$\boldsymbol{PROGRESIONES}$

1) *En una secuencia aritmética* $\boldsymbol{u_1 = 7, u_{20} = 64\ y\ u_n = 3709}$.

(*a*) *Encuentre el valor de la diferencia común.*

para esta parte conocemos:

el primer término: $u_1 = 7$

el veinteavo término: $u_{20} = 64$

para calcular la diferencia común planteamos la ecuación del término enésimo:

$$u_n = u_1 + (n-1)d$$

para: $u_{20} = 64$, *se tiene* $n = 20$

Despejamos la diferencia "d" en: $u_n = u_1 + (n-1)d$

$$quedando:\ d = \frac{u_n - u_1}{n-1}$$

reemplazando los valores tenemos:

$$d = \frac{64-7}{20-1}$$

$$d = \frac{57}{19}$$

$$\boldsymbol{d = 3}$$

(*b*) *Encuentre el valor de n.*

para esta incógnita "n", conocemos: $u_n = 3709$

aplicando la ecuación del término enesimo despejamos n: *en*

$$u_n = u_1 + (n-1)d$$

$$u_n - u_1 = (n-1)d$$

$$\frac{u_n - u_1}{d} = n - 1$$

$$n = \frac{u_n - u_1}{d} + 1$$

reemplazando los valores tenemos:

$$n = \frac{3709-7}{3} + 1$$

$$n = \frac{3702}{3} + 1$$

$$n = 1234 + 1$$

$$\boldsymbol{n = 1235}$$

$\mathbf{2)}$ $\boldsymbol{En\ una\ secuencia\ aritmética, u_1 = 2\ y\ u_3 = 8}$.

$(a)\ Encuentre\ d.$

$DATOS:$

$u_1 = 2\ (primer\ término)$

$u_3 = 8\ \ (tercer\ término)$

$n = 3\ (número\ de\ términos)$

$INCÓGNITA:$

$d =?\ \ (diferencia)$

$RESOLUCIÓN:$

$Aplican\ do\ la\ ecuación\ del\ término\ enésimo:$

$$u_n = u_1 + (n-1)d$$

$despejamos$ "d" $y\ obtenemos:$

$$d = \frac{u_n - u_1}{n-1}$$

$Reemplazando\ los\ valores\ se\ tiene:$

$$d = \frac{8-2}{3-1}$$

$$d = \frac{6}{2}$$

$$\boldsymbol{d = 3}$$

$(b)\ Encuentra\ u_{20}.$

$La\ información\ que\ tenemos\ para\ este\ literal\ es:$

$u_1 = 2\ (primer\ término)$

$u_3 = 8\ \ (tercer\ término)$

$d = 3\ \ (diferencia)$

$n = 20\ (número\ de\ términos)$

$La\ información\ reemplazamos\ en\ la\ ecuación:$

$$u_n = u_1 + (n-1)d$$

$y\ obtenemos:$

$$u_{20} = 2 + (20-1)3$$

$$u_{20} = 2 + 57$$

$$\boldsymbol{u_{20} = 59}$$

(c) *Encuentre* S_{20}.

Para hallar S_{20}, *es decir la sumatoria de los* 20 *primeros términos, aplicamos la ecuación*:

$$S_n = \frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2}$$

reemplazando la información que nos da el problema:

$u_1 = 2$ (*primer término*)

$u_3 = 8$ (*tercer término*)

$d = 3$ (*diferencia*)

$n = 20$ (*número de términos*)

quedando de la siguiente forma:

$$S_{20} = \frac{20[2(2) + (20-1)(3)]}{2}$$

$$S_{20} = 10[4 + (19)(3)]$$

$$\boldsymbol{S_{20} = 610}$$

3) *Considere la secuencia aritmética* 3, 9, 15, ..., 1353.

(a) *Escriba la diferencia común.*

La diferencia podemos encontrar restando un término de su anterior:

$$d = 15 - 9$$

$$\boldsymbol{d = 6}$$

(b) *Encuentre el número de términos en la secuencia.*

Para hallar el número de términos (n) *partimos de la ecuación del término enésimo*:

$$u_n = u_1 + (n-1)d$$

Los datos que conocemos para esta parte son:

$u_1 = 3$

$u_n = 1353$

$d = 6$

despejando (n) *en la ecuación*: $u_n = u_1 + (n-1)d$, *tenemos*:

$$n = \frac{u_n - u_1}{d} + 1$$

$$n = \frac{1353 - 3}{6} + 1$$

$$n = \frac{1350}{6} + 1$$

$$\boldsymbol{n = 226}$$

(c) *Encuentre la suma de la secuencia.*

La suma de la secuencia podemos representarla por S_{226}, *puesto el número de términos es* 226

reemplazamos la información:

$u_1 = 3$

$u_n = 1353$

$d = 6$

$n = 226$

EN

$$S_n = \frac{n[u_1 + u_n]}{2}$$

$$S_{226} = \frac{226[3 + 1353]}{2}$$

$$S_{226} = 113(1356)$$

$$\boldsymbol{S_{226} = 153228}$$

4) *Una secuencia aritmética,* $u_1, u_2, u_3, \ldots$, *tiene* $d = 11$ *y* $u_{27} = 263$.

(a) *Encuentra* u_1.

La información con la que contamos para esta parte es:

$$d = 11$$

$$u_{27} = 263$$

$$n = 27$$

Luego en la ecuación: $u_n = u_1 + (n-1)d$, *despejamos* "u_1", *y obtenemos:*

$$u_1 = u_n - (n-1)d$$

reemplazando la información tenemos:

$$u_1 = 263 - (27-1)11$$

$$u_1 = 263 - 286$$

$$\boldsymbol{u_1 = -23}$$

(b) (i) *Dado que* $u_n = 516$, *encuentre el valor de* n.

Dado que conocemos ya:

$$u_1 = -23$$

$$d = 11$$

$$u_n = 516$$

podemos calcular (n), *despejando en la ecuación:* $u_1 = u_n - (n-1)d$, *obteniendo:*

$$n = \frac{u_n - u_1}{d} + 1$$

$luego\ reemplazamos\ los\ datos\ en\ la\ ecuación\ para\ calcular\ el\ número\ de\ términos\ (n)$

$$n = \frac{516 - (-23)}{11} + 1$$

$$n = \frac{516 + 23}{11} + 1$$

$$n = \frac{539}{11} + 1$$

$$\boldsymbol{n = 50}$$

$(ii)\ Para\ este\ valor\ de\ n, encuentre\ S_n.$

$$Para\ calcular\ S_n, sabiendo\ que\ n = 50, tenemos:$$

$$u_1 = -23$$

$$d = 11$$

$$n = 50$$

$$aplicamos\ la\ ecuación: S_n = \frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2}, y\ tenemos:$$

$$S_{50} = \frac{50[2(-23) + (50-1)(11)]}{2}$$

$$S_{50} = \frac{50[-46 + (49)(11)]}{2}$$

$$S_{50} = 25(-46 + 539)$$

$$\boldsymbol{S_{50} = 12325}$$

$\boldsymbol{5)\ Los\ primeros\ tres\ términos\ de\ una\ secuencia\ geométrica\ infinita\ son\ 32, 16\ y\ 8.}$

$(a) Escriba\ el\ valor\ de\ r.$

$debido\ a\ que\ es\ una\ progresión\ geométrica, la\ razón\ podemos\ hallar\ dividiendo\ un\ término$

$entre\ su\ anterior:$

$$r = \frac{16}{32}$$

$$\boldsymbol{r = \frac{1}{2}}$$

$(b)\ Encuentre\ u_6.$

$para\ esta\ parte\ aplicamos\ la\ ecuación\ del\ término\ enésimo\ de\ una\ progresión\ geométrica:$

$$u_n = u_1 \cdot r^{n-1}$$

$$siendo\ en\ este\ caso: u_n \to u_6, \qquad n = 6, u_1 = 32$$

$$reeemplazamos\ los\ datos\ en\ la\ ecuación\ dada:$$

$$u_6 = 32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{6-1}$$

$$u_6 = 32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5}$$

$$u_6 = 32 \cdot \left(\frac{1}{32}\right)$$

$$\boldsymbol{u_6 = 1}$$

(c) *Encuentre la suma al infinito de esta secuencia.*

Aqui aplicamos la ecuación de la suma de sus términos al infinito:

$$S_n = \frac{u_1}{r-1}$$

reeemplazando la información tenemos:

$$S_\infty = \frac{32}{\frac{1}{2} - 1}$$

$$S_\infty = \frac{32}{-\frac{1}{2}}$$

$$S_\infty = -64$$

6) *El enésimo término de una secuencia aritmética viene dado por*

$$\boldsymbol{u_n = 5 + 2n}.$$

(a) *Escriba la diferencia común.*

Conocemos que:

$u_n = 5 + 2n$

luego para obtener el primer término de esta progresión tenemos que:

$$u_1 = 5 + 2(1); \quad u_1 = 7, \text{es el primer término}$$

$$u_2 = 5 + 2(2); \quad u_2 = 9, \text{es el segundo término}$$

luego la diferencia esta dada por:

$$d = 9 - 7$$

$$\boldsymbol{d = 2}$$

(b) (i) *Dado que el enésimo término de esta secuencia es* 115, *encuentre el valor de* n.

Puesto que ya conocemos:

$d = 2$

$u_1 = 7$

$u_n = 115$

podemos calcular el número de términos (n) *con*:

$$u_1 = u_n - (n-1)d, \textit{ despejando } (n) \textit{ se tiene: } n = \frac{u_n - u_1}{d} + 1$$

ahora reemplazamos la información en la ecuación:

$$n = \frac{115 - 7}{2} + 1$$

$$n = \frac{108}{2} + 1$$

$$\boldsymbol{n = 55}$$

(ii) *Para este valor de* n, *encuentre la suma de la secuencia.*

planteando la ecuación de la sumatoria de (n) *términos se tiene*:

$$S_n = \frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2}$$

Reemplazamos la información conocida, sabiendo que $n = 55$

$$S_{55} = \frac{55[2(7) + (55-1)(2)]}{2}$$

$$S_{55} = \frac{55(14 + 108)}{2}$$

$$S_{55} = \frac{6710}{2}; \quad \boldsymbol{S_{55} = 3355}$$

7) ***En una serie aritmética, el primer término es*** **−7** ***y la suma de los primeros*** **20** ***términos es*** **620**.

(a) *Encuentre la diferencia común.*

LO QUE CONOCEMOS	
$u_1 = -7$	$\rightarrow$ *el primer término*
$S_{20} = 620$	$\rightarrow$ *la sumatoria de los* 20 *primeros términos*
$n = 20$	$\rightarrow$ *el número de términos*

LO QUE DESARROLLAMOS

$para\ hallar\ la\ diferencia\ (d) aplicamos\ la\ ecuación: S_n = \frac{n[2u_1+(n-1)d]}{2}$

$despejando\ la\ diferencia\ (d), se\ tiene:$

$$d = \frac{\frac{2 \cdot S_n}{n} - 2u_1}{n-1}, reemplazando\ la\ información\ tenem\ os:$$

$$d = \frac{\frac{2(620)}{20} - 2(-7)}{20-1}; \quad d = \frac{62+14}{19}; \quad \boldsymbol{d = 4}$$

$(b) Encuentre\ el\ valor\ del\ término\ 78$

$Ahora\ aplicamos\ la\ ecuación\ del\ término\ enésimo: u_n = u_1 + (n-1)d, sabiendo\ que:$

$d = 4, \quad u_1 = -7, \quad n = 78, luego\ reemplazando\ tenemos:$

$u_n = -7 + (78-1)(4)$

$u_n = -7 + 308$

$\boldsymbol{u_n = 301}$

8) *Una progresión geométrica tiene el primer término 9 y el tercer término 144.*

$a)\ Muestre\ que\ existen\ dos\ valores\ posibles\ para\ la\ razón$

$Planteando\ la\ ecuación\ del\ término\ enésimo\ de\ acuerdo\ a\ los\ datos\ tenemos:$

$u_1 = 9 \quad , \quad u_3 = 144 \quad y \quad n = 3$

$u_n = u_1 \cdot r^{n-1}$

$reemplazando\ dichos\ valores\ en\ la\ ecuación\ se\ tiene:$

$$144 = 9r^{3-1}$$

$$9r^2 = 144$$

$$r^2 = \frac{144}{9}$$

$$r = \pm\sqrt{\frac{144}{9}}$$

$$r = \pm\frac{12}{3}$$

$$los\ dos\ valores\ son: r_1 = \frac{12}{3}, \quad r_2 = -\frac{12}{3}$$

$b)$ *Halle los dos valores posibles del segundo término:*

$i)$ *primer valor posible del segundo término:*

$u_2 = (9)\left(\frac{12}{3}\right); \quad u_2 = (3)(12); \quad u_2 = 36$

$ii)$ *segundo valor posible del segundo término*

$u_2 = (9)\left(-\frac{12}{3}\right); \quad u_2 = (3)(-12); \quad u_2 = -36$

9) *Halle el valor de p, en la siguiente progresión geométrica:*

$18; \ p; \ 40{,}5.$

aplicando la definición de la razón (r) tenemos que:

$r = \frac{p}{18} \quad y \quad r = \frac{40{,}5}{p}$

luego sabemos que la la razón es constante, por lo tanto se puede igualar ambas ecuaciones:

$$\frac{p}{18} = \frac{40{,}5}{p}$$

luego despejamos (p) y calculamos su valor:

$$p^2 = (18)(40{,}5)$$

$$\sqrt{p^2} = \sqrt{729}$$

$$\boldsymbol{p = \pm 27}$$

10) *Halle el valor de x en la progresion aritmética: 3, x, 18, ...*

para esta parte sabemos que la diferencia de una progresión aritmética puede hallarse restando un término de su anterior, se tiene:

$d = x - 8 \qquad y \qquad d = 18 - x$

por definición la diferencia en una porgresión aritmética es constante, por lo tanto:

$$x - 8 = 18 - x$$

$$x + x = 18 + 8$$

$$2x = 26$$

$$x = \frac{26}{2}$$

$$\boldsymbol{x = 13}$$

11) *En una serie geométrica se sabe que:* $\boldsymbol{u_1 = \frac{1}{81}}$ ***y*** $\boldsymbol{u_4 = \frac{1}{3}}$

a) Encuentre el valor de (r):

DATOS:

$$u_1 = \frac{1}{81}$$

$$u_4 = \frac{1}{3}$$

$$n = 4$$

INCÓGNITA:

$$r = ?$$

DESARROLLO:

reemplazamos los datos en la ecuación: $u_n = u_1 \cdot r^{n-1}$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{81} \cdot r^{4-1}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{81} \cdot r^{3}$$

$$r^3 = \frac{81}{3}$$

$$r^3 = 27$$

$$r = \sqrt[3]{27}; \qquad \boldsymbol{r = 3}$$

b) Encuentre el menor valor de (n)*, para que* $S_n > 40$

sabiendo que: $S_n = u_1 \frac{r^n - 1}{r - 1}$*, y nos piden el menor valor de* (n) *para que* $S_n > 40$

podemos plantear la siguiente ecuación:

si $S_n = u_1 \frac{r^n - 1}{r - 1}$ *y* $S_n > 40$, *entonces:*

$u_1 \frac{r^n - 1}{r - 1} > 40$*, luego en esta parte reemplazamos la información que conocemos:*

$$\frac{1}{81} \cdot \frac{(3^n - 1)}{3 - 1} > 40$$

$$\frac{1}{81} \cdot \frac{(3^n - 1)}{2} > 40$$

$$\frac{3^n - 1}{162} > 40$$

$$3^n - 1 > 6480$$

$$3^n > 6480 + 1$$

$$3^n > 6481$$

aplicando logaritmo a ambos miembros de la inecuación se tiene:

$$log3^n > log6481$$

$$nlog3 > log6481$$

$$n > \frac{log6481}{log3}$$

$$n > 7,98883 \ldots.$$

$$redondeando\ esta\ cantidad\ se\ tiene\ que:$$

$$\boldsymbol{n = 8}$$

12) *En la siguiente porgresión geométrica*: 16, 24, 36, ; *halle el menor valor de* (n) *para que*:

i) El término enésimo sea mayor que 1000

Sabemos que en la progresión:

$u_1 = 16$

$r = \frac{24}{16}; \quad r = \frac{3}{2}$

luego la ecuación del término enésimo esta dada por: $u_n = u_1 \cdot r^{n-1}$

y además la condición del ejercicio es que: $u_n > 1000$

luego podemos reemplazar $u_n = u_1 \cdot r^{n-1}$ *en* $u_n > 1000$, *y tenemos*:

$u_1 \cdot r^{n-1} > 1000$

reemplazamos la información que tenemos del ejercicio se tiene:

$$16 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} > 1000$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} > \frac{1000}{16}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} > \frac{125}{2}$$

luego aplicamos logaritmo a ambos miembros de la inecuación:

$$log \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} > log \left(\frac{125}{2}\right)$$

aplicando la propiedad de la potencia de un logaritmo se tiene:

$$(n-1) log \left(\frac{3}{2}\right) > log \left(\frac{125}{2}\right)$$

$$n - 1 > \frac{log \left(\frac{125}{2}\right)}{log \left(\frac{3}{2}\right)}$$

$$n - 1 > 10,1985755964$$

$$n > 10,1985755964 + 1$$

$$n > 11,1985755964$$

aproximando este valor a tres cifras decimales tenemos:

$$\boldsymbol{n = 11,199}$$