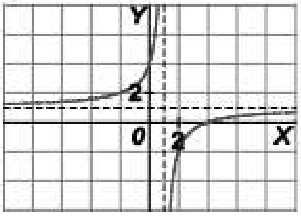
BOLETÍN DE ASÍNTOTAS DE FUNCIONES

Halla las asíntotas verticales, horizontales u oblicuas, de las siguientes funciones y úsalas para trazar aproximadamente sus ramas infinitas.

a) $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x^2+3x-4}$ **b)** $f(x)=\dfrac{2x^2+1}{x-1}$ **c)** $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x-3}$

a) Asíntotas verticales: La función presenta dos puntos de discontinuidades: $x=-4$ y $x=1$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -4^-}\dfrac{x^2-16}{x^2+3x-4}=\lim\limits_{x\to -4^-}\dfrac{(x+4)(x-4)}{(x+4)(x-1)}=\lim\limits_{x\to -4^-}\dfrac{x-4}{x-1}=\dfrac{8}{5}\\ \lim\limits_{x\to -4^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -4^+}\dfrac{x^2-16}{x^2+3x-4}=\lim\limits_{x\to -4^+}\dfrac{(x+4)(x-4)}{(x+4)(x-1)}=\lim\limits_{x\to -4^+}\dfrac{x-4}{x-1}=\dfrac{8}{5}\end{array}\right\}\Rightarrow$$



La función tiene una discontinuidad evitable.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-16}{x^2+3x-4}=\left[\dfrac{-15}{0^-}\right]=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-16}{x^2+3x-4}=\left[\dfrac{-15}{0^+}\right]=-\infty$, puede asegurarse que $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x=1$.

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2-16}{x^2+3x-4}=1\Rightarrow y=1$ es asíntota horizontal de $f(x)$ en $-\infty$. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2-16}{x^2+3x-4}=1\Rightarrow y=1$ es asíntota horizontal de $f(x)$ en $+\infty$.

Asíntotas oblicuas: No tiene por ser función racional y tener asíntotas horizontales.

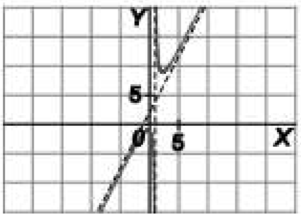
b) Asíntotas verticales: La función presenta un único punto de discontinuidad: $x=1$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x^2+1}{x-1}=\left[\dfrac{3}{0^-}\right]=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x^2+1}{x-1}=\left[\dfrac{3}{0^+}\right]=+\infty$, puede asegurarse que $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x=1$.

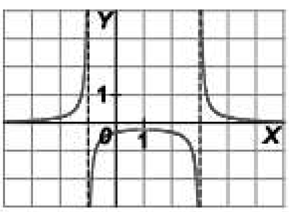
Asíntotas horizontales: no tiene, ya que el grado del numerador es superior al del denominador.

Asíntotas oblicuas: $\left\{\begin{array}{l} m=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{2x^2+1}{x-1}:x\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x^2+1}{x^2-x}=2\\ n=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{2x^2+1}{x-1}-2x\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)=2\end{array}\right.$

Así, la ecuación de la asíntota es $y=2x+2$.



c) Asíntotas verticales: $x=-1$ y $x=3$



$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{1}{x^2-2x-3}=\left[\dfrac{1}{0^+}\right]=+\infty$

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{1}{x^2-2x-3}=\left[\dfrac{1}{0^-}\right]=-\infty$

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{1}{x^2-2x-3}=\left[\dfrac{1}{0^-}\right]=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{1}{x^2-2x-3}=\left[\dfrac{1}{0^+}\right]=+\infty$

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1}{x^2-2x-3}=0$ y $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x^2-2x-3}=0\Rightarrow y=0$

Asíntotas oblicuas: No tiene por ser función racional y tener asíntotas horizontales.