

알튜비튜 동적계획법

오늘은 '다이나믹 프로그래밍'이라고도 불리는 동적 계획법 알고리즘에 대해 배웁니다. 과거에 구한 해를 현재 해를 구할 때 활용하는 알고리즘이죠. 문제에 많이 나오는 굉장히 중요한 알고리즘 중 하나예요.



동적 계획법

- 알고리즘의 핵심: 특정 범위까지의 값을 구하기 위해 이전 범위의 값을 활용하여 효율적으로 값을 얻는 기법
- 이전 범위의 값을 저장(Memoization)함으로써 시간적, 공간적 효율 얻음

이런 문제가 있어요



/<> 10870번 : 피보나치 수 5 - Bronze 2

문제

- F(n) = F(n-1) + F(n-2) (n >= 2)
- n번째 피보나치 수를 구하는 문제

제한 사항

● 입력 범위는 0 <= n <= 20

이런 문제가 있어요



/<> 10870번 : 피보나치 수 5 - Bronze 2

문제

- F(n) = F(n-1) + F(n-2) (n >= 2) → n부터 시작하면 계속 전 단계 함수를 호출
- n번째 피보나치 수를 구하는 문제

제한 사항

● 입력 범위는 0 <= n <= 20

재귀함수로 풀면 안되나?



피보나치 수 5

- F(n) = F(n-1) + F(n-2) (n >= 2)
- n번째 피보나치 수를 구하는 문제
- n의 범위 <= 20

```
int f(int n) {
    if (n <= 1)
        return n;
    return f(n - 1) + f(n - 2);
}</pre>
```

✓ 완전 가능!

다른 문제도 있어요



피보나치 수 7

- F(n) = F(n-1) + F(n-2) (n >= 2)
- n번째 피보나치 수를 구하는 문제
- n의 범위 <= 1,000,000

```
int f(int n) {
    if (n <= 1)
        return n;
    return f(n - 1) + f(n - 2);
}</pre>
```

✓ 완전 가능?

재귀함수로..?



피보나치 수 7

- F(n) = F(n-1) + F(n-2) (n >= 2)
- n번째 피보나치 수를 구하는 문제
- n의 범위 <= 1,000,000

```
int f(int n) {
    if (n <= 1)
        return n;
    return f(n - 1) + f(n - 2);
}</pre>
```

✓ 절대 불가능

→ 재귀로 풀기엔 n의 범위가 커서 시간초과가 난다



• n = 4

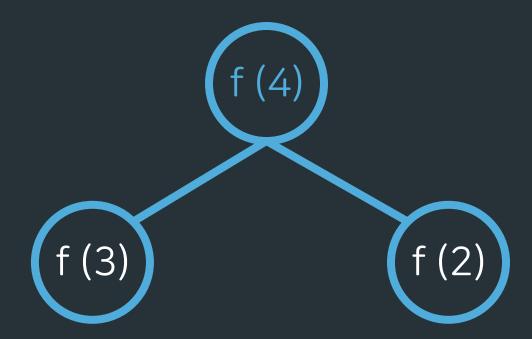
[함수 호출 수]

f(4): 1

f(3): 1

f(2): 1

f(1): 0



```
int f(int n) {
    if (n <= 1)
        return n;
    return f(n - 1) + f(n - 2);
}</pre>
```



• n = 4

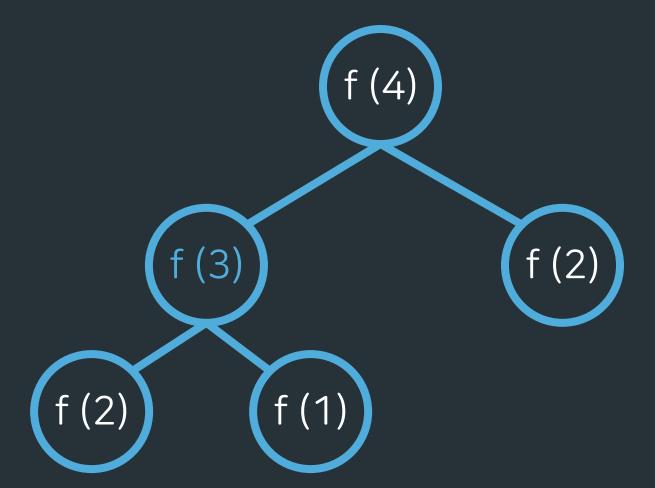
[함수 호출 수]

f(4): 1

f(3): 1

f(2): 2

f(1): 1



```
int f(int n) {
    if (n <= 1)
        return n;
    return f(n - 1) + f(n - 2);
}</pre>
```



• n = 4

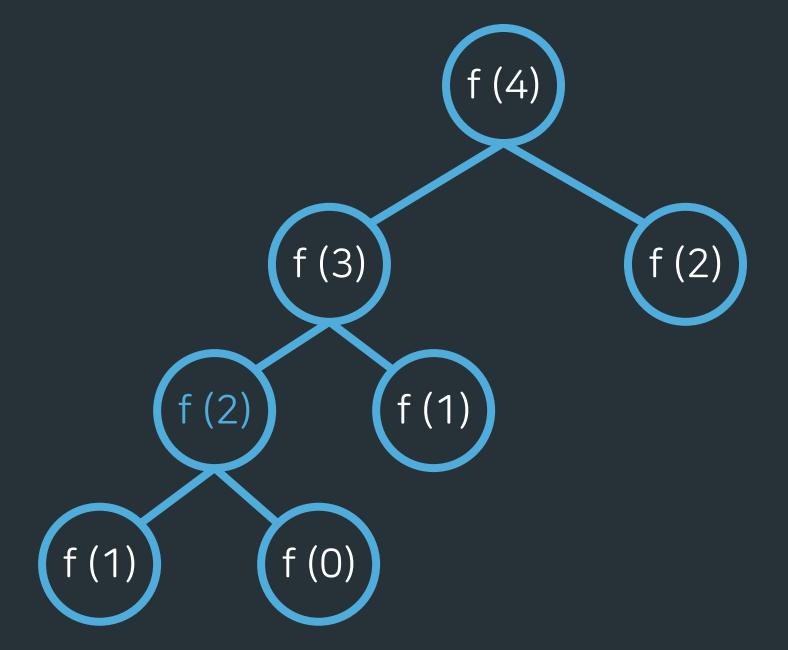
[함수 호출 수]

f(4): 1

f(3): 1

f(2): 2

f(1): 2



```
int f(int n) {
    if (n <= 1)
        return n;
    return f(n - 1) + f(n - 2);
}</pre>
```



• n = 4

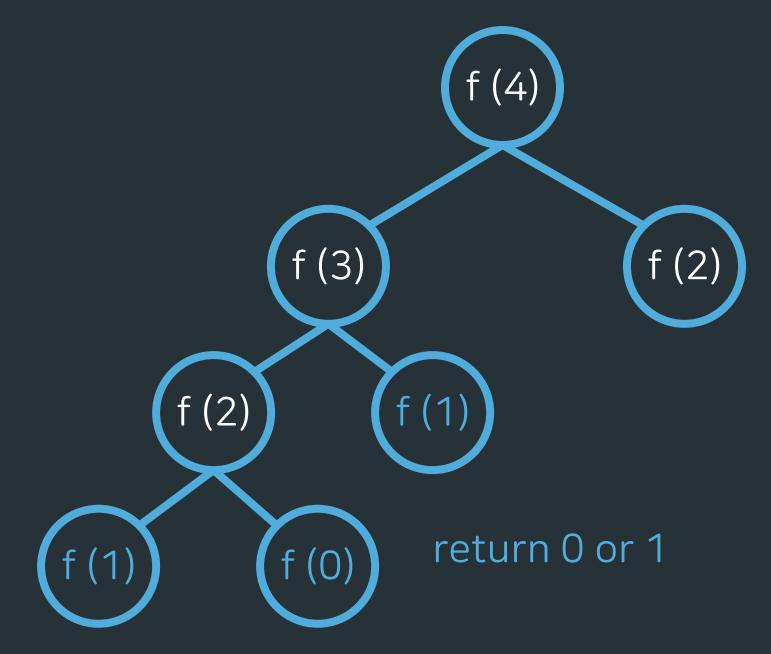
[함수 호출 수]

f(4): 1

f(3): 1

f(2): 2

f(1): 2



```
int f(int n) {
    if (n <= 1)
        return n;
    return f(n - 1) + f(n - 2);
}</pre>
```



• n = 4

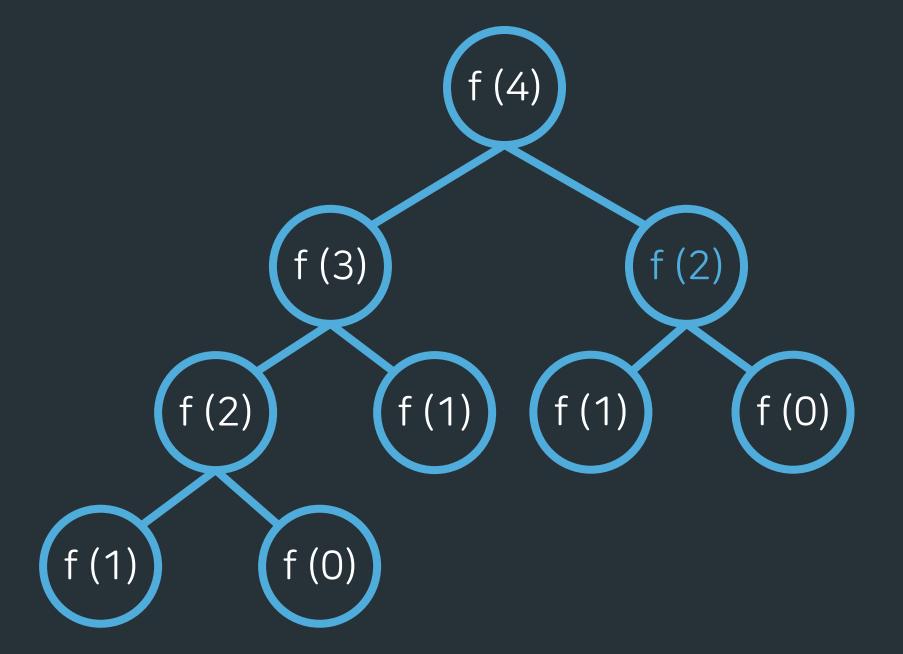
[함수 호출 수]

f(4): 1

f(3): 1

f(2): 2

f(1): 3



```
int f(int n) {
    if (n <= 1)
        return n;
    return f(n - 1) + f(n - 2);
}</pre>
```



n = 4

[함수 호출 수]

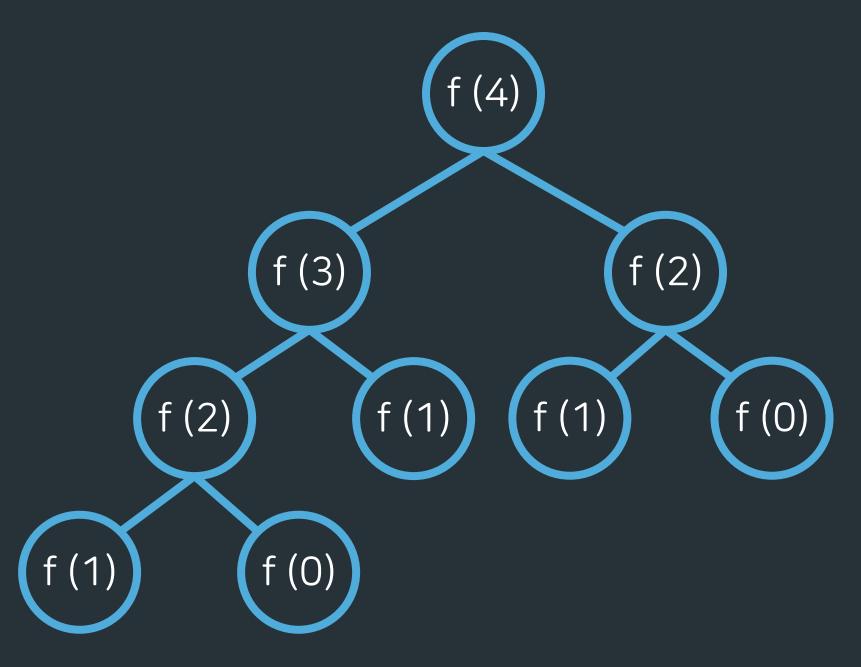
f(4): 1

f(3): 1

f(2): 2

f(1): 3

f(0): 2



int f(int n) {
 if (n <= 1)
 return n;
 return f(n - 1) + f(n - 2);
}</pre>

- → 같은 함수를 여러 번 호출하는 경우가 많다!
- → 즉, 한 번 계산한 값을 또 계산하게 됨



return n;

● 당장 n = 20 이어도..

[함수 호출 수]

f(0): 4181

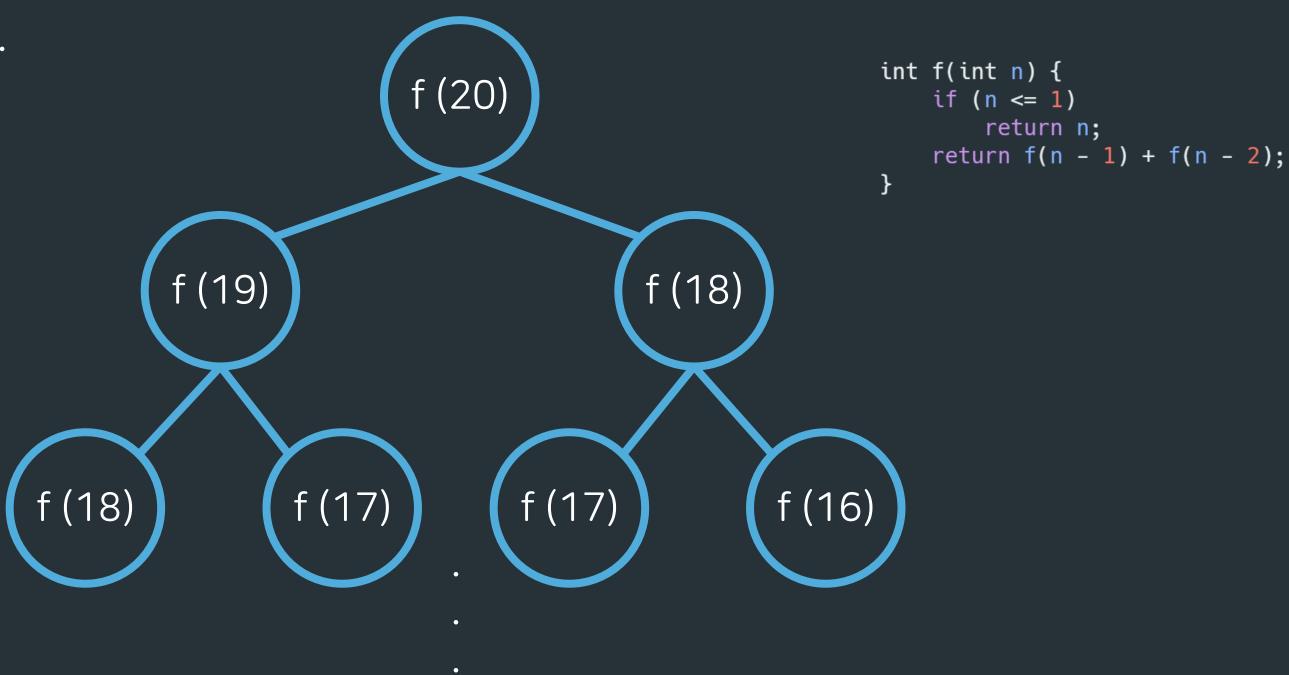
f(1): 6765

f(2): 4181

f(3): 2584

f(4): 1597

*실제 값입니다



- → N이 커지면? 함수 호출이 훨씬 많이 일어남
- → 그렇다면, 이미 구한 답을 또 계산할 필요가 있을까?

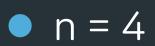
동적 계획법은

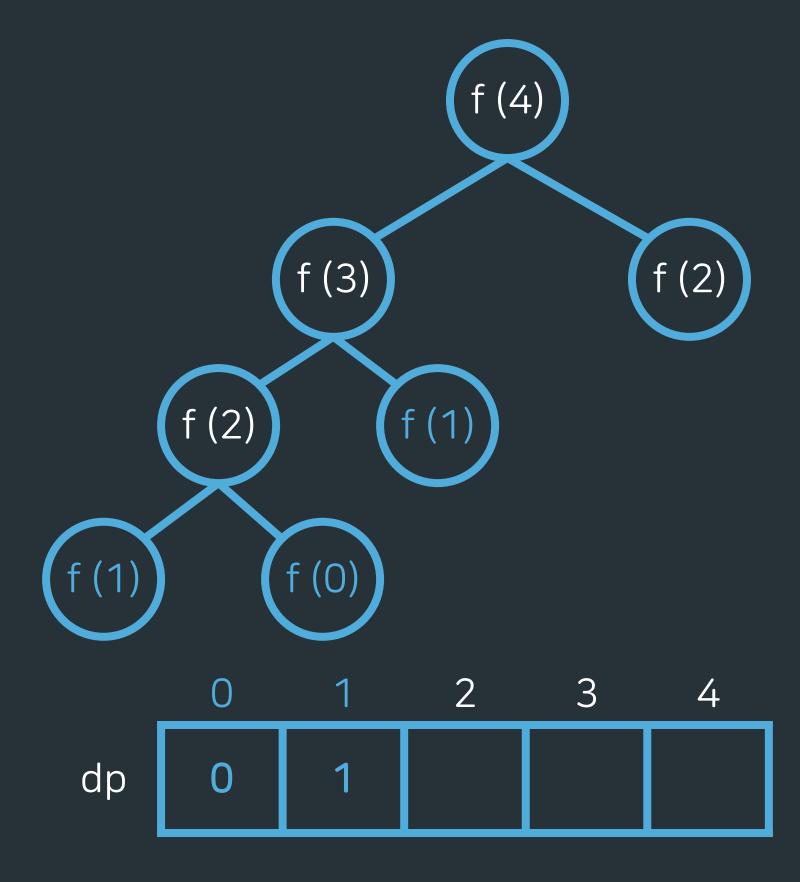


Memoization

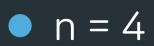
- 이전에 구해둔 값을 저장해서 중복 계산을 방지
- 이전 범위의 답을 구하면, 바로 배열에 저장해 놓자!
- 시간과 공간면에서 모두 효율적!

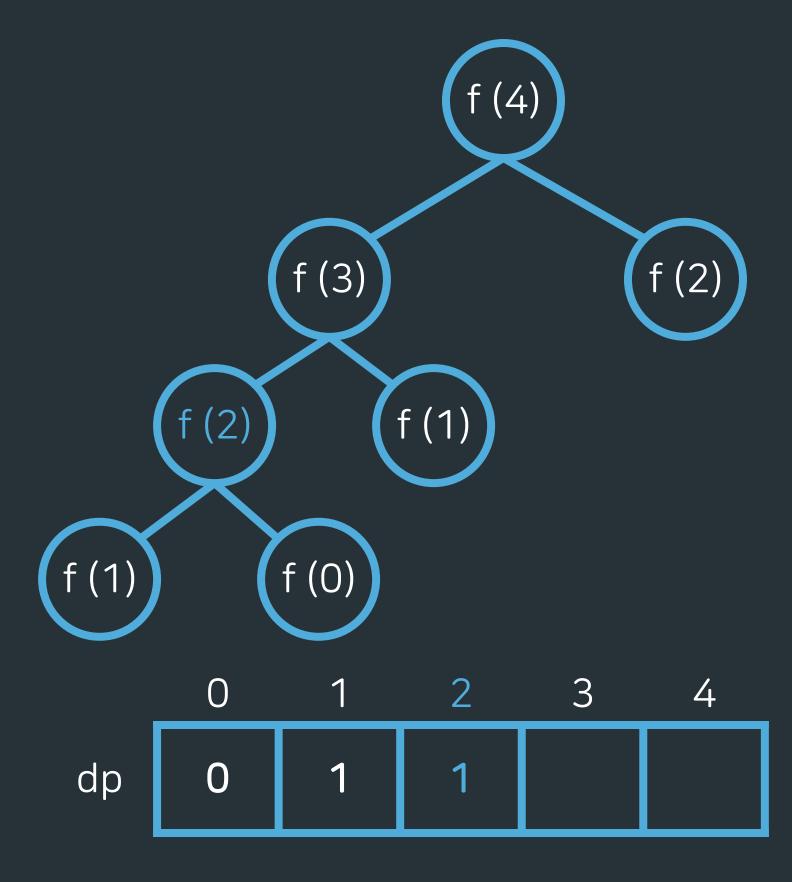




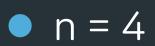


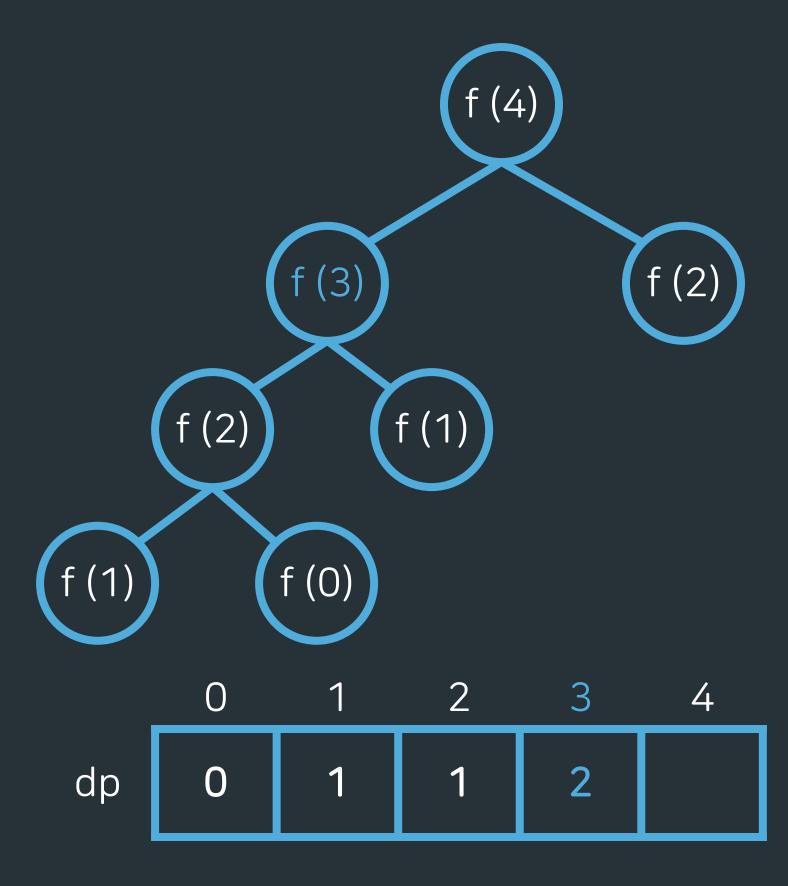




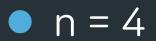


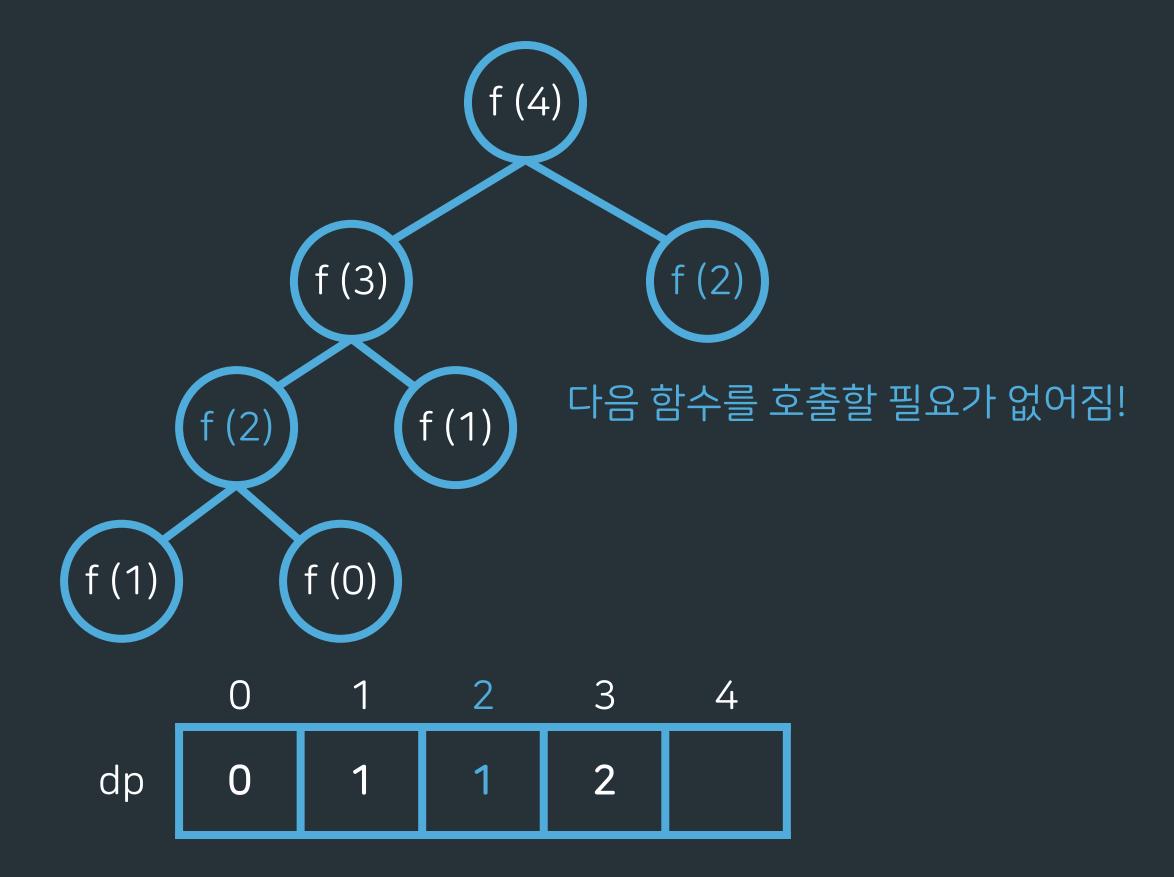




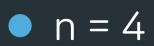


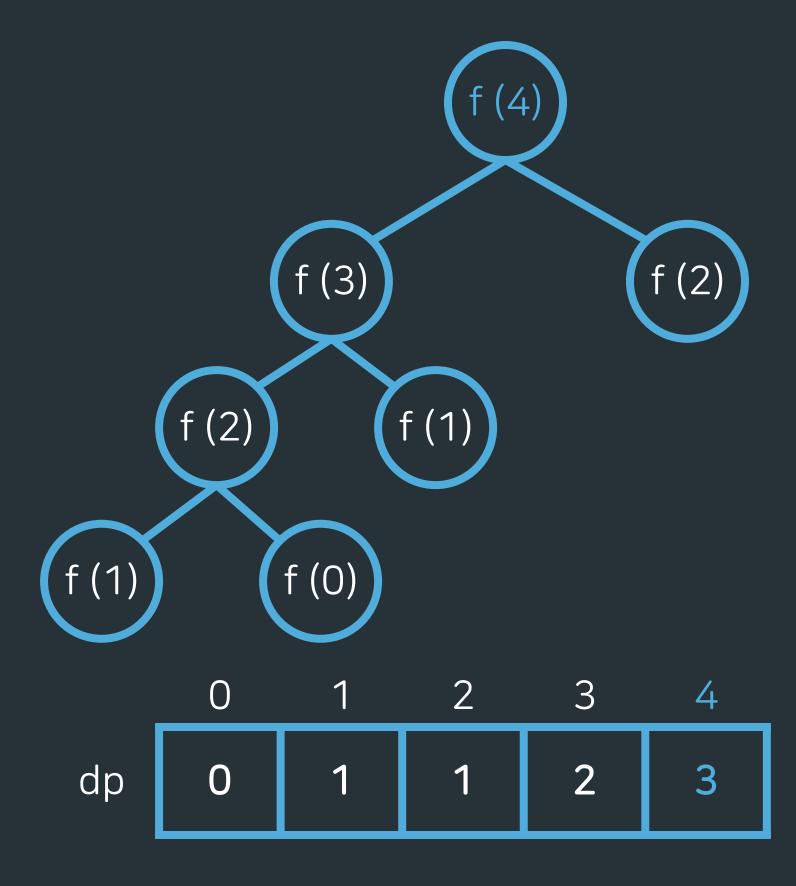














단순 재귀함수

```
int f(int n) {
    if (n <= 1)
        return n;
    return f(n - 1) + f(n - 2);
}</pre>
```

- 보통 n <= 20 까지만 가능
- 그 이상은 시간초과

동적 계획법

```
int f(int n) {
    if (n <= 1)
        return n;
    if (dp[n]) //dp[n]의 값이 존재한다면
        return dp[n]; //함수 호출x 이미 계산한 값 리턴
    return dp[n] = f(n - 1) + f(n - 2);
}
```

- n의 범위 클 때 활용
- 훨씬 효율적인 풀이

다르게 구현할 수도 있어요



동적 계획법

```
int f(int n) {
   if (n <= 1)
      return n;
   if (dp[n]) //dp[n]의 값이 존재한다면
      return dp[n]; //함수 호출x 이미 계산한 값 리턴
   return dp[n] = f(n - 1) + f(n - 2);
}
```

- Top-down 방식 (n부터)
- 구하려 하는 문제를 작은 문제로 호출하며 탐색
- 재귀함수를 활용

0번 인덱스부터 시작해서 미리 배열에 이전 범위의 답을 저장하면 어떨까?

다르게 구현할 수도 있어요



Top-down vs Bottom-up

```
int f(int n) {
                             37052 KB
                                      32 ms
   if (n <= 1)
       return n;
   if (dp[n]) //dp[n]의 값이 존재한다면
       return dp[n]; //함수 호출x 이미 계산한 값 리턴
   return dp[n] = f(n - 1) + f(n - 2);
```

- Top-down 방식 (n부터)
- 구하려 하는 문제를 작은 문제로 호출하며 탐색
- 재귀함수를 활용

```
5928 KB
dp[1] = 1;
for(int i = 2; i <= n; i++){
    dp[i] = dp[i - 1] + dp[i - 2];
```

- Bottom-up 방식 (0부터)
- 이미 알고 있는 작은 문제부터 원하는 문제까지 탐색
- Top-down 방식보다 속도 빠름!

4 ms

어떨 때 동적 계획법을 적용하지?



동적 계획법

- 주어진 문제를 부분 문제로 나누었을 때, 부분 문제의 답을 통해 주어진 문제의 답을 도출할 수 있을 때
- 부분 문제의 답을 여러 번 구해야 할 때
- 즉, 한 번 계산한 값을 다시 사용해야 할 때

어떻게 풀죠



점화식

- 인접한 항들 사이의 관계식
- 동적 계획법 문제를 풀 때는, 점화식을 미리 세우고 풀면 좋다!
- 이전 값들을 통해 DP(현재)를 정의하자

(ex) 피보나치 수 문제: DP[i] = DP[i - 1] + DP[i - 2]

기본 문제



/<> 2579번 : 계단 오르기 - Silver 3

문제

- 계단은 한 번에 1칸 or 2칸 오를 수 있음
- 연속된 세 개의 계단을 모두 밟으면 안됨 (시작점은 포함 x)
- 마지막 도착 계단은 반드시 밟음
- 각 칸의 점수가 주어질 때, 얻을 수 있는 점수의 최댓값 구하는 문제

제한 사항

- 계단 개수 <= 300
- 점수 <= 10,000
- → 각 계단마다의 최댓값을 구한 후 저장하며 풀면 되지 않을까?



예제 입력

예제 출력



문제

- 계단은 한 번에 1칸 or 2칸 오를 수 있음
- 연속된 세 개의 계단을 모두 밟으면 안됨 (시작점은 포함 x)
- 마지막 도착 계단은 반드시 밟음
- 각 칸의 점수(score)가 주어질 때, 얻을 수 있는 점수의 최댓값 구하는 문제

접근

- DP에는 현재 계단까지의 점수의 최댓값 저장
- 현재 계단은 1칸 or 2칸 전 계단에서 온 것
- \rightarrow DP[i] = MAX(DP[i-1], DP[i-2]) + score[i]?

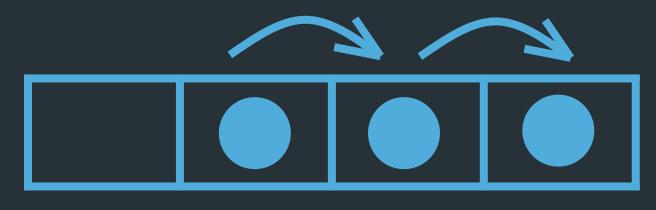


문제

- 계단은 한 번에 1칸 or 2칸 오를 수 있음
- 연속된 세 개의 계단을 모두 밟으면 안됨 (시작점은 포함 x)
- 마지막 도착 계단은 반드시 밟음
- 각 칸의 점수(score)가 주어질 때, 얻을 수 있는 점수의 최댓값 구하는 문제

접근

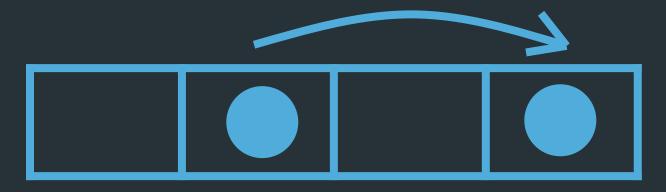
- DP에는 현재 계단까지의 점수의 최댓값 저장
- 현재 계단은 1칸 or 2칸 전 계단에서 온 것
- \rightarrow DP[i] = MAX(DP[i 1], DP[i 2]) + score[i] (x)
- → 이것만으론 연속 세 칸을 잡아낼 수 없음



연속 세 칸이므로 안됨!



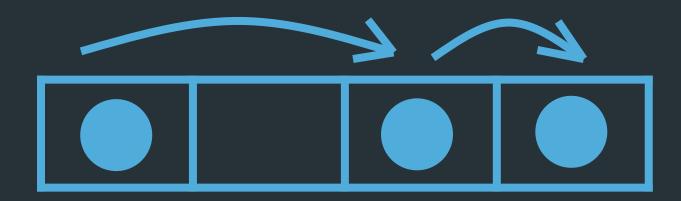




- 두 칸 전에서 온 건 괜찮음
- → DP[i 2]



접근



- 한 칸 전에서 온 값을 쓰고 싶다면, 3칸 전에서 2칸 이동 후 한 칸 전으로 온 경우 생각하면 됨!
- → DP[i 3] + score[i 1]
 - DP[i] = MAX(DP[i-2], DP[i-3] + score[i-1]) + score[i]

응용 문제



14501번: 퇴사 – Silver 3

문제

- N+1일째 되는 날 퇴사하기 위해 최대한 많은 상담을 하는 문제
- 각각의 상담은 상담을 완료하는데 걸리는 기간 T_i와 상담을 했을 때 받을 수 있는 금액 P_i로 이루어져 있음
- 상담을 적절히 했을 때, 백준이가 얻을 수 있는 최대 수익을 구하는 문제

제한 사항

- 입력 케이스 N (1 ≤ N ≤ 15)
- $(1 \le T_i \le 5, 1 \le P_i \le 1,000)$



예제

	1일	2일	3일	4일	5일	6일	7일
Ti	3	5	1	1	2	4	2
Pi	10	20	10	20	15	40	200

● 최대 이익: 1일, 4일, 5일 상담 → 10 + 20 + 15 = 45

예제 – 풀이 1 (완전 탐색)



풀이 1: 완전 탐색

	1일	2일	3일	4일	5일	6일	7일
Ti	3	5	1	1	2	4	2
Pi	10	20	10	20	15	40	200

● 일을 기준으로 해당 일에 상담을 할 수 있는지 없는지 전부 탐색한 후, 최댓값을 갱신하는 방법

예제 – 풀이 1 (완전 탐색)



	1일	2일	3일	4일	5일	6일	7일
Ti	3	5	1	1	2	4	2
Pi	10	20	10	20	15	40	200

- 1. 7개 중 가능한 조합을 모두 찾기: 7c1,7c2,7c3,7c4,7c5,7c6,7c7
- 2. 해당 조합이 가능한지에 대해 검토(ex 1일, 2일, 3일 조합은 안됨)
- → 입력 n개에 대한 시간 복잡도 : 2ⁿ

예제 – 풀이 2 (dp)



풀이 2: dp (Bottom-up)

● 1일부터 시작해서, 각 날마다 해당 상담을 했을 때 가능한 날짜들에 수익 모두 갱신

	1일	2일	3일	4일	5일	6일	7일
Ti	3	5	1	1	2	4	2
Pi	10	20	10	20	15	40	200

- 1일에 상담 진행할 때: 상담에 3일이 걸리기 때문에, 4,5,6,7일에 상담 가능 → 1일 dp 배열: [0, 0, 0, 0, 10, 10, 10]
- 2일에 상담 진행할 때: 상담에 5일이 걸리기 때문에, 7일에 상담 가능 → 2일 dp 배열: [0, 0, 0, 0, 10, 10, 20]
- 1일 상담, 2일 상담 둘 다 7일에 상담이 가능함 그러나, 1일, 2일 상담 모두를 진행할 수는 없음
 1일과 2일 상담 중 이득이 큰 쪽을 선택

● dp[7] = max(10, 20) 즉, 2일차 dp[7] = max(dp[7], 20) → max(기존 dp[7], 새로 갱신된 Pi)



● 1일차부터 시작하여, 해당 상담 진행 일자 + 상담 진행 시 걸리는 시간 보다 큰 시간에 대해 모두 갱신

	1일	2일	3일	4일	5일	6일	7일
Ti	3	5	1	1	2	4	2
Pi	10	20	10	20	15	40	200

- 3일에 상담 진행할 때: 상담에 1일이 걸리기 때문에, 4,5,6,7일에 상담 가능 → 3일 dp 배열: [0, 0, 0, 0, 10, 10, 20]
- 4,5,6일의 경우:
 1일 상담, 4일 상담 → 기존에 갱신되었던 dp[4]
 3일 상담, 4일 상담 → dp[4] = max(dp[4], dp[3] + 10)
- 7일의 경우:
 1일 상담, 7일 상담 → 이 경우 아까 2일 상담보다 이익이 적었으므로, 2일 상담에서 이미 걸러짐
 2일 상담, 7일 상담 → 기존에 갱신되었던 dp[7]
 3일 상담, 7일 상담 → dp[7] = max(dp[7], dp[3] + 10)



● 1일차부터 시작하여, 해당 상담 진행 일자 + 상담 진행 시 걸리는 시간 보다 큰 시간에 대해 모두 갱신

	1일	2일	3일	4일	5일	6일	7일
T _i	3	5	1	1	2	4	2
Pi	10	20	10	20	15	40	200

- 4일에 상담 진행할 때: 상담에 1일이 걸리기 때문에, 5,6,7일에 상담 가능 → 4일 dp 배열: [0, 0, 0, 0, 10, 30, 30, 30]
- 5일에 상담 진행할 때: 상담에 2일이 걸리기 때문에, 7일에 상담 가능 → 5일 dp 배열: [0, 0, 0, 0, 10, 30, 30, 45]



● 1일차부터 시작하여, 해당 상담 진행 일자 + 상담 진행 시 걸리는 시간 보다 큰 시간에 대해 모두 갱신

	1일	2일	3일	4일	5일	6일	7일
Ti	3	5	1	1	2	4	2
Pi	10	20	10	20	15	40	200

- 6일에 상담 진행할 때: 상담에 4일이 걸리기 때문에 다른 날 상담 불가능, 6+4는 7을 넘어가기 때문에 갱신x → 6일 dp 배열: [0, 0, 0, 0, 10, 30, 30, 45]
- 7일에 상담 진행할 때: 상담에 2일이 걸리기 때문에 다른 날 상담 불가능 → 7일 dp 배열: [0, 0, 0, 0, 10, 30, 30, 45]



● 1일차부터 시작하여, 해당 상담 진행 일자 + 상담 진행시 걸리는 시간 보다 큰 시간에 대해 모두 갱신



풀이 3: dp (Top-down)

● N일차부터 시작하여, 역순으로 dp 진행. i일에 상담 진행했을 때, 얻는 이익을 i번째에 저장

	1일	2일	3일	4일	5일	6일	7일
Ti	3	5	1	1	2	4	2
Pi	10	20	10	20	15	40	200

- 7일에 상담 시작: 2일이 걸리므로 7을 넘어감 → 상담 불가 [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
- 6일에 상담 시작: 4일이 걸리므로 7을 넘어감 → 상담 불가 [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]



● N일차부터 시작하여, 역순으로 dp 진행 i일에 상담 진행했을 때, 얻는 이익을 i번째에 저장

	1일	2일	3일	4일	5일	6일	7일
Ti	3	5	1	1	2	4	2
Pi	10	20	10	20	15	40	200

- 선택할 수 있는 것 2가지 : 상담을 하거나, 상담을 하지 않거나
- 5일에 상담 시작: 2일이 걸리므로 상담 가능 [0, 0, 0, 0, 15, 0, 0, 0]
 - → 5일의 경우 상담해도 7일 상담이 가능함. 즉, dp[5]는 7일에 상담 이익을 얻을 수 있음
 - \rightarrow dp[5] = max(dp[6], dp[7] + 15)
- 4일에 상담 시작: 1일이 걸리므로 상담 가능 [0, 0, 0, 35, 15, 0, 0, 0]
 - → 4일의 경우 상담해도 5,6,7일 상담이 가능함. 즉, dp[4]는 5,6,7일에 상담 이익을 얻을 수 있음
 - \rightarrow dp[4] = max(dp[5], dp[5] + 20)



● N일차부터 시작하여, 역순으로 dp 진행 i일에 상담 진행했을 때, 얻는 이익을 i번째에 저장

	1일	2일	3일	4일	5일	6일	7일
Ti	3	5	1	1	2	4	2
Pi	10	20	10	20	15	40	200

- 3일에 상담 시작: 1일이 걸리므로 상담 가능
 [0, 0, 45, 35, 15, 0, 0, 0]
 → 3일의 경우 상담해도 4,5,6,7일 상담 가능함. 즉, dp[3]은 4,5,6,7일에 상담 이익을 얻을 수 있음
 → dp[3] = max(dp[4], dp[4] + 10)
- 2일에 상담 시작: 5일이 걸리므로 상담 가능 [0, 45, 45, 35, 15, 0, 0, 0]
- 1일에 상담 시작: 3일이 걸리므로 상담 가능 [45, 45, 45, 35, 15, 0, 0, 0]



● N일차부터 시작하여, 역순으로 dp 진행 i일에 상담 진행했을 때, 얻는 이익을 i번째에 저장

```
void dpTopDown(vector<int> dp, vector<pair<int, int> > li, int n) {
   for (int i = n-1; i >= 0; i--) {
      if (i + li[i].first > n) // i일에 상담하는 것이 n을 넘기면 상담을 할 수 없음
           dp[i] = dp[i + 1];
      else // 상담을 하는 것과 하지 않는 것 중 큰 값을 선택
                dp[i] = max(dp[i + 1], li[i].second + dp[i + li[i].first]);
   }
   cout << dp[0] << endl;
}</pre>
```

응용 문제



/<> 14002번: 가장 긴 증가하는 부분 수열 4 - Gold 4

문제

- 수열 A가 주어졌을 때, 가장 긴 증가하는 부분 수열을 구하는 프로그램을 작성
- 수열 A의 크기 N
- 수열 A를 이루고 있는 A_i

제한 사항

- 입력 케이스 N (1 ≤ N ≤ 1,000)
- $(1 \le A_i \le 1,000)$



예제 입력

10 20 10 30 20 50

 $A = \{10, 20, 10, 30, 20, 50\}$

예제 출력

4 10 20 30 50

 $A = \{10, 20, 10, 30, 20, 50\}$



풀이: dp 사용

 $A = \{10, 20, 10, 30, 20, 50\}$

- 1. dp[i]에 인덱스 i번째에 해당하는 값을 넣는다고 생각
- 2. 인덱스 i 이전의 값에 대해 탐색, j < i일 때, 만약 A[i]보다 A[j]가 작다면 dp[i] = dp[j] + 1
- 3. 부분 수열 출력을 위해 길이가 가장 긴 부분 수열이 될 때마다, 가장 마지막 index를 갱신해줌



A = {10, 20, 10, 30, 20, 50}

$$i = 0$$

$$A[0] = 10$$

dp[0] = 1 (10 하나 들어가는 수열)

dp: [1, 0, 0, 0, 0, 0]

 \rightarrow max_index = 0



$$A[1] = 20$$

dp[1] = 1 (20 하나 들어가는 수열)

인덱스 1번 이전 인덱스 (0에 대해 탐색) A[0] < A[1] > dp[1] = max(dp[1], dp[0] + 1)

dp: [1, 2, 0, 0, 0, 0] \rightarrow max_Index = 1



 $A = \{10, 20, 10, 30, 20, 50\}$

$$i = 2$$

$$A[2] = 10$$

dp[2] = 1 (10 하나 들어가는 수열)

인덱스 2번 이전 인덱스 (0, 1에 대해 탐색) → A[0]=10, A[1]로 10보다 작지 않기 때문에 갱신 x

dp: [1, 2, 1, 0, 0, 0]

$$i = 3$$

$$A[3] = 30$$

dp[3] = 1 (30 하나 들어가는 수열)

인덱스 2번 이전 인덱스 (0,1,2에 대해 탐색) dp[3] = max(dp[0]+1, dp[1]+1, dp[2]+1, dp[3])

dp: [1, 2, 1, 3, 0, 0]

 \rightarrow max_index = 3

예제



A = {10, 20, 10, 30, 20, 50}

$$i = 4$$

dp: [1, 2, 1, 3, 2, 0]

$$A[4] = 20$$

dp: [1, 2, 1, 3, 2, 4]

$$A[5] = 50$$

max_index = 5



```
\bullet \bullet \bullet
for(int i = 0; i < n; i++)
         cin >> a[i];
         len = 0;
         for(int j = 0; j < i; j++)
             if(a[i] > a[j])
                  len = max(dp[j], len);
         dp[i] = len + 1;
         if(tmp < dp[i])</pre>
             tmp = dp[i];
             idx = i;
```

dp 갱신 부분

```
for(int i = idx;i >= 0;i--)
{
    if(tmp == dp[i])
    {
        arr.push_back(a[i]);
        tmp--;
    }
}
```

수열 출력을 위한 배열 만들기

마무리



정리

- 이전의 답을 저장하고, 계속 사용하며 현재 답을 구하는 동적 계획법
- 입력 범위가 나름 커요 (보통 1,000 ~ 1,000,000) 이보다 더 크다면 그리디 고려
- 마지막 인덱스에서 내려가는 Top-down, 처음 인덱스부터 올라가는 Bottom-up 방식 존재
- 문제에 따라 1차원 혹은 2차원 테이블(DP 배열) 사용
- 점화식만 세우면 구현은 쉬움!

이것도 알아보세요!

● Top-down 방식과 Bottom-up 방식 두 가지로 모두 풀어보고 시간을 비교해보아요

과제



필수

- (> 11726번 : 2 * n 타일링 Silver 3
- 11053번 : 가장 긴 증가하는 부분 수열 Silver 2
- 20923번 : 숫자 할리갈리 게임 Silver 1

도전

- <u>/<> 2240번 : 자두나무 Gold 5</u>
- **/<> 12865번 : 평범한 배낭 Gold 5**