

МФТИ

ФУПМ, 474

Вычислительная математика

Курсовая работа

Алексеев Василий

22 Мая 2017

Содержание

1	Введение	2
2	Задача	2
3	Методы	3
3.1	„Наивный“	3
3.2	Лакс	5
3.3	Курант-Изаксон-Рис	6
3.4	Лакс-Вендрофф	7
3.5	МакКормак	8
4	Заключение	9
5	Графики	10

1 Введение

В данной работе предлагается несколько методов численного решения задачи, связанной с уравнением Хопфа. Проводится исследование предложенных схем на аппроксимацию и устойчивость.

2 Задача

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, & 0 < x < 2, t > 0 \\ u(0, x) = f(x) \\ u(t, 0) = f(0) \end{cases} \quad (1)$$

Предлагаемые далее способы решения задачи (1) иллюстрировались на примере двух функций

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 1 - x \\ f_2(x) &= x \end{aligned} \quad (2)$$

Шаг по пространству

$$\begin{aligned} h_1 &= 0.050 \\ h_2 &= 0.025 \end{aligned} \quad (3)$$

Шаг по времени τ выбирался при заданном h , так чтобы число Куранта

$$\sigma \equiv \tau / h \quad (4)$$

было меньше единицы. Если говорить точнее, рассматривалось два значения числа Куранта

$$\sigma \in \{0.5, 0.9\} \quad (5)$$

3 Методы

3.1 „Наивный“

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2\tau} + u_m^n \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} = 0, \quad m = 1 \div (M-1), n = 1 \div (N-1) \\ u_m^0 = f_m \\ u_0^n = f_0 \\ u_m^1 = f_m - f_m f_m' \tau \\ \frac{u_M^{n+1} - u_M^n}{\tau} - \frac{w_M^n - w_{M-1}^n}{h} = 0 \\ w_m^n = (u_m^n)^2 / 2 \end{array} \right. \quad (6)$$

Поясним выражение для первого слоя u_m^1

$$\begin{aligned} u_m^1 &= u_m^0 + (u_m^0)'_t \tau \\ &= u_m^0 - u_m^0 (u_m^0)'_x \tau \\ &= f_m - f_m f_m' \tau \end{aligned}$$

Аппроксимация

Из основного уравнения: $O(\tau^2) + \|u_m^n\| \cdot O(h^2) = O(\tau^2, h^2)$.

Из начального условия для первого слоя: $O(\tau^2)$.

Из условия на правой границе u_M : $O(\tau, h)$.

Итоговый порядок аппроксимации: $O(\tau, h)$.

Устойчивость

Используем спектральный признак. Полагаем $u_m^n = \lambda^n e^{im\varphi}$. Подставляем в основное уравнение (замораживая коэффициент при пространственной производной)

$$\frac{\lambda - 1/\lambda}{2\tau} + a \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2h} = 0$$

$$\lambda^2 + \frac{2a\tau}{h} i \sin \varphi \lambda - 1 = 0$$

По теореме Виета, получаем, что

$$\lambda_1 \lambda_2 = -1$$

Выражение для корней

$$\lambda = -\frac{a\tau \sin \varphi}{h} i \pm \sqrt{1 - \left(\frac{a\tau \sin \varphi}{h} \right)^2}$$

Видно, что при выполнении условия

$$\left| \frac{a\tau \sin \varphi}{h} \right| \leq \frac{\|u_m^n\| \tau}{h} \leq 1$$

схема (6) устойчива.

По результатам вычислительных экспериментов построены графики, представленные в таблице 1.

3.2 Лакс

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_m^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{m+1}^n + u_{m-1}^n)}{\tau} + \frac{w_{m+1}^n - w_{m-1}^n}{2h} = 0, \quad m = 1 \div (M-1), \quad n = 0 \div (N-1) \\ u_m^0 = f_m \\ u_0^m = f_0 \\ \frac{u_M^{n+1} - u_m^n}{\tau} - \frac{w_M^n - w_{M-1}^n}{h} = 0 \\ w_m^n = (u_m^n)^2 / 2 \end{array} \right. \quad (7)$$

Аппроксимация

Подставляя в основное разностное уравнение проекцию точного решения $[u]$ и раскладывая всё в окрестности точки $[u_m^n]$, получаем порядок $O\left(\tau, h^2, \frac{h^2}{\tau}\right)$. С учётом уравнения для границы u_M , получаем в итоге аппроксимацию порядка $O\left(\tau, h, \frac{h^2}{\tau}\right)$.

Устойчивость

$$u_m^n = w_n^m = \lambda^n e^{im\varphi}$$

Подставляя в уравнение, получаем

$$\frac{\lambda - \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})}{\tau} + \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2h} = 0$$

$$\lambda = \underbrace{\cos \varphi}_x + i \underbrace{\left(-\frac{\tau}{h} \sin \varphi\right)}_y$$

$$x^2 + \frac{y^2}{(\tau/h)^2} = 1$$

Получаем условие для устойчивости по спектральному признаку

$$\frac{\tau}{h} \leq 1$$

Графики для расчётов по схеме Лакса находятся в таблице 2.

3.3 Курант-Изаксон-Рис

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \left\{ \begin{array}{l} \frac{w_{m+1}^n - w_m^n}{h} = 0, u_m^n < 0 \\ \frac{w_m^n - w_{m-1}^n}{h} = 0, u_m^n > 0 \end{array} \right\} = 0, \quad m = 1 \div (M-1), n = 0 \div (N-1) \\ u_m^0 = f_m \\ u_0^n = f_0 \\ \frac{u_M^{n+1} - u_M^n}{\tau} - \frac{w_M^n - w_{M-1}^n}{h} = 0 \\ w_m^n = (u_m^n)^2 / 2 \end{array} \right. \quad (8)$$

Аппроксимация

Данная схема похожа на схему (6), только теперь учитывается знак тангенса угла наклона характеристики dx/dt . Поэтому порядок аппроксимации также $O(\tau, h)$.

Устойчивость

$$u_m^n = \lambda^n e^{im\varphi}$$

Подставляя выражение для u_m^n , например, в уравнение при $u_m^n < 0$, получаем

$$\frac{\lambda - 1}{\tau} + \frac{e^{i\varphi} - 1}{h} = 0$$

$$\lambda = 1 - \frac{\tau}{h} (e^{i\varphi} - 1)$$

Схему можно считать устойчивой при $\tau/h \rightarrow 0$.

Иллюстрации работы метода на примере функций (2) находятся в таблице 3.

3.4 Лакс-Вендрофф

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_{m+1/2}^{n+1/2} - \frac{1}{2}(u_{m+1}^n + u_m^n)}{\tau/2} + \frac{w_{m+1}^n - w_m^n}{h} = 0 \\ \frac{u_{m-1/2}^{n+1/2} - \frac{1}{2}(u_m^n + u_{m-1}^n)}{\tau/2} + \frac{w_m^n - w_{m-1}^n}{h} = 0 \\ \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \frac{w_{m+1/2}^{n+1/2} - w_{m-1/2}^{n+1/2}}{h} = 0, \\ u_m^0 = f_m \\ u_0^n = f_0 \\ \frac{u_M^{n+1} - u_M^n}{\tau} - \frac{w_M^n - w_{M-1}^n}{h} = 0 \\ w_m^n = (u_m^n)^2 / 2 \end{array} \right. \quad m = 1 \div (M-1), n = 0 \div (N-1) \quad (9)$$

Аппроксимация

Подставляя в первое уравнение-предиктор проекцию решения и раскладывая всё около $[u_m^n]$, а также учитывая, что

$$\begin{aligned} u_t + w_x &= 0 \\ u_{tt} + w_{xt} &= 0 \\ u_{tx} + w_{xx} &= 0 \end{aligned}$$

получаем первый порядок по времени и пространству $O(\tau, h)$. Очевидно, второе уравнение-предиктор даст то же самое. Теперь обратимся к уравнению-корректору. Прodelывая и с ним аналогичные преобразования, получаем порядок $O(\tau, h^2)$. В итоге порядок аппроксимации $O(\tau, h)$.

Устойчивость

$$u_m^n = w_m^n = \lambda^n e^{im\varphi}$$

Подставляем в корректор

$$\frac{\lambda - 1}{\tau} + \frac{\sqrt{\lambda}(e^{i\varphi/2} - e^{-i\varphi/2})}{h} = 0$$

$$\lambda + 2i \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \frac{\tau}{h} \cdot \sqrt{\lambda} - 1 = 0$$

Не углубляясь в анализ расположения корней полученного уравнения, можно сразу сказать, что при $\tau/h \rightarrow 0$ получаем $\lambda = 1$, и схему можно считать устойчивой.

С графиками можно ознакомиться в таблице 4.

3.5 МакКормак

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\tilde{u}_m - u_m^n}{\tau} + \frac{w_m^n - w_{m-1}^n}{h} = 0 \\ \frac{\tilde{u}_{m+1} - u_{m+1}^n}{\tau} + \frac{w_{m+1}^n - w_m^n}{h} = 0 \\ \frac{u_m^{n+1} - \frac{1}{2}(u_m^n + \tilde{u}_m)}{\tau} + \frac{\tilde{u}_{m+1} - \tilde{u}_m}{h} = 0, \quad m = 1 \div (M-1), \quad n = 0 \div (N-1) \\ u_m^0 = f_m \\ u_0^n = f_0 \\ \frac{u_M^{n+1} - u_M^n}{\tau} - \frac{w_M^n - w_{M-1}^n}{h} = 0 \\ w_m^n = (u_m^n)^2 / 2 \end{array} \right. \quad (10)$$

Аппроксимация

Выражая предсказания \tilde{u}_m и \tilde{u}_{m+1} из первых двух уравнений и подставляя это затем в третье уравнение, после разложения около u_m^n получаем порядок аппроксимации $O(\tau, h)$.

Устойчивость

$$u_m^n = w_m^n = \lambda^n e^{im\varphi}$$

Подставляем в корректор, принимая, что $\tilde{u}_m \equiv u_m^{n+1/2}$

$$\frac{\lambda - \frac{1}{2}(1 + \sqrt{\lambda})}{3\tau/4} + \frac{\sqrt{\lambda}e^{i\varphi} - \sqrt{\lambda}}{h} = 0$$

$$\lambda + \left(-\frac{1}{2} + \frac{3\tau/4}{h} e^{i\varphi} - \frac{3\tau/4}{h} \right) \sqrt{\lambda} - \frac{1}{2} = 0$$

Устремим $\tau/h \rightarrow 0$. Тогда получаем

$$\lambda - \frac{1}{2}\sqrt{\lambda} - \frac{1}{2} = 0$$

$$\left(\sqrt{\lambda} - 1 \right) \left(\sqrt{\lambda} + \frac{1}{2} \right) = 0$$

Получаем, что при $\tau/h \rightarrow 0$ максимальный λ по модулю равен 1, поэтому схему можно считать устойчивой.

Построенные графики размещены в таблице 5.

4 Заключение

В работе исследовалось несколько методов численного решения начально-краевой задачи с уравнением Хопфа с заданными значениями на левой границе (1): „Наивный“ (схема крест) (6), Лакс (7), Курант-Изаксон-Рис (8), Лакс-Вендрофф (9) и МакКормак (10).

Порядок аппроксимация на всех схемах составил $O(\tau, h)$. На некоторых схемах он мог бы быть и выше, но предложенное разностное уравнение для вычисления значений на правой границе (левый уголок), которое использовалось во всех схемах, обеспечивало лишь первый порядок аппроксимации по времени и пространству.

Исследование устойчивости показало, что все представленные методы условно-устойчивы. Но при расчётах сеток для функций (2) и шага h (3) устойчивыми оказались лишь Лакс и Курант-Изаксон-Рис (по результатам для числа Куранта $\sigma = 0.5$; для $\sigma = 0.9$ — не лучше, чем для $\sigma = 0.5$). „Наивный“ был устойчив только для функции f_2 из (2). Поведение Лакса-Вендроффа было неустойчивым около $x = 1$ в случае f_1 из (2) и при $x = 2$ при расчётах для f_2 . При МакКормаке неустойчивости тоже были для обеих функций из (2), причём для f_1 пилообразные возмущения наблюдались на всём интервале $(0, 1)$, а для функции f_2 — только на конце, при $x \lesssim 2$.

5 Графики

Таблица 1: „Наивный“ (3.1)

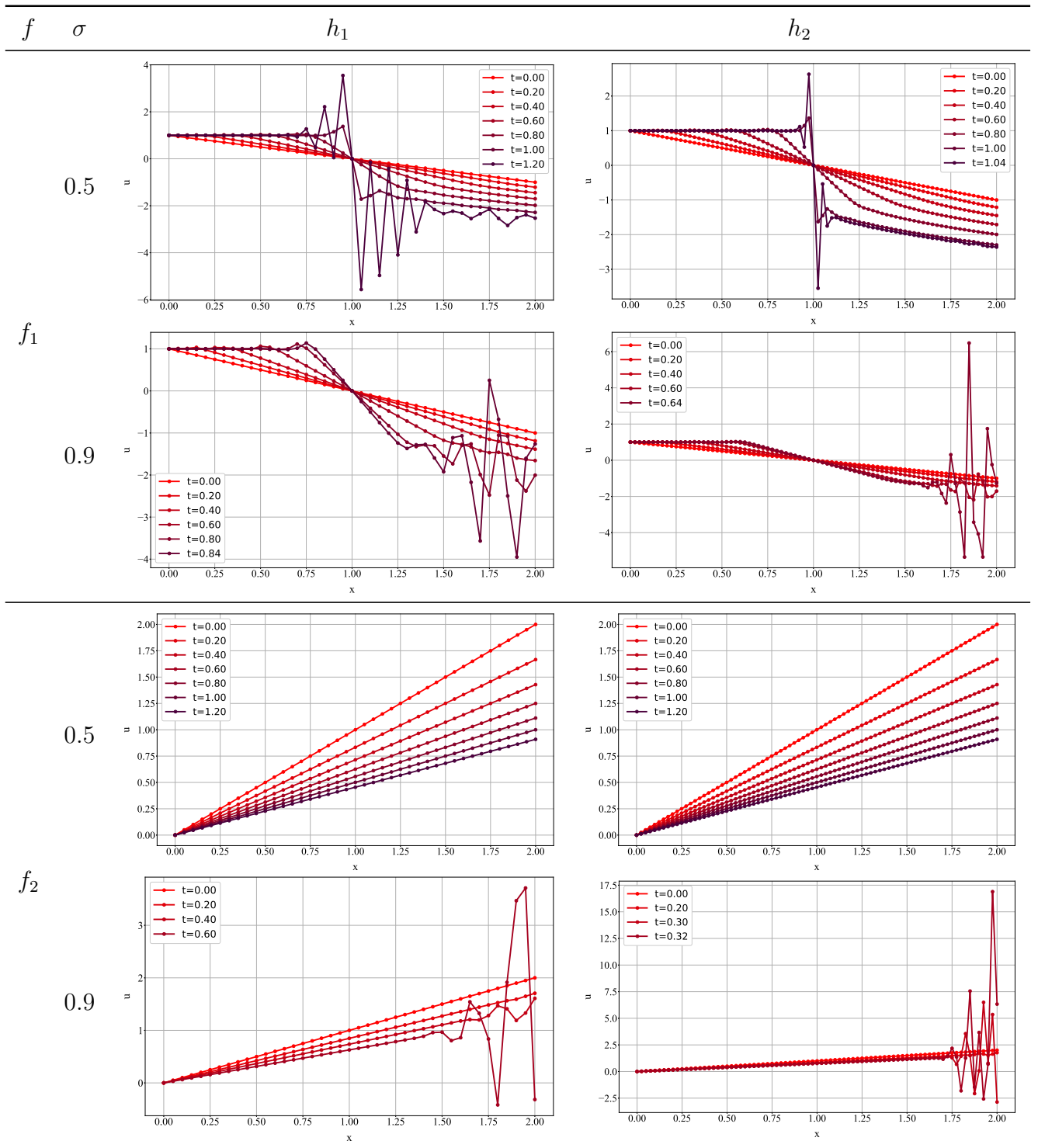


Таблица 2: „Лакс“ (3.2)

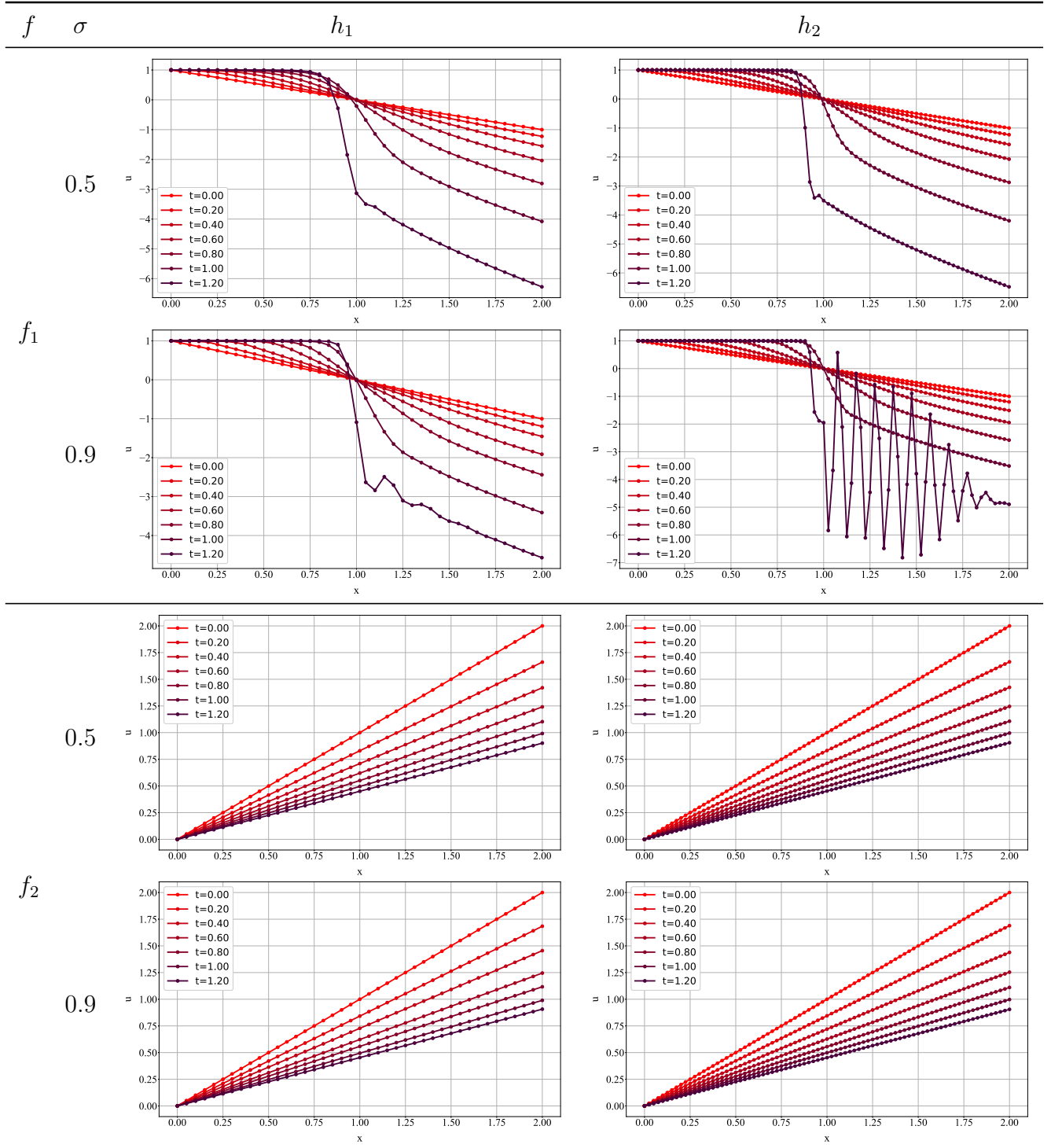


Таблица 3: „Курант-Изаксон-Рис“ (3.3)

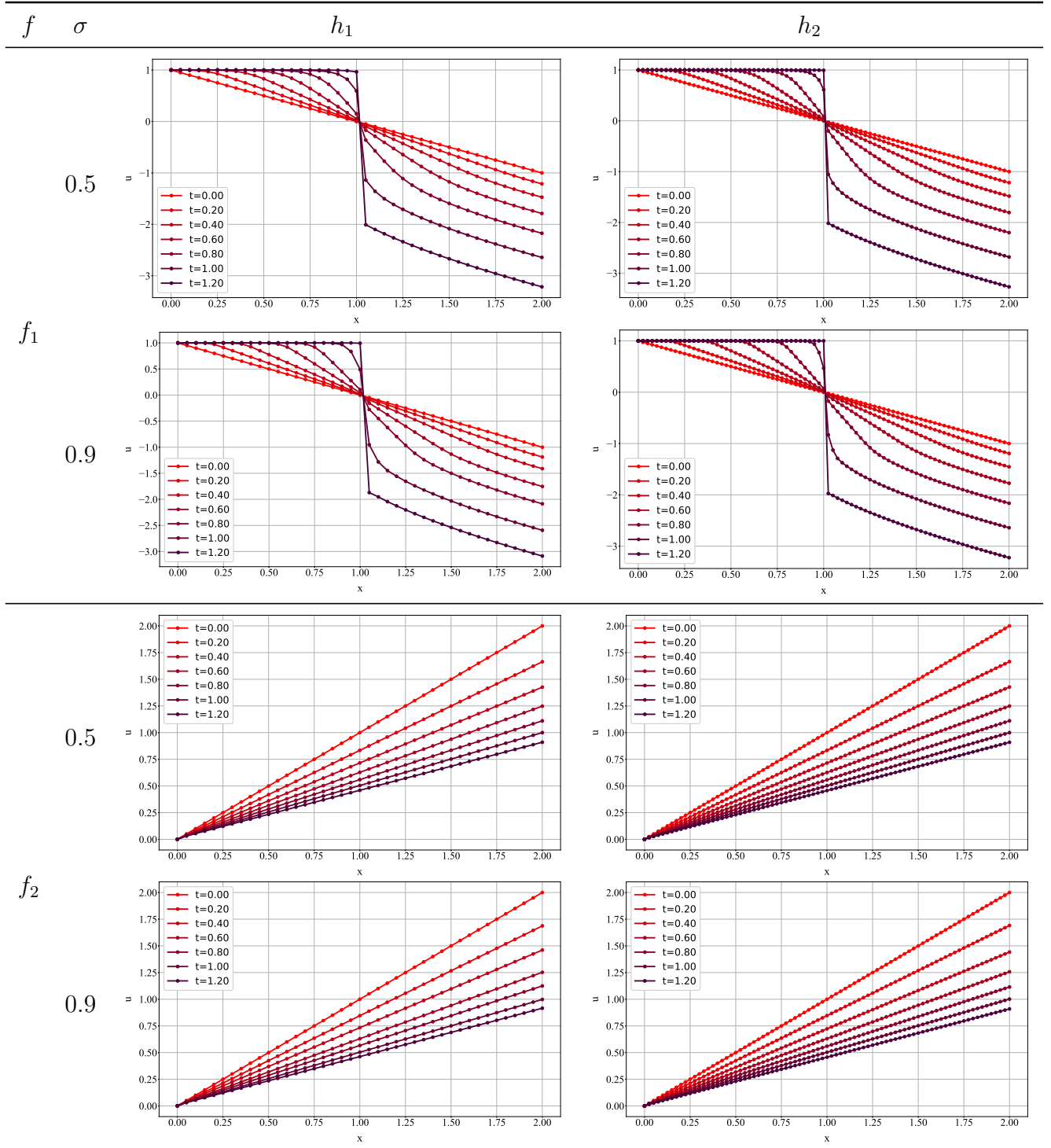


Таблица 4: „Лакс-Вендрофф“ (3.4)

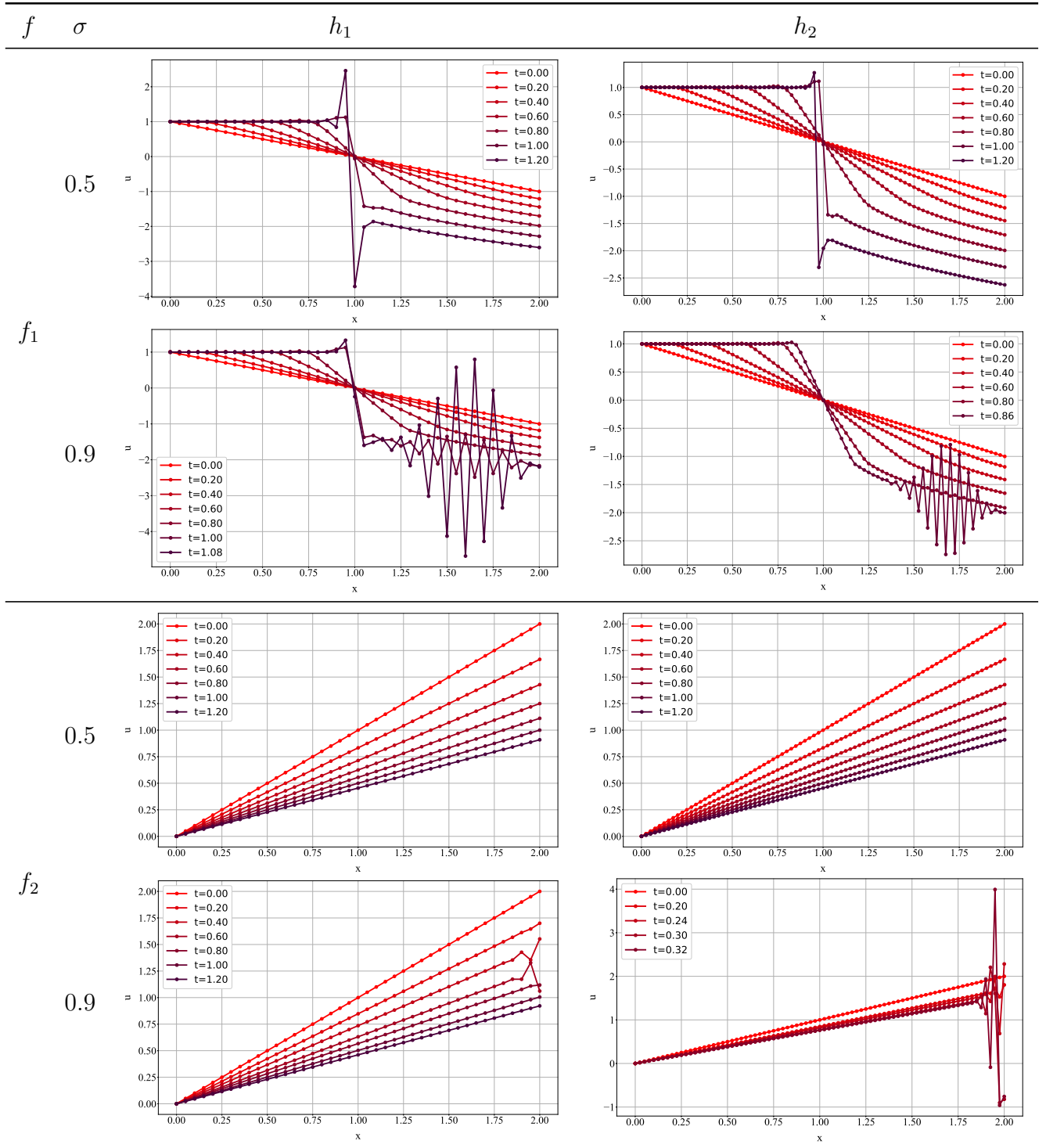


Таблица 5: „МакКормак“ (3.5)

