알튜비튜

최단 경로

간선에 가중치가 있는 그래프가 주어질 때, 정점 사이의 최단 경로를 구하는 알고리즘입니다.
대표적으로 다익스트라, 플로이드-워셜, 벨만-포드 알고리즘이 있습니다.

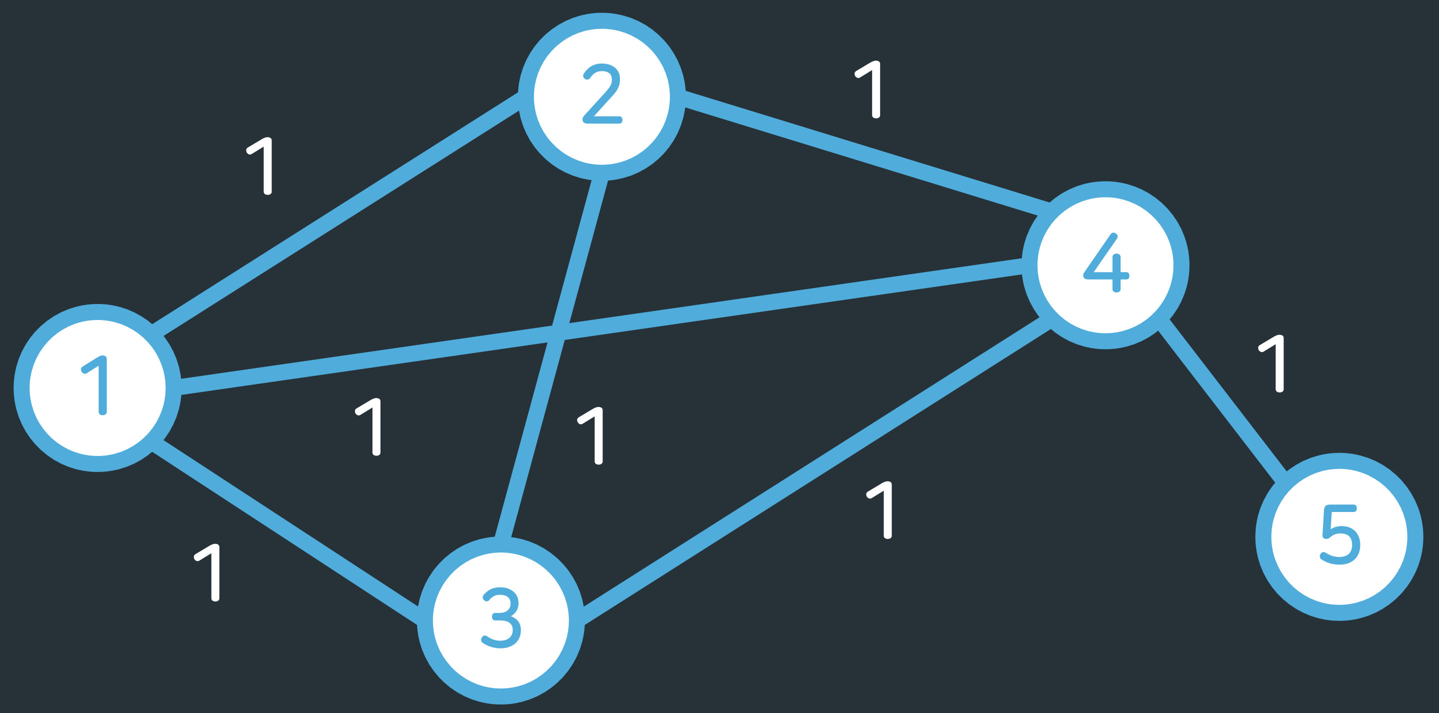
코딩테스트에 자주 나오진 않지만 한 번 나오면 난이도 있는 문제로 나오곤 해요.

지난 시간에 이런 얘기를 했었어요

#알튜비튜

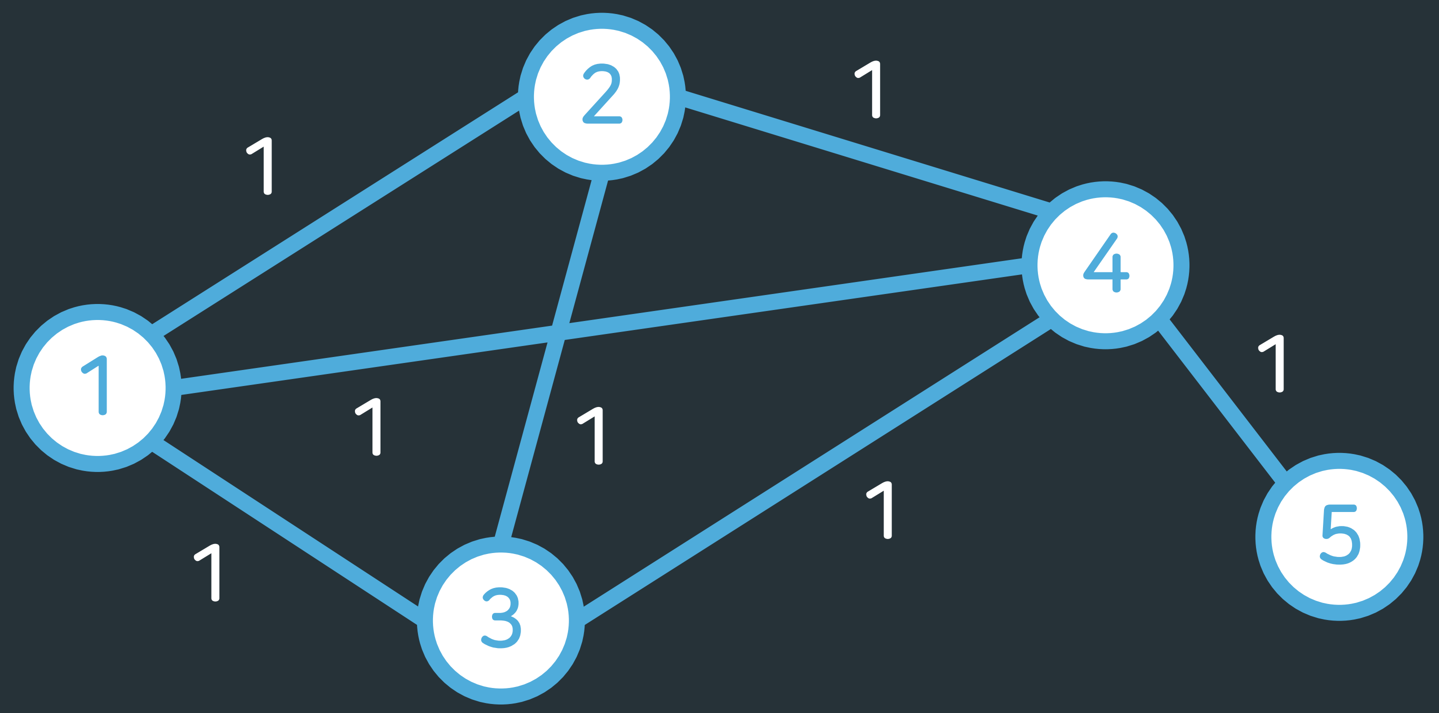
두 정점 사이의 최단 거리를 구할 땐 BFS

지난 시간에 이런 얘기를 했었어요



사실은 가중치가 1인 그래프의 최단 경로를 구한 것과 같음

지난 시간에 이런 얘기를 했었어요



사실은 가중치가 1인 그래프의 최단 경로를 구한 것과 같음

가중치가 다양하다면?

Shortest Path

- 그래프에서 정점 사이의 최단 경로를 구하는 알고리즘
- Single-Source (SSP) : 하나의 시작점에 대한 모든 정점까지의 최단 경로
- Single-Destination : 모든 정점으로부터 하나의 도착점까지의 최단 경로. SSP를 뒤집어서 구현
- Single-Pair : 특정 정점 2개 사이의 최단 경로. SSP의 sub-problem
- All-Pairs (ASP) : 가능한 모든 정점 2개의 조합에 대한 최단 경로

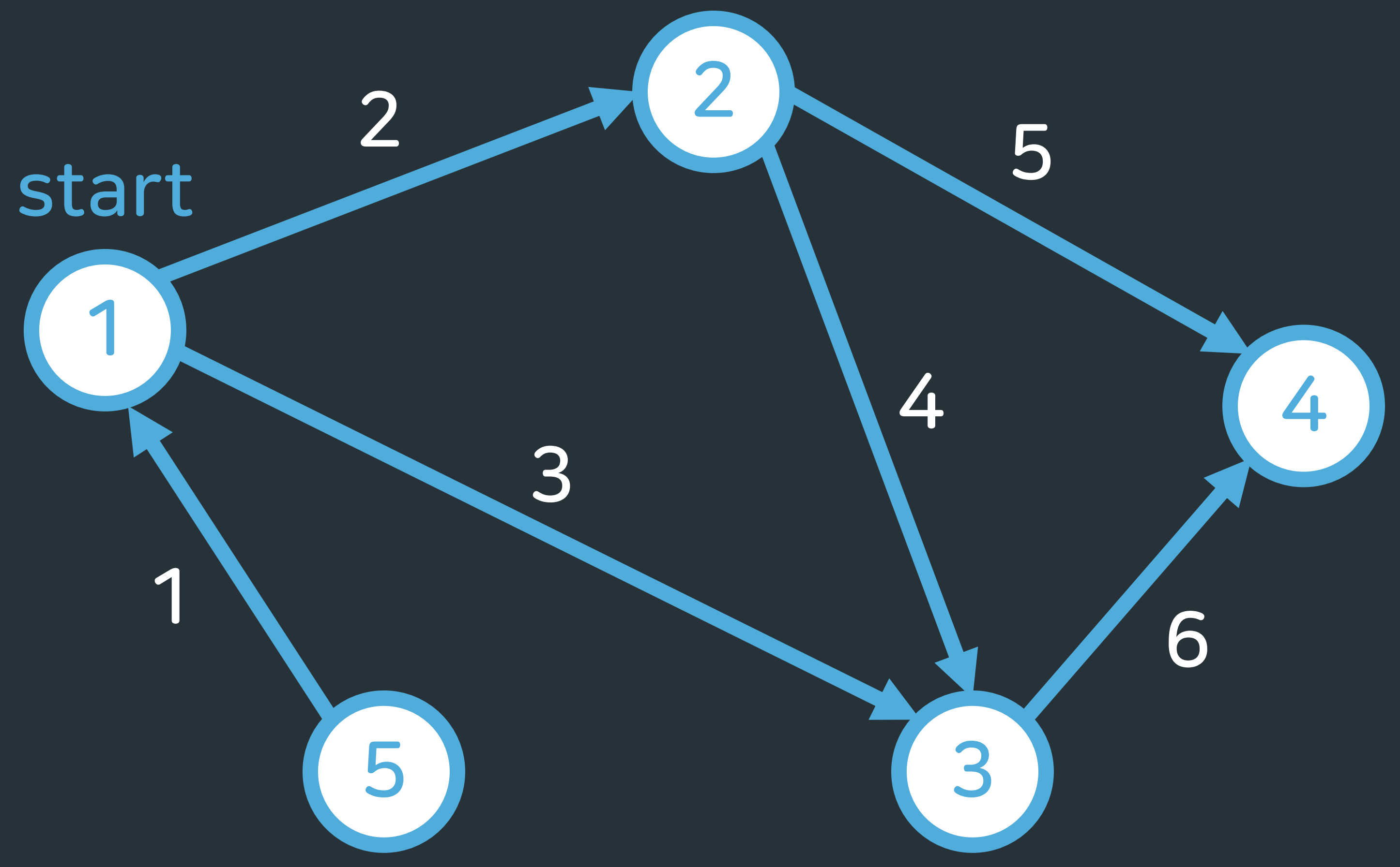
- SSP : 다익스트라, 벨만-포드
- ASP : 플로이드-워셜

다익스트라

Dijkstra

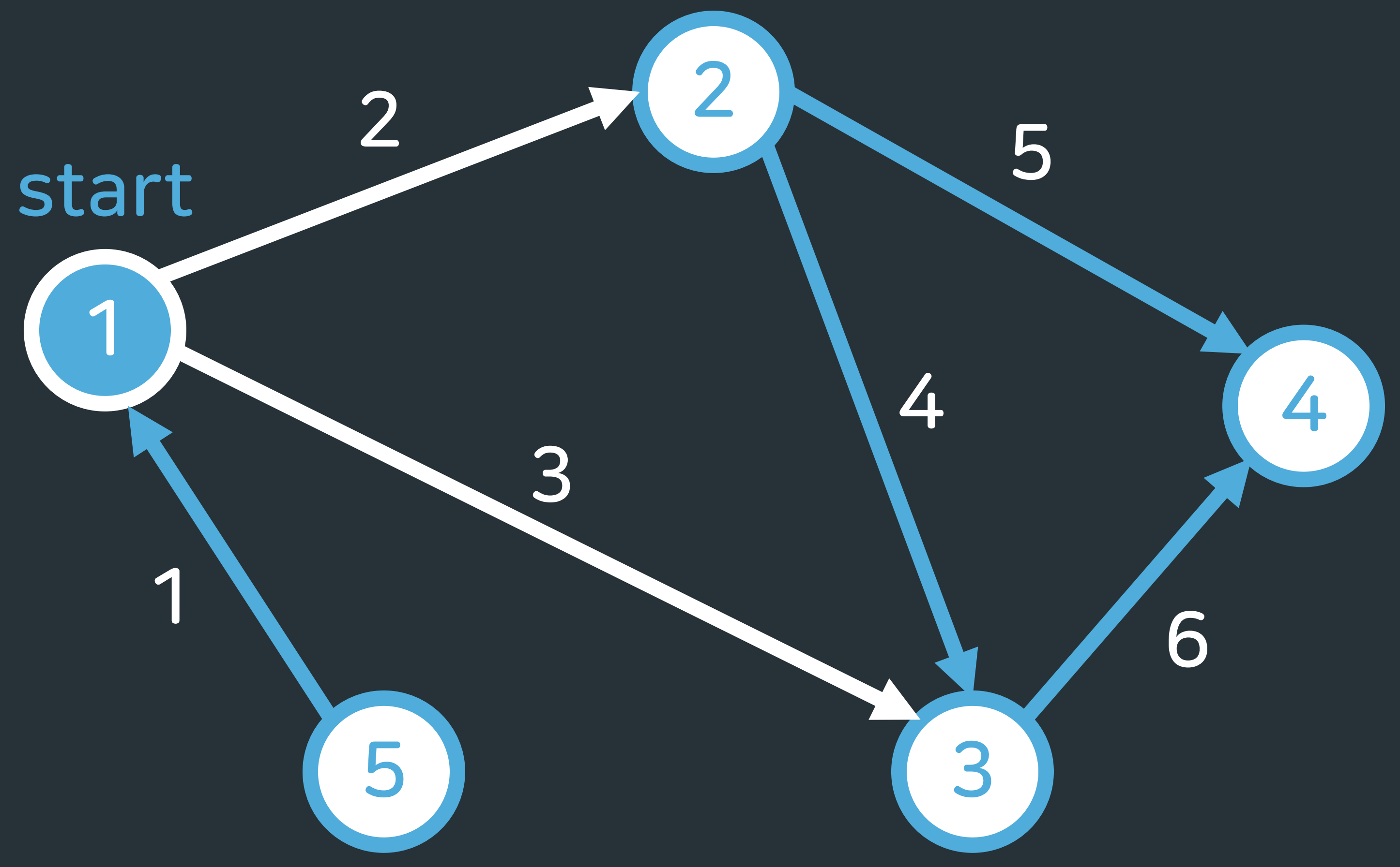
- 하나의 시작점에서 모든 정점까지의 최단 경로를 구하는 SSP 알고리즘
- 시작 정점으로부터 가장 가까운 정점부터 탐색하는 그리디적 접근
- 가중치가 음수인 간선이 있다면, 경우에 따라 무한 루프에 빠질 수 있음
- 정점의 수를 V, 간선의 수를 E라고 할 때, 시간 복잡도는 O(VlogV + ElogV)

다익스트라



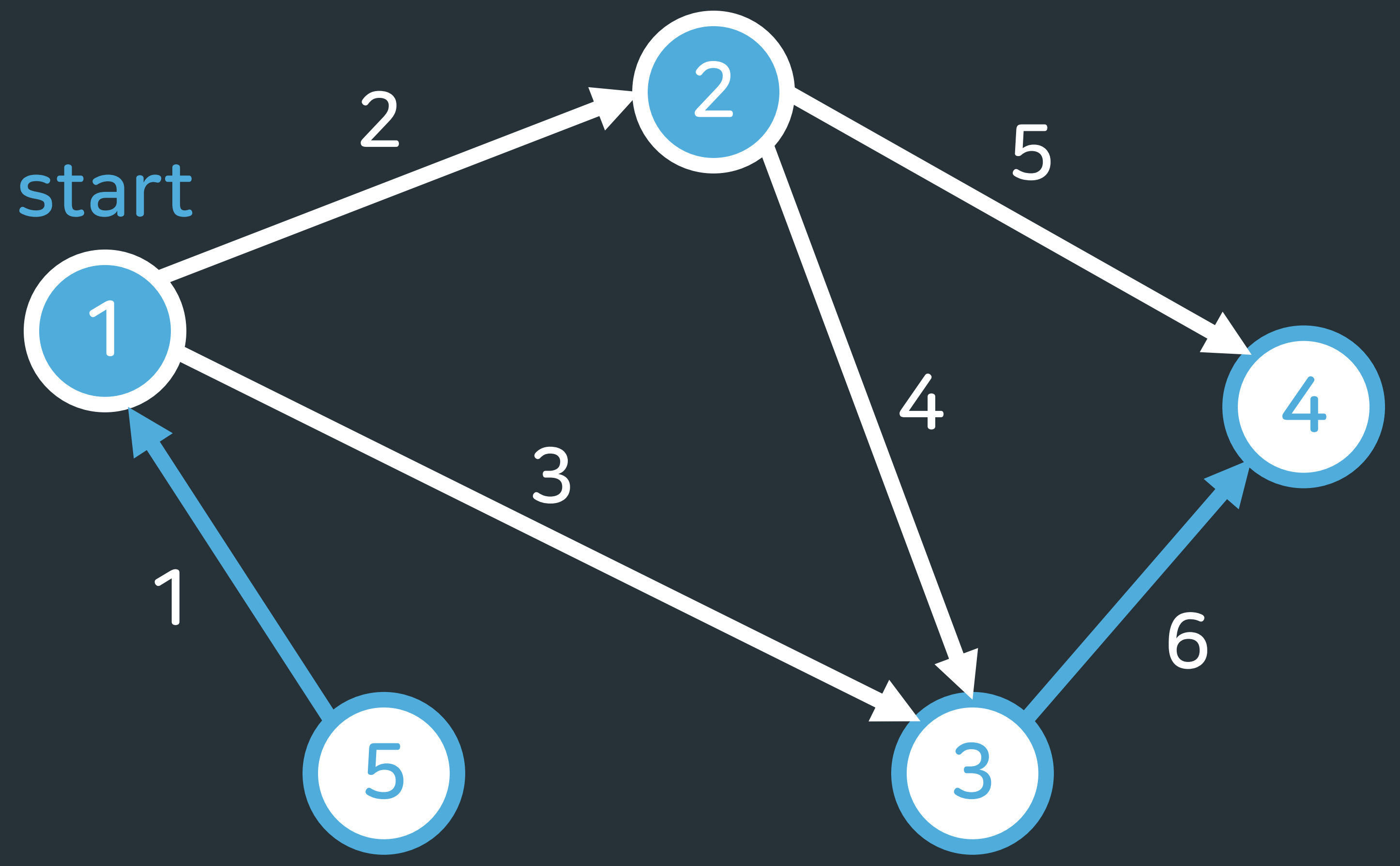
1	2	3	4	5
0	INF	INF	INF	INF

다익스트라



1	2	3	4	5
0	2	3	INF	INF

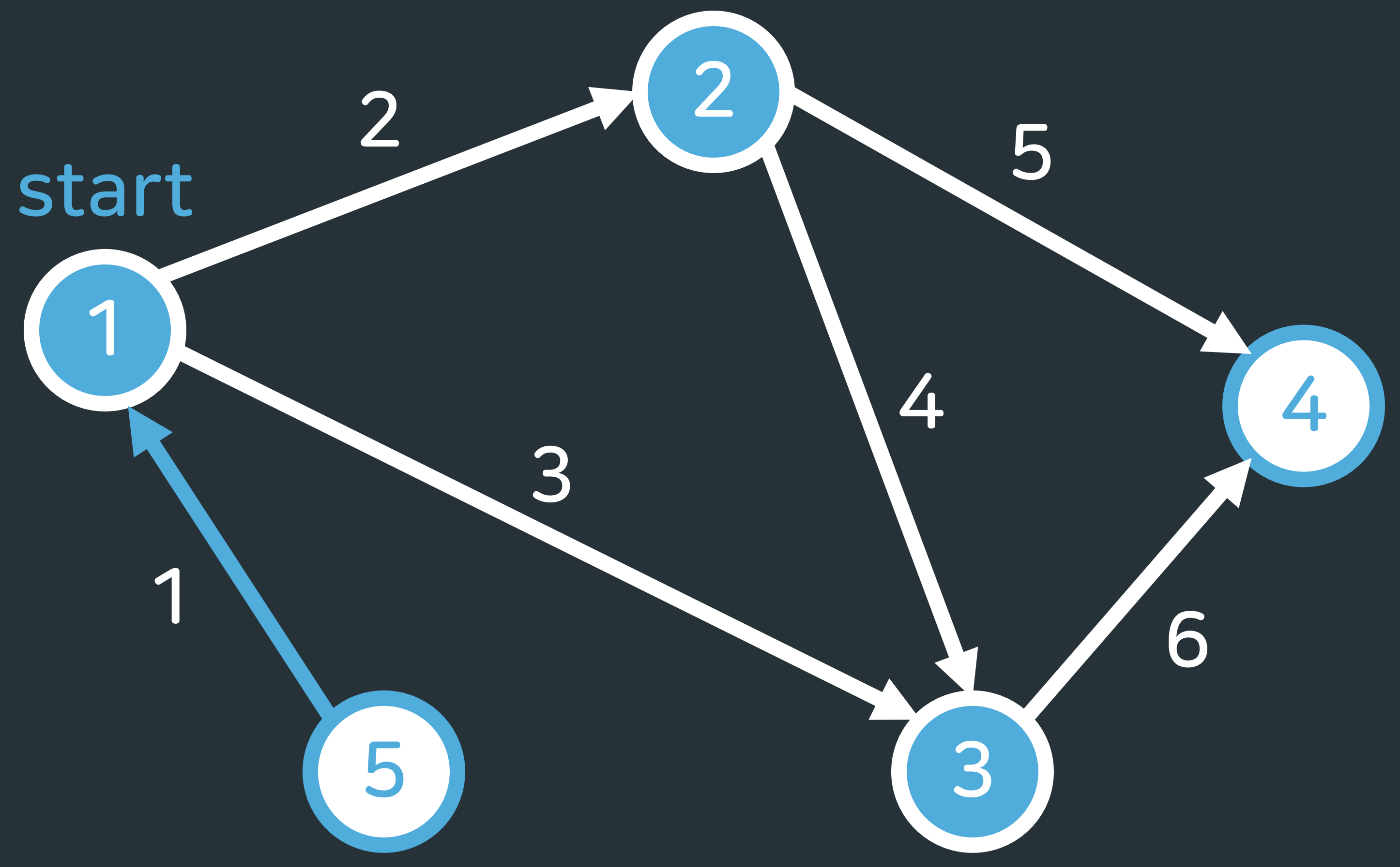
다익스트라



1	2	3	4	5
0	2	3	7	INF

3 < 6

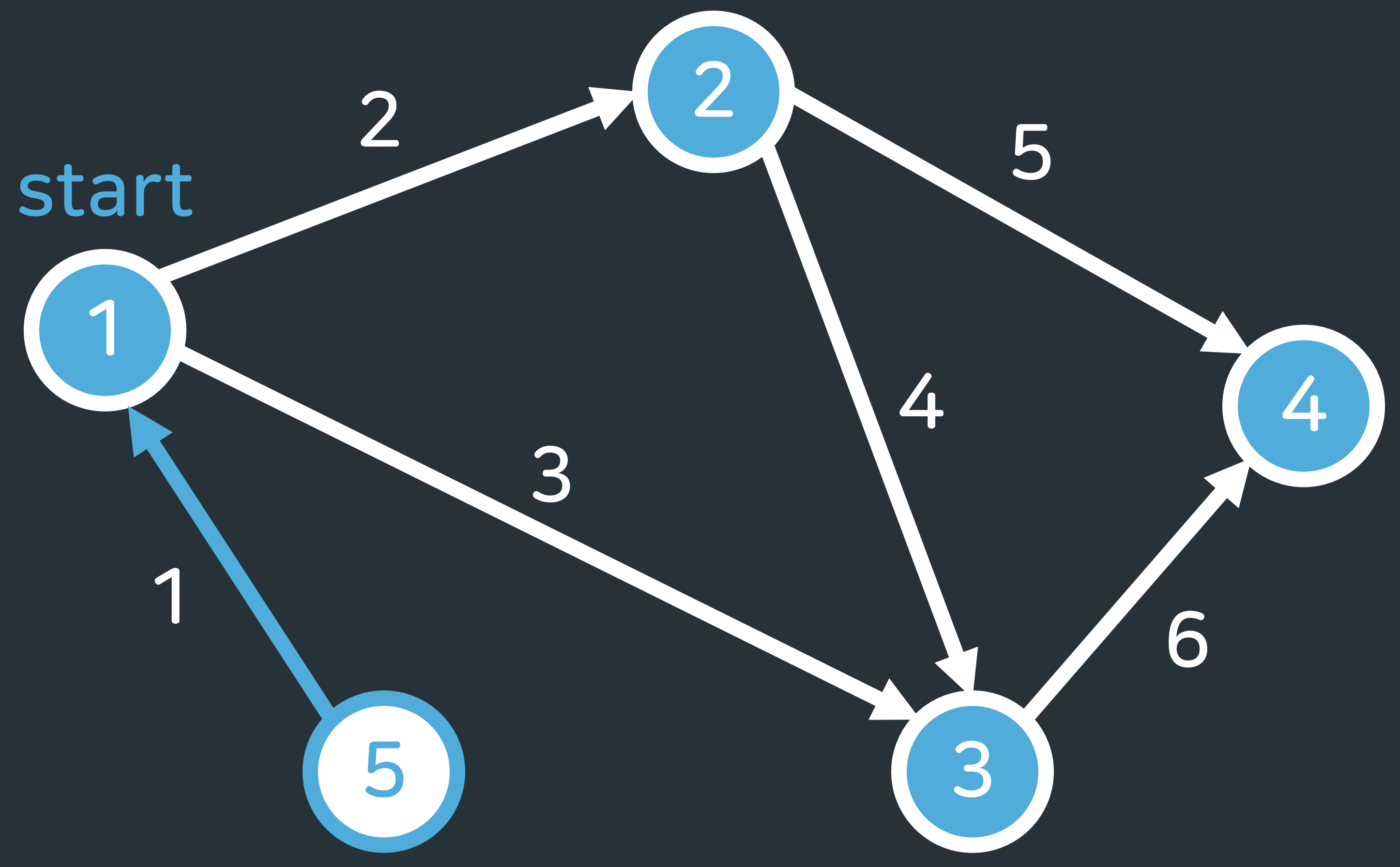
다익스트라



1	2	3	4	5
0	2	3	7	INF

7 < 9

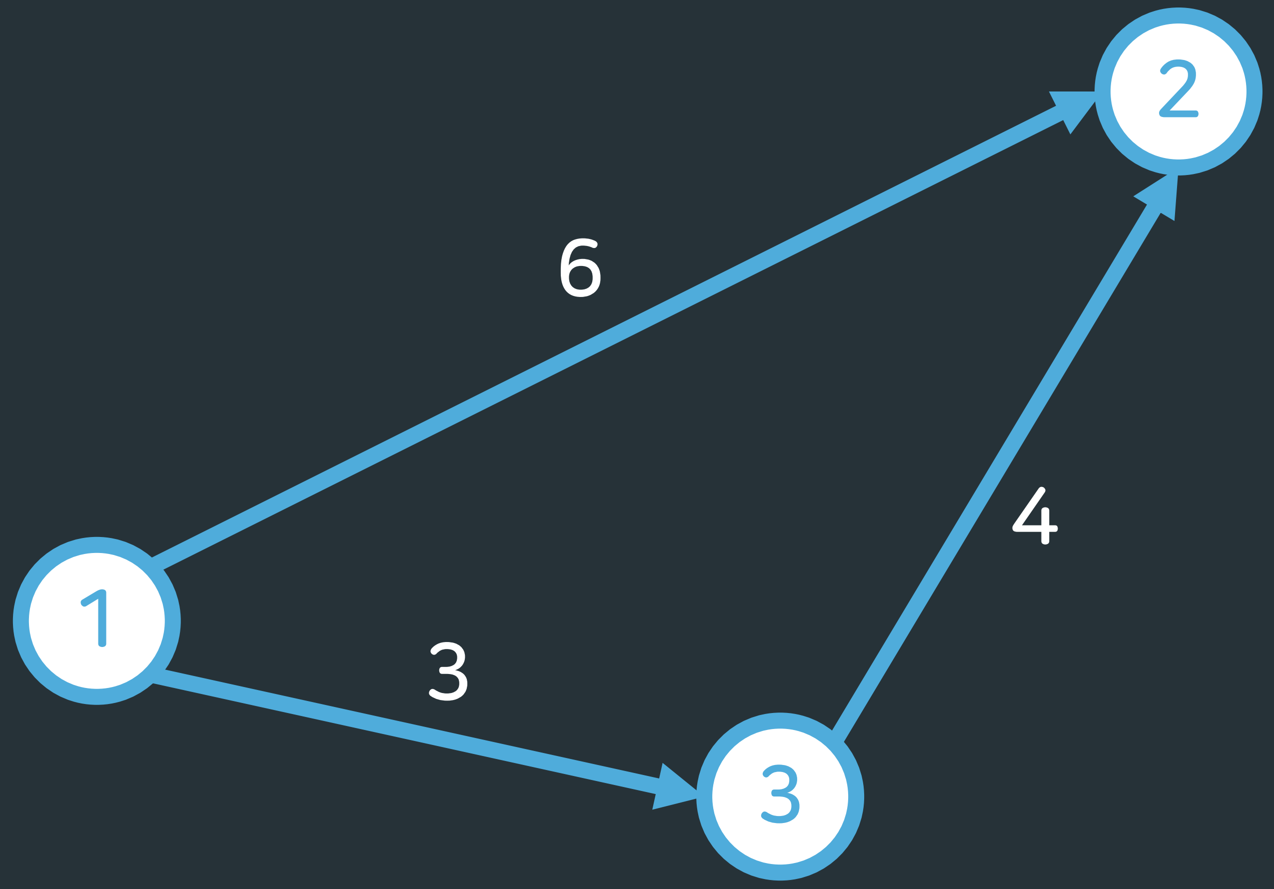
다익스트라



1	2	3	4	5
0	2	3	7	INF

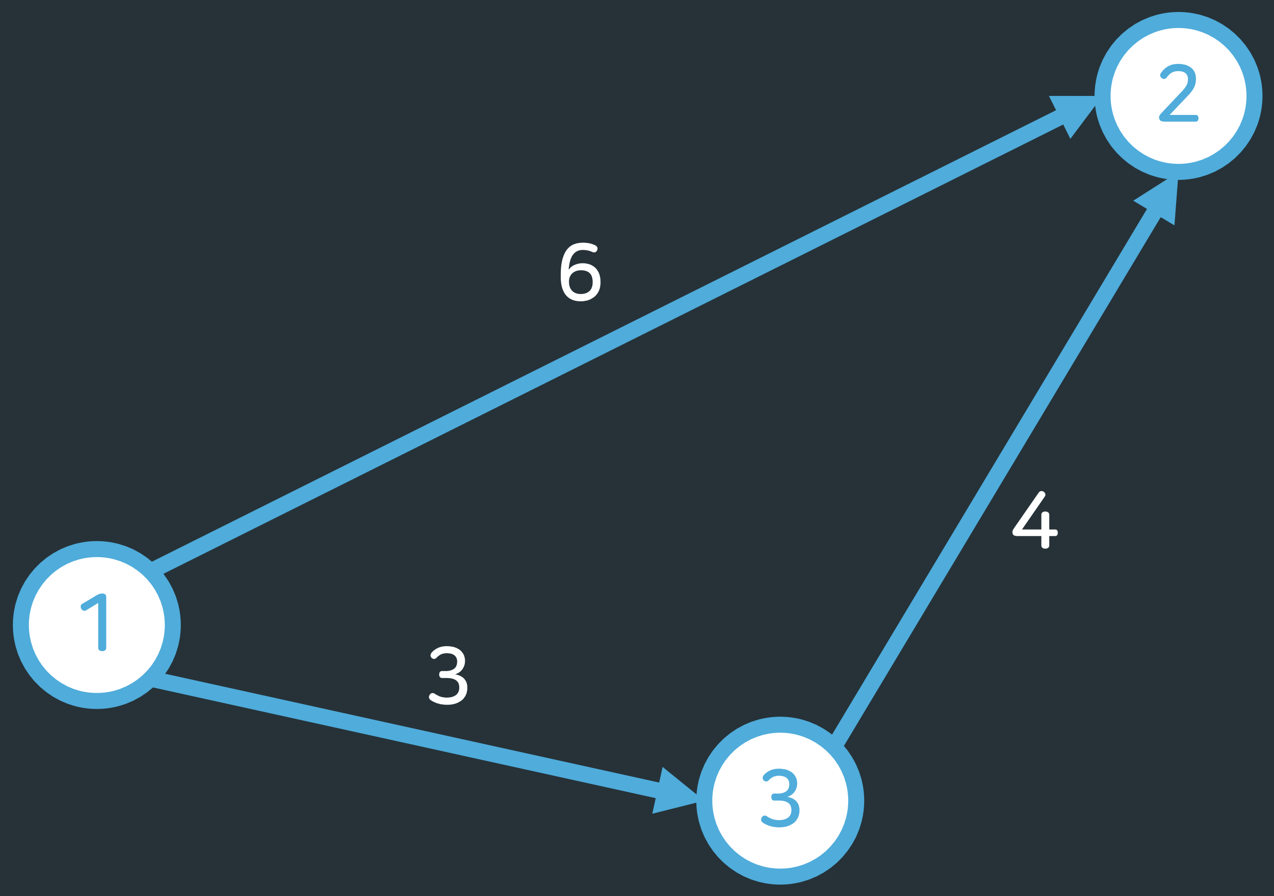
더 이상 탐색할 수 있는 정점 없음

정말 그리디가 가능할까?



1->3 간선을 먼저 선택하고 3->2 간선을 선택해 1->3->2로 갔는데
알고보니 1->2로 바로 가는게 최단 경로라면?

정말 그리디가 가능할까?



1->3 간선을 먼저 선택했더라도 3->2 간선 하나를 고려하는게 아니라 1부터의 거리를 고려하는 것!
그러므로 3->2를 통해 1->3->2를 가기 전 1->2 간선을 먼저 고려하게 될 것

cf) 시작점으로부터의 거리가 아니라 간선 자체의 가중치만 고려하는 것은 Prim 알고리즘

의사 코드

#알튜비튜

```
모든 정점까지의 거리를 담은 dist 배열을 INF으로 초기화
시작 정점까지의 거리 0으로 초기화

while (갱신할 정점이 있을 때까지) {
    int v = 탐색하지 않은 정점 중 시작점에서 가장 가까운 정점

    for (v와 연결된 모든 정점에 대해){
        int u = v와 연결된 정점
        if(dist[v] + weight[v][u] < dist[u]){
            dist[u] = dist[v] + weight[v][u]
        }
    }
}
```

현재 가장 가까운 정점을
정점의 수만큼(V) 찾아야 함

간선의 수만큼(E)
dist를 갱신하게 됨

갱신 정보는 어떤 자료구조에?

#알튜비튜

1) 배열의 경우
모든 정점에 대하여 O(V)
*
최소 값인 정점을 찾는 시간 O(V)

2) 우선 순위 큐일 경우

정점을 꺼내서 E번 간선 업데이트
O(logV * E)
+
V번 정점 추가 O(V * logV)

배열

- O(V*V)

우선순위 큐

- O(V*logV + ElogV)

/<> 1753번 : 최단경로 – Gold 5

문제

- 방향 그래프에서 주어진 시작점에 대한 다른 모든 정점으로의 최단 경로를 출력

제한 사항

- 정점의 개수 V는 1 <= V <= 20,000
- 간선의 개수 E는 1 <= E <= 300,000
- 간선의 가중치 w는 1 <= w <= 10

*인접 행렬로 구현할 때 필요한 공간은 20,000 * 20,000 = 4억 -> 불가능!
*V와 E가 최대일 때 각 정점의 간선은 최대 15개로 적다! -> 인접 리스트로 구현

예제

#알튜비튜

예제 입력 1

```
5 6
1
5 1 1
1 2 2
1 3 3
2 3 4
2 4 5
3 4 6
```

예제 출력 1

```
0
2
3
7
INF
```

플로이드-워셜

Floyd-Warshall

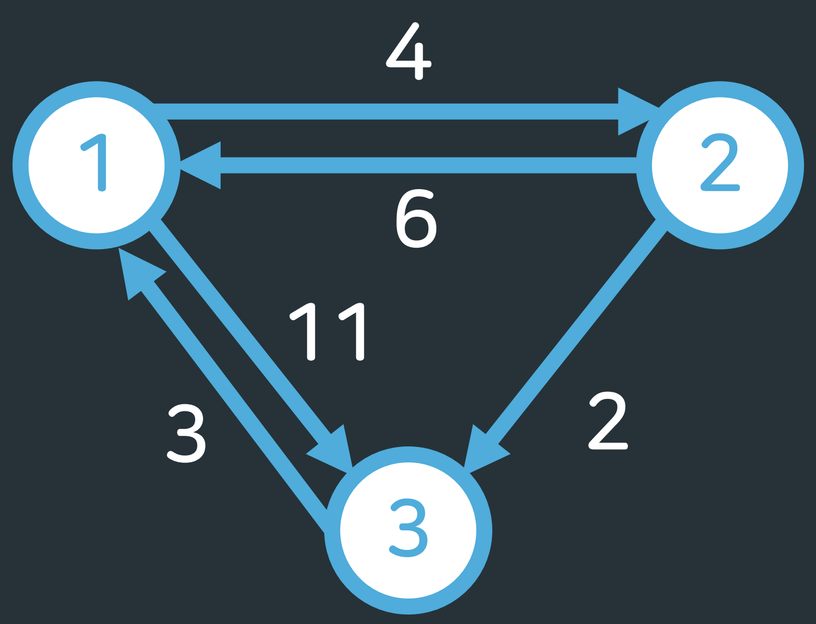
- 가능한 모든 정점 2개의 조합에 대한 최단 경로를 구하는 ASP 알고리즘
- 두 정점 사이의 최단 경로에 포함될 수 있는 모든 정점의 경우를 고려하는 dp 접근
- 정점의 수를 V, 간선의 수를 E라고 할 때, 시간 복잡도는 $O(V^3)$

V = 128, E = 8,000일 때

- 다익스트라 V번 수행 : 128*(128*log(128) + 8,000*log(128)) = 7,282,688
- 플로이드-워셜 : 128*128*128 = 2,097,152

=> 모든 정점 사이의 최단 경로를 구할 땐 플로이드-워셜이 더 효율적이다!

플로이드-워셜

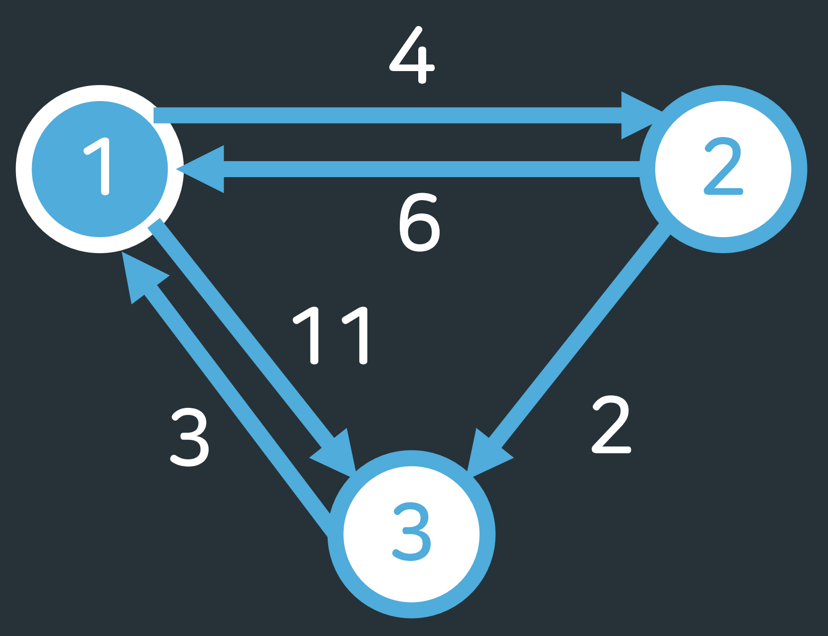


	v1	v2	v3
v1	0	4	11
v2	6	0	2
v3	3	INF	0

- 각 정점을 중간 정점으로 해당 정점을 지나는 모든 경로에 대한 값을 계산

플로이드-워셜

- 중간 정점 1



- 2 → 1 → 3 : 6 + 11 = 17
- 3 → 1 → 2 : 3 + 4 = 7

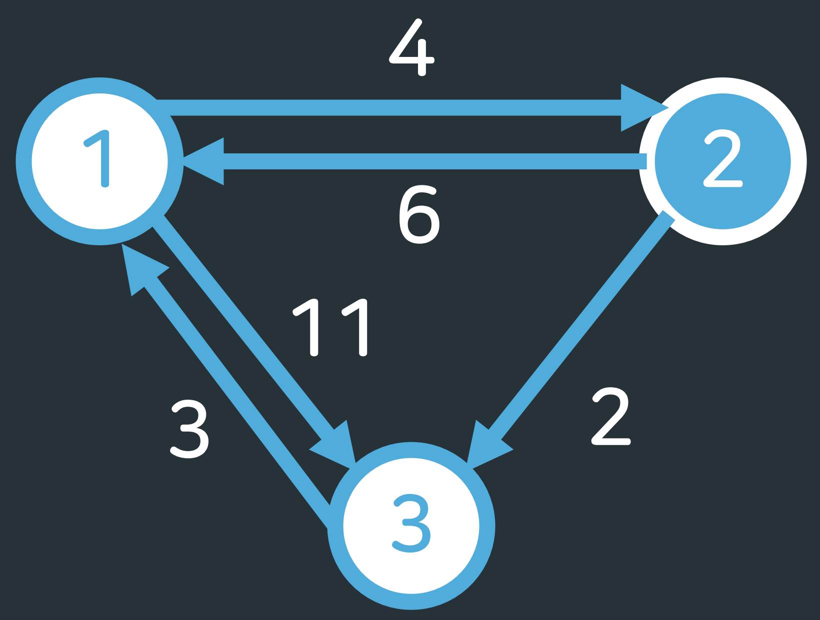
	v1	v2	v3
v1	0	4	11
v2	6	0	2
v3	3	7	0

17 < 2 (x)

7 < INF

플로이드-워셜

- 중간 정점 2



- 1 → 2 → 3 : 4 + 2 = 6
- 3 → 2 → 1 : 7 + 6 = 13

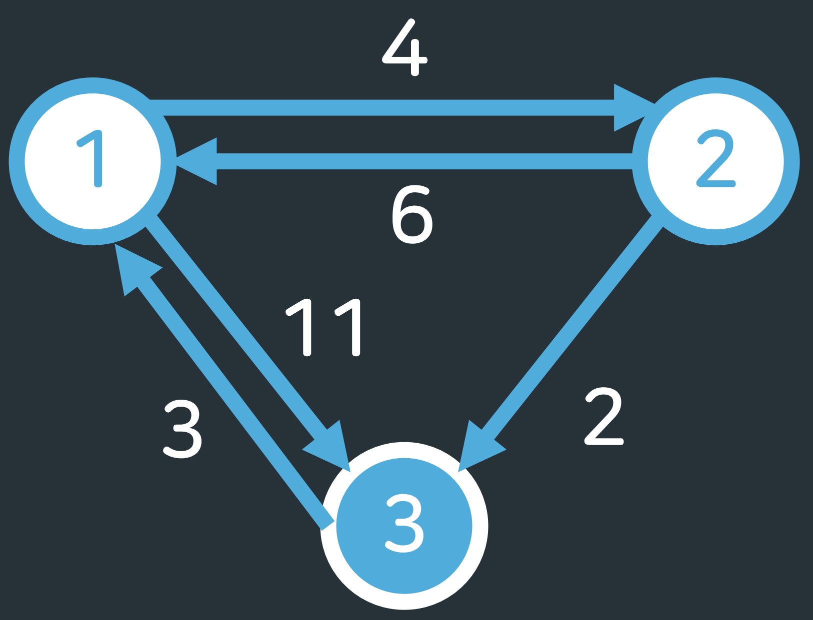
	v1	v2	v3
v1	0	4	6
v2	6	0	2
v3	3	7	0

6 < 11

13 < 3 (x)

플로이드-워셜

- 중간 정점 3



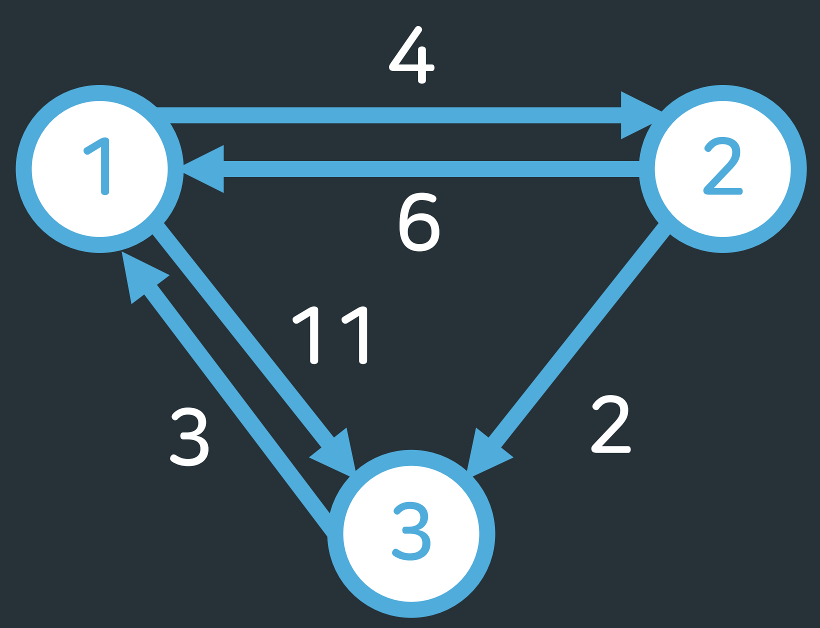
- 2 → 3 → 1 : 2 + 3 = 5
- 1 → 3 → 2 : 6 + 7 = 13

	v1	v2	v3
v1	0	4	6
v2	5	0	2
v3	3	7	0

13 < 4 (x)

5 < 6

플로이드-워셜



	v1	v2	v3
v1	0	4	6
v2	5	0	2
v3	3	7	0

11404번 : 플로이드 – Gold 4

문제

- 모든 도시의 쌍 (A, B)에 대해 A에서 B로 가는 비용의 최솟값은?

제한 사항

- 도시의 개수 n은 1 <= n <= 100
- 도시 사이를 오가는 버스의 수는 1 <= m <= 100,000
- 이동 비용 c는 1 <= c <= 100,000

*최대 100개의 도시에 어떻게 버스의 수가 100,000개?
-> (A, B)에 대해 간선이 여러 개일 수 있다!

예제

예제 입력 1

```
5 14
1 2 2
1 3 3
1 4 1
1 5 10
2 4 2
3 4 1
3 5 1
4 5 3
3 5 10
3 1 8
1 4 2
5 1 7
3 4 2
5 2 4
```

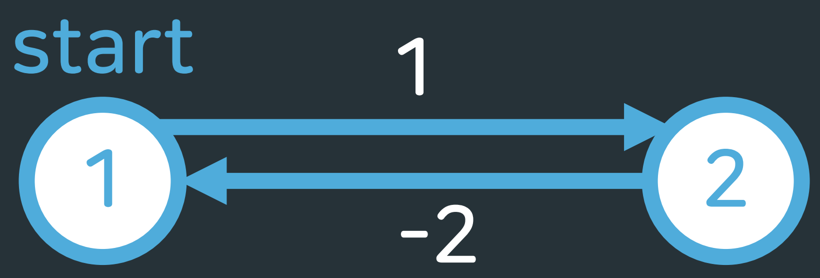
예제 출력 1

```
0 2 3 1 4
12 0 15 2 5
8 5 0 1 1
10 7 13 0 3
7 4 10 6 0
```

Bellman-Ford

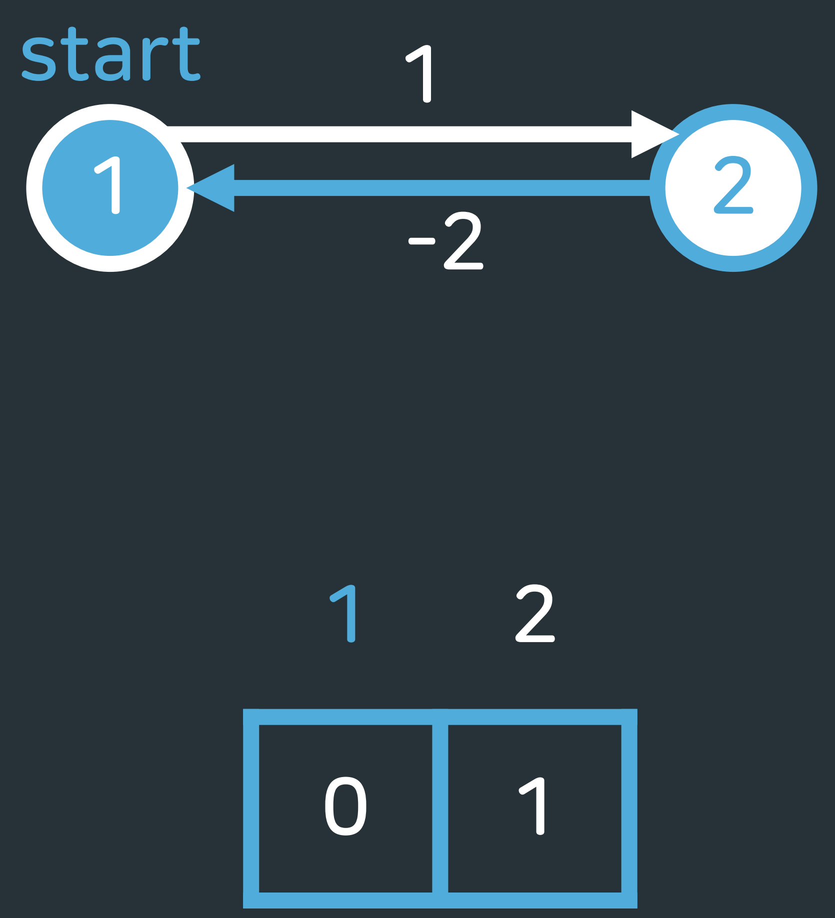
- 하나의 시작점에서 모든 정점까지의 최단 경로를 구하는 SSP 알고리즘
- 가중치가 음수일 때 다익스트라 대신 사용
- 모든 정점을 V-1번 갱신한 뒤, 한 번 더 갱신을 시도하는 브루트포스적 접근
- 정점의 수를 V, 간선의 수를 E라고 할 때, 시간 복잡도는 O(VE)

다익스트라는 왜?

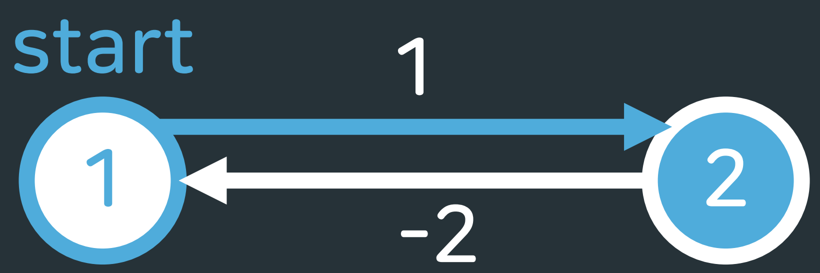


1	2
0	INF

다익스트라는 왜?

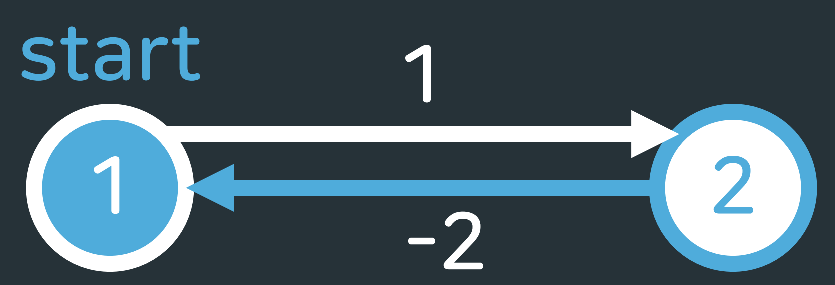


다익스트라는 왜?



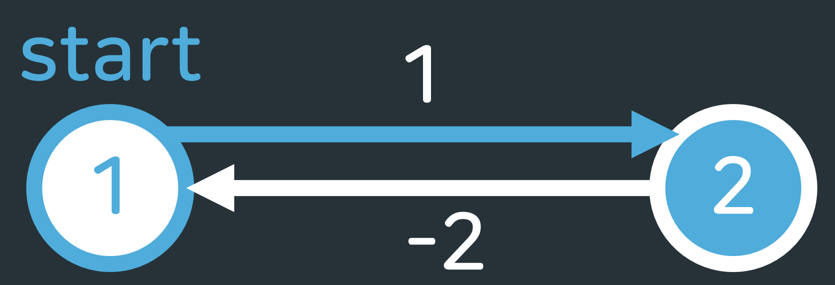
1	2
-1	1

다익스트라는 왜?



1	2
-1	0

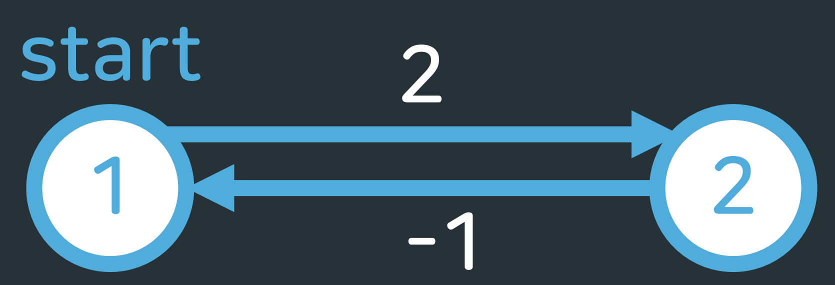
다익스트라는 왜?



1	2
-2	0

최단 경로가 무한히 갱신됨
음의 사이클!

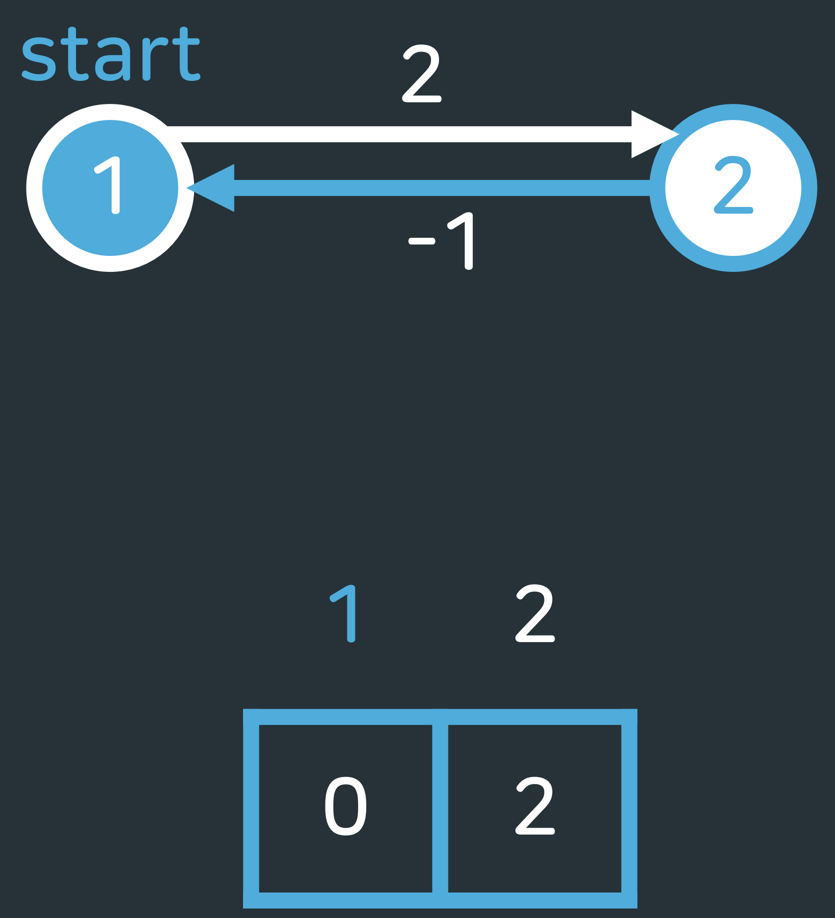
늘 불가능한 건 아니예요!



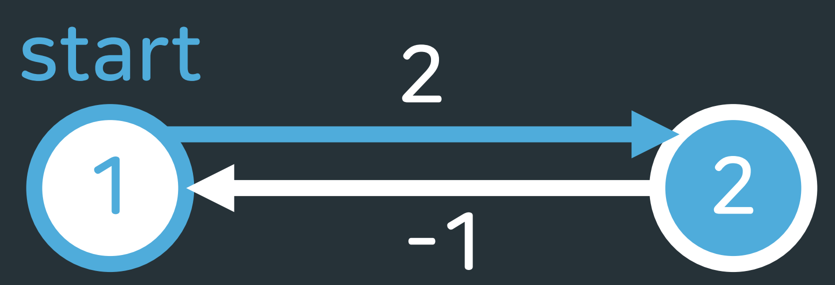
1	2
0	INF

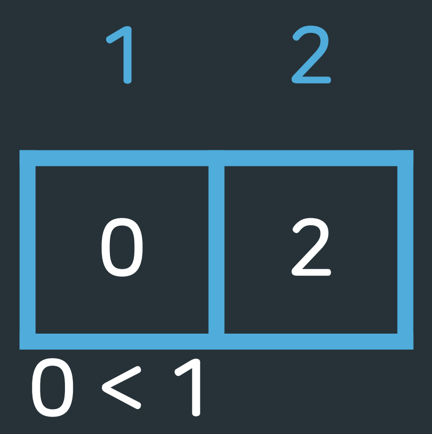
늘 불가능한 건 아니예요!

#알튜비튜

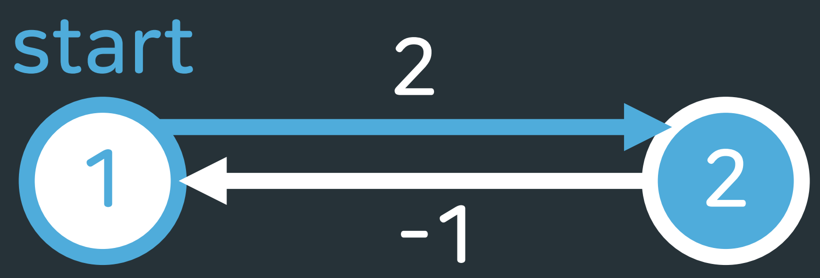


늘 불가능한 건 아니예요!





늘 불가능한 건 아니예요!

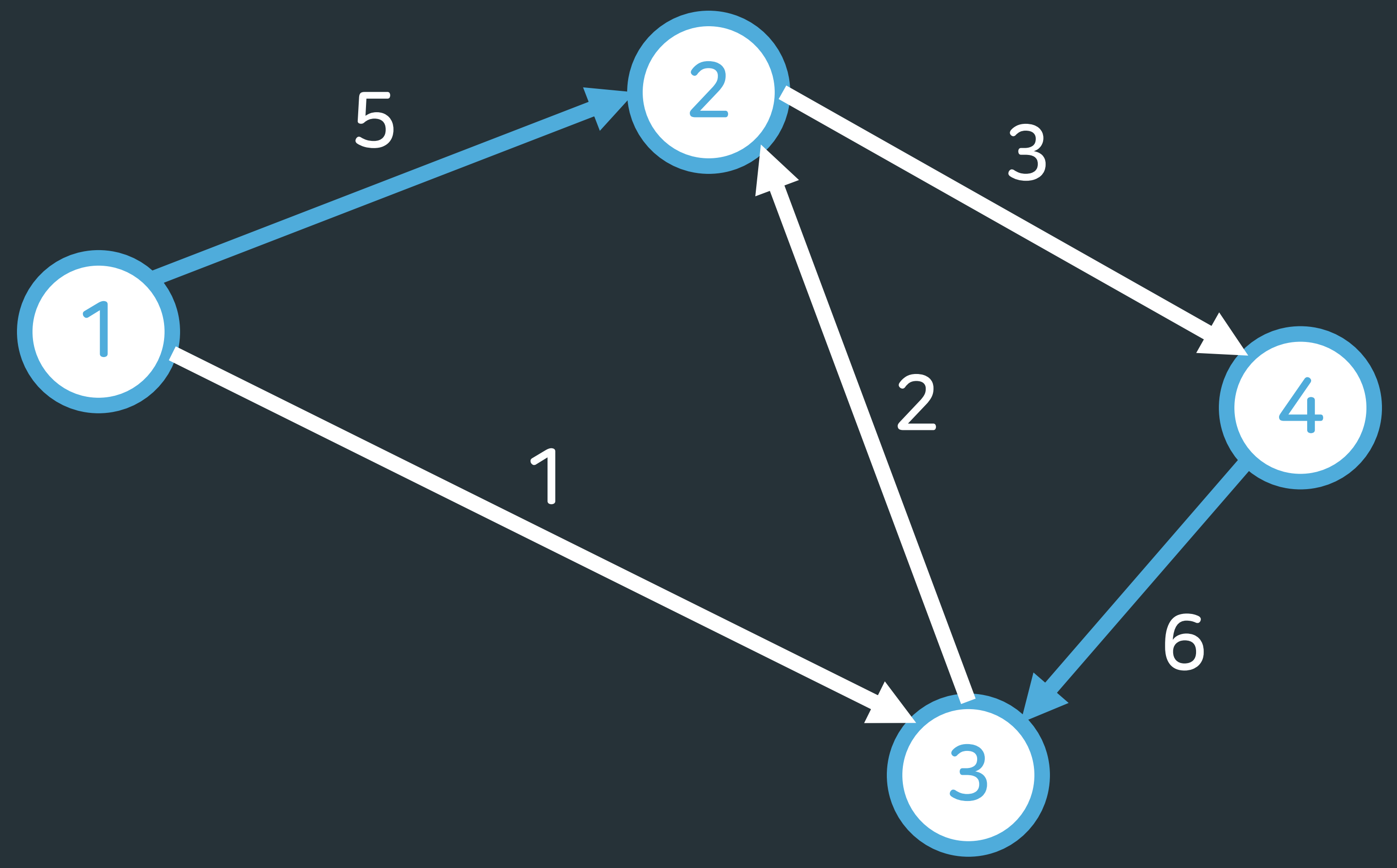


1	2
0	2

그래도 다익스트라는 음의 사이클을 잡아낼 수 없어 사용 불가

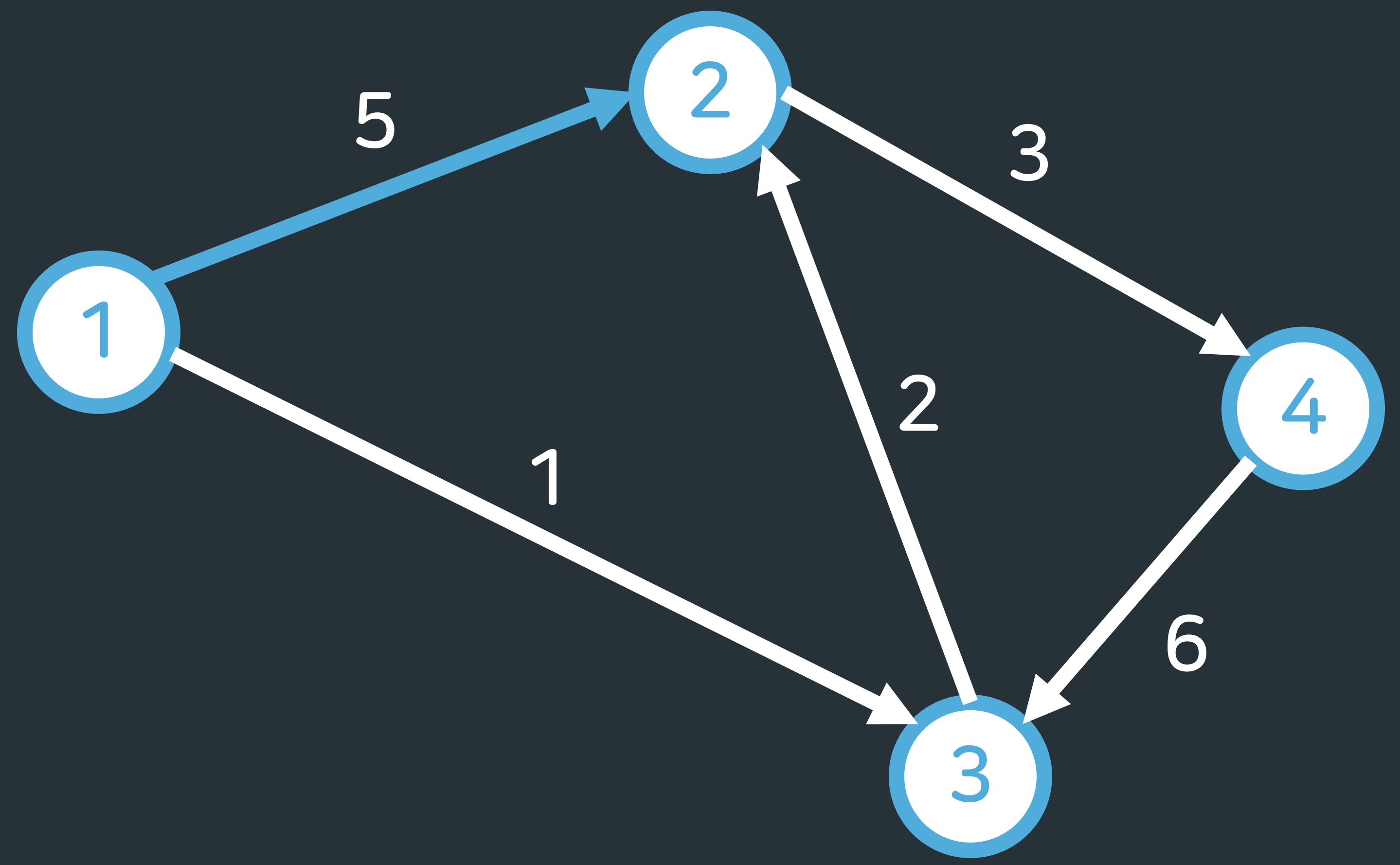
기본 아이디어

#알튜비튜



정점이 V개일 때 정점 A->B의 경로에는 최대 V-1개의 간선이 있을 수 있음

기본 아이디어



정점이 V개일 때 정점 A->B의 경로에는 최대 V-1개의 간선이 있을 수 있음

그 이상의 간선을 사용하면 사이클 형성!

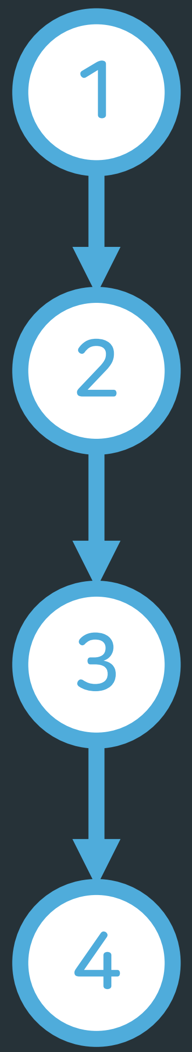
기본 아이디어

#알튜비튜

사이클이 생겼다

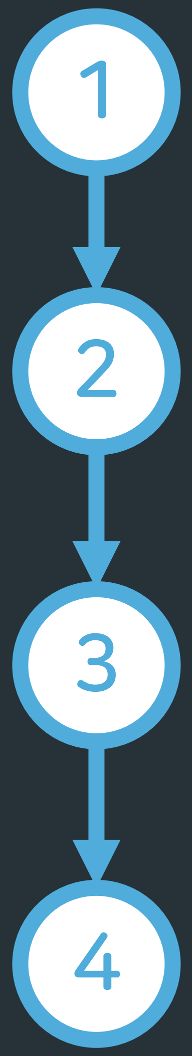
= 최단 경로를 이루는 간선이 V개 이상인 정점 A, B가 있다
= V번 이상 갱신되는 간선이 있다

좀 더 직관적으로 생각해볼까요?



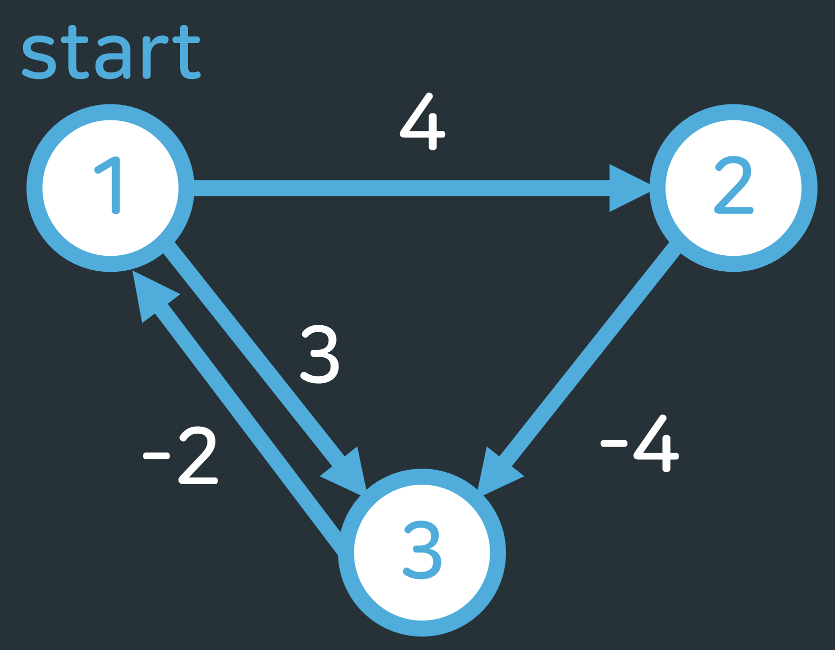
V=4라고 가정하면,
1번에서 4번으로 갈 때 가장 높이가 큰 트리는 다음과 같은 트리입니다.
이 경우, 간선은 최대 3(4-1)번이 사용됩니다.

좀 더 직관적으로 생각해볼까요?



최단 경로를 구할 정점의 수가 V-1개이므로
사이클이 없다면 특정 간선은 최대 V-1번만 사용됨!

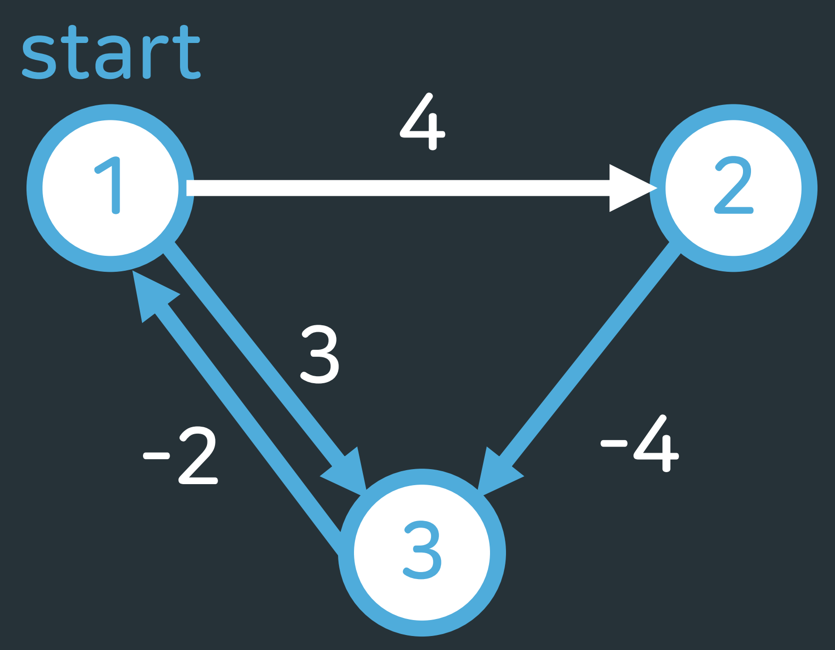
벨만-포드



1	2	3
0	INF	INF

첫번째 반복

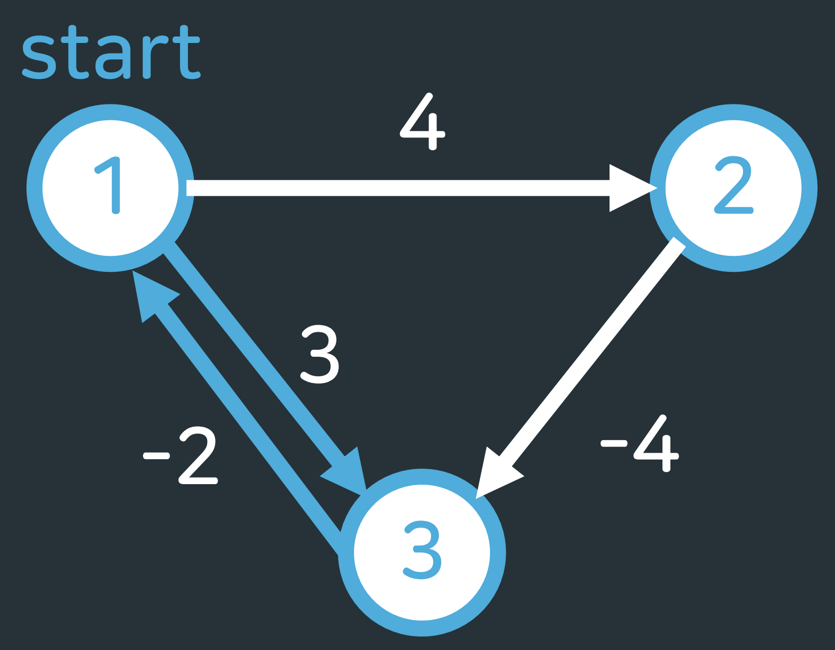
벨만-포드



1	2	3
0	4	INF

첫번째 반복

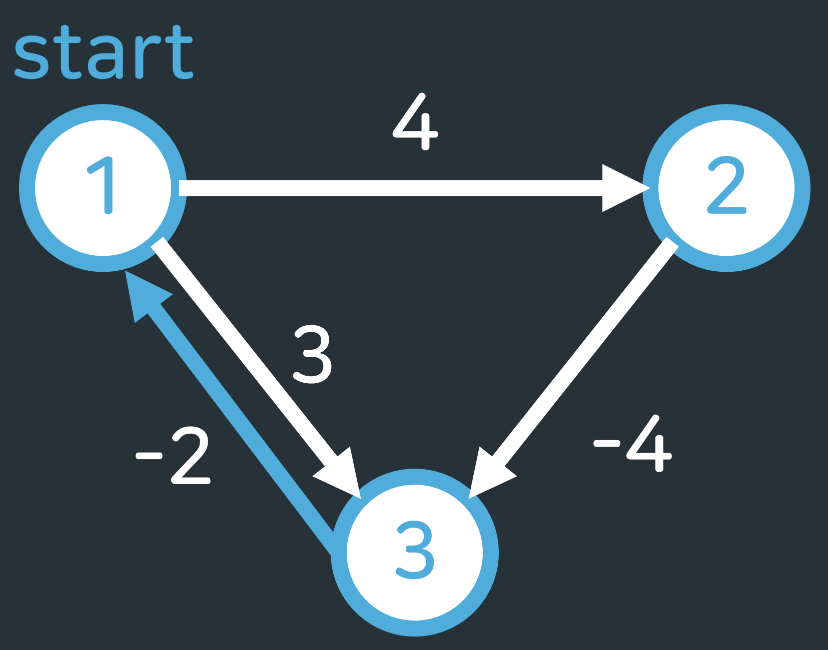
벨만-포드



1	2	3
0	4	0

첫번째 반복

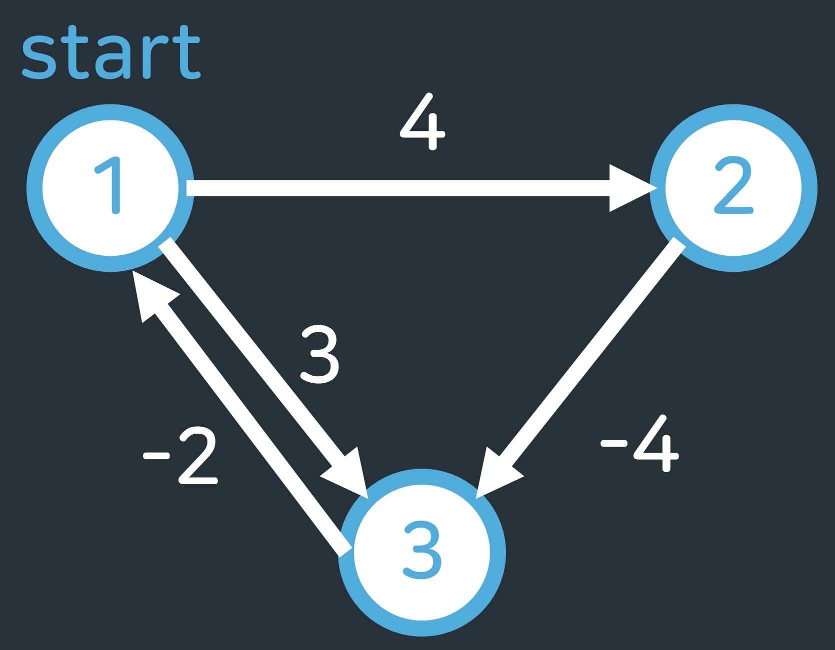
벨만-포드



1	2	3
0	4	0

첫번째 반복

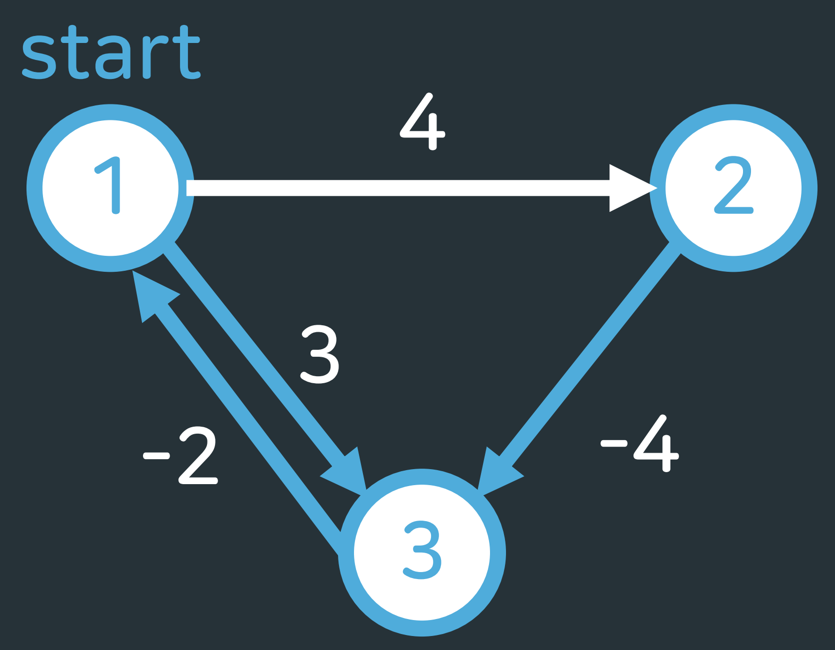
벨만-포드



1	2	3
-2	4	0

첫번째 반복

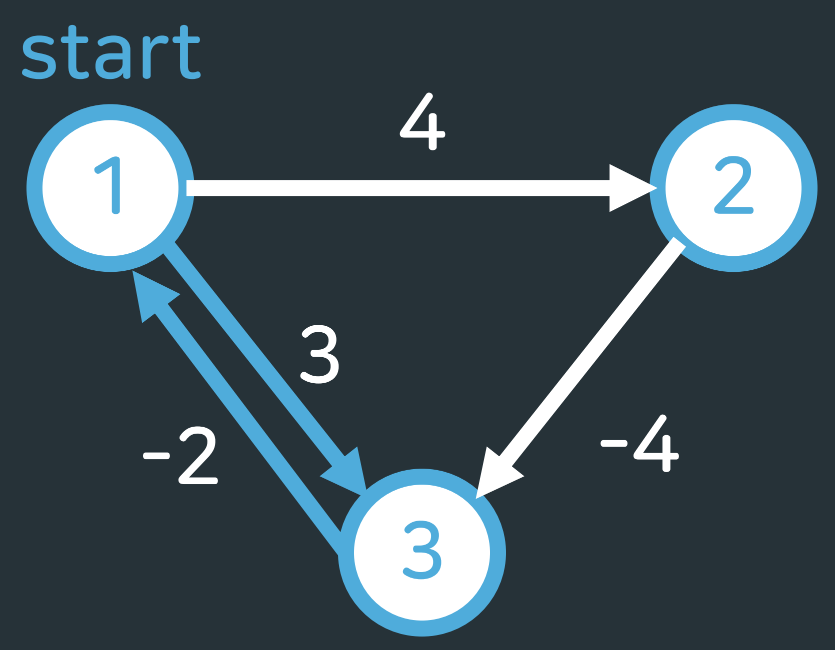
벨만-포드



1	2	3
-2	2	0

두번째 반복

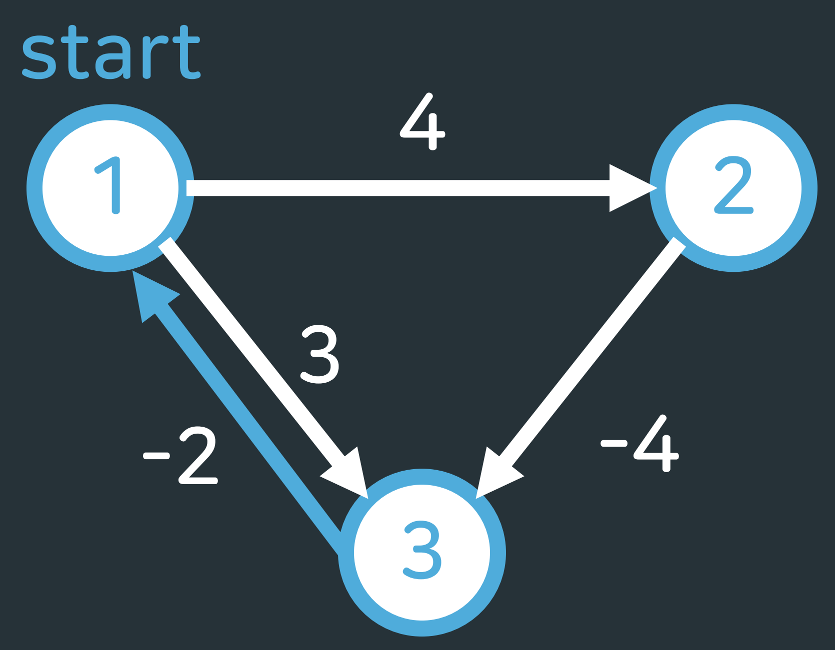
벨만-포드



1	2	3
-2	2	-2

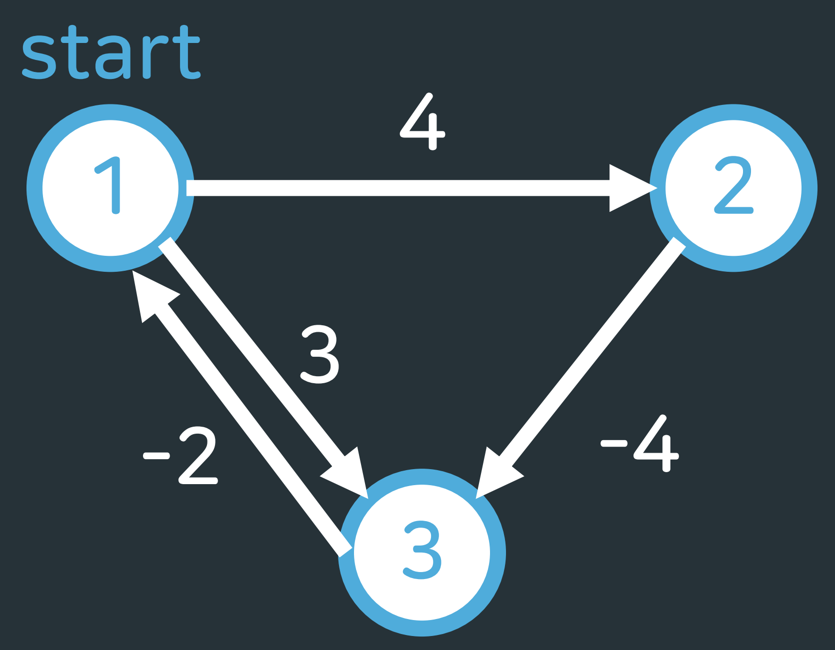
두번째 반복

벨만-포드



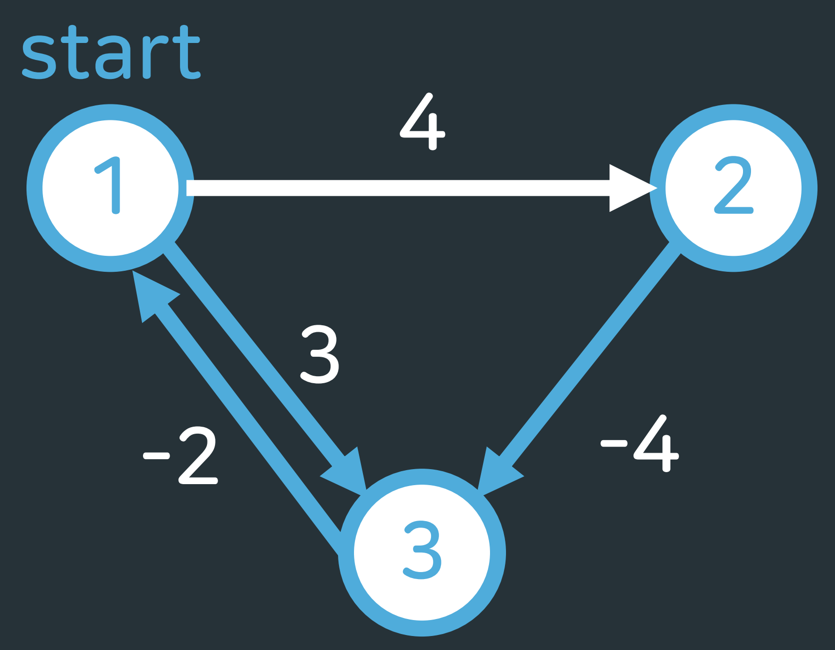
1	2	3
-2	2	-2

두번째 반복



1	2	3
-4	2	-2

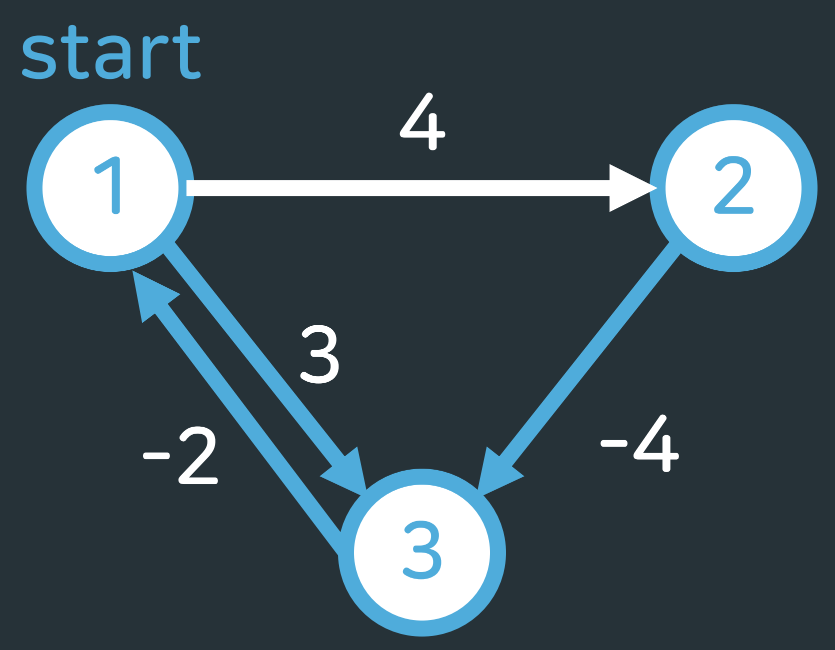
두번째 반복



1	2	3
-4	0	-2

세번째 반복 : 여기서 갱신이 또 일어나면 음의 사이클

벨만-포드



1	2	3
-4	0	-2

갱신 확인
= 음의 사이클 있음

세번째 반복

의사 코드


```
for (V-1회 루프){
  for (모든 간선에 대해)
    간선을 사용하여 최단 경로 갱신
}

for (모든 간선에 대해){
  if (간선을 사용하여 최단 경로가 갱신됨)
    음의 사이클 존재!
}
```

(V-1) * E

E

O(VE)

11657번 : 타임머신 - Gold 4

문제

- 1번 도시에서 출발해 나머지 모든 도시로 가는 가장 빠른 시간은?
- 단, 순간이동과 타임머신으로 걸리는 시간이 음수인 경우가 있을 수 있음
- 어떠한 도시로 가는 시간을 무한히 오래 전으로 돌릴 수 있음 (음의 사이클)

제한 사항

- 도시의 개수 N은 1 <= N <= 500
- 도시 사이를 오가는 버스의 수는 1 <= M <= 6,000
- 이동 비용 C는 -10,000 <= C <= 10,000

예제

#알튜비튜

예제 입력 1

```
3 4
1 2 4
1 3 3
2 3 -1
3 1 -2
```

예제 출력 1

```
4
3
```

예제 입력 3

```
3 2
1 2 4
1 2 3
```

예제 출력 3

```
3
-1
```

예제 입력 2

```
3 4
1 2 4
1 3 3
2 3 -4
3 1 -2
```

예제 출력 2

```
-1
```

마무리

정리

- 간선에 가중치가 있는 그래프의 최단 경로는 BFS를 사용할 수 없음
- 하나의 출발지, 모든 도착지에 대한 최단 경로는 다익스트라, 벨만-포드
- 음의 사이클이 생기는 경우 벨만-포드 사용해야 함
- 모든 출발지, 모든 도착지에 대한 최단 경로는 플로이드-워셜
- 다익스트라 구현시 프림 알고리즘(최소 신장 트리 알고리즘)과 헷갈리지 않도록 주의!

이것도 알아보세요

- 다익스트라의 시간 복잡도를 O(VlogE + ElogE)라고 하는 글도 있고, O(ElogV)라고 하는 글도 있어요.
  사실 다 같은 얘기를 다르게 기술한 것이지만 그 차이를 이해하면 알고리즘에 대해 더 잘 이해할 수 있어요
- 가중치가 두 가지 종류로만 주어진다면 어떻게 될까요? 여기에도 그냥 다익스트라를 적용할까요?

과제

필수

- 15685번 : 드래곤 커브 – Gold 4
- 1238번 : 파티 – Gold 3
- 2458번 : 키 순서 – Gold 3

도전

- 1865번 : 웜홀 – Gold 3
- 2021 KAKAO BLIND RECRUITMENT : 합승 택시 요금 – Level 3