

DYNAMIQUE GALACTIQUE

14 avril - 9 mai 2021

J.P.Petit G.d'Agostini N.Debergh F.Margnat

Il n'y a pas de vent favorable pour celui qui ne sait pas où il va

Sénèque

Nous sommes en train de finaliser nos travaux sur la dynamique galactique qui seront, bien sûr, adressés aux revues spécialisées. Si vous voulez les suivre, commencez par vous familiariser avec cette lecture de ces problèmes dans l'espace à sept dimensions ($t, x, y, z, u, v; x$).

Prologue.

De toute manière il est prévu que courant 2021 tous les travaux, sans exception, soient regroupés dans un ouvrage à l'attention des « niveau math sup et math spé » qui sera gratuitement téléchargeable et qu'on entreprendra aussitôt de traduire dans toutes les langues, grâce aux logiciels de traduction automatique, devenus suffisamment performants pour traduire des textes de ce genre, qui sont loin de la grande littérature.

C'est ça, notre arme la plus puissante : pouvoir porter nos travaux à la compréhension des non-spécialistes ». Parce que les « spécialistes » et prétendus experts, auto-proclamés, n'ont rien lu et ne liront rien, comme ça a été le cas de Jean-Pierre Luminet, confer son dernier ouvrage « l'Ecume de l'Espace-Temps » (Odile Jacob). . Pour eux, des travaux sur « l'univers holographique » ou « la thermodynamique des trous noirs » sont des sujets d'actualité. Les nôtres sont perçus comme « exotiques ».

Une galaxie est un objet assez complexe, composé de plusieurs éléments obéissant à des dynamiques différentes. Il y a essentiellement la population des étoiles et ce qu'on appelle le gaz interstellaire. En physique on est habitué à commencer par négliger ce qui contribue de manière minoritaire aux phénomènes.

Avec ces travaux de dynamique galactique nous allons

Ainsi commencera-t-on par négliger l'importance du gaz interstellaire en considérant qu'une galaxie est un ensemble de points-masses « auto-gravitant », c'est à dire orbitant dans le champ gravitationnel qu'il crée lui-même.

On réduira ensuite la population stellaire à une seule population, de masse m .

La dynamique de cette population d'étoiles est par ailleurs fort étrange. On considère que celle-ci forme un système non-collisionnel. Mais qu'entend-t-on par là ?

Le terme français est « collision », alors que les anglo-saxons emploient le terme plus adapté « encounter », qui veut dire « rencontre ». Notre propre galaxie est composée par un ensemble de cent à deux cent milliards d'étoiles. Qu'entend-t-on par « encounter », « rencontre » ? C'est le fait que quand deux étoiles passent à une distance suffisamment faible pour que leurs vitesses soient modifiées, en directions et en modules. On raisonne alors en terme de statistique en introduisant une grandeur qu'on appelle « le temps de libre parcours moyen », c'est à dire le temps au bout duquel une étoile aura des chances

d'en croiser une autre et que cette rencontre altère sa vitesse. Ce temps a été calculé par l'Indien Chandrasekhar en 1942 et le chiffre obtenu est 10^{10} ans, c'est à dire pratiquement l'âge de l'univers ! Il est donc tout à fait licite de considérer que les « rencontres » entre étoiles ne se produisent ... jamais et qu'elles forment un système totalement « non-collisionnel ».

Ceci a une forte incidence sur le thermodynamique du milieu, au sens large. En effet toute notre mécanique des fluides est fondée sur des systèmes collisionnels. C'est le cas de l'air que nous respirons. Au cours de ces multiples interactions à deux corps les molécules d'air échangent quantité de mouvement et énergie. Ce sont ces collisions qui tendent à instaurer, pour les « vitesses d'agitation thermiques » une statistique de Maxwell-Boltzmann.

Dans la mécanique des fluides classique on ne manipule que des grandeurs macroscopiques :

- La densité n des particules, par unité de volume.
- La masse volumique ρ de ces mêmes particules, en kilos par mètre cube.
- La température absolue T .
- La pression p

Le « terrain de jeu » est un espace-temps (x, y, z, t) avec, bien entendu, un « espace absolu » et un « temps absolu ». On n'est plus dans le monde de la relativité, restreinte ou générale.

Considérons un élément du fluide, une particule de masse m . Au point (x, y, z) et au temps t sa vitesse est $\vec{v}_{(x,y,z,t)}$, les coordonnées de ce vecteur vitesse étant, en lettres minuscules (u, v, w).

Considérons maintenant un petit volume correspondant au parallélogramme où les coordonnées sont entre :

$$\begin{aligned} &x \text{ et } x + dx \\ &y \text{ et } y + dy \\ &z \text{ et } z + dz \end{aligned}$$

et dont le volume est $dx dy dz$. Dans ce volume ne trouvent $n dx dy dz$ particules, ayant chacune leur propre vitesse, de composantes (u, v, w).

La *vitesse macroscopique* $\langle \vec{v} \rangle$ est définie comme étant la moyenne de ces vitesses individuelles \vec{v} .

Toujours dans ce petit parallélogramme, en isolant une des particules on pourra définir sa *vitesse d'agitation thermique* avec une lettre C majuscule.

$$\vec{C} = \vec{v} - \langle \vec{v} \rangle$$

dont les composantes seront : (U, V, W), en lettre majuscules.

L'énergie cinétique individuelle de ces particules, associée à ce phénomène d'agitation thermique et :

$$\frac{1}{2}mC^2 = \frac{1}{2}m(U^2 + V^2 + W^2)$$

On définit la température absolue par :

$$\frac{3}{2}kT = \frac{1}{2}m\langle C^2 \rangle$$

m étant la masse de l'élément du gaz et T la température absolue, qui est alors définie comme la mesure de l'énergie moyenne d'agitation thermique.

Les collisions entre particules font s'instaurer un état d'équilibre thermodynamique correspondant à la statistique de Maxwell-Boltzmann.

Détaillons-la.

Considérons un observateur qui accompagne le fluide dans son mouvement, donc qui se déplace avec la vitesse macroscopique $\langle \vec{v} \rangle$. Imaginons qu'à un instant t et en un point (x,y,z) il puisse opérer des mesures de vitesse des particules qui l'entourent, dans un volume élémentaire $dx dy dz$. Il aurait donc accès à chaque instant à la mesure des composantes U(t), V(t), W(t) de la vitesse d'agitation thermique d'une molécule.

Il lui serait alors possible d'opérer un classement, particule par particule, pour toutes ces composantes de la vitesse. Il pourrait alors ranger ces particules selon trois courbes. Voici la courbe correspondant à la composante U de la vitesse d'agitation :

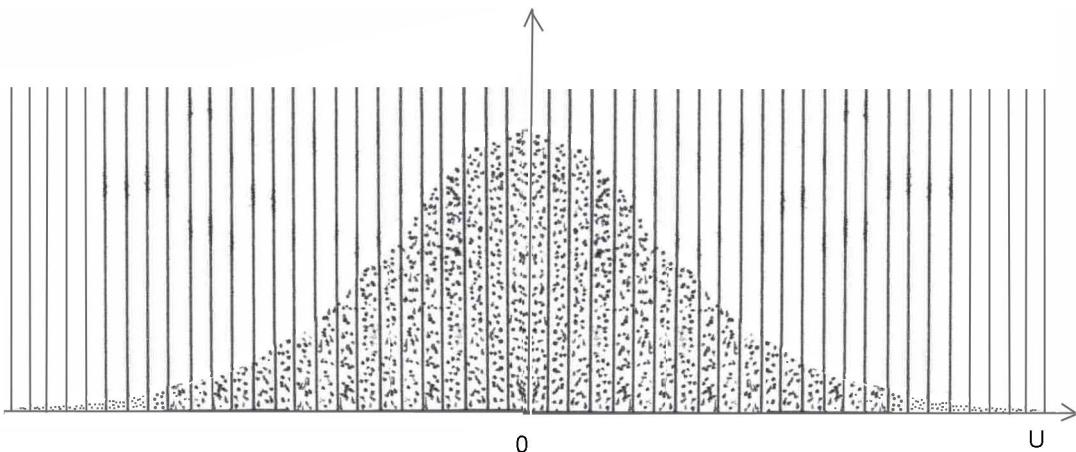


Fig.1 : Points figurant les vitesses d'agitation mesurées, répartis par classes

Si le nombre des particules décomptées est suffisamment important ceci fera apparaître une courbe enveloppe sous la forme d'une gaussienne.

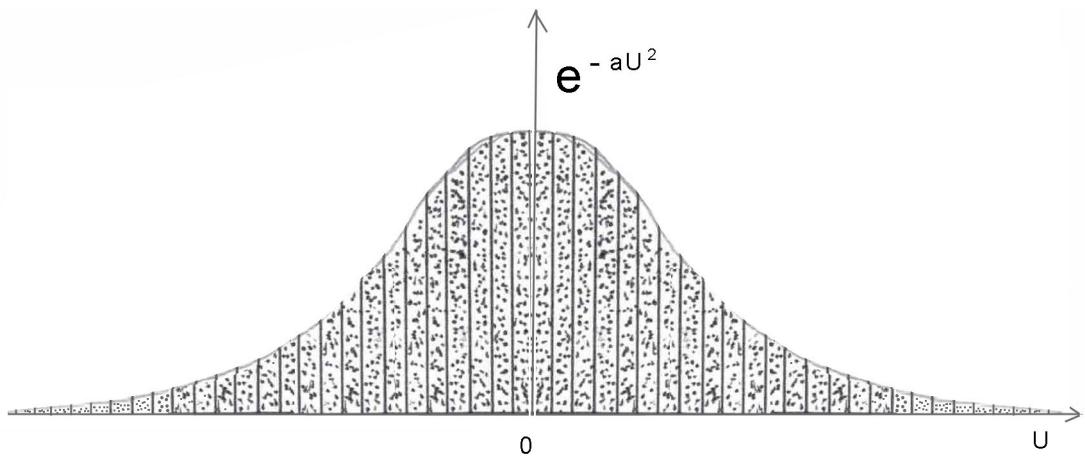


Fig.2 : La courbe enveloppe, gaussienne

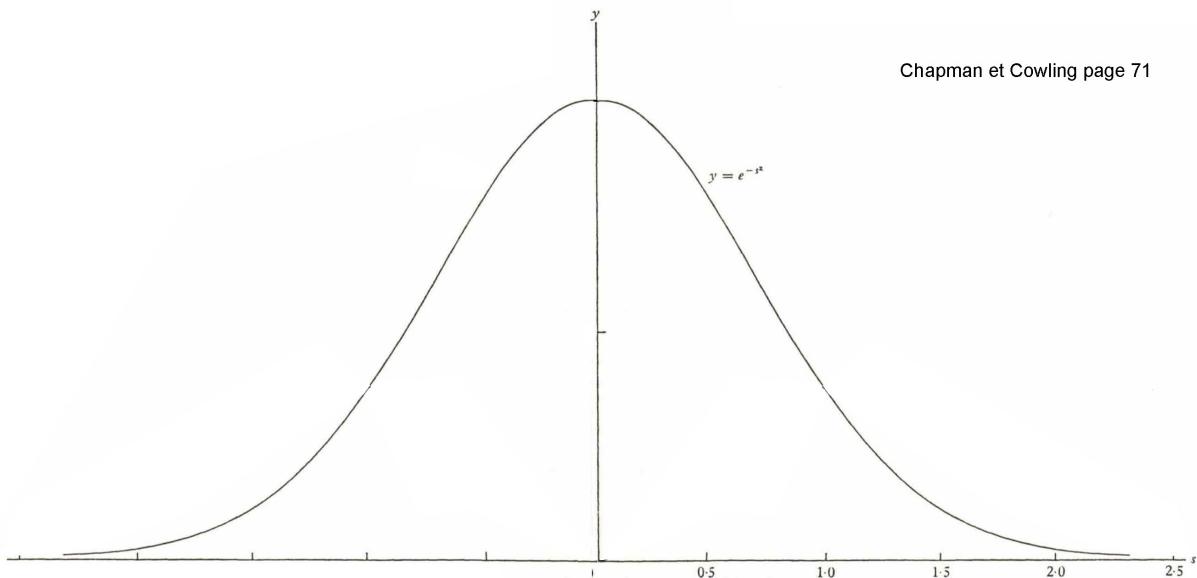


Fig 3 : de Gauss issue du Chapman et Cowling

Un constat : les courbes obtenues sont les mêmes pour les directions V et W, ce qui signifie que les collisions distribuent les vitesses d'agitation thermique de manière isotrope.

On peut alors dégager de cette statistique une fonction $\Phi(U)$ de **densité de probabilité**. Prenons une composante U de cette vitesse d'agitation. Considérons une vitesse U et un intervalle dU . Le nombre des particules ayant une vitesse dont la composante U se situe entre U et $U + dU$ sera : $\Phi(U) dU$

En poussant les choses plus loin nous définirons, dans une espace à 7 dimensions :

$$(x, y, z, U, V, W, t)$$

une fonction de distribution des vitesses $f_{(x,y,z,U,V,W,t)}$ telle que, à un instant t , dans l'hypervolume à six dimensions

$$\begin{aligned} & (x, x + dx) \\ & (y, y + dy) \\ & (z, z + dz) \\ & (U, U + dU) \\ & (V, V + dV) \\ & (W, W + dW) \end{aligned}$$

le nombre dn des particules qui se trouve dans cet hypervolume $dx dy dz dU dV dW$ est :

$$f_{(x,y,z,U,V,W,t)} dx dy dz dU dV dW$$

Toute notre physique des fluides est centrée sur cette situation d'équilibre thermodynamique local. Celui-ci correspond à la fonction de distribution des vitesses d'agitation thermique locales correspondant à :

$$f_{(x,y,z,U,V,W,t)} = a_{(x,y,z,t)} e^{-b_{(x,y,z,t)}(U^2 + V^2 + W^2)}$$

a et b étant des fonctions de x, y, z, t

On remarque que cette le logarithme de cette fonction f est une fonction sphérique des coordonnées U, V, W de la vitesse d'agitation thermique.

$$\log f = -b(U^2 + V^2 + W^2) + \log a$$

Comment déterminer les fonctions a et b ?

La fonction f sera normée au sens où si on effectue une sommation « pour toutes les vitesses d'agitation possibles, c'est à dire selon les composantes U, V, W de la vitesse d'agitation on devra trouver le nombre de densité $n_{(x,y,z,t)}$, c'est à dire le nombre de particules se situant dans l'élément de volume $dx dy dz$ à l'instant t :

$$\int_{U=-\infty}^{U=+\infty} \int_{V=-\infty}^{V=+\infty} \int_{W=-\infty}^{W=+\infty} a e^{-b(U^2 + V^2 + W^2)} dU dV dW = n_{(x,y,z,t)}$$

Supposons qu'on définisse une fonction $F_{(U,V,W)}$ de la vitesse d'agitation. On pourra calculer sa valeur moyenne selon :

$$\langle F \rangle = \frac{1}{n} \int_{U=-\infty}^{U=+\infty} \int_{V=-\infty}^{V=+\infty} \int_{W=-\infty}^{W=+\infty} F_{(U,V,W)} f_{(U,V,W)} dU dV dW$$

par raison de symétrie :

$$\langle U \rangle = \frac{1}{n} \int_{U=-\infty}^{U=+\infty} \int_{V=-\infty}^{V=+\infty} \int_{W=-\infty}^{W=+\infty} U f_{(U,V,W)} dU dV dW = \langle V \rangle = \langle W \rangle = 0$$

Les vitesses d'agitation thermiques se distribuent autour d'une valeur moyenne nulle (par définition).

Mais nous pouvons calculer la valeur moyenne de l'énergie cinétique d'agitation thermique, qui définit la température absolue T selon :

$$\langle \frac{1}{2} m C^2 \rangle = \frac{3}{2} k T$$

Je ne fais pas le calcul, mais ceci permet de donner la forme de la fonction de distribution de la vitesse « Maxwellienne » :

$$f^o(x, y, z, t, U, V, W) = n \left(\frac{m}{2\pi k T} \right)^{3/2} e^{-\frac{mC^2}{2kT}}$$

Nous avons donc une variable, la vitesse d'agitation thermique qui se distribue selon la courbe correspondant à cette fonction. Nous pouvons envisager de calculer un « écart-type » (à partir de l'écart quadratique moyen).

$$\langle C^2 \rangle = \frac{1}{n} \iiint (U^2 + V^2 + W^2) f^o dU dV dW = \frac{3kT}{m}$$

$$\sqrt{\langle C^2 \rangle}$$

Qu'on confondra avec la valeur moyenne de l'agitation thermique, qui devrait être obtenue à partir de :

$$\langle C \rangle = \frac{1}{n} \iiint \sqrt{U^2 + V^2 + W^2} f^o dU dV dW = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}}$$

En effet $\sqrt{\frac{8}{\pi}} \approx 1.5$ proche de racine de 2.

Nous sommes des physiciens. Nous ferons :

$$\langle C \rangle = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

On peut écrire :

$$\ln f^o = \frac{3}{2} \log \left(\frac{m}{2\pi k} \right) + \ln \frac{n}{T^{3/2}} - \frac{mC^2}{2kT} = Cst + \ln \frac{n}{T^{3/2}} - \frac{mC^2}{2kT}$$

On peut tracer la courbe de probabilité construite sur la valeur de la vitesse d'agitation thermique, correspondant à :

$$\sqrt{U^2 + V^2 + W^2} f^o$$

On obtient une courbe comme ceci :

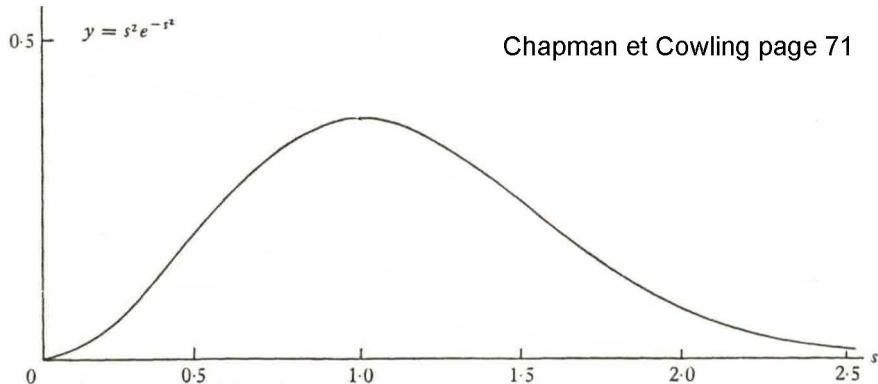


Fig. 4 : Densité de probabilité de la vitesse quadratique, tirée du Chapman et Cowling

Signification : On a un maximum de points-masses dont la vitesse d'agitation thermique (appelée **vitesse résiduelle** par les astronomes) se situe autour de la valeur moyenne. Et il y a deux « queues de distribution ». A gauche les étoiles ayant des vitesses très faibles et à droite des vitesses très élevées.

Les collisions (alias « rencontres») tendent à établir (rétablir) cette distribution correspondant à l'équilibre thermodynamique. Si on a affaire à une distribution d'étoiles à symétrie sphérique, centrée sur un point O (amas globulaires) si les collisions peuvent être considérées comme inexistantes alors, quand les étoiles rapides, dont la vitesse excède la vitesse de libération de l'amas, auront quitté celui-ci, l'objet n'évoluera plus. Mais dans les amas globulaires la densité au centre est telle que des collisions se produisent, qui créent ces étoiles rapides, lesquelles s'évaderont alors de l'amas. Ainsi les amas globulaires, qui sont les premiers objets qui se sont créés en même temps que la galaxie, «s'évaporent», perdent des étoiles mais à un rythme si lent qu'ils ont perduré jusqu'à nos jours. On y reviendra plus loin.



Fig. 5 : Amas globulaire (amas d'Hercule)

Image d'une « galaxie à symétrie sphérique »

Les phénomènes de la mécaflu : mouvement macroscopique, transfert de moment cinétique et d'énergie thermique reposent toujours sur une situation « proche de l'état d'équilibre thermodynamique », ce qui signifie que quel que soit le phénomène considéré, en tout point et pour tout temps t la fonction de distribution de la vitesse sera toujours très proche de cette fonction Maxwellienne.

Existe-t-il dans notre physique terrestre, de laboratoire, des situations où la fonction de distribution de la vitesse s'écarte notablement de cette situation Maxwellienne ?

La réponse est non. Parce que les collisions ramènent le fluide en permanence dans cet état avec « un temps caractéristique de retour à l'équilibre thermodynamique local » qui est de l'ordre du temps de libre parcours moyen des molécules, donc extrêmement bref quand le milieu n'est pas raréfié.

Si le milieu n'est pas ionisé, si ses éléments ne sont pas soumis à une force électromagnétique, il existe un phénomène qui représente un écart brutal vis à vis de l'état d'équilibre thermodynamique local c'est celui des ondes de choc. Considérons un tube rempli d'un gaz, parcouru par une onde de choc. Lorsque l'onde parcourt le gaz elle est l'équivalent d'un « coup de marteau » qui frapperait les molécules, dans la direction de propagation de l'onde.

Le premier phénomène, mesurable, est un saut de densité, pratiquement sans épaisseur. On peut mettre en évidence cette discontinuité de la densité par une méthode interférométrique. La densité subit donc un saut brutal à la traversée d'une surface qu'on peut considérer comme un plan sans épaisseur. Mais que se passe-t-il en aval ?

Ce « coup de marteau » communique aux molécules une vitesse à la fois macroscopique et d'agitation thermique. Sur une distance extrêmement courte (le « libre parcours moyen ») et selon un temps qui est de l'ordre du « libre parcours moyen » les molécules vont s'entrechoquer les unes avec les autres. A la traversée de l'onde, l'impulsion de vitesse et communiquée dans le sens de propagation de l'onde. Mais au fil des collisions les vitesses vont tendre à se distribuer dans toutes les directions. On nommera ce phénomène une « thermalisation ».

Quand cette thermalisation sera achevée le gaz « choqué » aura

- Un vitesse macroscopique, que lui aura communiqué l'onde « coup de marteau ».

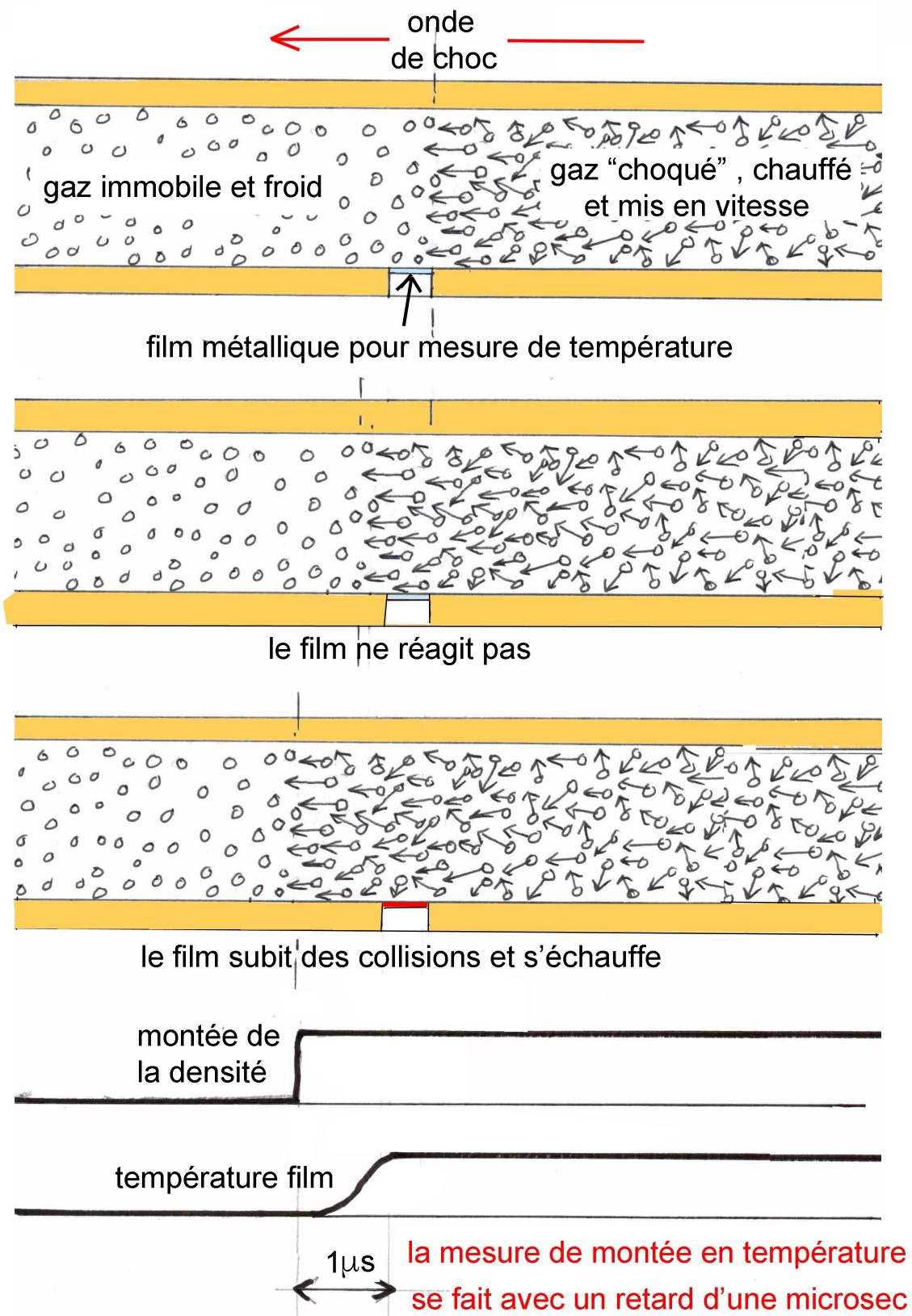


Fig. 6 : Propagation de l'onde de choc dans le tube à choc

- Une nouvelle vitesse d'agitation avec une distribution isotrope, associée à une nouvelle température T.

A la fin des années soixante, quand je menais des expériences dans un « tube à choc », nous mesurions le saut de densité par méthode interférométrique et le flux de chaleur à la paroi. Pour ce faire cette paroi était équipée de capteurs de flux de chaleur sous la forme d'un film métallique très fin. En collectant de la chaleur ce film s'échauffait très rapidement, étant donnée son épaisseur infime. On pouvait considérer le temps de réponse à pratiquement zéro. Cet échauffement modifiait sa résistivité et on mesurait alors l'intensité du courant qui le traversait.

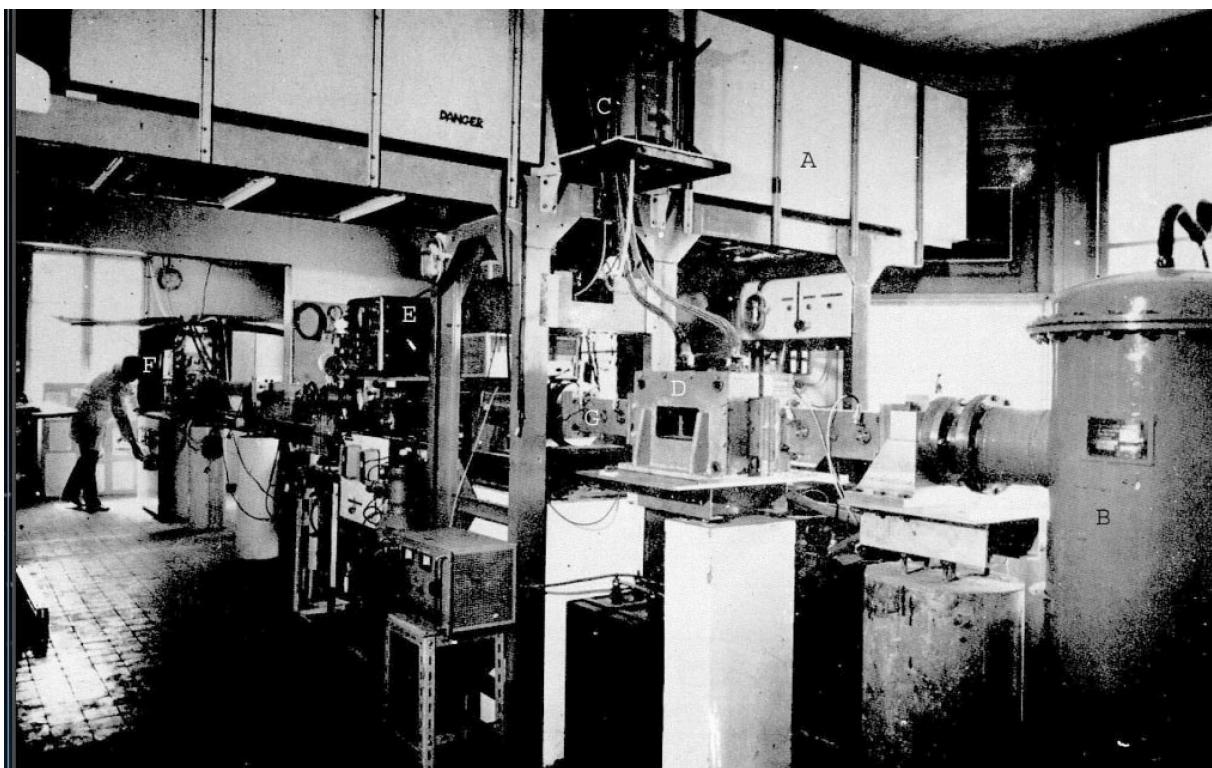


Fig.7 : Mon tube à choc TC8

Mais cette mesure de température accusait un temps de retard vis à vis du saut de densité mesuré. Il se produisait avec un millionième de seconde de retard.

Pourquoi ?

Eh bien immédiatement après le saut de densité correspondant au « coup de marteau » les molécules du gaz étaient bien agitées, mais selon le sens de propagation de l'onde. De ce fait elles ne communiquaient pas au film métallique pariétal de chaleur par collisions. Il fallait pour cela que des collisions créent des composantes de la vitesse d'agitation thermique perpendiculaires à la paroi.

Nous étions donc « témoins oculaires » de cette thermalisation du gaz derrière une onde de choc. La très courte distance le long de laquelle ce phénomène s'opérait pouvait être assimilée à « l'épaisseur de l'onde de choc ». Dans le temps (évidemment à l'aide

d'enregistreurs) nous étions également « témoins » du retour à l'équilibre thermodynamique du fluide.

Je raconte tout cela pour que chacun ait bien conscience de la tendance des fluides adopter un état d'équilibre thermodynamique local avec un temps caractéristique qui est de l'ordre du temps de libre parcours.

Je rappelle aussi qu'avant d'être un théoricien j'ai été un expérimentateur. Et je m'empresse d'ajouter que sur quoi un théoricien doit porter toute son attention ce sont les données expérimentales et d'observation. Sans cela on court après des chimères.

Je reviens sur cette question : existe-t-il dans nos expériences des phénomènes qui s'écartent de cela ? Il faut pour ce faire que le milieu soit extrêmement raréfié et que quelque chose entraîne le milieu vers un écart vis à vis de l'équilibre thermodynamique. Exemple : le plasma très raréfié, totalement ionisé, emplissant le champ d'un Tokamak, soumis à des forces électromagnétiques. Le milieu est alors totalement hors de l'état d'équilibre thermodynamique local. D'où l'impossibilité de le décrire par simple combinaison des équations de Navier Stokes et de Maxwell. Je n'insiste pas.

La dynamique des galaxies nous fait nous confronter à un milieu totalement nouveau, où les « collisions » (« rencontres ») en étoiles sont pratiquement inexistantes. On ne pourra alors plus s'accrocher à ce concept de tendance vers un état d'équilibre thermodynamique local. Bien que ce milieu contienne un nombre de « points-masses » suffisamment grand pour qu'on puisse les assimiler aux molécules d'un gaz on ne pourra recourir aux équations de Navier Stokes.

C'est la raison pour laquelle la modélisation mathématique d'une galaxie accuse tellement de retard. La « Bible » de la dynamique galactique est un ouvrage de 882 pages, paru à Oxford University Press intitulé « Galactic Dynamics », de James Binney et Scott Tremaine. La première édition est de 1987. Cette couverture correspond à celle de 2008 .

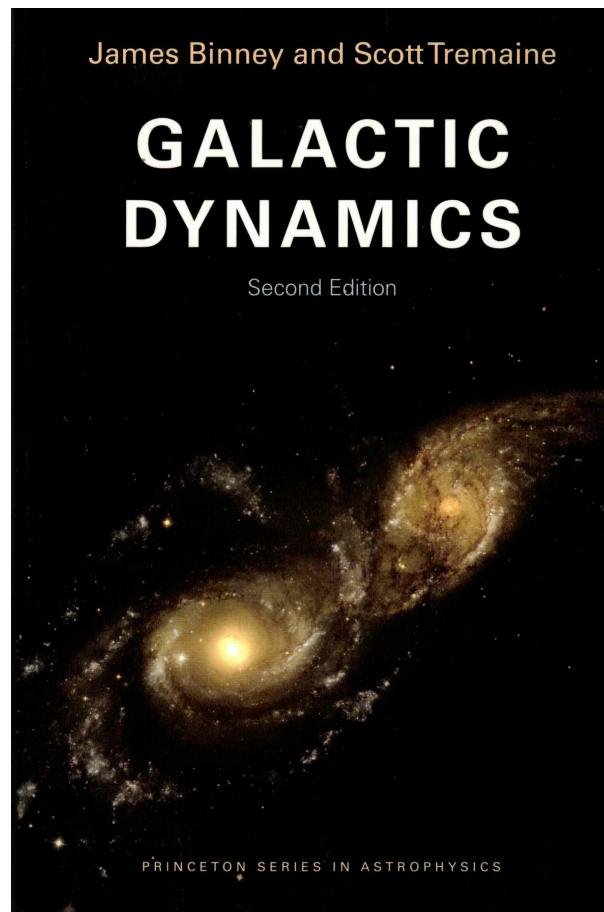


Fig.8 : Couverture du livre de Binney et Tremaine

J'ai jugé utile de traduire les messages ayant salué l'édition de cet ouvrage :

Praise for the first edition

"[T]his book has no peers." — *Nature*

"All astronomers and dynamicists should acquire and read this impressive book. It is both readable and rigorous: destined to become a classic landmark in the subject."

— *Times Higher Education Supplement*

"Binney and Tremaine have done a major service to astronomers and physicists alike by producing a magnificent book that will make this fascinating subject much more accessible. This is undoubtedly the best book from which to learn the subject."

— Donald Lynden-Bell, *Physics Today*

"[A]n excellent book—big and fat, and containing everything you ever wanted to know about stellar dynamics.... This book must become a landmark in the field." — *New Scientist*

"[The] material is covered with care, rigor, and exemplary clarity; there is nothing obscure, sloppy, or superficial. The authors are, moreover, careful to make clear the limits of present knowledge, and to point out where conclusions cannot yet be drawn.... I expect it to stand as a classic reference for many years to come."

— Richard B. Larson, *American Scientist*

"Henceforth, one must have a copy of Binney and Tremaine's classic in order to do astrophysics.... We will all study from it and come to know it better than the Bible."

— John N. Bahcall,
Institute for Advanced Study

"I consider *Galactic Dynamics* to be the most important single book published in the field of astronomy in the last ten years. In its subject, it is the most important book published in a generation."

— William Press, *Harvard University*

Messages de félicitations pour la première édition

C'est l'ouvrage de référence en la matière — Nature

"Tous les astronomes et dynamiciens devraient acquérir et lire ce livre impressionnant. Il est à la fois lisible et rigoureux : destiné à devenir un point de repère dans le domaine"

— *Times Higher Education Supplement*

"Binney et Tremaine ont rendu un grand service aux astronomes et aux physiciens en produisant un magnifique livre qui rendra ce sujet fascinant plus accessible. C'est sans aucun doute le meilleur livre dont on puisse tirer des enseignements".

— Donald Lynden-Bell, *Physics Today*

"Un excellent livre, gros et gras, et contenant tout ce que vous avez toujours voulu savoir sur la dynamique stellaire ... Ce livre doit devenir une référence en la matière" — *New Scientist*

"Le sujet est couvert avec soin, rigueur et une clarté exemplaire ; il n'y a rien d'obscur, de bâclé ou de superficiel. De plus, les auteurs ont pris soin d'indiquer clairement les limites des connaissances actuelles et de signaler les points sur lesquels il est impossible de tirer des conclusions... J'espère que ce document restera une référence classique pendant de nombreuses années". — Richard B. Larson, *American Scientist*

"Désormais, il faut avoir une copie du classique de Binney et Tremaine pour faire de l'astrophysique ... Nous allons tous l'étudier et apprendre à mieux le connaître que la Bible"

— John N. Bahcall,
Institute for Advanced Study

"Je considère que *Galactic Dynamics* est le livre le plus important publié dans le domaine de l'astronomie au cours des dix dernières années. Dans son domaine, c'est le livre le plus important publié depuis une génération".

— William Press, *Harvard University*

Fig.9 : Quatrième de couverture du livre

Je n'ai jamais lu de commentaires aussi dithyrambiques. Si vous allez à la page web de James Binney :

<https://www-thphys.physics.ox.ac.uk/people/JamesBinney/>

Vous y trouverez aussitôt un lien Modelling the Galaxy. Vous n'y apprendrez pas grande chose, si ce n'est que les galaxies sont constituées d'étoiles et de gaz et que leur cohérence est assurée par un halo de matière sombre de nature inconnue.

Dans le corps du livre vous trouverez force développements semi-empiriques. Mais un modèle de galaxie en tant que solution mathématique exacte d'une équation : non.

Comment se fait-il que la crème des mathématiciens et des théoriciens, y compris ceux de l'Institut des Etudes avancées de Princeton, où Albert Einstein acheva sa carrière n'ont pas été fichus de pondre cela ?

Les galaxies sont assimilables à des ensembles de points-masses « auto-gravitants », constituant des systèmes axisymétriques. Les forces qui unissent ces points dérivent de la loi de Newton, une loi qui dérive d'un potentiel qui, comme le potentiel électrique est en $1/r$. C'est un « potentiel Newtonien ».

En électrostatique les charges électriques créent un potentiel électrique V . Celui-ci obéit à l'équation de Poisson qui est une des équations formant « l'ensemble des équations de Maxwell ». Elle s'écrit :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{\rho_e}{\epsilon_0} = 0 \quad \text{ou} \quad \Delta V + \frac{\rho_e}{\epsilon_0} = 0$$

en introduisant « l'opérateur Laplacien ». ρ_e est la densité de charge électrique par unité de volume, en Coulombs par mètre cube.

En gravitation on aura une équation en tous points analogue, mais avec un changement de signe :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 4\pi G \rho \quad \text{ou} \quad \Delta \Psi = 4\pi G \rho$$

où Ψ est le potentiel gravitationnel. ρ est la masse volumique en kilos par mètre cube et G la constante de la gravitation.

Pourquoi le changement de signe ? Parce que, si deux charges électriques de même signe se repoussent, effet inverse pour les masses, qui s'attirent selon la loi de Newton.

En coordonnées sphériques cette équation s'écrit :

$$\frac{d^2 \Psi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\Psi}{dr} = 4\pi G \rho$$

Nous nous en servirons.

En coordonnées sphériques :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} + \frac{\cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = 4\pi G \rho$$

Sur l'équateur $\theta = \frac{\pi}{2}$ $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = 4\pi G \rho$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} \right) = 4\pi G \rho$$

Equation de Poisson en coordonées cylindriques (avec comme variables la distance à l'axe l'angle φ et la cote z). Avec

$$u = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \varphi = \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^2} + \frac{1}{u} \frac{\partial \Psi}{\partial u} + \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 4\pi G \rho$$

En axisymétrique la fonction ne dépend plus de φ :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^2} + \frac{1}{u} \frac{\partial \Psi}{\partial u} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 4\pi G \rho$$

Bien, voilà des équations. Mais quid des autres ?

L'étrange mécanique qui régit la dynamique des galaxies.

Si quelqu'un pouvait s'asseoir sur une molécule d'un gaz bien terrestre et effectuer des mesures de vitesses des molécules environnantes il obtiendrait ce qui a été dit plus haut : une distribution assimilable à celle construite par messieurs Maxwell et Boltzmann.

Revenons à la courbe de la figure 2. Qui de l'environnement du Soleil ?

L'effet Doppler nous donne immédiatement accès à la composante radiale des vitesses des étoiles environnantes. L'astronome peut ainsi se donner un cône avec un petit angle solide et recenser les vitesses radiales des étoiles contenues dans ce volume. En portant ces vitesses (par rapport à l'observateur) l'astronome obtiendra la courbe gaussienne associée à cette distribution des vitesses, à partir de laquelle il pourra calculer la moyenne du module de cette vitesse d'agitation qui est alors fonction de l'angle φ (azimut) et de l'angle ϕ (qui représente l'angle de site) :

$$\langle C \rangle_{(\varphi, \phi)}$$

Dans un système à symétrie sphérique cette valeur est indépendante des angles. On obtient un « *sphéroïde des vitesses résiduelles* » .

On ne peut effectuer une telle mesure qu'au voisinage du Soleil. Alors, qu'obtient-on ?

La déviation du vertex.

Voici la meilleure carte que nous ayons de notre galaxie, la Voie Lactée :

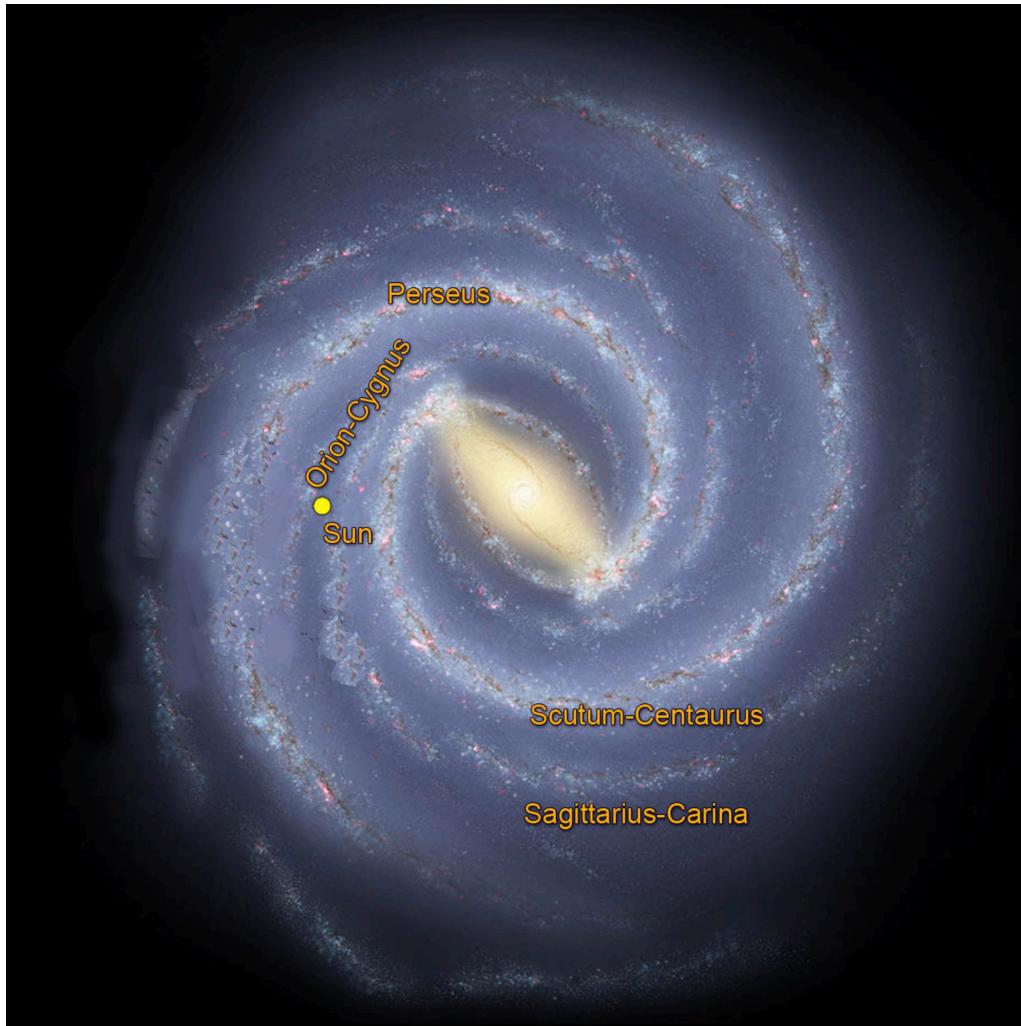


Fig.10 : La voie Lactée

Le spot jaune situe le Soleil, à proximité d'un de ses bras, le « bras d'Orion ». C'est donc par rapport à ce point d'observation qu'on a effectué des mesures concernant l'ellipsoïde des vitesses. Le voici :

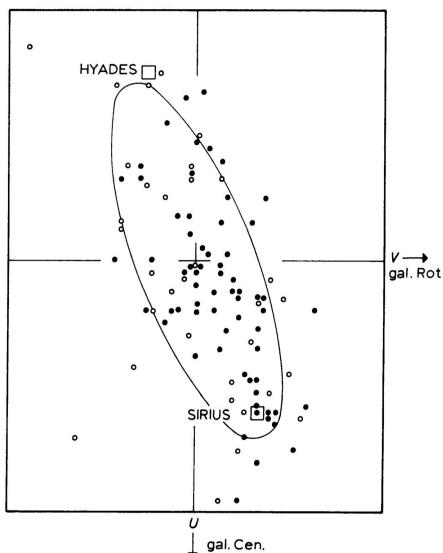


Fig. 1. Velocities of A-type stars in the solar neighbourhood (●) and of late type main sequence stars to which Wilson assigns Ca^+ emission intensities of +3 or greater (○).

Fig. 11 : Le « vertex »

Dans cette figure le centre de la galaxie est vers le bas. Pour le situer par rapport à celle-ci il nous faut modifier la figure, comme ceci :

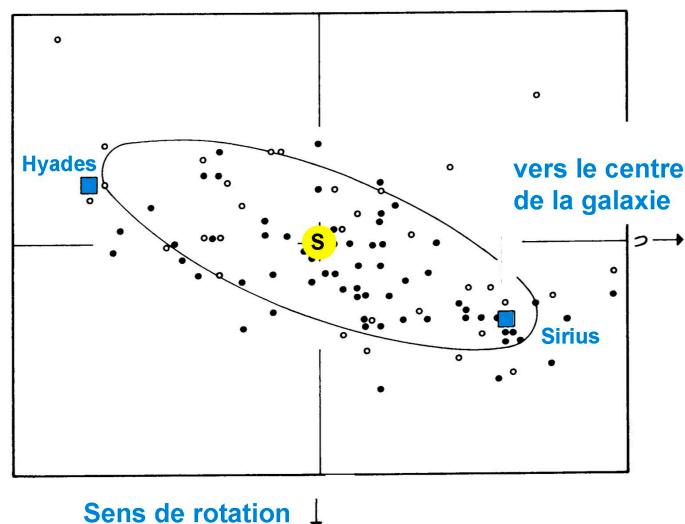


Fig. 12 : Ellipsoïde des vitesses résiduelles

Cela nous permet de le situer par rapport à la galaxie :

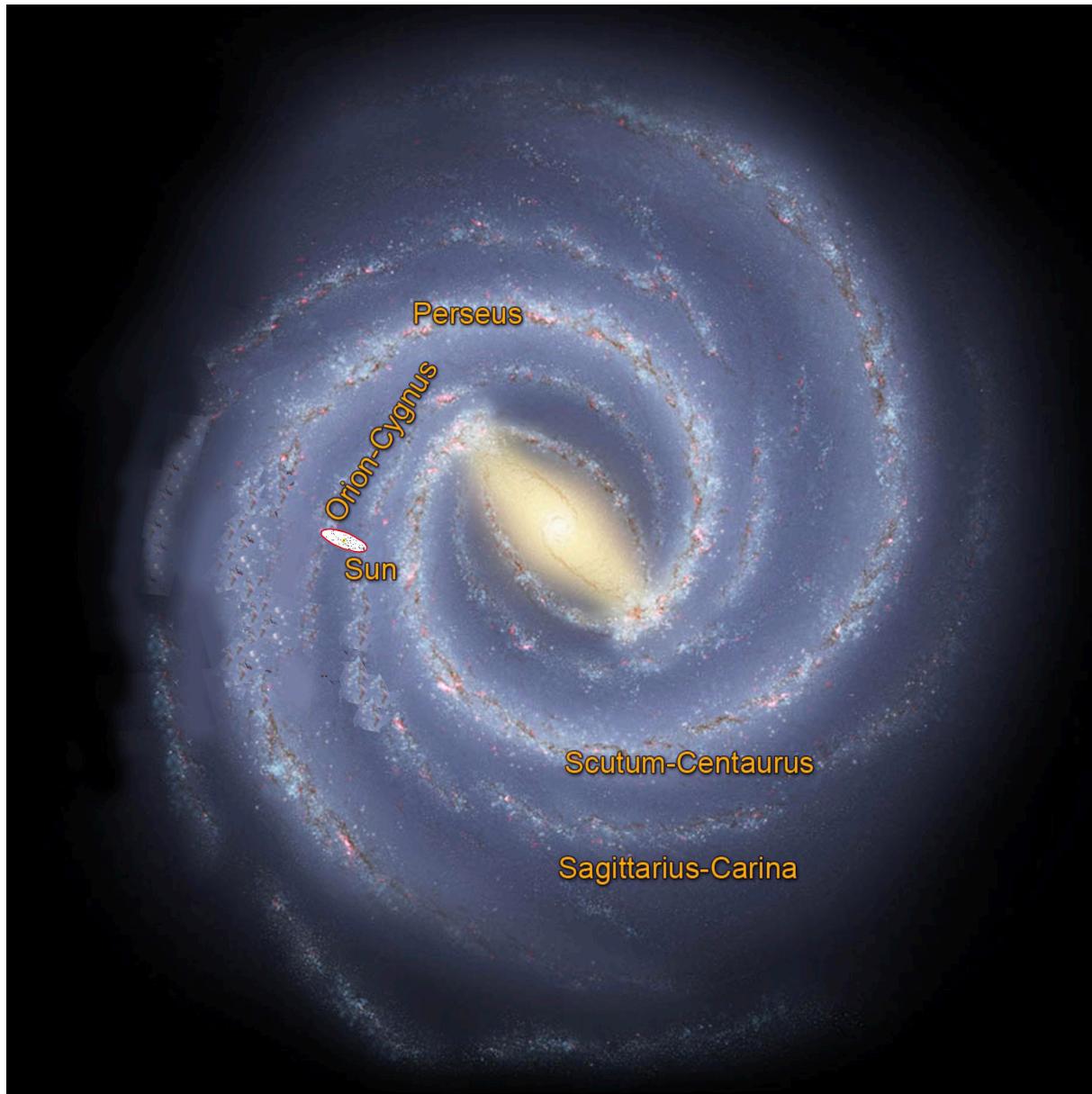


Fig.13 :Ellipsoïde des vitesses,étoiles jeunes : pratiquement perpendiculaire au bras voisin

Si on se reporte à l'ouvrage de Binney et Tremaine on peut consulter les mots qui correspondent aux thèmes abordés. Si on cherche le mot « Vertex » on trouve ceci :

ellipsoidal. *See also* velocity ellipsoid
 in axisymmetric systems 393p
 in spherical systems, and Osipkov–
 Merritt models 388p
 line-of-sight (LOSVD) **280**, 283, 346, 366–
 369
 velocity ellipsoid **281–282**
age dependence 686–687
 in epicycle approximation 170
 in Hill’s approximation 714p
 spherical 285–286
 in solar neighborhood 170, 393p, 686–687,
 686f, 691, 694–695, 726p
 above Galactic midplane 356, 391p

Fig.14 : Mots-clés dans le livre de Binney et Tremaine

Le mot vertex n'est pas cité. On trouve des données sur le VO, le velocity ellipsoid, page 686 :

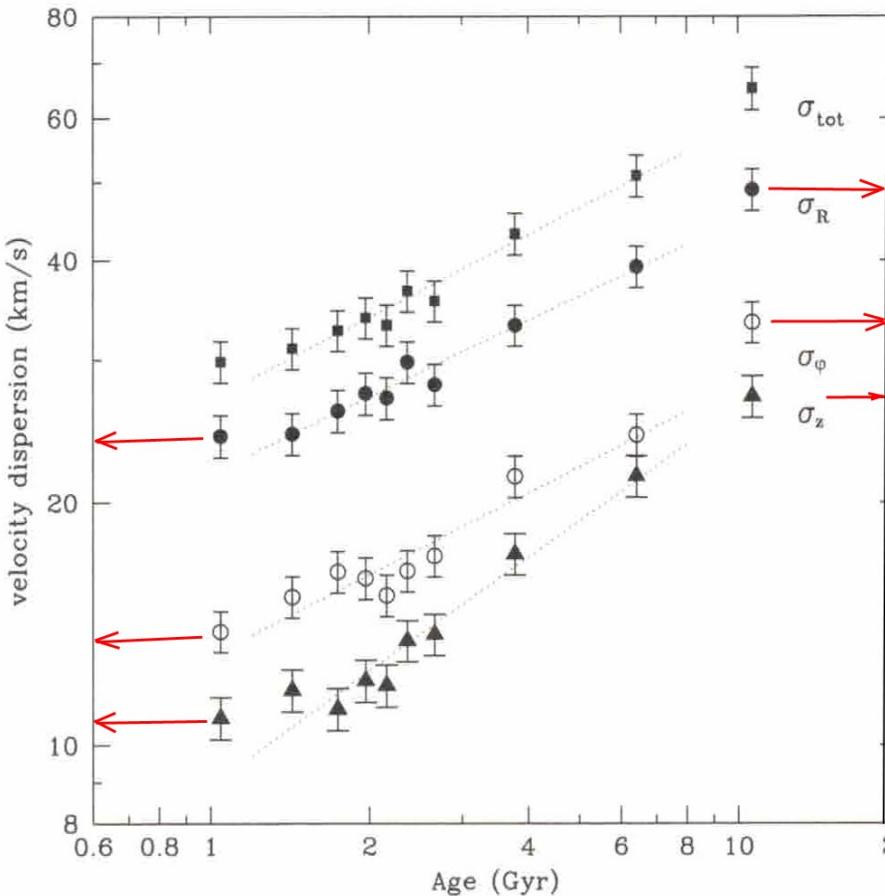


Fig15 : Axes de l'ellipsoïde des vitesses en fonction de l'âge des étoiles

On y trouve les dispersions des vitesses σ_R σ_ϕ σ_z

- σ_R Vitesses pointant vers le centre galactique
- σ_ϕ Vitesses perpendiculaires au plan de symétrie
- σ_z Vitesses selon une direction azimutale.

Ces dispersions ne sont pas égales. On est très loin d'un « sphéroïde des vitesses » (celui de la distribution maxwellienne des vitesses résiduelles dans un milieu qui serait dominé par les « collisions » entre points-masses. Il y a trois grandeurs caractéristiques correspondant aux écarts types correspondant, qui sont les trois axes principaux de l'ellipsoïde. On a d'abord deux axes transverses σ_ϕ et σ_z qui ont pratiquement la même valeur, et une dispersion « quasi-radiale » σ_R dont l'ordre de grandeur est pratiquement du double. Pourquoi parle-t-on d'ordre de grandeur ? Parce que le tracé de cet ellipsoïde des vitesses n'est pas le même selon l'âge des étoiles. On peut considérer le milieu stellaire comme un mélange de « gaz » différents :

- Les étoiles jeunes
- Les vieilles étoiles

Puisque la dispersion des vitesses « résiduelles » est l'équivalent d'une « vitesse d'agitation thermique» on peut dire que le « gaz d'étoiles anciennes » est plus « chaud » que le gaz d'étoiles jeunes. Comme la « température » du milieu varie comme la valeur moyenne de la vitesse d'agitation (vitesse résiduelle) et qu'il existe un facteur 2,5 à 3 entre celle des plus vieilles étoiles mesurées et celle des plus jeunes étoiles (mesurées) on en déduit à un « échauffement » d'un facteur 36 du gaz des jeunes étoiles. Dans le temps on s'arrête à 600 millions d'années d'âge, ce qui correspond aux 300 étoiles de l'amas Hyades, proche du Soleil. Le Soleil, c'est le point d'observation. Sirius n'a que 250 millions d'années.

Il est dommage que les astronomes n'aient pas fait figurer de données concernant les étoiles plus jeunes. Mais celles-ci sont alors plus proches du « bras » dans lequel elles se sont formées. La loi d'évolution de cette vitesse d'agitation thermique des étoiles n'est pas linéaire en fonction de l'âge. Les données se rapportent à un âge compris entre 1 et 10 milliards d'années (le Soleil ; 4 milliards d'années). Mais on peut tenter une extrapolation :

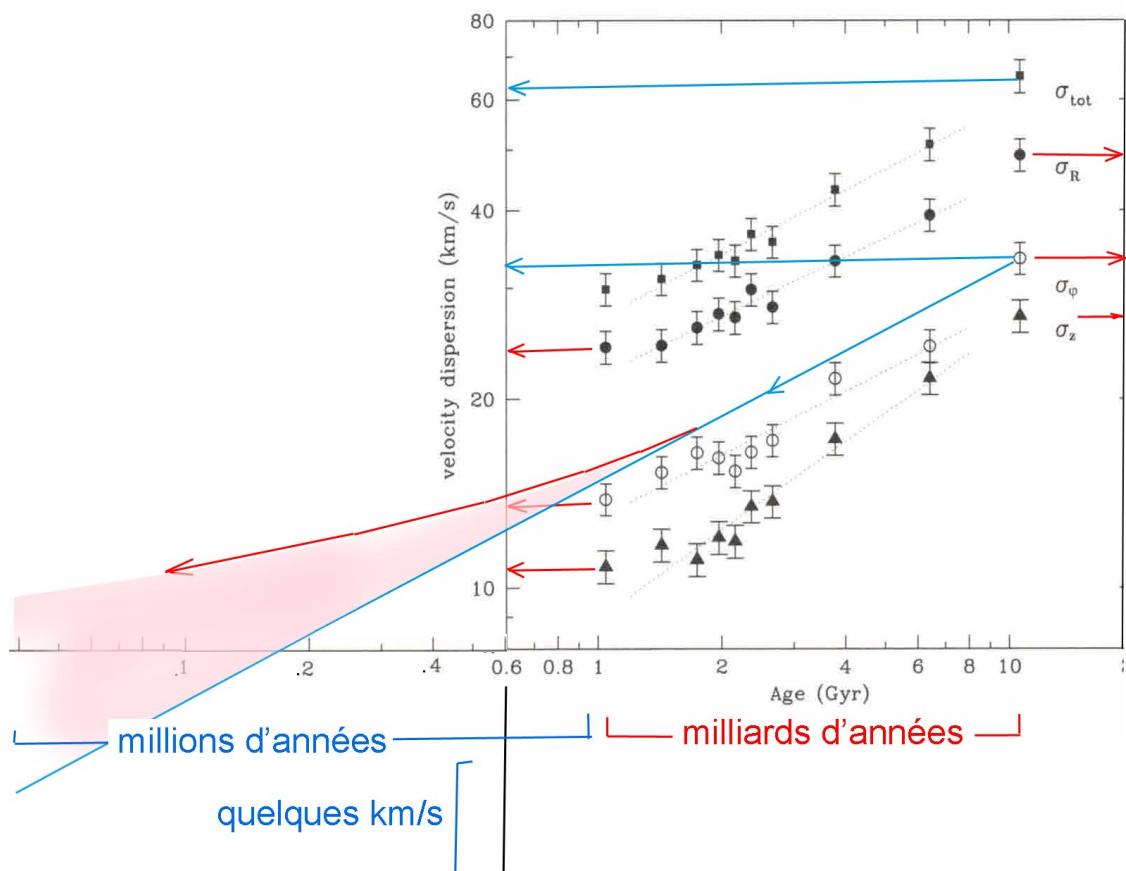


Fig.16 : Extrapolation de cette courbe

Les données auraient des chances de se trouver dans la partie rosée. Qualitativement, plus on remonterait dans le passé des étoiles et plus leurs vitesse résiduelle diminuerait. Jusqu'à quelle limite ?

Jusqu'à une vitesse correspondant au niveau de turbulence du gaz interstellaire au sein duquel elles se sont formées, niveau qui correspond à une « vitesse d'agitation des éléments du gaz interstellaire » qui est de l'ordre de quelques kilomètres par seconde. Ainsi ce « gaz d'étoiles primitif » serait « encore plus froid » au moment de sa création. Il y aurait donc transfert d'énergie depuis une autre source que le milieu stellaire, puisque celui-ci est « non collisionnel ».

Ce transfert d'énergie correspond aux interactions entre les jeunes étoiles et les grumeaux constituant le gaz interstellaire.

Qui dit vitesse d'agitation thermique dit pression. La « pression » au sein de ce « gaz d'étoiles jeunes » s'accroît et le chiffre important est la dispersion des vitesses perpendiculaires au plan de symétrie de la galaxie. Immédiatement après leur formation, si on considérait une sous-population représentée par les étoiles qui viennent juste de se former, leur vitesse résiduelle se chiffre en quelques kilomètres par seconde, synonyme d'une « pression » très faible. On peut alors assimiler cette population aux .. anneaux de Saturne (qui forment alors un ensemble à « pression » nulle). Au fur et à mesure que les interactions avec les grumeaux de gaz vont « chauffer » ce gaz d'étoiles celles-ci quitteront le plan diamétral de la galaxie, où elles se sont formées. Progressivement elles iront peupler l'ellipsoïde aplati occupé par les vieilles étoiles.

Je fais cette digression pour montrer que la dynamique des galaxies est quelque chose d'assez complexe.

La « déviation du vertex », ne semble pas évoquée dans le Binney et Tremaine. J'avoue que je n'ai pas eu le courage de rechercher cette donnée dans les huit cent et quelques pages de l'ouvrage. Pourtant c'est une donnée-clé du problème. Déviation par rapport à quoi ? à quelle direction qui serait considérée comme « standard » ? C'est par rapport à la distance radiale. Ceci étant on ne sait pas construire ces distributions en d'autres lieux que le voisinage du Soleil.

Mais cela nous indique que la fonction de distribution est très éloignée de l'état d'équilibre local. Donc, impossible de recourir aux équations classiques de la mécanique des fluides, aux équations de Navier-Stokes. Il faut alors se battre sur l'équation de Vlasov, alias l'équation de Boltzmann sans collision (avec second membre nul). Dans cette équation : la fonction de distribution de la vitesse, en tant qu'inconnue. Voir le livre de Binney et Tremaine page 275. Nous ne détaillerons pas l'établissement de cette équation de Vlasov. Elle se présente, dans le référentiel

$$(x, y, z, u, v, w, t)$$

où $\vec{r} = (x, y, z)$ est le vecteur position et $\vec{v} = (u, v, w)$ le vecteur vitesse par rapport à un point fixe de l'espace.

Dans ce qui suivra nous utiliserons les notation suivantes.

Quand il s'agit d'une lettre maigre c'est un *scalaire* :

$$f, t, u, v, w, C, , U, V, W, k$$

Quand c'est une lettre grasse c'est un *vecteur* :

$$\mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{C}$$

Le potentiel gravitationnel sera désigné par la lettre Grecque majuscule Ψ . Le potentiel créé par une masse m sera :

$$\Psi = -\frac{G m}{r}$$

Le champ gravitationnel est égal à 'opposé du gradient de ce potentiel.

Considérons une dérivée partielle. S'il n'y a pas de lettre grasse c'est un scalaire.
Exemple :

$$\frac{\partial f}{\partial t}$$

Mais si une lettre grasse est présente au dénominateur c'est un gradient :

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \quad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} \\ \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial f}{\partial w} \end{pmatrix} \quad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{C}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial U} = \frac{\partial f}{\partial u} \\ \frac{\partial f}{\partial V} = \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial f}{\partial W} = \frac{\partial f}{\partial w} \end{pmatrix}$$

Le champ gravitationnel \mathbf{g} est égal à l'opposé du gradient du potentiel gravitationnel :

$$\mathbf{g} = -\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{r}}$$

Quand deux vecteur (lettres grasses a et b) seront séparés par un point il s'agira d'un produit scalaire :

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Si un vecteur gradient est séparé d'un vecteur par un point il s'agira d'une divergence :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

Si on trouve deux vecteurs juxtaposés, sans être séparés par un point il s'agira d'un **dyadique**¹. Nous allons faire largement usage de l'algèbre des dyadiques.

Pour télécharger l'ouvrage de référence :

<http://www.jp-petit.org/books/Chapman-et-Cowling.pdf>

On aura :

$$\mathbf{a} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_x b_x & a_x b_y & a_x b_z \\ a_y b_x & a_y b_y & a_y b_z \\ a_z b_x & a_z b_y & a_z b_z \end{pmatrix}$$

On aura à gérer des dyadiques particuliers. L'un est formé à partir des composantes (U, V, W) du vecteur vitesse résiduelle C. C'est le dyadiques :

$$\mathbf{C} \mathbf{C} = \begin{pmatrix} U^2 & UV & UW \\ UV & V^2 & VW \\ UW & VW & W^2 \end{pmatrix}$$

Il y aura également le dyadique :

$$\mathbf{r} \mathbf{r} = \begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & yz \\ xz & yz & z^2 \end{pmatrix}$$

Le gradient d'un vecteur sera un dyadique. Prenons par exemple le vecteur vitesse macroscopique $\langle v \rangle$. Son gradient sera le vecteur :

$$\frac{\partial \langle v \rangle}{\partial \mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x} & \frac{\partial \langle v \rangle}{\partial x} & \frac{\partial \langle w \rangle}{\partial x} \\ \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} & \frac{\partial \langle v \rangle}{\partial y} & \frac{\partial \langle w \rangle}{\partial y} \\ \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial z} & \frac{\partial \langle v \rangle}{\partial z} & \frac{\partial \langle w \rangle}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Produit d'un dyadique par un vecteur

Il sera figuré par un point :

¹ Alias la représentation matricielle du produit tensoriel de deux vecteurs $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$

$$ab \cdot c$$

Produit scalaire de dyadiques (ou de matrices)

Soient deux matrices M_{ij} et N_{ij}

Ce produit sera :

$$\boxed{M : N = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 M_{ij} N_{ji}}$$

Théorèmes donnés sans démonstration :

$$(a \cdot b) c \equiv b c \cdot a$$

$$(a \cdot b) c \equiv c (a \cdot b) \equiv c a \cdot b$$

donc :

$$b c \cdot a \equiv c a \cdot b$$

$$(ab \cdot c) \cdot d \equiv ab \cdot cd$$

$$(a \cdot b)(c \cdot d) \equiv ac \cdot bd \equiv ad \cdot bc$$

Ces théorèmes vont nous permettre de traiter matriciellement certaines expressions. Prenons par exemple :

$$\left(\frac{\partial \langle v \rangle}{\partial r} \cdot C \right) \cdot \frac{\partial f}{\partial C} \equiv C \frac{\partial f}{\partial C} : \frac{\partial \langle v \rangle}{\partial r}$$

Cette notation matricielle et l'usage de théorèmes permettent de représenter des expressions complexes de manière beaucoup plus compacte. Ainsi l'expression ci-dessus, développée, deviendrait :

$$u \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x} + u \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} + u \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial z}$$

$$+ v \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial \langle v \rangle}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial \langle v \rangle}{\partial y} + v \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial \langle v \rangle}{\partial z}$$

$$+ w \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial \langle w \rangle}{\partial x} + w \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial \langle w \rangle}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial \langle w \rangle}{\partial z}$$

Grâce à ces notations matricielles compactes on peut plus aisément voir « ce qu'on manipule ».

L'équation de Vlasov

Quand la fonction de distribution des vitesses s'écarte notablement de la symétrie sphérique, ce qui n'est possible que dans un milieu où les collisions peuvent être négligées, la fonction de distribution f est alors solution d'une équation proposée par le mathématicien russe A.A. Vlasov. Cette équation s'obtient en annulant le second membre de l'équation de Boltzmann :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{collisions}}$$

\mathbf{F} représente la force agissant sur les particules. Le second membre représente la façon dont les collisions modifient la fonction de distribution des vitesses. C'est une intégrale. L'équation de Boltzmann est donc une équation intégro-différentielle. Celle-ci a été proposée en 1872. Quelle date attribuer à l'équation de Vlasov ?

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0$$

Une recherche m'a fait atterrir sur un site en russe. C'est une équation « récente » au sens où cette problématique a été proposée par le Russe A.A.Vlasov en 1938, article suivi d'une autre publication en 1945. Vlasov est intéressé par la physique des plasmas. On sait qu'on crée facilement ces plasmas dans des gaz sous pression basse (les « tubes à vide » des « lampes radio » de l'époque). Le milieu est alors un mélange ternaire de trois « espèces ». Si on parle de gaz rares, monoatomiques :

- Les atomes neutres
- Les électrons libres
- Les ions.

En pression suffisamment basse et avec un chauffage modéré du « gaz d'électrons » par un champ électrique on peut même négliger l'existence d'atomes neutres. Le milieu peut être considéré comme « totalement ionisé ».

Les physiciens de l'époque ont donc tenté de comprendre les phénomènes à l'œuvre dans ce milieu raréfié. L'outil était la théorie cinétique des gaz, appliquée aux plasmas. Le titre de l'article de Vlasov², publié dans le journal russe de physique théorique est :

- *Au sujet de propriétés vibratoires du gaz d'électrons.*

² А. А. Власов. О вибрационных свойствах электронного газа // Журнал экспериментальной и теоретической физики. — 1938. — Т. 8 (3). — С. 291.

Il est suivi en 1945 d'un autre article³ intitulé :

- *La théorie des propriétés vibratoires du gaz électronique et ses applications*

Le rapport avec l'astrophysique théorique a été proposé par S. Chandrasekhar en 1942 dans son ouvrage, paru aux éditions Dover :

Principles of stellar dynamics

Le lecteur retrouvera dans ce qui va suivre une démarche similaire à celle de l'Indien, à la différence que les calculs mettent en jeu l'algèbre dyadique, ce qui les allège énormément.

Ce sont S.Chapman et T.G.Cowling qui ont utilisé les ressources de l'algèbre dyadique dans leur approche de la théorie cinétique des gaz. J'ai déjà cité leur ouvrage, paru en 1939 (Cambridge University Press), intitulé

The Mathematical Theory of Non Uniform Gases

Telle qu'elle est écrite plus haut, l'équation de Vlasov se réfère aux coordonnées

(t , x , y , z , u , v , v)

Dans ce qui suivra nous utiliserons sa forme lorsqu'on fait intervenir la vitesse macroscopique $\langle v \rangle$ et la vitesse d'agitation thermique (résiduelle) C. Je ne reproduirai pas le calcul qui permet d'arriver à ce résultat. Les lecteurs intéressés le trouveront au chapitre 3 de l'ouvrage⁴ , pages 48 , équation (3.12.2).

Pour alléger l'écriture nous écrirons :

$$\langle v \rangle = c_o$$

On introduit alors l'opérateur :

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{c}_o \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}$$

L'équation s'écrit alors :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{C} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{c}_o \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \left(\frac{\mathbf{F}}{m} - \frac{D\mathbf{c}_o}{Dt} \right) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{C}} - \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{C} \right) : \left(\frac{\partial \mathbf{c}_o}{\partial \mathbf{r}} \right) = 0$$

Le dernier terme fait intervenir deux matrices dyades :

³ А. А. Власов. Теория вибрационных свойств электронного газа и её приложения // Уч. зап. МГУ. — 1945. — Вып. 75. Кн. 2. Ч. 1.

⁴ Téléchargeable à partir de mon site à l'adresse :
<http://www.jp-petit.org/books/Chapman-et-Cowling.pdf>

$$\frac{\partial f}{\partial C} C \text{ et } \frac{\partial c_o}{\partial r}$$

et représente le produit scalaire de ces deux matrices.

La force est la force gravitationnelle mg dérivant du potentiel Newtonien Ψ :

$$\mathbf{g} = -\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{r}}$$

On peut diviser cette équation par f et elle devient :

$$\boxed{\frac{\partial \ln f}{\partial t} + \mathbf{C} \cdot \frac{\partial \ln f}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{c}_o \cdot \frac{\partial \ln f}{\partial \mathbf{r}} - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{r}} + \frac{D \mathbf{c}_o}{Dt} \right) \cdot \frac{\partial \ln f}{\partial C} - \left(\frac{\partial \ln f}{\partial C} \mathbf{C} \right) : \left(\frac{\partial \mathbf{c}_o}{\partial \mathbf{r}} \right) = 0}$$

C'est sous cette forme que nous l'utiliserons pour effectuer une recherche de solution, en l'associant à l'équation de Poisson.

Lien entre l'équation de Boltzmann et les équations de Navier-Stockes

Ce qui est remarquable c'est que ces équations « contiennent », implicitement, des équations macroscopiques.

Faisons une rapide digression avec l'équation de Boltzmann.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{C} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{c}_o \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \left(\frac{\mathbf{F}}{m} - \frac{D \mathbf{c}_o}{Dt} \right) \cdot \frac{\partial f}{\partial C} - \left(\frac{\partial f}{\partial C} \mathbf{C} \right) : \left(\frac{\partial \mathbf{c}_o}{\partial \mathbf{r}} \right) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_e$$

Dans le second membre se trouve un terme qui se présente sous la forme d'une intégrale pris dans l'espace des vitesses, de la forme :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_e = \iiint (\text{quelque chose}) \, du \, dv \, dw$$

Ceux qui en seront curieux pourront aller voir dans le Chapman et Cowling la forme de ce terme. C'est page 63, équation (3.52,9).

Cet « opérateur intégral » a une propriété. Il existe des fonctions de la vitesse C qui sont :

$$F_1 = 1 \quad ; \quad F_2 = \mathbf{C} \quad ; \quad F_3 = C^2$$

telles que :

$$\iiint F_1 (\text{quelque chose}) \, du \, dv \, dw = 0$$

$$\iiint F_2 (\text{quelque chose}) \, du \, dv \, dw = 0$$

$$\iiint F_3(\text{quelque chose}) \, du \, dv \, dw = 0$$

Compte tenu de nos notations on voit que la seconde équation est vectorielle et est en fait :

$$\iiint U(\text{quelque chose}) \, du \, dv \, dw = 0$$

$$\iiint V(\text{quelque chose}) \, du \, dv \, dw = 0$$

$$\iiint W(\text{quelque chose}) \, du \, dv \, dw = 0$$

Signification physique de ces fonctions : il suffit de rajouter un coefficient devant :

$$m F_1 = m \text{ c'est la masse}$$

$$m F_2 = m \mathbf{C} \text{ c'est l'impulsion (quantité de mouvement)}$$

$$\frac{1}{2} m F_3 = \frac{1}{2} m C^2 \text{ c'est l'énergie}$$

Les relations intégrales signifient simplement que les collisions conservent, globalement, la masse , l'impulsion et l'énergie.

On pourra donc appliquer cela au premier membre et écrire :

$$m \iiint \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{C} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{c}_o \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \left(\frac{\mathbf{F}}{m} - \frac{D\mathbf{c}_o}{Dt} \right) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{C}} - \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{C} \right) : \left(\frac{\partial \mathbf{c}_o}{\partial \mathbf{r}} \right) \right] \, du \, dv \, dw = 0$$

Cette équation nous donne la première équation de Navier-Stokes, qui traduit la conservation de la masse :

$$\frac{Dn}{Dt} + n \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{c}_o = 0$$

De manière plus familière, en posant $\rho = nm$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

En formant :

$$m \iiint \mathbf{C} \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{C} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{c}_o \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \left(\frac{\mathbf{F}}{m} - \frac{D\mathbf{c}_o}{Dt} \right) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{C}} - \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{C} \right) : \left(\frac{\partial \mathbf{c}_o}{\partial \mathbf{r}} \right) \right] \, du \, dv \, dw = 0$$

on exprime que dans les collisions il y a conservation du moment cinétique, de l'impulsion $m\mathbf{C}$. On pourrait donc s'attendre à retrouver la seconde équation de Navier-Stockes. Mais l'équation qui en découle est plus générale

Dans l'équation de Navier-Stockes on trouve une grandeur p appelée pression. Mais qu'est-ce que la pression exercée sur une membrane ? C'est le résultat des chocs des molécules sur celles-ci. Or si dans une équation nous voyons apparaître une pression sous la forme d'un scalaire p cela traduit, localement, l'hypothèse d'un état « hydrostatique » des contraintes. Cela nous ramène à l'expérience évoquée plus haut, où le gaz est pendant un très court instant et sur une très faible distance « hors d'équilibre » c'est à dire loin de l'équilibre thermodynamique local.

Ce phénomène avait été mis en équilibre en disposant à la paroi un très fin film métallique qui, au passage du gaz, n'accusait aucun échauffement, celui-ci ne pouvant découler que des chocs des atomes contre ce film, liés à la température de celui-ci, au phénomène d'agitation thermique. Or, pendant tout ce temps où le gaz est loin de son état d'équilibre thermodynamique local cette vitesse d'agitation se réduit à une composante dirigée parallèlement à la paroi.

Quid de la pression dans ce milieu ?

On ne peut alors proposer qu'une « expérience de pensée ». Imaginons que nous puissions mettre dans ce fluide, en l'accompagnant dans son mouvement, une « capsule barométrique » c'est à dire une membrane qui subira une force consécutive des chocs qu'elle subira. Si le fluide était dans l'état d'équilibre thermodynamique local cette force serait indépendante de l'orientation de la membrane. Mais dans le gaz du fluide situé immédiatement en aval de l'onde de choc ça ne sera plus le cas.

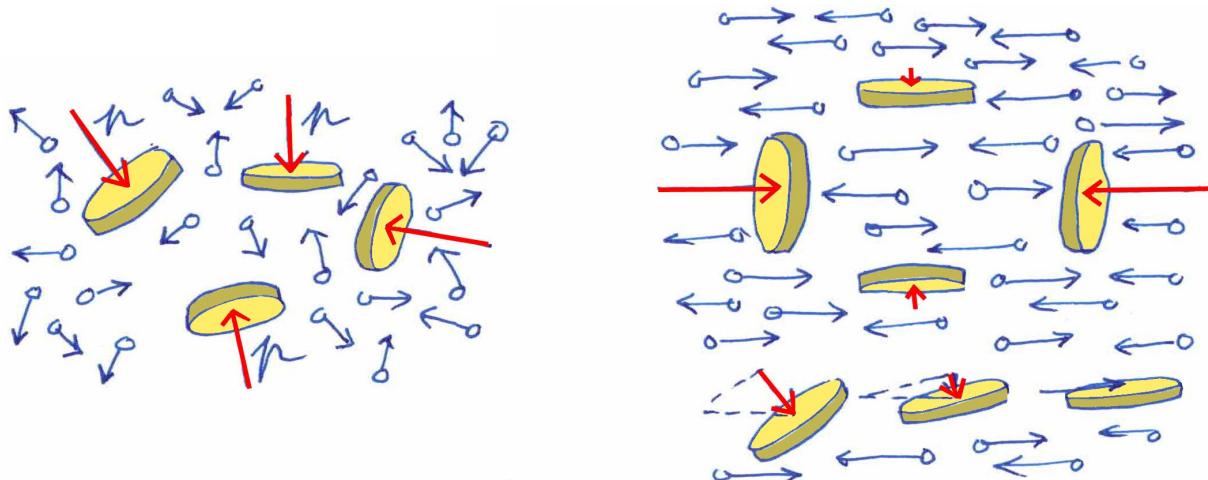


Fig.17 : Capsule barométrique

A gauche, capsule barométrique immergée dans un gaz à l'état d'équilibre local. La composante normale de la force exercée sur la membrane, la « pression », la flèche rouge, a une valeur identique quelle que soit l'orientation de celle-ci. A droite cette composante normale de cette force varie avec l'orientation de la membrane. Quand la paroi est parallèle à l'écoulement du fluide, cette composante est nulle.

Comment traduire cela mathématiquement ?

Commençons par la figure de gauche. Introduisons un vecteur unitaire normal à la paroi de la membrane que nous appellerons \vec{v} . Soit s la surface de la membrane. Nous pouvons introduire le vecteur $\vec{s} = s \vec{v}$. L'état « hydrostatique de contrainte de pression », de la figure de gauche, se traduit par :

$$\vec{F} = p \vec{s}$$

En divisant la force par la surface de la membrane nous obtenons le vecteur pression, perpendiculaire à la surface de la capsule (colinéaire au vecteur normal \vec{v}).

$$\vec{p} = p \vec{v}$$

ou p est un scalaire.

Introduisons la matrice unité :

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nous écrirons :

$$\vec{p} = p \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} \times \vec{v}$$

De nos cours de physique nous nous rappelons que

$$p = n k T$$

Mais nous avons vu plus haut (dans le cas d'une fonction de distribution de Maxwell-Boltzmann correspondant à l'état d'équilibre thermodynamique local) que

$$\frac{3}{2} k T = \frac{1}{2} m \langle C^2 \rangle = \frac{1}{2} m [\langle U^2 \rangle + \langle V^2 \rangle + \langle W^2 \rangle]$$

On en tire

$$\langle U^2 \rangle = \langle V^2 \rangle = \langle W^2 \rangle = \frac{k T}{m}$$

On peut écrire :

$$\vec{p} = p \vec{v} = n m \begin{pmatrix} \langle U^2 \rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle V^2 \rangle & 0 \\ 0 & 0 & \langle W^2 \rangle \end{pmatrix} \times \vec{v}$$

On a donc une matrice, pour le moment proportionnel) la matrice unité, que nous appellerons « matrice-pression » ou « tenseur de pression ». Utilisons pour un moment cette notation :

$$\vec{\bar{p}} = nm \begin{pmatrix} < U^2 > & 0 & 0 \\ 0 & < V^2 > & 0 \\ 0 & 0 & < W^2 > \end{pmatrix}$$

La force qui s'exerce sur la membranes est alors :

$$\vec{p} = \vec{\bar{p}} \times \vec{s}$$

Que se passe-t-il dans le cas de la figure de droite, où l'agitation thermique ne se manifeste plus que dans une seule direction, par exemple U. La matrice devient :

$$\vec{\bar{p}} = nm \begin{pmatrix} < U^2 > & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors :

$$\vec{p} = nm \begin{pmatrix} < U^2 > & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \vec{v}$$

Si vous repérez le vecteur \vec{v} avec un angle :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

Vous exprimerez matriciellement la valeur des composantes de la force s'exerçant sur la membrane selon son orientation.

Si le fluide est dans un état quelconque le tenseur de pression s'écrira, sous sa forme la plus générale :

$$\vec{\bar{p}} = nm \begin{pmatrix} < U^2 > & < UV > & < UW > \\ < UV > & < V^2 > & < WW > \\ < UW > & < VW > & < W^2 > \end{pmatrix}$$

C'est une matrice symétrique, mais les composantes de sa diagonale principale ne sont plus automatiquement égaux.

Revenons à l'expression de la conservation de l'impulsion via l'équation de Boltzmann :

$$m \iiint C \left[\frac{\partial f}{\partial t} + C \cdot \frac{\partial f}{\partial r} + c_o \cdot \frac{\partial f}{\partial r} + \left(\frac{F}{m} - \frac{Dc_o}{Dt} \right) \cdot \frac{\partial f}{\partial C} - \left(\frac{\partial f}{\partial C} C \right) : \left(\frac{\partial c_o}{\partial r} \right) \right] du dv dw = 0$$

On obtient, voir le Chapman et Cowling page 51, équation (3.21,3)

$$\frac{\vec{\partial}}{\partial r} \cdot \vec{p} - \rho \left(\vec{F} - \frac{D\vec{c}_o}{Dt} \right) = 0$$

Le formalisme de l'équation de Boltzmann introduit quelque chose en plus : le fait que le milieu puisse être hors de l'état d'équilibre thermodynamique local.

Si on calcule, à l'aide du troisième invariant collisionnel l'intégrale :

$$\frac{1}{2} m \iiint C^2 \left[\frac{\partial f}{\partial t} + C \cdot \frac{\partial f}{\partial r} + c_o \cdot \frac{\partial f}{\partial r} + \left(\frac{F}{m} - \frac{Dc_o}{Dt} \right) \cdot \frac{\partial f}{\partial C} - \left(\frac{\partial f}{\partial C} C \right) : \left(\frac{\partial c_o}{\partial r} \right) \right] du dv dw = 0$$

On obtiendra l'équation traduisant la conservation de l'énergie cinétique, voir le livre de Chapman et Cowling page 51, équation (3.21,5)

$$\frac{3}{2} nk \frac{DT}{Dt} + \vec{p} : \frac{\vec{\partial} \vec{c}_o}{\partial r} + \frac{\vec{\partial}}{\partial r} \cdot \vec{q} = 0$$

Le premier représente la façon dont s'accroît (ou décroît) la température absolue T du fluide quand on l'accompagne dans son mouvement (dérivée « particulaire » $\frac{D}{Dt}$). Le

troisième terme représente la divergence du vecteur flux de chaleur (ce qui entre mons ce qui sort). Le second terme retiendra toute notre attention. C'est le produit scalaire de deux matrices, la matrice pression \vec{p} et la matrice dyade composée à l'aide du vecteur « nabla » $\vec{\nabla} = \frac{\vec{\partial}}{\partial r}$ et du vecteur vitesse macroscopique $\vec{c}_o = <\vec{v}>$. Ce terme :

$$\vec{p} : \frac{\vec{\partial} \vec{c}_o}{\partial r}$$

représente le travail des forces de pression. Là vous réalisez la puissance de cette notation dyadique pour la mécanique des fluides : un seul terme au lieu de neuf.

Bien. Il s'agissait de l'équation de Boltzmann, pas de l'équation de Vlasov, dont le second membre est égal à zéro.

Solution Maxwellienne de l'équation de Vlasov.

Comme on l'a déjà montré plus haut, la fonction de distribution Maxwellienne donne :

$$\ln f^o = Cst + \ln \frac{n}{T^{3/2}} - \frac{mC^2}{2kT}$$

Ce qui nous donne :

$$\frac{\partial \ln f^o}{\partial t} = \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{mC^2}{2kT^2} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{3}{2T} \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \ln f^o}{\partial r} = \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial r} + \frac{mC^2}{2kT^2} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{3}{2T} \frac{\partial T}{\partial r}$$

En régime stationnaire :

$$\frac{\partial \ln f^o}{\partial C} = - \frac{m}{kT} C$$

Si nous introduisons tout cela dans notre équation de Vlasov, écrite en terme de vitesse résiduelle (vitesse d'agitation thermique) :

$$\frac{D \ln f}{Dt} + C \cdot \frac{\partial \ln f}{\partial r} - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{Dc_o}{Dt} \right) \cdot \frac{\partial \ln f}{\partial C} - \left(\frac{\partial \ln f}{\partial C} C \right) \cdot \left(\frac{\partial c_o}{\partial r} \right) = 0$$

Nous obtiendrons un polynôme de degré trois en fonction des composants (U, V, W) de cette vitesse. Examinons ses différents termes.

Le premier donne :

$$\frac{D \ln f}{Dt} = \frac{D}{Dt} \left[\text{Log} \left(\frac{n}{T^{3/2}} \right) \right] - \frac{mC^2}{2k} \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{T} \right)$$

Soit un terme d'ordre zéro et un d'ordre 2 :

Terme suivant :

$$C \cdot \frac{\partial \ln f}{\partial r} = C \cdot \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial r} + \frac{mC^2}{2kT^2} \frac{\partial T}{\partial r} \cdot C$$

soit un terme d'ordre un et un terme d'ordre trois.

Terme suivant :

$$- \left(\frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{Dc_o}{Dt} \right) \cdot \frac{\partial \text{Log} f}{\partial C} = \frac{m}{kT} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial r} \cdot C \right) + \frac{m}{kT} \left(\frac{Dc_o}{Dt} \cdot C \right)$$

Soit deux termes d'ordre unité.

Passons au dernier terme :

$$-\left(\frac{\partial \ln f}{\partial C} C\right) : \left(\frac{\partial c_o}{\partial r}\right) = \frac{m}{kT} (CC) : \left(\frac{\partial c_o}{\partial r}\right)$$

Soit deux termes d'ordre deux.

Nous n'avons qu'un unique terme d'ordre trois $\frac{mC^2}{2kT^2} \frac{\partial T}{\partial r} \cdot C$.

Son annulation entraîne que :

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial r} = 0}$$

Le milieu n'est pas nécessairement homogène et isotrope, mais il est isotherme. La température est la même partout.

Il nous reste à regrouper les termes d'ordre zéro, un et deux:

Termes d'ordre zéro :

$$\frac{D}{Dt} \left[\ln \left(\frac{n}{T^{3/2}} \right) \right] = \frac{1}{n} \frac{Dn}{Dt} - \frac{3}{2T} \frac{dT}{dt} = 0$$

Termes d'ordre un :

$$C \cdot \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial r} - \frac{m}{kT} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial r} \cdot C \right) - \frac{m}{kT} \left(\frac{Dc_o}{Dt} \cdot C \right) = 0$$

qui donne :

$$\frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial r} - \frac{m}{kT} \frac{\partial \Psi}{\partial r} - \frac{m}{kT} \left(\frac{\partial c_o}{\partial t} + c_o \cdot \frac{\partial c_o}{\partial r} \right) = 0$$

Termes d'ordre deux :

$$CC : \frac{\partial c_o}{\partial r} + \frac{C^2}{2T} \frac{dT}{dt} = 0$$

On a :

$$\mathbf{CC} = \begin{pmatrix} U^2 & UV & UW \\ UV & V^2 & VW \\ UW & VW & W^2 \end{pmatrix} \quad \frac{\partial \mathbf{c}_o}{\partial \mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_o}{\partial x} & \frac{\partial v_o}{\partial x} & \frac{\partial w_o}{\partial x} \\ \frac{\partial u_o}{\partial y} & \frac{\partial v_o}{\partial y} & \frac{\partial w_o}{\partial y} \\ \frac{\partial u_o}{\partial z} & \frac{\partial v_o}{\partial z} & \frac{\partial w_o}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Dans cette équation scalaire, le coefficient devant chaque dyade de \mathbf{CC} ($U^2, V^2, W^2, UV, UW, VW$) doit être nul ; d'où :

$$\frac{1}{2T} \frac{dT}{dt} + \frac{\partial u_o}{\partial x} = 0$$

$$\frac{1}{2T} \frac{dT}{dt} + \frac{\partial v_o}{\partial x} = 0$$

$$\frac{1}{2T} \frac{dT}{dt} + \frac{\partial w_o}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial v_o}{\partial x} + \frac{\partial u_o}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial w_o}{\partial y} + \frac{\partial v_o}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial u_o}{\partial z} + \frac{\partial w_o}{\partial x} = 0$$

Introduisons un vecteur unitaire $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$

Ce système a pour solution exacte :

$$\boxed{\mathbf{c}_o = -\frac{1}{2T} \frac{dT}{dt} \mathbf{r} + \omega_{(t)}(\mathbf{k} \wedge \mathbf{r})}$$

On pose : $\phi = \ln \frac{1}{\sqrt{T}}$ ainsi :

$$\mathbf{c}_o = \dot{\phi} \mathbf{r} + \omega_{(t)}(\mathbf{k} \wedge \mathbf{r})$$

Ce champ de vitesse est donc la superposition de deux champs.

- Une vitesse radiale $\dot{\phi} \mathbf{r}$ proportionnelle au module r de la distance au centre du système, variant avec le temps.

- Une rotation en corps solide $\omega_{(t)}(\mathbf{k} \wedge \mathbf{r})$, autour de l'axe défini par le vecteur \mathbf{k} avec une vitesse angulaire variant également au fil du temps

Réécrivons ce que nous avions obtenu :

Termes d'ordre zéro :

$$\boxed{\frac{1}{n} \frac{Dn}{Dt} = \frac{3}{2T} \frac{dT}{dt}}$$

Termes d'ordre unité :

$$\frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial r} + \frac{m}{kT} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{m}{kT} \left(\frac{\partial \mathbf{c}_o}{\partial t} + \mathbf{c}_o \cdot \frac{\partial \mathbf{c}_o}{\partial r} \right) = 0$$

Termes d'ordre deux :

$$\frac{\partial \mathbf{c}_o}{\partial t} = \ddot{\phi} \mathbf{r} + \dot{\omega} (\mathbf{k} \wedge \mathbf{r})$$

On va orienter le vecteur \mathbf{k} selon $oz : \mathbf{k} = (0, 0, 1)$

$$\mathbf{c}_o = \dot{\phi} \mathbf{r} + \omega (\mathbf{k} \wedge \mathbf{r}) = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} \quad \frac{\partial \mathbf{c}_o}{\partial r} = \dot{\phi} \mathbf{I} + \begin{pmatrix} 0 & \omega & 0 \\ -\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{c}_o \cdot \frac{\partial \mathbf{c}_o}{\partial r} = \dot{\phi}^2 \mathbf{r} + 2\dot{\phi}\omega (\mathbf{k} \wedge \mathbf{r}) - \vec{\rho} \omega^2$$

avec : $\vec{\rho} = (x, y, 0)$ (je n'ai pas de lettre Grecques grasses)

$$\frac{\partial \mathbf{c}_o}{\partial t} + \mathbf{c}_o \cdot \frac{\partial \mathbf{c}_o}{\partial r} = (\ddot{\phi} + \dot{\phi}^2) \mathbf{r} + (\dot{\omega} + 2\dot{\phi}\omega) (\mathbf{k} \wedge \mathbf{r}) - \vec{\rho} \omega^2$$

L'équation d'ordre 1 devient :

$$\frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial r} + \frac{m}{kT} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{m}{kT} [(\ddot{\phi} + \dot{\phi}^2) \mathbf{r} + 2\dot{\phi}\omega (\mathbf{k} \wedge \mathbf{r}) - \vec{\rho} \omega^2] = 0$$

Qu'on écrit :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left\{ \ln n + \frac{m\Psi}{kT} \right\} = -\frac{m}{kT} \left[(\ddot{\phi} + \dot{\phi}^2) \mathbf{r} + (\dot{\omega} + 2\dot{\phi}\omega) (\mathbf{k} \wedge \mathbf{r}) - \vec{\rho} \omega^2 \right]$$

Le premier membre est un gradient. Il faut que le second membre le soit aussi, ce qui implique :

$$\dot{\omega} + 2\dot{\phi}\omega = 0$$

$$\frac{d}{dt} [\ln \omega] = \frac{d}{dt} [\ln T]$$

$$\boxed{\omega \propto T}$$

$$\ln n + \frac{m\Psi}{kT} = -\frac{m}{kT} \left[(\ddot{\phi} + \dot{\phi}^2) \frac{r^2}{2} - \frac{1}{2} \rho^2 \omega^2 \right] + \varphi(t)$$

$$\boxed{n(r,t) = n_o(t) e^{-\frac{m}{kT} \left[\Psi(r,t) + (\ddot{\phi} + \dot{\phi}^2) \frac{r^2}{2} - \frac{1}{2} \rho^2 \omega^2 \right]}}$$

En injectant cela dans l'équation de Poisson (avec pour le moment une seule espèce) :

$$\Delta \Psi = 4\pi G m n_o(t) e^{-\frac{m}{kT} \left[\Psi(r,t) + (\ddot{\phi} + \dot{\phi}^2) \frac{r^2}{2} - \frac{1}{2} \rho^2 \omega^2 \right]}$$

On peut envisager quelques cas particuliers.

Distribution Maxwellienne stationnaire à symétrie sphérique.

$$\frac{d^2\Psi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\Psi}{dr} = 4\pi G \rho_o e^{-\frac{m\Psi}{kT}}$$

Solution présentée par Chandrasekahar en 1942. On prend comme conditions initiale

$$\text{En } r=0 : \quad \Psi = 0 \quad \frac{d\Psi}{dr} = 0 \quad \frac{d^2\Psi}{dr^2} = 4\pi G \rho_o$$

$$\text{Se rappeler que } \frac{kT}{m} = \frac{1}{2} < C^2 >$$

Voilà la forme de la courbe de densité obtenue par Chandrasekhar :

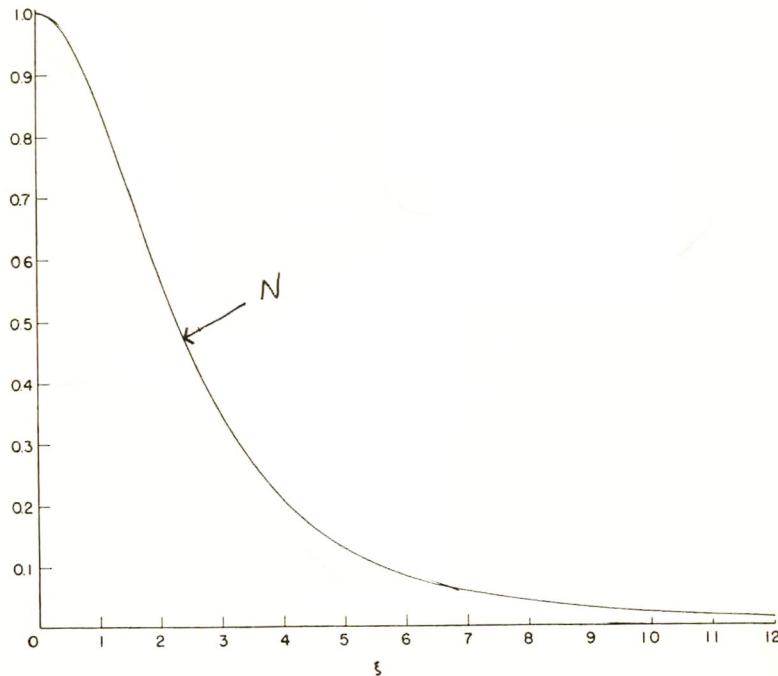


FIG. 25.—The isothermal distribution for globular clusters.

Fig.18 : Evolution de la densité, solution Maxwellienne (Chandrasekhar)

Il espérait, grâce à cette solution exacte, pouvoir décrire la distribution de masse dans un amas globulaire, ou une galaxie sphéroïdale. Sou sa forme adimensionnelle l'équation peut être écrite :

$$\Psi'' + \frac{2}{r}\Psi' = e^{-\Psi}$$

Cette solution admet la solution mathématique :

$$e^{-\Psi} = n = \frac{1}{r^2} \rightarrow \Psi = \text{Log } 2 + 2 \text{Log } r \rightarrow \Psi' = \frac{2}{r} \rightarrow \Psi'' = -\frac{2}{r^2}$$

Elle saurait prétendre à constituer un modèle puisque la densité est infinie à l'origine. Mais elle donne le comportement de l'objet à grande distance. On peut alors calculer la masse de cet objet.

Considérons un angle solide $d\Omega$. A une distance r il dessine sur la sphère un élément de surface d'aire $r^2 d\Omega$. Considérons deux sphères de rayon r et $r + dr$. L'élément de volume correspondant est $r^2 d\Omega$. On peut calculer le nombre de *points masses* entre une sphère de rayon r_0 et l'infini. On obtient l'intégrale :

$$N = \int_{r_0}^{\infty} \frac{1}{r} r^2 d\Omega dr = 4\pi \int_{r_0}^{\infty} \frac{1}{r} r^2 dr = \infty$$

La masse de cet objet tend vers l'infini.

Ceci étant, imaginons que nous adjoignions à cet objet à symétrie sphérique un disque plat de gaz, ne représentant qu'un apport négligeable vis à vis du potentiel. Le champ gravitationnel $g = -\Psi' = -\frac{2}{r}$. Dans le disque de gaz, constitué de particule « à température nulle », où les vitesses d'agitation thermique sont insignifiantes, la force centrifuge est en $\frac{V^2}{r}$ où V est la vitesse d'orbitation circulaire. Si on écrit que la force centrifuge équilibre la force de gravité on a alors une vitesse V constante, ne dépendant pas de la distance au centre. Vous découvrez au passage l'origine de l'idée de l'Israélien Mordechaï Milgrom, pour expliquer la forme en plateau des courbes de rotation des galaxies, en périphérie, et pourquoi il propose un champ de gravitation qui passe de $\frac{1}{r^2}$ à $\frac{1}{r}$ partir d'une certaine distance, dans les galaxies.

Distribution Maxwellienne instationnaire, milieu homogène

L'équation de Poisson est :

$$\Delta \Psi = 4\pi G m n_o(t) e^{-\frac{m}{kT} \left[\Psi(r,t) + (\ddot{\phi} + \dot{\phi}^2) \frac{r^2}{2} \right]}$$

On a :

$$n(t) = n_o(t) e^{-\frac{m}{kT} \left[\Psi(r,t) + (\ddot{\phi} + \dot{\phi}^2) \frac{r^2}{2} \right]}$$

Il faut donc que :

$$\Psi(r,t) = -(\ddot{\phi} + \dot{\phi}^2) \frac{r^2}{2}$$

L'équation :

$$\frac{1}{n} \frac{Dn}{Dt} = \frac{3}{2T} \frac{dT}{dt}$$

devient :

$$\frac{d}{dt} \ln n = \frac{3}{2} \frac{d}{dt} \ln T$$

ou :

$$\rho T^{3/2} = \text{Cst}$$

L'évolution est *isentropique*. (restera à définir plus loin ce qu'on appelle l'entropie).

Calculons : $\Delta \Psi = \frac{d^2 \Psi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\Psi}{dr} = -3(\ddot{\phi} + \dot{\phi}^2) = 4\pi G m n$

On avait posé :

$$\phi = \text{Log} \frac{1}{\sqrt{T}}$$

Nous allons faire intervenir une longueur caractéristique R telle que le volume R^3 ne contienne qu'un particule de masse m. Donc :

$$n = \frac{1}{R^3} \rightarrow \frac{d}{dt} \ln n = -3 \frac{d}{dt} \ln R = -3 \frac{\dot{R}}{R}$$

Mais :

$$\frac{d}{dt} \ln n = \frac{3}{2} \frac{d}{dt} \ln T$$

$$\dot{\phi} = -\frac{1}{2T} \dot{T}$$

$$\frac{d}{dt} \ln n = \frac{3}{2} \frac{d}{dt} \ln T = -3\dot{\phi} = -3 \frac{\dot{R}}{R}$$

Donc :

$$\dot{\phi} = \frac{\dot{R}}{R} \rightarrow \ddot{\phi} = \frac{\ddot{R}}{R} - \frac{\dot{R}^2}{R^2} \rightarrow \ddot{\phi} + \dot{\phi}^2 = \frac{\ddot{R}}{R}$$

$$n = \frac{1}{R^3} = \frac{-3(\ddot{\phi} + \dot{\phi}^2)}{4\pi G m} = \frac{-3}{4\pi G m} \frac{\ddot{R}}{R}$$

D'où l'équation différentielle du seconde ordre :

$$R^2 \ddot{R} + \frac{3}{4\pi G m} = 0$$

qui n'est rien d'autre que ... l'équation de la cosmologie de Friedmann. C'est d'ailleurs comme cela que je l'ai découverte, à la fin des années soixante, en cherchant la solution instationnaire Maxwellienne pour un milieu uniforme.

Signification :

Un cosmos en état d'équilibre thermodynamique évolue selon l'équation de Friedmann.

Cet état correspond à l'entropie maximale. Mais qu'est-ce que l'entropie ?

L'entropie en théorie cinétique des gaz.

Soit f la fonction de distribution, solution de l'équation de Boltzmann ou de Vlasov.

L'entropie (par unité de volume) est définie par :

$$S(r, t) = -k \iiint f \log f \, du \, dv \, dw$$

où k est la constante de Boltzmann. Cette intégrale est prise dans l'espace des vitesses.

Bien sûr, pour un système contenu dans un domaine physique D , son entropie sera :

$$S(t) = -k \int_D dx dy dz \iiint f \log f \, du \, dv \, dw$$

Elle variera dans le temps Si vous voulez en savoir plus, référez-vous au chapitre 4, page 67 du livre de Chapman et Cowling.

Mon propos, dans cette sorte de cours, n'est pas de vous donner un cours complet de théorie cinétique des gaz. Pour cela vous n'aurez qu'à télécharger le livre de Chapman et Cowling. Le concept d'entropie et d'irréversibilité est introduit en 1885 par le physicien allemand Rudolf Clausius. Boltzmann donne à cette idée une formulation de microphysique, à travers sa fonction de distribution, en 1872. En fait il propose une « fonction H » :

$$H(r, t) = \iiint f \log f \, du \, dv \, dw$$

qui n'est autre que l'entropie, à un coefficient près et changée de signe. Il envisage l'évolution d'un système de particules enfermée dans une enceinte isolé et constituant un système isotherme. Ce système va cependant évoluer, compte tenu de conditions initiales. L'équation d'évolution est alors :

$$\frac{df}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_e$$

Dans le premier membre il ne subsiste que la dérivée par rapport au temps. Dans le second membre se trouve le terme collisionnel (avec l'indice e pour « encounters »). Voir l'expression de cette loi d'évolution dans le Chapman et Cowling page 67 équation (4.1,1) et sa fonction H , équation (4.1,2). La suite comporte la démonstration de l'inéluctable décroissance de cette « fonction H » (donc la croissance de l'entropie). La fonction H étant bornée, doit tendre vers une valeur minimale (et l'entropie vers une

valeur maximale). Ceci correspond à la fonction de distribution de Maxwell-Boltzmann (4.1,10), qui annule au passage le second membre de l'équation.

A l'époque de Boltzmann la controverse faisait rage entre les tenants de la théorie atomiste, corpusculaire de la matière et leurs opposants. Ces derniers critiquaient l'existence d'atomes en disant que cette vision de la matière était imprégnée d'idées empruntées à l'antiquité (Démocrite). C'était à leur sens une idée plus philosophique que physique. Les grandeurs macroscopiques, formant un champ continu, étaient les seules capables de décrire par exemple l'état d'un gaz. Considérant un élément de gaz donné, supposé immobile dans une enceinte parfaitement calorifugée, la donnée de sa densité et de sa température suffisait à le décrire, dans la mesure où ce milieu n'était le siège d'aucune évolution relevant de la chimie.

Boltzmann montrait que ce même gaz pouvait exister selon différentes configurations avec des formes de la fonction de distribution des vitesses différentes mais telles que celles-ci conduisaient à des valeurs identiques pour la densité :

$$n = \int_{U=-\infty}^{U=+\infty} \int_{V=-\infty}^{V=+\infty} \int_{W=-\infty}^{W=+\infty} f dU dV dW$$

Le milieu étant macroscopiquement immobile, la vitesse $v(x,y,z)$ des particules se confond avec la vitesse d'agitation $C(U,V,W)$.

On peut alors calculer la vitesse quadratique moyenne selon :

$$\langle C^2 \rangle = \frac{1}{n} \int_{U=-\infty}^{U=+\infty} \int_{V=-\infty}^{V=+\infty} \int_{W=-\infty}^{W=+\infty} (U^2 + V^2 + W^2) f dU dV dW$$

Et en déduire la température absolue par :

$$\frac{3}{2} k T = \frac{1}{2} m \langle C^2 \rangle$$

Ce que disait Boltzmann c'est qu'il pouvait exister une infinité de configurations initiales différentes des molécules de ce gaz, ayant mêmes valeurs de la densité et de la température.

Ces distributions des vitesses devraient alors évoluer très rapidement jusqu'à s'identifier avec la fonction de Maxwell-Boltzmann, minimisant la fonction H (maximisant l'entropie s). Dans cette évolution l'air sous la courbe, équivalant à la densité n , reste constante.

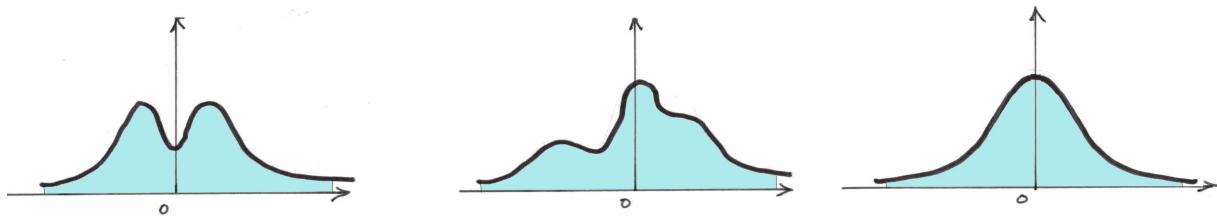


Fig.19 : Evolution d'une fonction de distribution des vitesses

Une évolution qui échappait alors aux adversaires de la vision atomiste de la matière. Le temps caractéristique d'évolution était alors le temps de libre parcours.

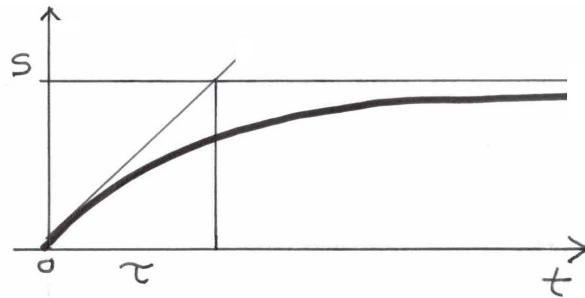


Fig.20 : Evolution de l'entropie

Le théorème H de Boltzmann marque une date dans l'histoire des sciences car il remplace le second principe par un théorème. Cette fonction H est par ailleurs conceptuellement mesurable. Imaginons une table de billard « parfaite », avec des parois parfaitement réfléchissantes. On y place un grand nombre de billes d'acier et on crée un état initial quelconque. Un appareil photographique permet de mesurer à tout instant la position et la vitesse des billes (leur déplacement pendant un temps d'obturation connu). A partir de ces données on peut calculer l'entropie H à tout moment. Si on dispose de deux photons, on pourra déterminer l'antériorité de l'une par rapport à l'autre si elle possède une entropie plus faible. On a donc accès à l'écoulement du temps. Cette idée est illustrée sur une de mes bandes dessinées, le Chronologicon⁵:

⁵ <http://www.savoir-sans-frontieres.com/JPP/telechargeables/Francais/LE%20CHRONOLOGICON.pdf>

PROLOGUE

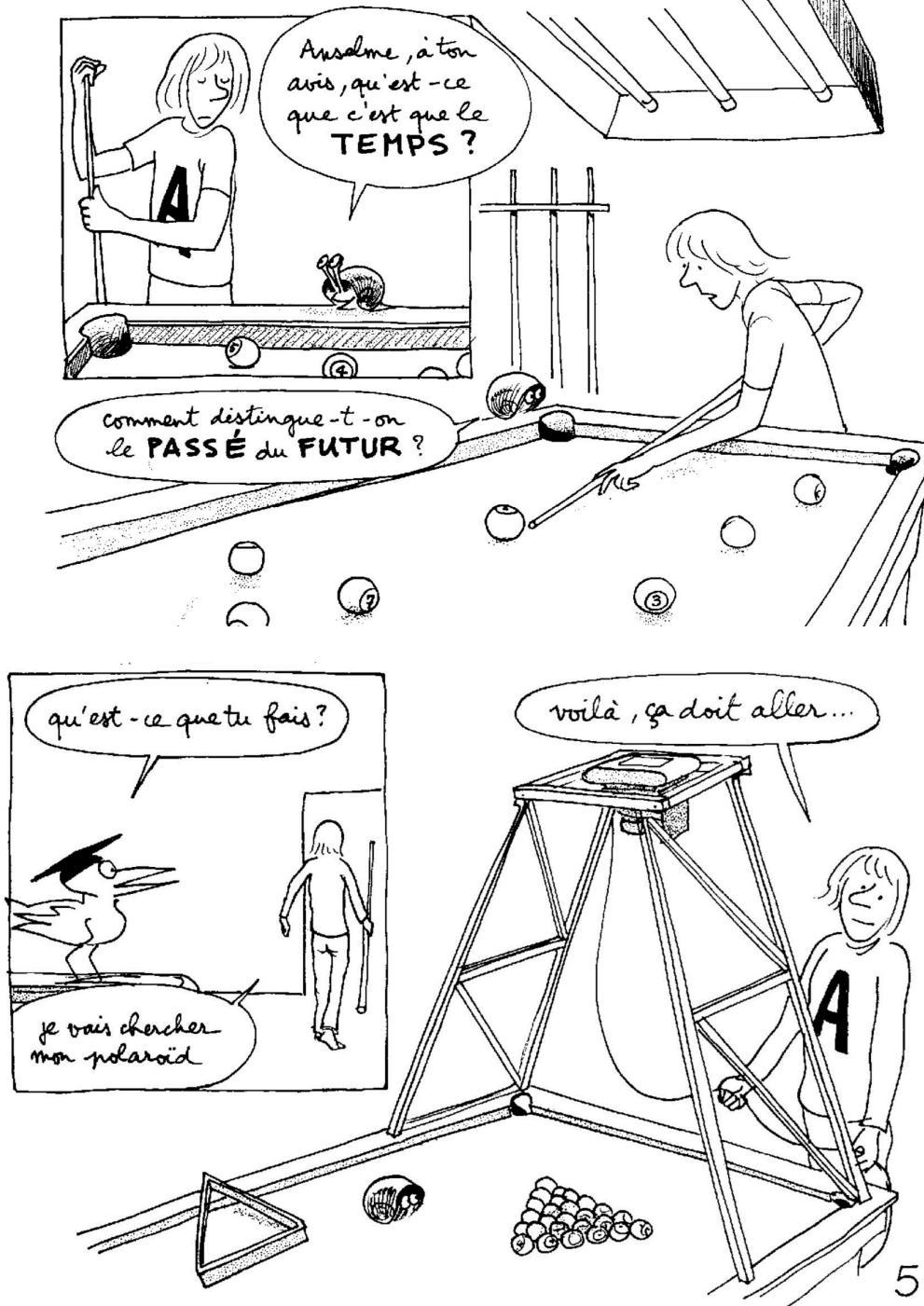


Fig. 21 A et 21 B : Dessins extraits du Chronologicon

Quid de l'entropie d'un système stellaire ? C'est à dire d'un système de points-masses régi par le couple équation de Vlasov – équation de Poisson.

On peut calculer l'entropie. Mais comment celle-ci pourrait-elle varier puisqu'il n'y a pas de collisions, d'échanges entre couples de particules, d'étoiles ?

On remarquera que la dynamique de la population stellaire n'est pas indépendant du reste du contenu cosmique des galaxies légères, c'est à dire du fin disque de gaz situé dans le plan diamétral. Au passage la géométrie de ce disque est celle d'un ... disque microsillon. On a vu que les vitesses d'agitation, les « vitesses résiduelles » des étoiles différaient selon leur âge, celle des étoiles jeunes étant plus faibles. Elles se voient donc communiquer de l'énergie cinétique en croisant les grumeaux de gaz, de diamètre et de masse variée composant le disque.

Quid des étoiles anciennes, celles qui emplissent un ellipsoïde aplati. Elles traversent le fine couche gazeuse « de temps e temps » mais cela ne les affectent guère. Il y a par ailleurs des galaxies où ce gaz interstellaire est absent, qui ne sont peuplées que de vieilles étoiles. Si elles ne tournent pas sur elles-mêmes, elles affectent alors une forme sphéroïdale. Selon leur mouvement de rotation, cette sphère se mue en ellipsoïde plus ou moins aplati.

Il n'est pas question évidemment d'avoir accès aux vitesses d'agitation des étoiles dans ces ensembles, ni de mettre en évidence la forme de leur « ellipsoïde des vitesses résiduelles ». C'est au-delà de nos capacités d'observation. Conceptuellement, si nous pouvions avoir accès à ces données, il nous serait possible de calculer l'entropie de tels systèmes de points-masses, toujours régi par le couple « Equation de Vlasov-Equation de Poisson ».

La théorie amènerait alors à la conclusion que cette entropie ne varie pas et que ce n'est pas à travers cet outil conceptuel que nous pouvons concevoir un schéma évolutif de ces galaxies.

Sur le simple plan de la physique mathématique, quel serait alors le fil conducteur donnant le schéma évolution de systèmes de points-masses autogravitants et isolés ?

En d'autres termes, quel est le mécanisme qui fait que ces systèmes échangent quantité de mouvement et énergie, puisqu'il n'y a pas de phénomènes collisionnels en leur sein.

La réponse :

Les vecteurs de tels échanges sont les ondes de densité qui peuvent y prendre naissance.

Dans les années soixante dix les théoriciens ont imaginé que ces ondes de densité pourraient prendre naissance lorsque deux galaxies passent suffisamment près l'une de l'autre. Des simulations numériques ont permis de reconstituer le phénomène. L'objet-type est alors « la galaxie des chiens de chasse », découverte en par l'astronome Charles Messier en 1773 :



Fig. 22 : La galaxie des chiens de chasse

Elle est située à 27 millions d'années lumière de notre galaxie, la Voie Lactée (la plus proche est la galaxies d'Andromède, située à 2,5 millions d'années lumière).

En voyant cette image on serait tenté de penser que cette galaxie serait gigantesque. Mais non, elle a le même diamètre que la nôtre : 100.000 années lumière, avec la même masse. Dans le bestiaire galactique les « galaxies spirales » se classent parmi les « galaxies légères » avec une population de quelque centaines de milliards d'étoiles et une masse de quelques centaines de milliards de masses solaires (un milliard d'étoiles pour Andromède, avec un diamètre de 220 millions d'années-lumière).

Les « galaxies elliptiques » ont des masses de un à deux ordres de grandeur plus important. Exemple la galaxie M 87 (2000 milliards de masses solaires).

Revenons à M 51. Elle possède un compagnon, une mini-galaxie, qui croise sa route au sein de l'amas qui les abrite. Les simulations numériques ont permis de faire apparaître des ondes de densité qui traduisent la réaction de M 51 vis à vis de la perturbation du champ gravitationnel issue de l'approche de ce compagnon. Ces ondes de densité sont les lieux de plus forte densité d'étoiles. En affectant le gaz interstellaire ceci suscite en son sein la naissances d'étoiles, qui émettent alors aussitôt dans l'ultra-violet. Ce rayonnement excite les atomes et molécules du gaz interstellaire qui réemettent par phénomène de fluorescence. C'est cette lumière que l'on voit sur la photo. Elle ne correspond pas à l'amplitude réelle de l'onde de densité. Elle n'est que son révélateur.

Quand les théoriciens ont eu en main ces simulations ils se sont dit :

- *Voilà l'origine des structures spirales. Elles sont la conséquence d'interactions entre galaxies porteuses de gaz !*

Mais l'observation met en évidence ces structures dans des galaxies trop éloignées de leurs voisines pour connaître ces interactions. Par ailleurs ces études par simulations numériques ont montré que, quand on introduisait « à la main » une structure spirale, celle-ci disparaissait en quelques tours. Françoise Combes a imaginé que cette structure était la conséquence d'un apport d'hydrogène froid. Mais il a été impossible de mettre en évidence l'existence de masses d'hydrogène froid entre les galaxies. Au contraire, le milieu intergalactique est extrêmement chaud, à des millions de degrés, ce qu'a révélé son analyse par captation dans la bande des rayons X.

Actuellement les théoriciens ont opté pour l'idée selon laquelle ces structures spirales seraient « réactivées » périodiquement par un phénomène inconnu.

En 1992 nous avons reconstitué le phénomène par simulation et obtenu une spirale barrée stable sur un intervalle de temps équivalent à l'âge de l'univers.

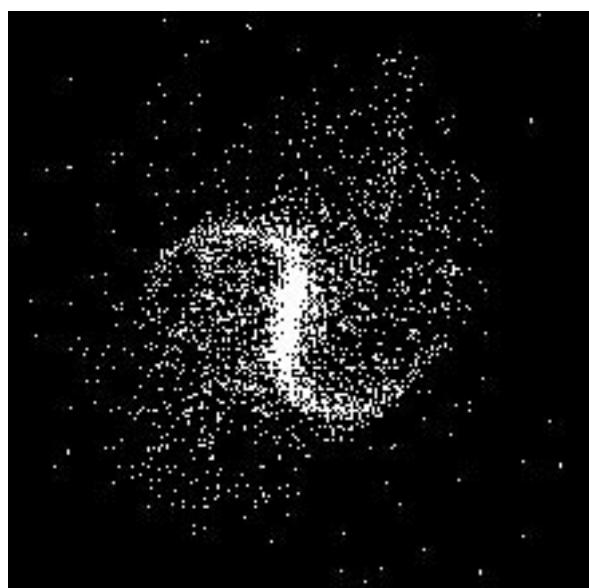


Fig.23 : Notre galaxie numérique

Cette stabilité était un résultat tout à fait remarquable mais dans le milieu personne ne daigna s'intéresser à ce résultat. Nous ne parvinmes pas non plus à publier ce résultat, l'article ayant été rejeté par toutes les revues spécialisées avec comme simple réponse :

- *Sorry, we don't publish speculative works ...*

Cette structure était due à l'interaction entre l'ensemble de points-masses et un environnement de masse négative, assurant son confinement, solution d'un système mettant en jeu deux équations de Vlasov couplées par l'équation de Poisson, qui sera l'objet du présent mémoire.

Cette digression est simplement là pour montrer comment le système des points-masses (positives) échange de l'énergie avec son environnement, alors qu'il n'y a pas de collisions. L'échange procède grâce à l'apparition d'ondes de densité, dans les deux milieux. La simulation faisait état d'un fort ralentissement dans la phase initiale. Ci après la courbe donnant le moment cinétique de la galaxie.

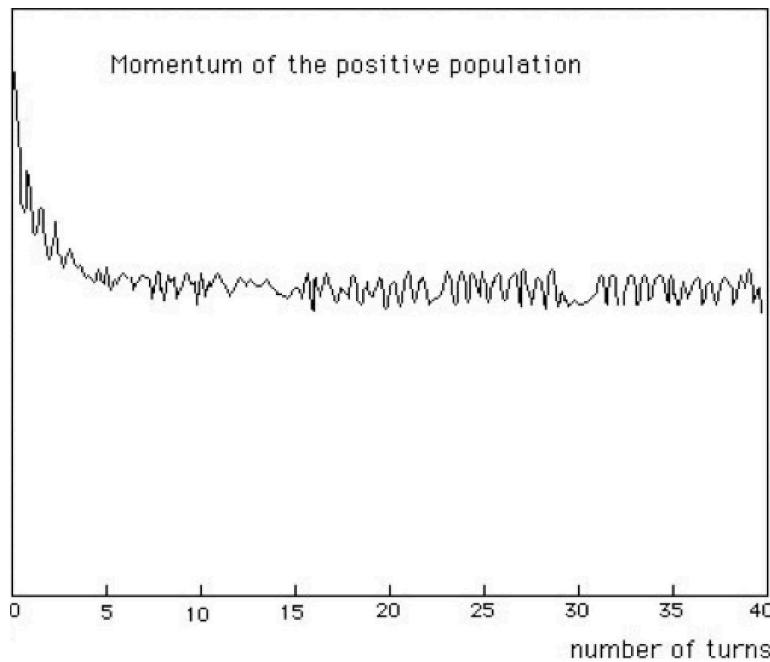


Fig.24 : Evolution du moment cinétique de la galaxie

Les systèmes non collisionnels peuvent ainsi évoluer par échange d'énergie et de quantité de mouvement, en faisant naître en leur sein des ondes de densité. Ces ondes n'ont de raison d'être que s'il y a un milieu avec lequel interagir. Comme ce second milieu n'était pas pris en charge dans les simulations, les ondes ... disparaissaient. Mais on peut penser que quand les théoriciens auront réalisé cela ils envisageront une interaction entre les galaxies et un halo de matière sombre ...

Système autogravitant Maxwellien avec rotation.

Nous avons l'équation de Poisson :

$$\Delta \Psi = 4\pi G m \rho_o e^{-\frac{m}{kT} [\Psi(r,t) - \frac{1}{2} \rho^2 \omega^2]}$$

Nous savons que la rotation s'effectue alors en corps solide, à une vitesse angulaire ω constante. Le champ de température est également uniforme. Le potentiel gravitationnel, le champ gravitationnel et la densité peuvent se déduire du calcul numérique associée à une représentation de l'équation de Poisson en coordonnées cylindriques :

$$u = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^2} + \frac{1}{u} \frac{\partial \Psi}{\partial u} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 4\pi G \rho$$

C'est une question sur laquelle nous reviendrons plus loin.

Enfin il reste un problème à envisager.

Champ gravitationnel dans un milieu homogène, stationnaire.

Densité et température uniforme. Que reste-t-il ? A priori l'équation de Poisson :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 4\pi G \rho \quad \text{ou} \quad \Delta \Psi = 4\pi G \rho$$

est constant, donc le second membre est constant. Le premier membre doit l'être aussi. Il faut donc que le potentiel gravitationnel soit « non-constant », sinon le premier membre serait nul. Cherchons une solution à symétrie sphérique :

$$\frac{d^2 \Psi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\Psi}{dr} = 4\pi G \rho$$

Solution :

$$\Psi = a r^2 \rightarrow \Psi' = 2a r \rightarrow \Psi'' = 2a \rightarrow a = \frac{4\pi G \rho}{3}$$

D'où un champ gravitationnel, radial, attractif :

$$\mathbf{g} = -\frac{8\pi G \rho}{3} \mathbf{r}$$

Un champ qui pointe vers l'origine des coordonnées, a priori quelconque. Qu'est-ce donc que cette diablerie ?

Eh oui c'est absurde. Par ailleurs l'équation de Poisson est linéaire et se prête ainsi à une superposition de solutions. On pourrait ainsi se demander quel serait le champ gravitationnel dans une lacune ménagée « dans une lacune de la matière sombre ». L'idée, pour calculer cela, serait de superposer, quelque part, à une distribution uniforme de matière sombre, de masse positive, une sphère remplie d'une matière de masse équivalente, de signe opposé.

Effectivement si on considère une sphère remplie d'une masse de densité négative, en suivant l'équation de Poisson on aura une solution identique donnant un champ gravitationnel, de signe opposé (répulsif) :

$$\frac{d^2\Psi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\Psi}{dr} = 4\pi G \rho^{(-)}$$

$$\mathbf{g}^{(-)} = -\frac{8\pi G \rho^{(-)}}{3} \mathbf{r} = \frac{8\pi G \rho^{(+)}}{3} \mathbf{r}$$

L'équation étant linéaire je peux superposer les deux potentiels et les deux champs et ... le champ dans ma lacune est donc nul !

J'ai adressé en novembre 2020 un papier résolvant ce paradoxe, à la revue Physical Letters A intitulé :

Gravitational field in a dark matter gap.

J'espère qu'elle enverra mon papier à un referee et ne fera pas comme d'autres revues, renvoyer l'article sans effectuer cette expertise. Je rendrai compte de l'issue de la démarche, que je ne peux évoquer ici, car il relève du matériel mathématique de la relativité Générale. Il faut se demander d'où vient l'équation de Poisson.

Dans ce mémoire je m'adresse aux lecteurs niveau mathématiques spéciales. Ils connaissent l'équation de Poisson de l'électromagnétisme.

$$\Delta V + \frac{\rho_e}{\epsilon_0} = 0$$

Le potentiel électrique V est newtonien, en $1/r$. Le champ électrique s'exprime donc sous la forme du gradient du potentiel. Au numérateur de la fraction figure la densité locale de charge électrique. On calcule alors la flux du vecteur champ électrique à travers une surface fermée. Puis on joue sur le fait que le flux à travers la surface fermée est égale à la divergence du vecteur. Or la divergence d'un gradient c'est le Laplacien du potentiel, etc. D'où cette belle équation.

Le potentiel gravitationnel est aussi Newtonien, en $1/r$ et le champ gravitationnel en $1/r^2$. On imagine donc qu'on va pouvoir refaire le même calcul, avec un changement de signe qui vient du fait qu'une charge électrique positive, agissant sur une charge de même signe donne une force de répulsion, alors qu'en gravitation la force est attractive. D'où le

$$\Delta \Psi = 4\pi G \rho$$

Où est l'os ? ...

C'est l'infini qui nous joue des tours. En électromagnétisme la présence d'une densité de charge électrique n'est qu'un phénomène local. A l'infini, et même simplement « au loin » cette charge est nulle.

La charge électrique de l'univers ne peut être qu'égale à strictement zéro. Pourquoi ? Parce que si elle était non nulle l'univers exploserait immédiatement, sous l'effet d'une force de répulsion 10^{39} fois plus forte que la force de gravitation. Personne ne se soucie donc de calculer le champ électrique dans une distribution uniforme de charge électrique. Tout change en gravitation.

Pour résoudre le paradoxe il faut donc remonter à la véritable source de l'équation de Poisson la linéarisation de l'équation d'Einstein. On s'aperçoit alors qu'il est impossible de définir le potentiel gravitationnel dans un milieu uniforme. Le champ gravitationnel est donc nul dans ce milieu de masse volumique uniforme. C'est ce que je montre dans l'article soumis à Physical Letters A. Affaire à suivre.

&&& Si j'ai le temps je rajouterais ici la solution Maxwellienne exacte, instationnaire, avec rotation en corps solide, que nous avions publiée au Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, Monnet et moi, en 1975⁶, intitulée

Entropie maximale et univers tournants.

Nous allons maintenant passer à ce qui constitue le véritable but du présent travail : construire le premier modèle de galaxie en tant que solution exacte d'un ensemble constitué par

- *Deux équations de Vlasov (pour les masses positives et les masses négatives)*
- *L'équation Poisson assurant le couplage.*

A propos de l'ellipsoïde des vitesses : Quand la galaxie se forme, elle résulte de l'implosion d'une masse de gaz, qui de toute façon ne pourrait être totale du fait qu'il existe toujours un certain mouvement de rotation, synonyme de turbulence. L'équation dynamique n'est donc pas celle de Friedmann, mais celle d'Heckman et Sücking, que nous avions retrouvée et publié en 1972 au Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris. De toute façon le processus est dissipatif. Il y a rebond, mais limité. Durant ce processus des collisions interviennent, qui se traduisent par des redistributions de vitesses résiduelles selon des composantes non radiales, transverses.

Ces collisions seront plus importante près du centre, dans les régions plus denses. Cela cautionne mon hypothèse d'une distribution des vitesses résiduelles dont les composantes transverses tombent à zéro à grande distance. Une distribution maxwellienne au centre et quasi maxwellienne en son voisinage. De même, la loi de vitesse sera linéaire dans le noyau de la galaxie.

La solution stationnaire donne une composante de la vitesse résiduelle radiale indépendante de la distance.

⁶ http://www.jp-petit.org/papers/CRAS/cosmology_1975b.pdf

En 1942 Chandrasekhar avait étudié, analytiquement, une solution Maxwellienne de l'équation de Vlasov et trouve que la « température » du milieu (la valeur du carré de la vitesse résiduelle moyenne) était indépendante de la distance. Il avait également tracé le profil de la densité et déduit, aisément, que la masse de l'objet était infinie. Ci-après sa courbe :

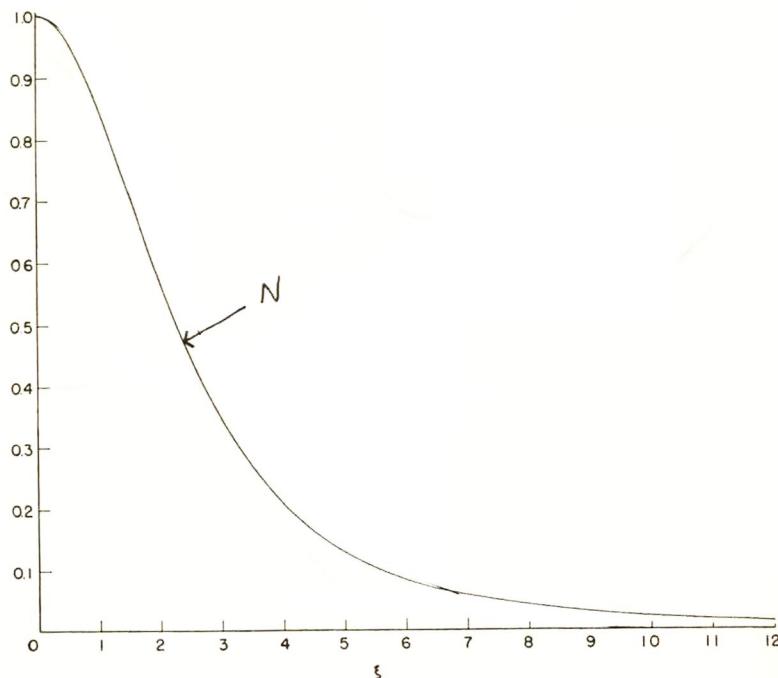


FIG. 25.—The isothermal distribution for globular clusters.

Cela correspondait à l'équation de Poisson :

$$\Psi'' + \frac{2}{r} \Psi' = e^{-\Psi}$$

Ici cette équation a été écrit sous sa forme adimensionnelle. Il importe que bien situer cette transformation. En mode dimensionnel cette équation s'écrit, en mode stationnaire et en symétrie sphérique :

$$\frac{d^2\Psi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\Psi}{dr} = 4\pi G \rho_o e^{-\frac{m\Psi}{kT_o}}$$

Le coefficient

$$\frac{m}{kT_o}$$

a la dimension de l'inverse du carré d'une vitesse V_o . L'exposant est de dimension zéro. Donc le potentiel a la dimension du carré d'une vitesse : $L^2 T^{-2} = V_o^2$

$$\text{On posera } \Psi = V_o^2 \varphi$$

On choisit $V_o = 10^4 \text{ m/s}$ (ordre des vitesses résiduelles stellaires)

On fait ensuite apparaître une longueur caractéristique L_o en posant :

$$\text{On posera } r = L_o u$$

L'équation s'écrit :

$$\frac{V_o^2}{L_o^2} \left(\frac{d^2\varphi}{du^2} + \frac{2}{u} \frac{d\varphi}{du} \right) = 4\pi G \rho_o e^{-\varphi}$$

On obtient alors une équation qui s'écrit :

$$\frac{d^2\varphi}{du^2} + \frac{2}{u} \frac{d\varphi}{du} = 4\pi G \rho_o \frac{L_o^2}{V_o^2} e^{-\varphi}$$

On va exprimer L_o en kilo parsecs en sachant que

$$1 \text{ kiloparsec} = 3 \cdot 10^{19} \text{ m}$$

$$r (\text{mètres}) = 3 \cdot 10^{19} u (\text{kiloparsec})$$

Mais je vais garder :

$$V_o = 10^4 \text{ m/s} = 10 \text{ km/s}$$

en définissant le potentiel comme des multiples de cette quantité. J'aurai ainsi :

$$\Psi (\text{exprimé en } (m/s)^2) = 10^{-8} \varphi (\text{exprimé en (dizaines de km/s)}^2)$$

Il y a quelque chose qui manque dans le traitement de Gilles. C'est la donnée « vitesse d'agitation thermique ». Si on opte pour le choix ci-dessus l'exposant c'est pas l'unité.

Il faut introduire le coefficient V_{th} (qui est un nombre) selon :

$$\sqrt{\frac{kT_o}{k}} = V_{th} \times V_o = V_{th} \times 10^4 (\text{mètres/s})$$

Alors on aura :

$$e^{-\frac{m\Psi}{kT_o}} = e^{-\frac{\varphi}{V_{th}^2}}$$

Il faut y aller progressivement. Ainsi, compte tenu des choix effectués :

$$\frac{V_o^2}{L_o^2} \left(\frac{d^2\varphi}{du^2} + \frac{2}{u} \frac{d\varphi}{du} \right) = 4\pi G \rho_o e^{-\frac{\varphi}{V_{th}^2}}$$

Maintenant nous faisons apparaître le second paramètre de la solutions :

J'introduis la valeur de référence de la masse volumique : 10^{-21} k/m^3

Cela va me permettre d'exprimer ma donnée de masse volumique à l'aide d'une quantité d'un nombre qui correspondra au registre informatique rho

(quand j'aurai deux types de masse je manipulerai rhoplus et rhomoins) . J'écrirai donc :

$$\boxed{\rho_o (\text{en } \text{k/m}^3) = \text{rhozero (sans dimension)} \times 10^{-21}}$$

Avec : $V_0 = 10^4 \text{ m/s}$ et $L_0 = 3 \cdot 10^{19} \text{ mètres}$ (dix kiloparsecs) j'ai :

$$\left(\frac{10^4}{3 \cdot 10^{19}} \right)^2 \left(\frac{d^2\varphi}{du^2} + \frac{2}{u} \frac{d\varphi}{du} \right) = 4\pi \left(6.67 \cdot 10^{-11} \right) \text{rho} \left(10^{-21} \right) e^{-\frac{\varphi}{V_{th}^2}}$$

Ce qui s'écritra :

$$\frac{d^2\varphi}{du^2} + \frac{2}{u} \frac{d\varphi}{du} = 4\pi \left(\frac{3 \cdot 10^{19}}{10^4} \right)^2 \times \left(6.67 \cdot 10^{-11} \right) \left(10^{-21} \right) \text{rhozero} e^{-\frac{\varphi}{V_{th}^2}}$$

Soit (sauf erreur) mon équation adimensionnelle, avec ses deux paramètres d'entrée est

$$\boxed{\frac{d^2\varphi}{du^2} + \frac{2}{u} \frac{d\varphi}{du} = 7.54 \text{ rhozero} e^{-\frac{\varphi}{V_{th}^2}}}$$

où rho doit être traduit en multiples de $10^{-21} \text{ kilo/mètre cube}$

et V_{th} en multiples de 10 km/s .

Alors la solution sera exprimée en multiples de $10^8 \text{ m/s au carré}$.

Comment exploite-t-on les valeurs numériques obtenues.

Le calcul nous donne, dans le registre

$$\text{potentiel} = \frac{d\varphi}{du}$$

la valeur du potentiel, exprimé en

$(\text{dizaines de milliers de m/s})^2$ par kiloparsec

On peut alors rechercher la vitesse d'orbiration circulier. En « dimsnsionnel » :

$$\frac{(V_{\text{rot}})^2}{r} = \frac{d\Psi}{dr} \rightarrow V_{\text{rot}} = \sqrt{r \frac{d\Psi}{dr}}$$

Dans le calcul numérique la dérivée du potentiel sera dans un registre :

$$\frac{d\varphi}{du} = \text{potentiell}$$

Si je forme dans le programme la quantité présente dans le registre :

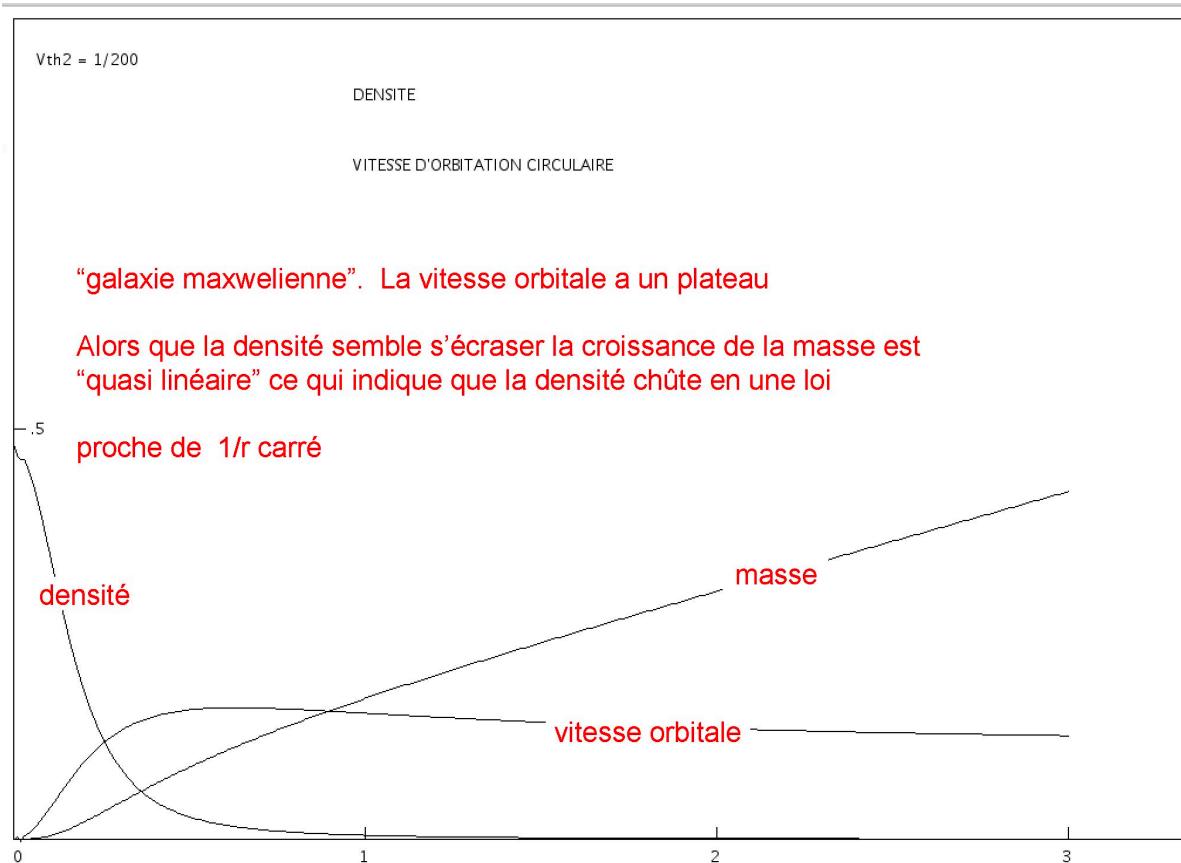
$$vtrot = \text{sqr}(u * \text{potentiel1})$$

J'obtiendrai cette valeur de la vitesse de rotation directement exprimée en dizaines de kilomètres par seconde.

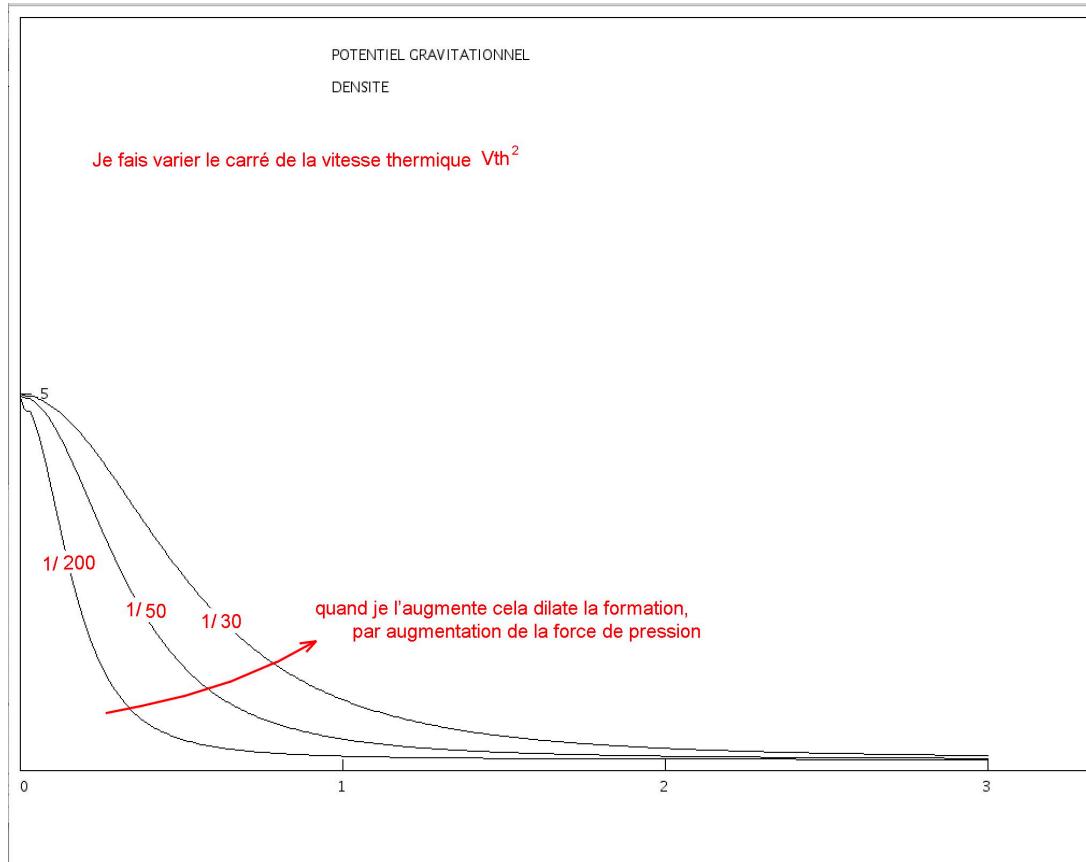
Da la même optique j'ai :

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{\varphi}{V_{th}^2}}$$

Si je fabrique le contenu de ce registre rho, les valeurs obtenue seront en multiples de $10^{-21} \text{ kilo/m}^3$



J'ai joué ensuite avec les paramètres pour en sentir les effets. Ci-après l'effet sur le profil de vitesse. Celui-ci présente un palier et c'est celui sur lequel on joue en ajoutant un halo de matière sombre.



J'ai repris et programmé ce qu'on avait initié en 1972, à savoir la distribution elliptique à symétrie sphérique.

Passons à la solution elliptique à symétrie sphérique :

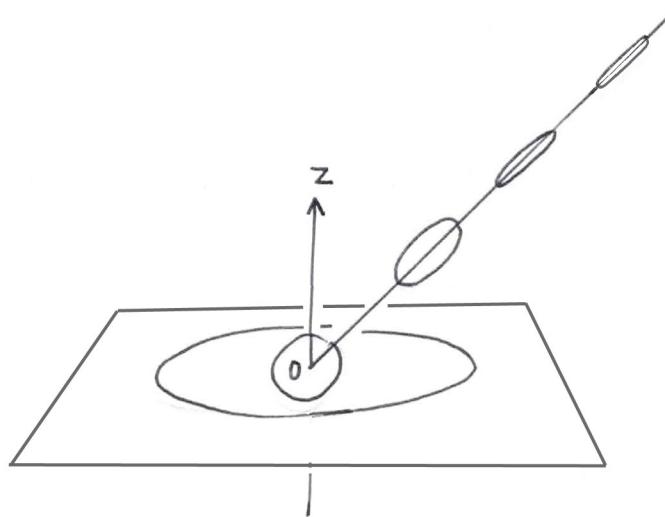


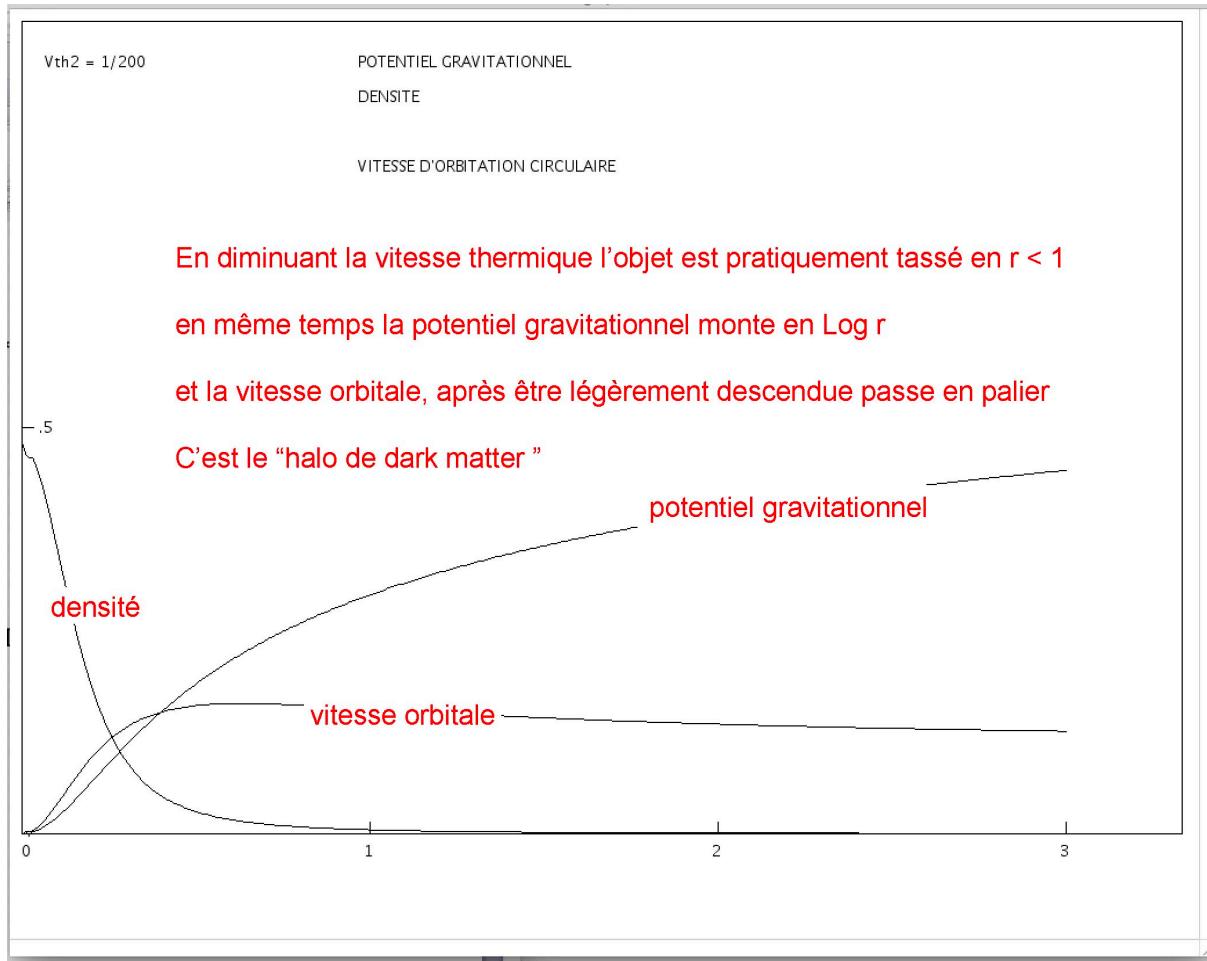
Fig.26 : Evolution de l'ellipsoïde des vitesses en fonction de la distance

$$\ln f = \ln B - \frac{m}{2kH} C^2 + a(C \cdot r)^2$$

L'équation solution est alors :

$$\boxed{\Psi'' + \frac{2}{r}\Psi' = \frac{4\pi G \rho_o}{1 + \frac{r^2}{r_o^2}} e^{-\frac{m\Psi}{kT_o}}}$$

Voilà ce que ça donne, numériquement :



Une telle solution pourrait tendre à modéliser une galaxies spéroïdale à laquelle s'ajouteraient un disque de gaz.

On voit que la masse tend toujours vers l'infini, mais « moins vite ». Ceci indique que même avec une distribution elliptique il faudra un environnement confinant de masse négative pour donner une masse finie aux galaxies en tant que solutions exactes.