수 있음

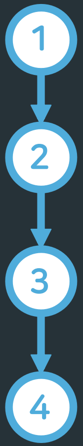
그 이상의 간선을 사용하면 사이클 형성!

기본 아이디어

사이클이 생겼다

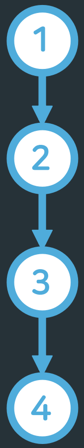
= 최단 경로를 이루는 간선이 V개 이상인 정점 A, B가 있다
= V번 이상 갱신되는 간선이 있다

좀 더 직관적으로 생각해볼까요?



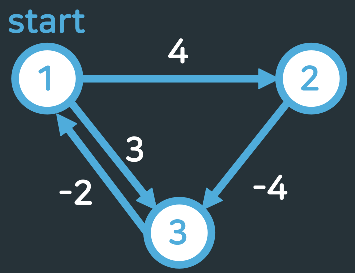
V=4라고 가정하면,
1번에서 4번으로 갈 때 가장 높이가 큰 트리는 다음과 같은 트리입니다.
이 경우, 간선은 최대 3(4-1)번이 사용됩니다.

좀 더 직관적으로 생각해볼까요?



최단 경로를 구할 정점의 수가 V-1개이므로
사이클이 없다면 특정 간선은 최대 V-1번만 사용됨!

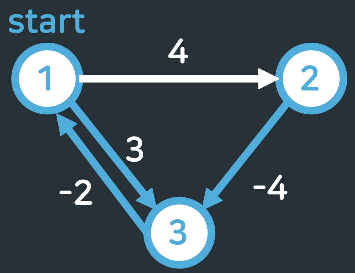
벨만-포드



1	2	3
0	INF	INF

첫번째 반복

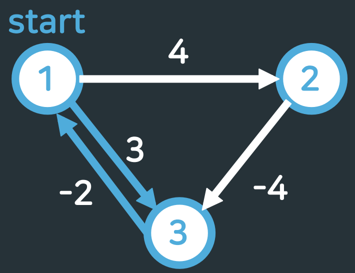
벨만-포드



1	2	3
0	4	INF

첫번째 반복

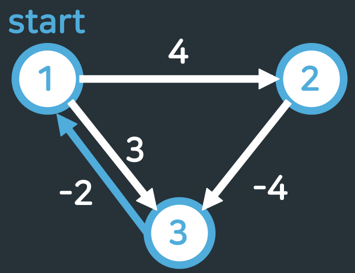
벨만-포드



1	2	3
0	4	0

첫번째 반복

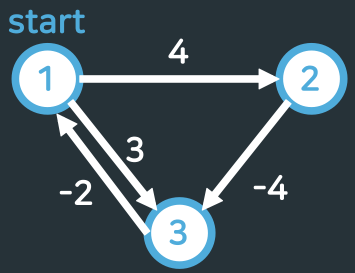
벨만-포드



1	2	3
0	4	0

첫번째 반복

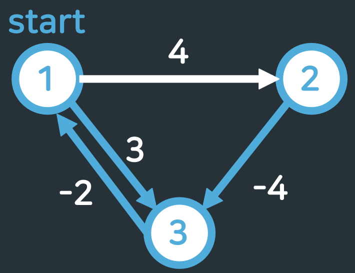
벨만-포드



1	2	3
-2	4	0

첫번째 반복

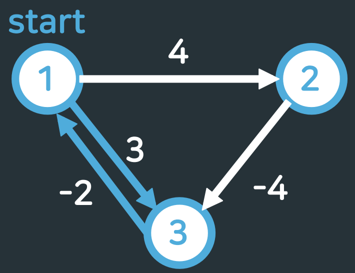
벨만-포드



1	2	3
-2	2	0

두번째 반복

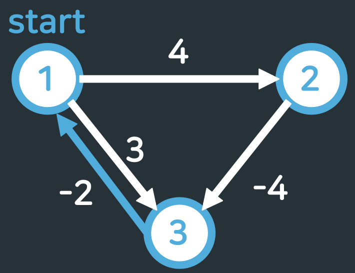
벨만-포드



1	2	3
-2	2	-2

두번째 반복

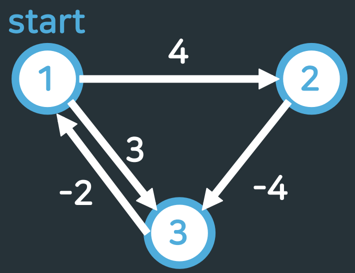
벨만-포드



1	2	3
-2	2	-2

두번째 반복

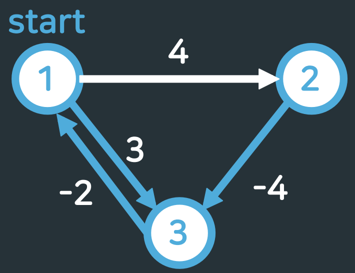
벨만-포드



1	2	3
-4	2	-2

두번째 반복

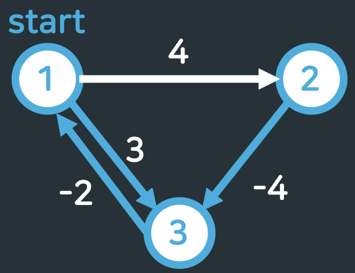
벨만-포드



1	2	3
-4	0	-2

세번째 반복 : 여기서 갱신이 또 일어나면 음의 사이클

벨만-포드



1	2	3
-4	0	-2

갱신 확인
= 음의 사이클 있음

세번째 반복

의사 코드

```
for (V-1회 루프){
  for (모든 간선에 대해)
    간선을 사용하여 최단 경로 갱신
}

for (모든 간선에 대해){
  if (간선을 사용하여 최단 경로가 갱신됨)
    음의 사이클 존재!
}
```

(V-1) * E

E

O(VE)

11657번 : 타임머신 – Gold 4

문제

- 1번 도시에서 출발해 나머지 모든 도시로 가는 가장 빠른 시간은?
- 단, 순간이동과 타임머신으로 걸리는 시간이 음수인 경우가 있을 수 있음
- 어떠한 도시로 가는 시간을 무한히 오래 전으로 돌릴 수 있음 (음의 사이클)

제한 사항

- 도시의 개수 N은 1 <= N <= 500
- 도시 사이를 오가는 버스의 수는 1 <= M <= 6,000
- 이동 비용 C는 -10,000 <= C <= 10,000

예제

#알튜비튜

예제 입력 1

```
3 4
1 2 4
1 3 3
2 3 -1
3 1 -2
```

예제 출력 1

```
4
3
```

예제 입력 3

```
3 2
1 2 4
1 2 3
```

예제 출력 3

```
3
-1
```

예제 입력 2

```
3 4
1 2 4
1 3 3
2 3 -4
3 1 -2
```

예제 출력 2

```
-1
```

마무리

정리

- 간선에 가중치가 있는 그래프의 최단 경로는 BFS를 사용할 수 없음
- 하나의 출발지, 모든 도착지에 대한 최단 경로는 다익스트라, 벨만-포드
- 음의 사이클이 생기는 경우 벨만-포드 사용해야 함
- 모든 출발지, 모든 도착지에 대한 최단 경로는 플로이드-워셜
- 다익스트라 구현시 프림 알고리즘(최소 신장 트리 알고리즘)과 헷갈리지 않도록 주의!

이것도 알아보세요

- 다익스트라의 시간 복잡도를 O(VlogE + ElogE)라고 하는 글도 있고, O(ElogV)라고 하는 글도 있어요.
  사실 다 같은 얘기를 다르게 기술한 것이지만 그 차이를 이해하면 알고리즘에 대해 더 잘 이해할 수 있어요
- 가중치가 두 가지 종류로만 주어진다면 어떻게 될까요? 여기에도 그냥 다익스트라를 적용할까요?

과제

필수

- 15685번 : 드래곤 커브 – Gold 4
- 1238번 : 파티 – Gold 3
- 2458번 : 키 순서 – Gold 3

도전

- 1865번 : 웜홀 – Gold 3
- 2021 KAKAO BLIND RECRUITMENT : 합승 택시 요금 – Level 3

과제 마감일

과제제출 마감 ~ 11월 26일 화요일 18:59

추가제출 마감 ~ 11월 28일 목요일 23:59