Conventions / Rappels

On posera par convention que les indices grecs (μ, ν,…) vont de 0 à 3 et les indices romains (i, j,…) de 1 à 3.

On écrit les symboles de Christoffel indifféremment sous les formes :

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\,\gamma} \quad ou \quad \begin{pmatrix} & \alpha & \\ \beta & & \gamma \end{pmatrix}$$

On a la relation de symétrie suivante :

$$\begin{pmatrix} & \alpha & \\ \beta & & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \alpha & \\ \gamma & & \beta \end{pmatrix}$$

Notations utilisées, avec A une grandeur quelconque (éventuellement un symbole de Christoffel) :

$$\partial_{\mu} A \equiv \frac{\partial A}{\partial x^{\mu}} \qquad \partial_{\mu\nu} A \equiv \frac{\partial^2 A}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}}$$

Et aussi la convention d'Enstein (sommation quand répétition d'un indice en haut et en bas) :

$$\partial_{\mu} V^{\mu} \equiv \sum_{\mu} \frac{\partial V^{\mu}}{\partial x^{\mu}} \qquad \partial_{\mu\nu} V^{\mu} \equiv \sum_{\mu} \frac{\partial^2 V^{\mu}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}}$$

L'équation des géodésiques s'écrit dans un système de coordonnées x^{μ} (avec μ=0,1,2,3) :

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{ds^2} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\,\beta} \frac{dx^{\alpha}}{ds} \frac{dx^{\beta}}{ds} = 0$$

Ou encore :

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{ds^2} + \begin{pmatrix} & \mu & \\ \alpha & & \beta \end{pmatrix} \frac{dx^{\alpha}}{ds} \frac{dx^{\beta}}{ds} = 0$$

Calcul de la solution cosmologique avec une métrique pseudo-conforme

La métrique FRWL donne pour l'élément de longueur :

(1)

$$ds^2 = a^2(x^0) \left[(dx^0)^2 - \frac{du^2 + u^2\, d\Omega^2}{\left(1 + k\, \frac{u^2}{2}\right)^2} \right]$$

Ou sous une autre forme :

(2)

$$ds^2 = a^2(x^0) \left[(dx^0)^2 - \frac{du^2}{1 - ku^2} - u^2 d\Omega^2 \right]$$

Où :

- a est une échelle de distance qui ne dépend que de la coordonnée temporelle,
- k la courbure de l'espace (k∈ {-1,0,1})
- $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2$

On va travailler avec la seconde forme.

Relations sur la métrique

La relation métrique peut s'écrire sous la forme :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

La matrice représentant la métrique est donc :

(3)

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{a^2}{1-ku^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 u^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2 u^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

Son déterminant **g** est :

(4)

$$\boldsymbol{g} \equiv \det(g_{\mu\nu}) = -a^8 \frac{u^4 \sin^2\theta}{1-ku^2}$$

La matrice qui représente les composantes contra-variantes de la métrique est la matrice inverse :

(5)

$$g^{\mu\nu} = \frac{1}{a^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(1-ku^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{u^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{u^2 \sin^2\theta} \end{pmatrix}$$

Détermination des symboles de Christoffel

Pour déterminer les symboles de Christoffel, nous allons utiliser la méthode classique qui identifie l'équation des géodésiques avec l'équation obtenue en minimisant la longueur $\int ds$.

Introduisons la fonction de Lagrange qui permet de déterminer les géodésiques :

(6)

$$L = a^2(x^0)\,(\dot{x}^0)^2 - \frac{a^2(x^0)}{1-ku^2}\dot{u}^2 - a^2(x^0)u^2\,\dot{\theta}^2 \;\; - a^2(x^0)u^2\;\sin^2\theta\;\;\dot{\varphi}^2$$

ou

$$L = a^2(x^0)\left[(\dot{x}^0)^2 - \frac{1}{1-ku^2}\dot{u}^2 - u^2\,\dot{\theta}^2 \;\; - u^2\;\sin^2\theta\;\;\dot{\varphi}^2\right]$$

On posera pour la suite : $a(x^0) \equiv a$, $a' \equiv \dfrac{da}{dx^0}$ et $\dot{a} \equiv \dfrac{da}{ds}$

Remarque : on a la relation : $\dot{a} = \dfrac{\partial a}{\partial x^0}\dfrac{dx^0}{ds} = a'\,\dot{x}^0$ *car a ne dépend que de* x^0.

Ecrivons les équations de Lagrange :

(7)

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}\right) = \frac{\partial L}{\partial x^\mu}$$

<u>Regardons l'indice temporel (x^0)</u>

(8)

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^0} = 2\;\;a^2\;\dot{x}^0$$

(9)

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^0}\right) = \frac{d}{ds}\left(2a^2\,\dot{x}^0\right) = 2\;a^2\;\ddot{x}^0 + 4a\;\dot{a}\;\dot{x}^0 \;=\; 2\;a^2\;\ddot{x}^0 + 4a\;a'\left(\dot{x}^0\right)^2$$

(10)

$$\frac{\partial L}{\partial x^0} = 2\,a\,a'\left[(\dot{x}^0)^2 - \frac{1}{1-ku^2}\dot{u}^2 - u^2\,\dot{\theta}^2 \;\; - u^2\;\sin^2\theta\;\;\dot{\varphi}^2\right]$$

(11)

$$2\;a^2\;\ddot{x}^0 + 4a\;a'\left(\dot{x}^0\right)^2 = 2\,a\,a'\left[(\dot{x}^0)^2 - \frac{1}{1-ku^2}\dot{u}^2 - u^2\,\dot{\theta}^2 \;\; - u^2\;\sin^2\theta\;\;\dot{\varphi}^2\right]$$

On tire :

(12)

$$\ddot{x}^0 + 2\,\frac{a'}{a}\left(\dot{x}^0\right)^2 = \frac{a'}{a}\,(\dot{x}^0)^2 - \frac{1}{1-ku^2}\frac{a'}{a}\dot{u}^2 - \;\frac{a'}{a}u^2\,\dot{\theta}^2 \;\; - \frac{a'}{a}u^2\;\sin^2\theta\;\;\dot{\varphi}^2$$

soit :

(13)

$$\ddot{x}^0 + \frac{a'}{a}\left(\dot{x}^0\right)^2 + \frac{1}{1-ku^2}\frac{a'}{a}\dot{u}^2 + \frac{a'}{a}u^2\dot{\theta}^2 + \frac{a'}{a}u^2 \sin^2\theta \ \dot{\varphi}^2 = 0$$

En comparant la première équation avec l'équation des géodésiques pour μ=0 :

(14)

$$\ddot{x}^0 + \begin{pmatrix} & 0 & \\ \alpha & & \beta \end{pmatrix} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = 0$$

On en déduit les symboles de Christoffel non nuls suivants:

(15)

$\begin{pmatrix} & 0 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} = \frac{a'}{a}$	$\begin{pmatrix} & 0 & \\ u & & u \end{pmatrix} = \frac{a'}{a}\frac{1}{1-ku^2}$	$\begin{pmatrix} & 0 & \\ \theta & & \theta \end{pmatrix} = \frac{a'}{a}u^2$	$\begin{pmatrix} & 0 & \\ \varphi & & \varphi \end{pmatrix} = \frac{a'}{a}u^2\sin^2\theta$

Et aussi que les symboles de Christoffel suivants sont nuls:

(16)

$$\begin{pmatrix} & 0 & \\ \alpha & & \beta \end{pmatrix} = 0 \quad \text{si } \alpha \neq \beta$$

<u>Regardons l'indice u :</u>

(17)

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} = -\frac{2a^2}{1-ku^2}\dot{u}$$

(18)

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}}\right) = \frac{d}{ds}\left(-\frac{2a^2}{1-ku^2}\dot{u}\right) = -\frac{2a^2}{1-ku^2}\ddot{u} - \frac{4aa'}{1-ku^2}\dot{x}^0\dot{u} - 2a^2\dot{u}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{1-ku^2}\right)$$

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}}\right) = -\frac{2a^2}{1-ku^2}\ddot{u} - \frac{4aa'}{1-ku^2}\dot{x}^0\dot{u} - \frac{4ka^2}{\left(1-ku^2\right)^2}u\dot{u}^2$$

(19)

$$\frac{\partial L}{\partial u} = -a^2\left[\frac{2ku}{\left(1-ku^2\right)^2}\dot{u}^2 + 2u\dot{\theta}^2 + 2u\sin^2\theta \ \dot{\varphi}^2\right]$$

Donc :

(20)

$$\frac{2a^2}{1-ku^2}\ddot{u} - \frac{4aa'}{1-ku^2}\dot{x}^0\dot{u} - \frac{4ka^2}{\left(1-ku^2\right)^2}u\dot{u}^2 = -a^2\left[\frac{2ku}{\left(1-ku^2\right)^2}\dot{u}^2 + 2u\dot{\theta}^2 + 2u\sin^2\theta \ \dot{\varphi}^2\right]$$

(21)

$$\frac{1}{1-ku^2}\ddot{u}+\frac{2a'}{1-ku^2}\frac{1}{a}\dot{x}^0\dot{u}+\frac{2k}{\left(1-ku^2\right)^2}u\dot{u}^2=\frac{ku}{\left(1-ku^2\right)^2}\dot{u}^2+u\dot{\theta}^2+u\sin^2\theta\ \dot{\varphi}^2$$

(22)
$$\ddot{u}+\frac{2a'^2}{a}\dot{x}^0\dot{u}+\frac{2k}{1-ku^2}u\dot{u}^2=\frac{k}{1-ku^2}u\dot{u}^2+\left(1-ku^2\right)u\dot{\theta}^2+\left(1-ku^2\right)u\sin^2\theta\ \dot{\varphi}^2$$

(23)
$$\ddot{u}+\frac{2a'}{a}\dot{x}^0\dot{u}+\frac{ku}{1-ku^2}\dot{u}^2-\left(1-ku^2\right)u\ \dot{\theta}^2-\left(1-ku^2\right)u\sin^2\theta\ \dot{\varphi}^2=0$$

En comparant la première équation avec l'équation des géodésiques pour μ=u :
(24)
$$\ddot{u}+\begin{pmatrix} & u & \\ \alpha & & \beta\end{pmatrix}\dot{x}^\alpha\,\dot{x}^\beta=0$$

On en déduit les symboles de Christoffel non nuls suivants:
(25)

$\begin{pmatrix} & u & \\ 0 & & u\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} & u & \\ u & & 0\end{pmatrix}=\frac{a'}{a}$	$\begin{pmatrix} & u & \\ u & & u\end{pmatrix}=\frac{ku}{1-ku^2}$
$\begin{pmatrix} & u & \\ \theta & & \theta\end{pmatrix}=-\left(1-ku^2\right)u$	$\begin{pmatrix} & u & \\ \varphi & & \varphi\end{pmatrix}=-\left(1-ku^2\right)u\sin^2\theta$

<u>Regardons l'indice θ :</u>
(26)
$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=-2\ a^2\ u^2\ \dot{\theta}$$

(27)
$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)=\frac{d}{ds}\left(-2\ a^2\ u^2\ \dot{\theta}\right)=-2\ a^2\ u^2\ \ddot{\theta}-4a\ a'u^2\ \dot{x}^0\ \dot{\theta}-4\ a^2u\dot{u}\ \dot{\theta}$$

(28)
$$\frac{\partial L}{\partial\theta}=-\ 2a^2\ u^2\sin\theta\ \cos\theta\ \dot{\varphi}^2$$

(29)
$$-2\ a^2\ u^2\ \ddot{\theta}-4a\ a'u^2\ \dot{x}^0\ \dot{\theta}-4\ a^2u\dot{u}\ \dot{\theta}=-\ 2a^2\ u^2\sin\theta\ \cos\theta\ \dot{\varphi}^2$$

(30)

$$\ddot{\theta} + 2\,\frac{a'}{a}\,\dot{x}^0\,\dot{\theta} + \frac{2}{u}\dot{u}\,\dot{\theta} - \sin\theta\,\cos\theta\,\dot{\varphi}^2 = 0$$

En comparant la première équation avec l'équation des géodésiques pour $\mu=\theta$:

(31)

$$\ddot{\theta} + \begin{pmatrix} \theta \\ \alpha \quad \beta \end{pmatrix} \dot{x}^\alpha\,\dot{x}^\beta = 0$$

On en déduit les symboles de Christoffel non nuls suivants:

(32)

$\begin{pmatrix} \theta \\ 0 \quad \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta \\ \theta \quad 0 \end{pmatrix} = \frac{a'}{a}$	$\begin{pmatrix} \theta \\ u \quad \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta \\ \theta \quad u \end{pmatrix} = \frac{1}{u}$	$\begin{pmatrix} \theta \\ \varphi \quad \varphi \end{pmatrix} = -\sin\theta\,\cos\theta$

<u>Regardons l'indice φ :</u>

(33)

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = -2\,a^2\,u^2\,\sin^2\theta\;\dot{\varphi}$$

(34)

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \frac{d}{ds}\left(-2\,a^2\,u^2\,\sin^2\theta\;\dot{\varphi}\right)$$

$$= -2\,a^2\,u^2\,\sin^2\theta\,\ddot{\varphi} - 4a\,a'u^2\,\sin^2\theta\;\dot{x}^0\;\dot{\varphi} - 4\,a^2u\dot{u}\;\sin^2\theta\,\dot{\varphi} - 4\,a^2\,u^2\,\cos\theta\,\sin$$

(35)

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

(36)

$$-2\,a^2\,u^2\,\sin^2\theta\,\ddot{\varphi} - 4a\,a'u^2\,\sin^2\theta\;\dot{x}^0\;\dot{\varphi} - 4\,a^2u\dot{u}\;\sin^2\theta\,\dot{\varphi} - 4\,a^2\,u^2\,\cos\theta\,\sin\theta\,\dot{\theta}\,\dot{\varphi} = 0$$

(37)

$$\ddot{\varphi} + 2\frac{a'}{a}\;\dot{x}^0\;\dot{\varphi} + \frac{2}{u}\dot{u}\;\dot{\varphi} + 2\,\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\;\dot{\theta}\,\dot{\varphi} = 0$$

En comparant la première équation avec l'équation des géodésiques pour $\mu=\varphi$:

(38)

$$\ddot{\varphi} + \begin{pmatrix} \varphi \\ \alpha \quad \beta \end{pmatrix} \dot{x}^\alpha\,\dot{x}^\beta = 0$$

On en déduit les symboles de Christoffel non nuls suivants:

(39)

$\left(\begin{matrix} & \varphi & \\ 0 & & \varphi \end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix} & \varphi & \\ \varphi & & 0 \end{matrix}\right)=\frac{a'}{a}$	$\left(\begin{matrix} & \varphi & \\ u & & \varphi \end{matrix}\right)=\frac{1}{r}$	$\left(\begin{matrix} & \varphi & \\ \theta & & \varphi \end{matrix}\right)=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

En résumé, les symboles de Christoffel non nuls sont (avec leurs symétriques):

$\left(\begin{matrix} & 0 & \\ 0 & & 0 \end{matrix}\right)=\frac{a'}{a}$	$\left(\begin{matrix} & 0 & \\ u & & u \end{matrix}\right)=\frac{a'}{a}\frac{1}{1-ku^2}$	$\left(\begin{matrix} & 0 & \\ \theta & & \theta \end{matrix}\right)=\frac{a'}{a}u^2$	$\left(\begin{matrix} & 0 & \\ \varphi & & \varphi \end{matrix}\right)=\frac{a'}{a}u^2\sin^2\theta$
$\left(\begin{matrix} & u & \\ 0 & & u \end{matrix}\right)=\frac{a'}{a}$	$\left(\begin{matrix} & u & \\ u & & u \end{matrix}\right)=\frac{ku}{1-ku^2}$	$\left(\begin{matrix} & u & \\ \theta & & \theta \end{matrix}\right)=-\left(1-ku^2\right)u$	$\left(\begin{matrix} & u & \\ \varphi & & \varphi \end{matrix}\right)=-\left(1-ku^2\right)u\sin^2\theta$
$\left(\begin{matrix} & \theta & \\ 0 & & \theta \end{matrix}\right)=\frac{a'}{a}$	$\left(\begin{matrix} & \theta & \\ u & & \theta \end{matrix}\right)=\frac{1}{u}$		$\left(\begin{matrix} & \theta & \\ \varphi & & \varphi \end{matrix}\right)=-\sin\theta\cos\theta$
$\left(\begin{matrix} & \varphi & \\ 0 & & \varphi \end{matrix}\right)=\frac{a'}{a}$	$\left(\begin{matrix} & \varphi & \\ u & & \varphi \end{matrix}\right)=\frac{1}{u}$	$\left(\begin{matrix} & \varphi & \\ \theta & & \varphi \end{matrix}\right)=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$	

Calcul du tenseur de Ricci $R_{\mu\nu}$

Le tenseur de Ricci est défini par : ASB page 159
(5.119)

$$R_{\mu\nu}=\left(\begin{matrix} & \alpha & \\ \alpha & & \mu \end{matrix}\right)_{|\nu}-\left(\begin{matrix} & \alpha & \\ \nu & & \mu \end{matrix}\right)_{|\alpha}+\left(\begin{matrix} & \beta & \\ \nu & & \alpha \end{matrix}\right)\left(\begin{matrix} & \alpha & \\ \beta & & \mu \end{matrix}\right)-\left(\begin{matrix} & \beta & \\ \beta & & \alpha \end{matrix}\right)\left(\begin{matrix} & \alpha & \\ \nu & & \mu \end{matrix}\right)$$

Remarque JPP (30 août 2016) :

Il s'agit de la première formulation de l'expression du tenseur de Ricci.
Mais ASB page 76 :
(3.11)

$$\left(\begin{matrix} & i & \\ i & & h \end{matrix}\right)=\left(Log\sqrt{-g}\right)_{|h}$$

ou :

$$\left(\begin{matrix} & \alpha & \\ \alpha & & \mu \end{matrix}\right)=\left(Log\sqrt{-g}\right)_{|\mu} \quad \text{et} \quad \left(\begin{matrix} & \beta & \\ \beta & & \alpha \end{matrix}\right)=\left(Log\sqrt{-g}\right)_{|\alpha}$$

on remplace et on obtient ASB page 190
(6.25)

$$R_{\mu\nu}=\left(Log\sqrt{-g}\right)_{|\mu|\nu}-\left(\begin{matrix} & \alpha & \\ \nu & & \mu \end{matrix}\right)_{|\alpha}+\left(\begin{matrix} & \beta & \\ \nu & & \alpha \end{matrix}\right)\left(\begin{matrix} & \alpha & \\ \beta & & \mu \end{matrix}\right)-\left(\begin{matrix} & \alpha & \\ \nu & & \mu \end{matrix}\right)\left(Log\sqrt{\cdot}\right.$$

Qui est une autre façon de mener le calcul, celle suivie par Gilles.

Calculons les termes diagonaux μ=ν qui ne sont pas nuls.

(40)

$$R_{\mu\mu}=\partial_{\mu}\begin{pmatrix}\alpha\\ \alpha\quad\mu\end{pmatrix}-\partial_{\alpha}\begin{pmatrix}\alpha\\ \mu\quad\mu\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta\\ \mu\quad\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\quad\mu\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\beta\\ \beta\quad\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \mu\quad\mu\end{pmatrix}$$

<u>Calcul pour l'indice 0 (temporel) :</u>

(41)

$$R_{00}=\partial_{0}\begin{pmatrix}\alpha\\ \alpha\quad 0\end{pmatrix}-\partial_{\alpha}\begin{pmatrix}\alpha\\ 0\quad 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta\\ 0\quad\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\quad 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\beta\\ \beta\quad\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ 0\quad 0\end{pmatrix}$$

On ne retient que les coeffs non nuls :

(42)

$$\begin{aligned}R_{00}=&+\partial_{0}\begin{pmatrix}0\\ 0\quad 0\end{pmatrix}+\partial_{0}\begin{pmatrix}u\\ u\quad 0\end{pmatrix}+\partial_{0}\begin{pmatrix}\theta\\ \theta\quad 0\end{pmatrix}+\partial_{0}\begin{pmatrix}\varphi\\ \varphi\quad 0\end{pmatrix}\\ &-\partial_{0}\begin{pmatrix}0\\ 0\quad 0\end{pmatrix}\\ &+\begin{pmatrix}0\\ 0\quad 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 0\quad 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}u\\ 0\quad u\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ u\quad 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\theta\\ 0\quad\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta\\ \theta\quad 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\varphi\\ 0\quad\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi\\ \varphi\quad 0\end{pmatrix}\\ &-\begin{pmatrix}0\\ 0\quad 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 0\quad 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\ 0\quad 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ 0\quad u\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\ 0\quad 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta\\ 0\quad\theta\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\ 0\quad 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi\\ 0\quad\varphi\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Moins les termes qui s'annulent directement et aussi après avoir remplacé les Christoffel par leur valeur :

(43)

$$R_{00}=+\partial_{0}\begin{pmatrix}u\\ u\quad 0\end{pmatrix}+\partial_{0}\begin{pmatrix}\theta\\ \theta\quad 0\end{pmatrix}+\partial_{0}\begin{pmatrix}\varphi\\ \varphi\quad 0\end{pmatrix}$$

(44)

$$R_{00}=+3\partial_{0}\left(\frac{a'}{a}\right)$$

(45)

$$R_{00}=-3\left(\frac{a'}{a}\right)^{2}+3\ \frac{a''}{a}$$

Que l'on peut écrire :

(46)

$$R_{00}=\left[3\ \frac{a''}{a}\frac{1}{a^{2}}-3\ \frac{a'^{2}}{a^{2}}\frac{1}{a^{2}}\right]g_{00}$$

(47)

$$R_{00}=\frac{1}{a^{2}}\left[3\ \frac{a''}{a}-3\left(\frac{a'}{a}\right)^{2}\right]g_{00}$$

<u>Calcul pour l'indice u :</u>

(48)

$$R_{uu} = \partial_u \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \quad u \end{pmatrix} - \partial_\alpha \begin{pmatrix} \alpha \\ u \quad u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta \\ u \quad \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \quad u \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \beta \\ \beta \quad \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ u \quad u \end{pmatrix}$$

On ne retient que les coeffs non nuls :
(49)

$$\begin{aligned}
R_{uu} =& +\partial_u \begin{pmatrix} u \\ u \quad u \end{pmatrix} + \partial_u \begin{pmatrix} \theta \\ \theta \quad u \end{pmatrix} + \partial_u \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi \quad u \end{pmatrix} - \partial_0 \begin{pmatrix} 0 \\ u \quad u \end{pmatrix} - \partial_u \begin{pmatrix} u \\ u \quad u \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} u \\ u \quad 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ u \quad u \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} 0 \\ u \quad u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ 0 \quad u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ u \quad u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ u \quad u \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} \theta \\ u \quad \theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta \\ \theta \quad u \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} \varphi \\ u \quad \varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi \quad u \end{pmatrix} \\
&- \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \quad 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ u \quad u \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u \\ u \quad 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ u \quad u \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \theta \\ \theta \quad 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ u \quad u \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi \quad 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ u \quad u \end{pmatrix} \\
&- \begin{pmatrix} u \\ u \quad u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ u \quad u \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \theta \\ \theta \quad u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ u \quad u \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi \quad u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ u \quad u \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Moins les termes qui s'annulent directement :
(50)

$$\begin{aligned}
R_{uu} =& +\partial_u \begin{pmatrix} \theta \\ \theta \quad u \end{pmatrix} + \partial_u \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi \quad u \end{pmatrix} - \partial_0 \begin{pmatrix} 0 \\ u \quad u \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} 0 \\ u \quad u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ 0 \quad u \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} \theta \\ u \quad \theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta \\ \theta \quad u \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} \varphi \\ u \quad \varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi \quad u \end{pmatrix} \\
&- \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \quad 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ u \quad u \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \theta \\ \theta \quad 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ u \quad u \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi \quad 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ u \quad u \end{pmatrix} \\
&- \begin{pmatrix} \theta \\ \theta \quad u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ u \quad u \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi \quad u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ u \quad u \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Moins les termes qui s'annulent après avoir remplacé les Christoffel par leur valeur :
(51)

$$R_{uu} = +\partial_u\left(\frac{2}{u}\right) - \partial_0\left(\frac{a'}{a}\frac{1}{1-ku^2}\right)$$
$$+\frac{2}{u^2}$$
$$-2\left(\frac{a'}{a}\right)\left(\frac{a'}{a}\frac{1}{1-ku^2}\right)$$
$$-\left(\frac{2}{u}\right)\left(\frac{k\,u}{1-ku^2}\right)$$

(52)

$$R_{uu} = -\frac{2}{u^2} - \frac{a''}{a}\frac{1}{1-ku^2} + \frac{a'^2}{a^2}\frac{1}{1-ku^2}$$
$$+\frac{2}{u^2} - 2\left(\frac{a'}{a}\right)\left(\frac{a'}{a}\frac{1}{1-ku^2}\right) - \left(\frac{2}{u}\right)\left(\frac{k\,u}{1-ku^2}\right)$$

(53)

$$R_{uu} = -\frac{a''}{a}\frac{1}{1-ku^2} - \frac{a'^2}{a^2}\frac{1}{1-ku^2} - \frac{2k}{1-ku^2}$$

Que l'on peut écrire :

(54)

$$R_{uu} = \left[\frac{a''}{a}\frac{1}{a^2} + \frac{a'^2}{a^2}\frac{1}{a^2} + 2\frac{k}{a^2}\right] g_{rr}$$

(55)

$$R_{uu} = \frac{1}{a^2}\left[\frac{a''}{a} + \frac{a'^2}{a^2} + 2k\right] g_{rr}$$

Calcul pour l'indice θ :

(56)

$$R_{\theta\theta} = \partial_\theta\begin{pmatrix} & \alpha & \\ \alpha & & \theta\end{pmatrix} - \partial_\alpha\begin{pmatrix} & \alpha & \\ \theta & & \theta\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & \beta & \\ \theta & & \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix} & \alpha & \\ \beta & & \theta\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} & \beta & \\ \beta & & \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix} & \alpha & \\ \theta & & \theta\end{pmatrix}$$

On ne retient que les coeffs non nuls :

(57)

$$
\begin{aligned}
R_{\theta\theta} = & +\partial_\theta \binom{\varphi}{\varphi\ \ \theta} - \partial_0 \binom{0}{\theta\ \ \theta} - \partial_u \binom{u}{\theta\ \ \theta} \\
& + \binom{\theta}{\theta\ \ 0}\binom{0}{\theta\ \ \theta} + \binom{\theta}{\theta\ \ u}\binom{u}{\theta\ \ \theta} + \binom{0}{\theta\ \ \theta}\binom{\theta}{0\ \ \theta} + \binom{u}{\theta\ \ \theta}\binom{\theta}{u\ \ \theta} + \binom{\varphi}{\theta\ \ \varphi}\binom{\varphi}{\varphi\ \ \theta} \\
& - \binom{0}{0\ \ 0}\binom{0}{\theta\ \ \theta} - \binom{u}{u\ \ 0}\binom{0}{\theta\ \ \theta} - \binom{\theta}{\theta\ \ 0}\binom{0}{\theta\ \ \theta} - \binom{\varphi}{\varphi\ \ 0}\binom{0}{\theta\ \ \theta} \\
& - \binom{u}{u\ \ u}\binom{u}{\theta\ \ \theta} - \binom{\theta}{\theta\ \ u}\binom{u}{\theta\ \ \theta} - \binom{\varphi}{\varphi\ \ u}\binom{u}{\theta\ \ \theta}
\end{aligned}
$$

Moins les termes qui s’annulent directement :
(58)

$$
\begin{aligned}
R_{\theta\theta} = & +\partial_\theta \binom{\varphi}{\varphi\ \ \theta} - \partial_0 \binom{0}{\theta\ \ \theta} - \partial_u \binom{u}{\theta\ \ \theta} \\
& + \binom{\theta}{\theta\ \ 0}\binom{0}{\theta\ \ \theta} + \binom{u}{\theta\ \ \theta}\binom{\theta}{u\ \ \theta} + \binom{\varphi}{\theta\ \ \varphi}\binom{\varphi}{\varphi\ \ \theta} \\
& - \binom{0}{0\ \ 0}\binom{0}{\theta\ \ \theta} - \binom{u}{u\ \ 0}\binom{0}{\theta\ \ \theta} - \binom{\varphi}{\varphi\ \ 0}\binom{0}{\theta\ \ \theta} \\
& - \binom{u}{u\ \ u}\binom{u}{\theta\ \ \theta} - \binom{\varphi}{\varphi\ \ u}\binom{u}{\theta\ \ \theta}
\end{aligned}
$$

Moins les termes qui s’annulent après avoir remplacé les Christoffel par leur valeur :
(59)

$$
\begin{aligned}
R_{\theta\theta} = & +\partial_\theta \left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \right) - \partial_0 \left(\frac{a'}{a} u^2 \right) + \partial_u \left(\left(1 - ku^2\right) u \right) \\
& + \left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \right)^2 \\
& - 2 \left(\frac{a'}{a} \right) \left(\frac{a'}{a} u^2 \right) \\
& + \left(\frac{k u}{1 - ku^2} \right) \left(1 - ku^2\right) u
\end{aligned}
$$

On fait les dérivations :
(60)

$$
\begin{aligned}
R_{\theta\theta} = & -1 - \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} - \frac{a''}{a} u^2 + \left(\frac{a'}{a} \right)^2 u^2 + \left(1 - ku^2\right) - 2k u^2 \\
& + \left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \right)^2 - 2 \left(\frac{a'}{a} \right)^2 u^2 + ku^2
\end{aligned}
$$

(61)

$$R_{\theta\theta} = -\frac{a''}{a}u^2 - \left(\frac{a'}{a}\right)^2 u^2 - 2k u^2$$

Que l'on peut écrire :

(62)

$$R_{\theta\theta} = \left[\frac{a''}{a}\frac{1}{a^2} + \frac{a'^2}{a^2}\frac{1}{a^2} + 2\frac{k}{a^2}\right] g_{\theta\theta}$$

(63)

$$R_{\theta\theta} = \frac{1}{a^2}\left[\frac{a''}{a} + \frac{a'^2}{a^2} + 2k\right] g_{\theta\theta}$$

Calcul pour l'indice φ :

(64)

$$R_{\varphi\varphi} = \partial_\varphi \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \quad \varphi \end{pmatrix} - \partial_\alpha \begin{pmatrix} \alpha \\ \varphi \quad \varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta \\ \varphi \quad \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \quad \varphi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \beta \\ \beta \quad \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \varphi \quad \varphi \end{pmatrix}$$

On ne retient que les coeffs non nuls :

(65)

$$\begin{aligned}
R_{\varphi\varphi} = & -\partial_0 \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \quad \varphi \end{pmatrix} - \partial_u \begin{pmatrix} u \\ \varphi \quad \varphi \end{pmatrix} - \partial_\theta \begin{pmatrix} \theta \\ \varphi \quad \varphi \end{pmatrix} \\
& + \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi \quad 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \quad \varphi \end{pmatrix} \\
& + \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi \quad u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ \varphi \quad \varphi \end{pmatrix} \\
& + \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi \quad \theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta \\ \varphi \quad \varphi \end{pmatrix} \\
& + \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \quad \varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi \\ 0 \quad \varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ \varphi \quad \varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi \\ u \quad \varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \theta \\ \varphi \quad \varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi \\ \theta \quad \varphi \end{pmatrix} \\
& - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \quad 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \quad \varphi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u \\ u \quad 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \quad \varphi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \theta \\ \theta \quad 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \quad \varphi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi \quad 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \quad \varphi \end{pmatrix} \\
& - \begin{pmatrix} u \\ u \quad u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ \varphi \quad \varphi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \theta \\ \theta \quad u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ \varphi \quad \varphi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi \quad u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ \varphi \quad \varphi \end{pmatrix} \\
& - \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi \quad \theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta \\ \varphi \quad \varphi \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Moins les termes qui s'annulent directement :

(66)

$$R_{\varphi\varphi}=-\partial_0\begin{pmatrix}0\\ \varphi\ \ \varphi\end{pmatrix}-\partial_u\begin{pmatrix}u\\ \varphi\ \ \varphi\end{pmatrix}-\partial_\theta\begin{pmatrix}\theta\\ \varphi\ \ \varphi\end{pmatrix}$$
$$+\begin{pmatrix}\varphi\\ \varphi\ \ u\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ \varphi\ \ \varphi\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\varphi\\ \varphi\ \ \theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta\\ \varphi\ \ \varphi\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ \varphi\ \ \varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi\\ 0\ \ \varphi\end{pmatrix}$$
$$-\begin{pmatrix}0\\ 0\ \ 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \varphi\ \ \varphi\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}u\\ u\ \ 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \varphi\ \ \varphi\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\theta\\ \theta\ \ 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \varphi\ \ \varphi\end{pmatrix}$$
$$-\begin{pmatrix}u\\ u\ \ u\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ \varphi\ \ \varphi\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\theta\\ \theta\ \ u\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ \varphi\ \ \varphi\end{pmatrix}$$

Moins les termes qui s'annulent après avoir remplacé les Christoffel par leur valeur :

(67)

$$R_{\varphi\varphi}=-\partial_0\left(\frac{a'}{a}u^2\sin^2\theta\right)+\partial_u\left(\left(1-ku^2\right)u\ \sin^2\theta\right)+\partial_\theta(\sin\theta\ \cos\theta)$$
$$-\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)(\sin\theta\ \cos\theta)-2\left(\frac{a'}{a}\right)\left(\frac{a'}{a}u^2\sin^2\theta\right)+\left(ku^2\sin^2\theta\right)$$

On fait les dérivations :

(68)

$$R_{\varphi\varphi}=-\frac{a''}{a}u^2\sin^2\theta+\left(\frac{a'}{a}\right)^2u^2\sin^2\theta-2ku^2\sin^2\theta+\left(1-ku^2\right)\sin^2\theta+\cos^2\theta-\sin^2\theta$$
$$-\cos^2\theta-2\left(\frac{a'}{a}\right)^2u^2\sin^2\theta+ku^2\sin^2\theta$$

(69)

$$R_{\varphi\varphi}=-\frac{a''}{a}u^2\sin^2\theta-\left(\frac{a'}{a}\right)^2u^2\sin^2\theta-2ku^2\sin^2\theta$$

Que l'on peut écrire :

(70)

$$R_{\varphi\varphi}=\left[\frac{a''}{a}\frac{1}{a^2}+\frac{a'^2}{a^2}\frac{1}{a^2}+2\frac{k}{a^2}\right]g_{\varphi\varphi}$$

(71)

$$R_{\varphi\varphi}=\frac{1}{a^2}\left[\frac{a''}{a}+\frac{a'^2}{a^2}+2k\right]g_{\varphi\varphi}$$

En résumé on a les 4 composantes diagonales du Ricci suivantes :

$$\boxed{R_{00}=-3\left(\frac{a'}{a}\right)^2+3\ \frac{a''}{a}}$$

$R_{uu} = -\frac{a''}{a}\frac{1}{1-ku^2} - \frac{a'^2}{a^2}\frac{1}{1-ku^2} - \frac{2k}{1-ku^2}$
$R_{\theta\theta} = -\frac{a''}{a}u^2 - \left(\frac{a'}{a}\right)^2 u^2 - 2k u^2$
$R_{\varphi\varphi} = -\frac{a''}{a}u^2 \sin^2\theta - \left(\frac{a'}{a}\right)^2 u^2 \sin^2\theta - 2ku^2 \sin^2\theta$

$R_{00} = \frac{3}{a^2}\left[\frac{a''}{a} - \frac{a'^2}{a^2}\right] g_{00}$
$R_{uu} = \frac{1}{a^2}\left[\frac{a''}{a} + \frac{a'^2}{a^2} + 2k\right] g_{uu}$
$R_{\theta\theta} = \frac{1}{a^2}\left[\frac{a''}{a} + \frac{a'^2}{a^2} + 2k\right] g_{\theta\theta}$
$R_{\varphi\varphi} = \frac{1}{a^2}\left[\frac{a''}{a} + \frac{a'^2}{a^2} + 2k\right] g_{\varphi\varphi}$

Passons en composantes mixtes

(72)

$$R_\mu^\mu = \sum_\nu g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

(73)

$$R_0^0 = g^{00} R_{00}$$

(74)

$$R_u^u = g^{uu} R_{uu}$$

(75)

$$R_\theta^\theta = g^{\theta\theta} R_{\theta\theta}$$

(76)

$$R_\varphi^\varphi = g^{\varphi\varphi} R_{\varphi\varphi}$$

(77)

$$R_0^0 = \frac{3}{a^2}\left[\frac{a''}{a} - \frac{a'^2}{a^2}\right]$$

(78)

$$R_u^u = R_\theta^\theta = R_\varphi^\varphi = \frac{1}{a^2}\left[\frac{a''}{a} + \frac{a'^2}{a^2} + 2k\right]$$

Calcul scalaire de Riemann R

(79)

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{00} R_{00} + g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} + g^{33} R_{33}$$

$$= R_0^0 + R_u^u + R_\theta^\theta + R_\varphi^\varphi$$

(80)

$$R = \frac{3}{a^2}\left[\frac{a''}{a} - \frac{a'^2}{a^2}\right] + 3\frac{1}{a^2}\left[\frac{a''}{a} + \frac{a'^2}{a^2} + 2k\right]$$

(81)

$$R = \frac{6}{a^2}\left[\frac{a''}{a} + k\right]$$

Calcul des coefficienst du tenseur d'Einstein G

(82)

$$G_\mu^\nu = R_\mu^\nu - \frac{1}{2} R\, g_\mu^\nu$$

(83)

$$G_0^0 = \frac{3}{a^2}\left[\frac{a''}{a} - \frac{a'^2}{a^2}\right] - \frac{3}{a^2}\left[\frac{a''}{a} + k\right] = -\frac{3}{a^2}\left[\frac{a'^2}{a^2} + k\right]$$

$$G_i^i = \frac{1}{a^2}\left[\frac{a''}{a} + \frac{a'^2}{a^2} + 2k\right] - \frac{3}{a^2}\left[\frac{a''}{a} + k\right]$$

(84)

$$G_0^0 = -\frac{3}{a^2}\left[\frac{a'^2}{a^2} + k\right]$$

$$G_i^i = -\frac{1}{a^2}\left[\frac{2a''}{a} - \frac{a'^2}{a^2} + k\right]$$