Семинар 1

Алексеев Василий

7 февраля 2025

Содержание

К формулировкам и доказательствам (если такие вообще приводятся) стоит относиться критически. Основное в этом конспекте — решение задач (но “критичность” и здесь лучше не отключать). За строгой, ясной и последовательной теорией лучше обращаться к “нормальным” источникам. (Например, к лекциям.)

1. Числа (продолжение)

1.1. Комплексные числа

О компле́ксных числах можно думать как о расширении (ещё одном) понятия “числа” (1).

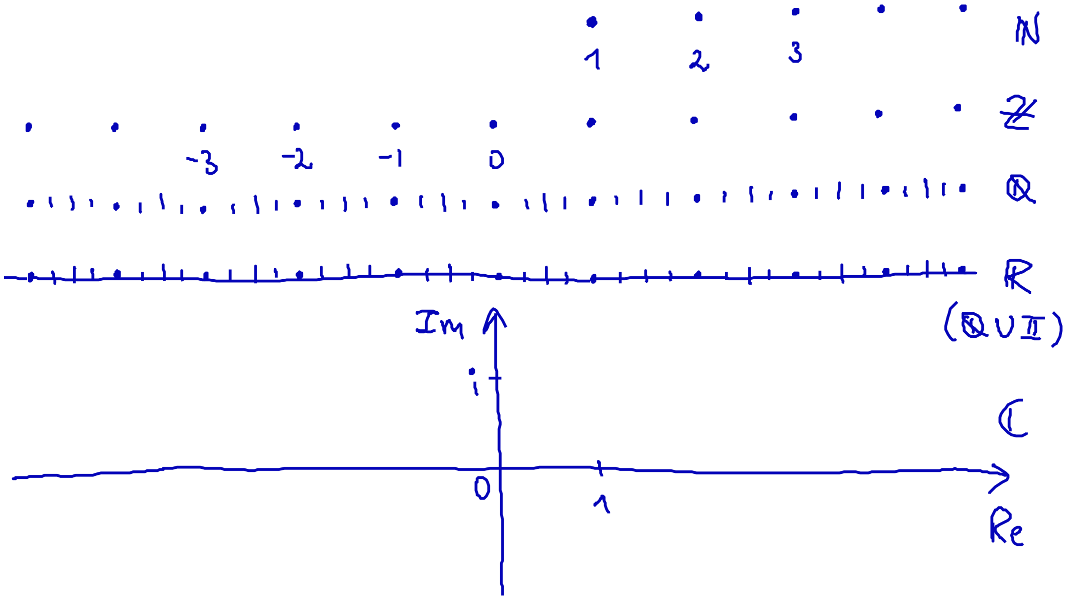

Рис. 1: “Эволюция” чисел. *Натуральные* — использующиеся при счёте предметов (одно яблоко, два яблока, и так далее). Останемся справа от нуля и посмотрим, какие ещё есть числа. *Рациональные* — доли от натуральных, “деления на линейке” (1/2, 3/4 и так далее). *Иррациональные* — “все оставшиеся” (какие бы они ни были), не вошедшие в рациональные. Рациональные и иррациональные таким образом занимают весь луч от нуля до $+\infty$. Далее можно ввести *отрицательные* числа: натуральные, ноль и противоположные натуральным объединяются в *целые* числа. Рациональные и иррациональные просто “расширяются”, включая теперь и отрицательные числа. Таким образом, занятой числами оказывается вся числовая прямая (числовая ось) — числа на ней называются *действительными* числами. Но ведь можно, наверно, провести ещё одну ось? Тогда с числовой прямой выйдем на числовую плоскость — плоскость *компле́ксных* чисел...

Комплексное число $z \in \mathbb{C}$ характеризуется двумя компонентами (a, b), каждая из которых есть действительное число ($a, b \in \mathbb{R}$) и показывает координату z по оси: первая компонента a — по оси “обычных” действительных чисел (*действительная часть* комплексного числа), вторая компонента b — по новой оси, которая для работы с “обычными” числами не привлекалась (*мнимая часть* комплексного числа). Записать комплексное число z можно так:

$$z = a + ib$$

где i — это так называемая *мнимая единица* (единица, но не действительная, на новой оси).

Для комплексных чисел естественным образом работают операции умножения на действительное число и сложения (2): операции проводятся “параллельно” для каждой из компонент:

$$\alpha z = \alpha(a + ib) = (\alpha a) + i(\alpha b), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$z_1 + z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$

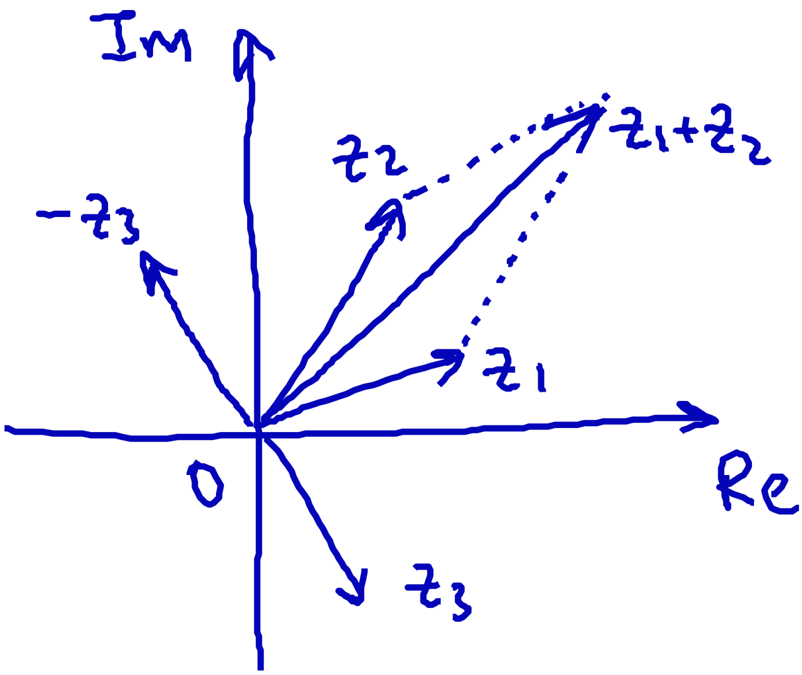

Рис. 2: При умножении комплексного числа на действительное число и сложении комплексных чисел происходят аналогичные операции с их радиус-векторами.

Но можно ли умножать и делить комплексные числа? Да, но эти операции расширяются на комплексные числа уже не так очевидно.[1] Поэтому введём их, а потом ещё раз вернёмся к ним чуть позже (в попытке осознать). При умножении работают обычные правила раскрытия скобок и раздельного сложения компонент разной природы далее. Однако при умножении друг на друга собственно комплексных чисел ("чисел с i"), включается ещё одно правило:

$$i^2 = -1 \tag{1}$$

(Таким образом, "мнимость" i открывается с новой стороны: теперь это не просто "другая" единица (по новой оси, которой раньше не было), а такое число, которое в квадрате даёт 1 (таких чисел тоже раньше не было).)

Пример. Перемножим два числа: $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$.

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = \blacktriangle$$

Будем раскрывать скобки, сразу собирая вместе все составляющие действительной и мнимой частей числа-результата (и имея в виду правило (1)):

$$\blacktriangle = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

□

Деление — действие из той же "плоскости", что и умножение. Поэтому посмотрим ещё пример на деление.

Пример. Поделим друг на друга два числа: $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$ ($z_2 \neq 0$).

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \blacktriangle$$

[1] По крайней мере, по мнению составляющего конспект.

Что значит: “поделить” два комплексных числа? Можем считать, что это значит — найти результат деления, представив его в форме, использующейся для записи комплексных чисел. Для этого надо каким-то образом избавиться от комплексности в знаменателе. Пользуются следующим “трюком”: домножим числитель и знаменатель на $a_2 - ib_2$ (то есть на число, отличающееся от знаменателя знаком мнимой части):

$$\blacktriangle = \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) + i(-a_1b_2 + a_2b_1)}{a_2^2 + b_2^2}$$

Далее дробь уже можно разложить в сумму двух: с i и без i.

Для числа, отличающегося от данного $z = a + ib$ знаком мнимой части, вводят специальное название: *комплексно сопряжённое* числу z число. И обозначают как $\overline{z}$. Таким образом, $\overline{z} = a - ib$. □

Познакомимся с ещё одним способом записи комплексного числа — *тригонометрическим*.

Суть этого способа в том, чтобы расписать радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ комплексного числа как сумму проекций: на действительную и на мнимую оси (3):

$$z = 1 \cdot r\cos\phi + i \cdot r\sin\phi = r(\cos\phi + i\sin\phi) \tag{2}$$

где $r = |\boldsymbol{r}|$ есть длина соответствующего z радиуса-вектора, а ϕ — это угол между радиусом-вектором и положительным направлением оси Re (больший нуля, если отсчитывается против часовой стрелки, иначе меньше нуля). (Для $z = 0$ длина радиуса-вектора равна нулю, а угол ϕ не определён.)

Число r называется также *модулем* комплексного числа z, и может обозначаться как $|z|$. Угол же ϕ, очевидно, определён не однозначно, а с точностью до 2π (от одного или нескольких дополнительных поворотов на 2π против или по часовой стрелке ничего по сути не поменяется). Всё множество таких углов ϕ, могущих участвовать в формуле (2) и отличающихся на сколько-то 2π, называется аргументом комплексного числа:

$$\mathrm{Arg}(z) = \{\phi + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

Для определённости, из всего этого множества углов можно выделить один — лежащий в полуинтервале $(-\pi, \pi]$. Такое значение аргумента числа z обозначается как $\arg(z)$.

Вернёмся к умножению комплексных чисел, но посмотрим на него с числами в тригонометрической записи:

$$\begin{aligned} &z_1 = r_1(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1), \quad z_2 = r_2(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2) \\ &z_1 \cdot z_2 = \ldots = r_1r_2\big(\cos(\phi_1 + \phi_2) + i\sin(\phi_1 + \phi_2)\big) \end{aligned} \tag{3}$$

То есть длина радиуса-вектора результата — произведение длин векторов умножаемых чисел, а угол — сумма углов.

Деление:

$$\begin{aligned} &z_1 = r_1(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1), \quad z_2 = r_2(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2) \\ &\frac{z_1}{z_2} = \ldots = \frac{r_1}{r_2}\big(\cos(\phi_1 - \phi_2) + i\sin(\phi_1 - \phi_2)\big) \end{aligned}$$

То есть модуль частного — частное модулей, а угол — разность углов.

Более очевидна связь между делением и умножением. И понятен “физический смысл” таким образом введённой операции умножения.

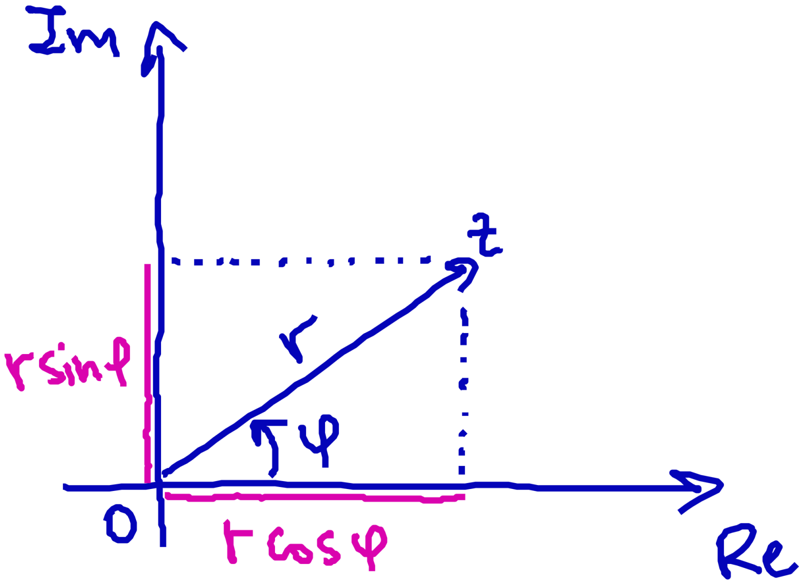

Рис. 3: Если радиус-вектор комплексного числа по длине равен r и образует угол ϕ с положительным направлением оси Re, то его проекции на оси Re и Im будут соответственно равны $r\cos\phi$ и $r\sin\phi$.

Пример. Во-первых, умножение действительных чисел укладывается в такую общую (более сложную) схему. Например, $1\cdot 2 = 2$: модули перемножились, а угол $0 = 0+0$ — остался нулевым.

Далее, свойство мнимой единицы: $i^2 = -1$. Модуль остался единичным. Угол стал равным: $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$ — то есть радиус-вектор мнимой единицы при возведении её в квадрат поворачивается против часовой стрелки ещё на $\frac{\pi}{2}$. И число в результате оказывается уже на другой оси — на оси действительных чисел, причём в отрицательной половине (4).

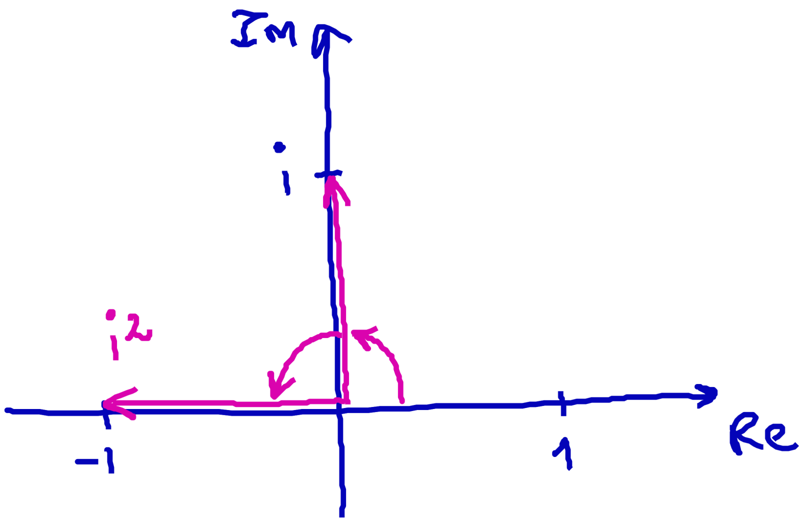

Рис. 4: Радиус-вектор числа i^2.

□

Имея в виду логику операций умножения и деления комплексных чисел (если смотреть на них в тригонометрической записи), можно прийти к ещё одному способу записи комплексных чисел — *показательному*:

$$z = r(\cos\phi + i\sin\phi) \Leftrightarrow \boxed{z = re^{i\phi}} \tag{4}$$

В таком виде умножение и деление будут проходить так:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\phi_1} \cdot r_2 e^{i\phi_2} = r_1 r_2 e^{i(\phi_1+\phi_2)}$$
$$z_1 \,/\, z_2 = r_1 e^{i\phi_1} \,/\, r_2 e^{i\phi_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\phi_1-\phi_2)}$$

Поэтому на показательную запись комплексного числа можно смотреть просто как на “компактную и более удобную тригонометрическую” (преобразования модулей и углов такие же, просто более очевидные), а не буквально как на “e в степени”.

Отдельно отметим в конце невозможность сравнения комплексных чисел через “больше/меньше”. Потому что, например, для действительных чисел выражение $x < y$ говорило о том, левее ли лежит число x на числовой прямой, чем число y. Но как читать запись “$z_1 < z_2$”, ведь на плоскости нет “левее” и “правее”? Поэтому про сравнение комплексных “не говорят”, сравнивать их можно либо на равенство (“равно/не равно”), либо по модулям: запись $|z_1| < |z_2|$ имеет смысл.[2]

1.1.1. Новый взгляд на квадратное уравнение с отрицательным дискриминантом

Решим уравнение:

$$z^3 = 1 \tag{5}$$

Очевидный корень: $z = 1$. Есть ли ещё? (Очевидный ответ: нет.) Подойдём к вопросу основательнее: соберём всё в левой части и разложим на множители:

$$z^3 - 1 = 0$$

$$(z-1)(z^2+z+1) = 0$$

Такое уравнение равносильно совокупности:

$$\left[\begin{aligned} &z - 1 = 0 \\ &z^2 + z + 1 = 0 \end{aligned}\right.$$

Рассмотрим отдельно получившееся квадратное уравнение. Его дискриминант:

$$D = 1^2 - 4 = -3 < 0$$

Корней нет? Нет, но только действительных. Комплексные же корни есть:

$$z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3i^2}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

Итого, получаем три корня:

$$\left[\begin{aligned} &z = 0 \\ &z = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \end{aligned}\right.$$

Отметим интереса ради корни на комплексной плоскости. Для этого определим ещё модуль и аргумент комплексных корней:

$$z = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = 1 \cdot \left(-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

[2] Сравнение комплексных по модулю по сути говорит о том, какое из них находится дальше от начала координат. При сравнении действительных тоже учитывается дальность от нуля, но кроме неё — ещё и то, с какой стороны от нуля расположено число.

Таким образом, $r = 1$ и $\phi = 2\pi/3$ или $\phi = 4\pi/3$.

Получается, все три корня уравнения (5) лежат на окружности радиуса единица и с центром в нуле, причём они также являются вершинами правильного треугольника (комплексные корни получаются из $z = 1$, если поворачивать его радиус-вектор на угол $2\pi/3$ против часовой стрелки) (5).

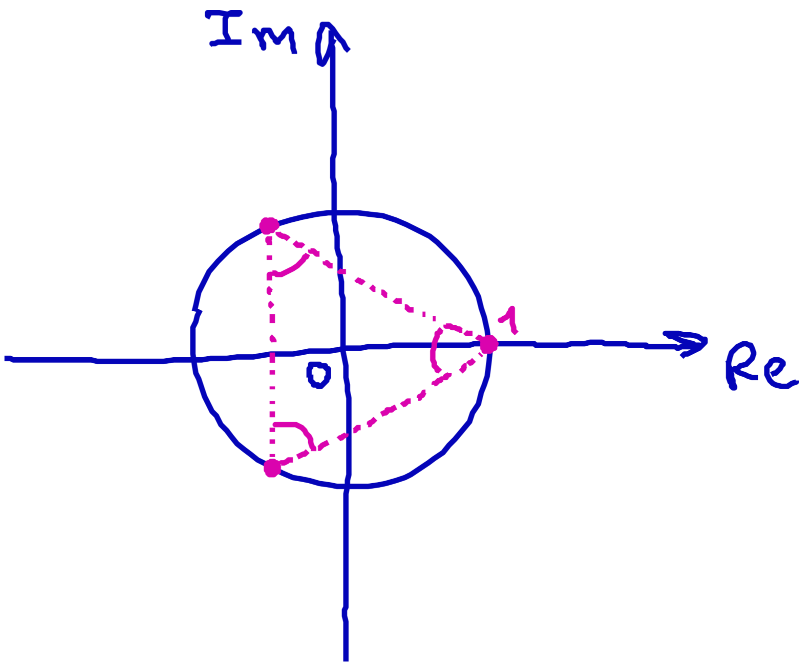

Рис. 5: Корни уравнения $z^3 = 1$ на комплексной плоскости.

1.1.2. C1, §5, №15(3)

Найти множество точек комплексной плоскости, заданное условием:

$$|z + 2i - 1| \leq 2$$

Решение. Немного перепишем неравенство:

$$\big|z - (1 - 2i)\big| \leq 2$$

Теперь видно, что неравенство определяет точки, удалённые от числа $(1 - 2i)$ на расстояние не более 2 (6). А это — круг радиуса 2 с центром в указанной точке.

□

1.1.3. C1, §5, №31(1)

Записать комплексное число в тригонометрической форме:

$$z = \left(\sqrt{3} - i\right)^{100}$$

Решение. (Возводить скобку в сотую степень “в лоб”, очевидно, не вариант.)

Начнём с того, что представим в тригонометрической форме число в скобке. (Далее возвести его в сотую степень будет несложно (3).)

$$\sqrt{3} - i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = r(\cos\phi + i\sin\phi)$$

| z − zc | — расстояние от z до zc

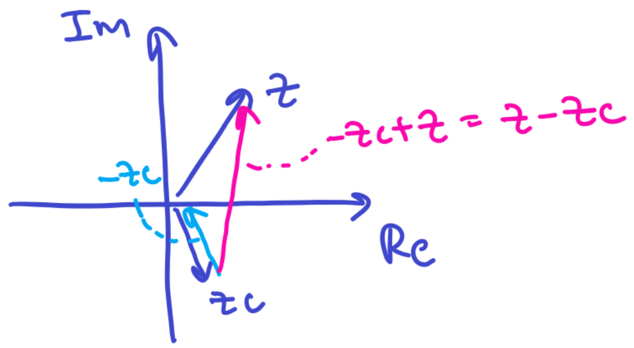

Рис. 6: $z - z_c$ — вектор из числа z_c в z, а его длина $|z - z_c|$ — это расстояние между z и z_c.

где $r \equiv 2$, а ϕ — такой угол, что $\cos\phi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\sin\phi = -\frac{1}{2}$; то есть ϕ можно взять равным $-\frac{\pi}{6}$.

Возвращаясь в возведению в сотую степень:

$$z = \left(r(\cos\phi + i\sin\phi)\right)^{100} = \left(re^{i\phi}\right)^{100} = r^{100}(\cos 100\phi + i\sin 100\phi)$$

Число найдено. Остаётся привести "адекватное" значение аргумента. Найдём $\arg(z)$:

$$100\phi + 2\pi k \in (-\pi, \pi] \Rightarrow k = ?$$

$$100\phi + 2\pi k = 2\pi k - \frac{100\pi}{6} = \frac{12\pi k - 100\pi}{6}$$

Получаем, что $k = 8$, и $\arg(z) = -\frac{2\pi}{3}$. □

1.1.4. C1, §5, №32(4)

Найти все корни уравнения:

$$z^8 = 1 + i$$

Решение. Будем искать z в виде $z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$. Тогда $z^8 = r^8(\cos 8\phi + i\sin 8\phi)$. Правую часть уравнения также представим в тригонометрической форме:

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

Уравнение:

$$r^8(\cos 8\phi + i\sin 8\phi) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} r^8 = \sqrt{2} \\ 8\phi = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Рассмотрим отдельно выражение для определения аргумента:

$$8\phi = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \quad \Leftrightarrow \quad \phi = \frac{\pi + 8\pi k}{32}$$

Видно, что при $k = 8$ получим $\phi = \frac{\pi}{32} + 2\pi$ — то есть по сути то же самое, что и $\phi = \frac{\pi}{32}$. Очевидно, в этот момент всё “зацикливается” и далее углы будут повторяться. Поэтому уникальные углы определяются $k = 0, 1, \ldots, 7$.

Итого, корни уравнения:

$$\left\{ r(\cos\phi + i\sin\phi) \;\middle|\; \begin{array}{l} r = 2^{1/16} \\ \phi = \dfrac{\pi + 8\pi k}{32},\ k = 0, 1, \ldots, 7 \end{array} \right\}$$

□

2. Неопределённый интеграл (продолжение)

Вспомним кое-что из интегралов.

Первообразной функции $f(x)$ на каком-то промежутке называется функция $F(x)$, производная которой равна этой функции на данном промежутке:

$$F'(x) = f(x)$$

Неопределённым интегралом от функции $f(x)$ называется совокупность первообразных этой функции:

$$\int f(x)\,dx = \{F(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\} = F(x) + C$$

Связь между производной функции и её дифференциалом:

$$d f(x) = f'(x)\,dx$$

Интеграл от суммы равен сумме интегралов, а числовой коэффициент можно выносить за знак интеграла:

$$\int \big(f(x) + g(x)\big)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int \alpha f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

При интегрировании перед заменой переменной могут использоваться такие “приёмы” для получения нужного выражения под дифференциалом:

$$dx = d(x + C)$$

$$dx = \frac{1}{a}\,d(ax)$$

Вспомним некоторые “табличные” интегралы.

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

Интегралы от тригонометрических функций:

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C$$

Интегралы от показательной функции:

$$\int e^x\, dx = e^x + C$$

$$\int a^x\, dx = \int e^{x \ln a}\, dx = \frac{1}{\ln a} \int e^{x \ln a}\, d(x \ln a) = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

Вместо аккуратного вывода последний интеграл можно было вывести и “догадыванием”:

$$F'(x) = a^x \Rightarrow F(x) = ? \quad \dots \quad F(x) = \frac{a^x}{\ln a}$$

Ещё интегралы от тригонометрических и обратных тригонометрических функций:

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = \arcsin x + C$$

Последний интеграл можно немного усложнить:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx &= \frac{1}{a} \int \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}}\, dx \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}}\, d\left(\frac{x}{a}\right) = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C, \quad (a > 0) \end{aligned} \tag{6}$$

Интеграл, сводящийся к арктангенсу:

$$\int \frac{1}{1 + x^2}\, dx = \operatorname{arctg} x + C$$

Снова можно аналогичным образом усложнить:[3]

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{a^2 + x^2}\, dx &= \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2}\, dx \\ &= \frac{1}{a} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2}\, d\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{a} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + C \end{aligned} \tag{7}$$

Интегралы от гиперболических функций:

$$\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C$$

$$\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C$$

[3] И можно заметить, что от знака a уже ничего зависеть не будет.

$$\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\,dx = \operatorname{th} x + C$$

И ещё пара интегралов, которые можно получить небольшой “модификацией” подынтегральных функций в (7) и (6).

“Высокий логарифм”:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx &= \int \frac{1}{(x-a)(x+a)}\,dx \\ &= \frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)dx \\ &= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C\end{aligned} \tag{8}$$

“Длинный логарифм”:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx &= \frac{1}{a}\int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}}\,dx \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}}\,d\left(\frac{x}{a}\right) = \blacktriangle\end{aligned}$$

Можно сделать замену:[4]

$$\frac{x}{a} \equiv \operatorname{ch} t, \quad t > 0 \quad (\Rightarrow \operatorname{sh} t > 0)$$

$$\blacktriangle = \int \frac{1}{\operatorname{sh} t}\operatorname{sh} t\,dt = t + C = \spadesuit$$

Теперь надо сделать обратную замену...

$$\frac{x}{a} \equiv \operatorname{ch} t = \frac{e^t+e^{-t}}{2} \Rightarrow t = ?$$

Пусть $e^t \equiv z$ ($t > 0 \Rightarrow e^t > 1$). Тогда $e^{-t} = 1/z$ и приходим к уравнению:

$$\begin{aligned}&\frac{x}{a} = \frac{z}{2} + \frac{1}{2z} \\ &a\cdot z^2 - 2x\cdot z + a = 0\end{aligned}$$

Корни которого:

$$z_{1,2} = \frac{x \pm \sqrt{x^2-a^2}}{a}$$

Так как $z = e^t$ и далее $x/a = (e^t + e^{-t})/2$, то понимаем, что один корень z будет соответствовать значению $t > 0$, а второй — значению $t < 0$. Раз хотим найти $t > 0$, то, очевидно, оставляем z с “плюсом”:

$$z = \frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}$$

[4] Для простоты считаем, что $x/a > 0$, то есть что x и a одинаковых знаков.

Тогда:

$$e^t = \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}$$
$$t = \ln\left(\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right)$$

И наконец можно довести до конца интеграл:[5]

$$\spadesuit = \ln\left(\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right) + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C$$

Аналогично, можно бы было найти и такой интеграл, где бы под корнем была не разность квадратов, а сумма. Итого, обобщая, "длинный логарифм":

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\, dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$$

2.1. Интегралы от рациональных функций

2.1.1. C2, §2, №3(2)

Найти интеграл:

$$\int \frac{x^2 + 2}{(x-1)(x+1)^2}\, dx \tag{9}$$

Решение. Общий метод нахождения подобных интегралов — разложение "сложной" подынтегральной дроби (правильной, у которой степень многочлена числителя меньше степени многочлена знаменателя) в сумму дробей "попроще" (тоже правильных), каждая из которых уже интегрируется (более-менее понятным способом).

В знаменателе подынтегральной функции стоит произведение $(x-1)(x+1)^2$. Какие знаменатели, таким образом, могли бы быть у дробей-слагаемых, суммой которых представима дробь под интегралом? Очевидно, знаменатели могли быть такими: $(x-1)$, $(x+1)$, $(x+1)^2$, $(x-1)(x+1)$. Последний вариант $(x-1)(x+1)$ можно "отсечь", потому дробь в таким знаменателем, в свою очередь, могла бы быть получена как сумма дробей со знаменателями $(x-1)$ и $(x+1)$. Итого, надо искать три слагаемых, со знаменателями: $(x-1)$, $(x+1)$, $(x+1)^2$.

Что можно сказать про числители? Так как слагаемые тоже должны быть правильными дробями,[6] в общем виде можно записать такое разложение:

$$\frac{x^2 + 2}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx + D}{(x+1)^2}$$

Вместо поиска слагаемого $\frac{Cx+D}{(x+1)^2}$ можно искать слагаемое вида $\frac{C}{(x+1)^2}$ — это не ограничит возможности, потому что

$$\frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} = \frac{Bx + (B + C)}{(x+1)^2}$$

[5] В конце ставим под интегралом модуль, потому что x вообще может быть и отрицательный.

[6] Можно бы было допустить и неправильные дроби в слагаемых, но тогда коэффициенты напротив икс в "неправильных" степенях должны были бы занулиться.

то есть любое слагаемое вида $\frac{Cx+D}{(x+1)^2}$ можно получить как сумму дробей $\frac{B}{x+1}$ и $\frac{C}{(x+1)^2}$ с нужными коэффициентами.

Поэтому будем искать разложение в виде:[7]

$$\frac{x^2+2}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} \tag{10}$$

Приведём сумму справа к общему знаменателю (обратно):

$$\frac{x^2+2}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A(x+1)^2 + B(x+1)(x-1) + C(x-1)}{(x-1)(x+1)^2}$$

Это равенство равносильно следующему:

$$x^2+2 = A(x+1)^2 + B(x+1)(x-1) + C(x-1), \qquad x \neq \pm 1$$

Два многочлена равны во всех точках, кроме, возможно, нескольких ($\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$). (Или, иначе, если собрать всё в одной части и приравнять нулю — многочлен равен нулю во всех точках, кроме, возможно, нескольких.) Отсюда можно заключить, что равенство должно быть верным вообще при всех x:

$$x^2+2 = A(x+1)^2 + B(x+1)(x-1) + C(x-1) \tag{11}$$

А значит, можно просто приравнять коэффициенты при x в одинаковых степенях слева и справа:

$$\begin{cases} 1 = A + B \\ 0 = 2A + C \\ 2 = A - B - C \end{cases}$$

Система три на три, её можно решить (наверно).

Но рассмотрим подробнее другой способ поиска коэффициентов в (11). Раз равенство должно быть верным при всех x, значит... можно просто взять и подставить в него какие-то "удобные" икс!

$$\begin{aligned}
x = -1: &\quad 1 + 2 = 0 + 0 - 2C \Rightarrow \boxed{C = -3/2} \\
x = 1: &\quad 1 + 2 = 4A + 0 + 0 \Rightarrow \boxed{A = 3/4} \\
x = 0: &\quad 0 + 2 = A - B - C \Rightarrow \boxed{B = 1/4}
\end{aligned}$$

Итак, разложение "сложной" подынтегральной дроби по "простым" (10) найдено:

$$\frac{x^2+2}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{3/4}{x-1} + \frac{1/4}{x+1} + \frac{-3/2}{(x+1)^2}$$

И интеграл (9) может быть найден как сумма интегралов:

$$\int \frac{x^2+2}{(x-1)(x+1)^2}\,dx = \int \frac{3/4}{x-1}\,dx + \int \frac{1/4}{x+1}\,dx + \int \frac{-3/2}{(x+1)^2}\,dx$$

[7] Заметим, что из рассуждения выше вытекает, что можно бы было искать разложение и в таком виде:

$$\frac{x^2+2}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{(x+1)^2}$$

В любом случае видно, что степень многочлена в знаменателе раскладываемой в сумму дроби определяет количество "степеней свободы" — сколько коэффициентов надо будет искать справа.

Первый “простой” интеграл:

$$\int \frac{3/4}{x-1}\,dx = \frac{3}{4}\int \frac{1}{x-1}\,d(x-1) = \frac{3}{4}\ln|x-1| + C$$

Второй (из той же серии):

$$\int \frac{1/4}{x+1}\,dx = \ldots = \frac{1}{4}\ln|x+1| + C$$

И третий:

$$\int \frac{-3/2}{(x+1)^2}\,dx = -\frac{3}{2}\int \frac{1}{(x+1)^2}\,d(x+1) = -\frac{3}{2}\frac{(x+1)^{-2+1}}{-2+1} + C = \frac{3}{2(x+1)} + C$$

Итоговый интеграл:

$$\frac{3}{4}\ln|x-1| + \frac{1}{4}\ln|x+1| + \frac{3}{2(x+1)} + C$$

□

2.1.2. C2, §2, №4(2)

Найти интеграл:

$$\int \frac{1}{x^3+1}\,dx$$

Решение. Подынтегральная дробь правильная (выделять целую часть не надо). Поэтому разложим на множители знаменатель:

$$x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$$

Этот номер отличается от предыдущего тем, что теперь в разложении оказывается “скобка” с икс в квадрате, и с ней уже ничего сделать нельзя (так как дискриминант отрицательный (а мы “забываем” про комплексные и снова работаем с действительными числами)).[8]

[8] Но можно сделать и с комплексными корнями:

$$x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

Тогда разложение дроби в сумму можно искать точно по такой же схеме, как в номере ранее:

$$\frac{1}{(x+1)\big(x-(1/2+i\sqrt{3}/2)\big)\big(x-(1/2-i\sqrt{3}/2)\big)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{\big(x-(1/2+i\sqrt{3}/2)\big)} + \frac{C}{\big(x-(1/2-i\sqrt{3}/2)\big)}$$

$$1 = A\big(x-(1/2+i\sqrt{3}/2)\big)\big(x-(1/2-i\sqrt{3}/2)\big) + B(x+1)\big(x-(1/2-i\sqrt{3}/2)\big) + C(x+1)\big(x-(1/2+i\sqrt{3}/2)\big)$$

Например, при $x = -1$ получим:

$$1 = A\big((-3/2)^2 - (i\sqrt{3}/2)^2\big) \Rightarrow A = 1/3$$

И так далее (очевидно, вычисления в этом случая нельзя назвать простыми...)

В этом случае разложение в сумму дробей ищется в следующем виде:[9]

$$\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

Находим коэффициенты:

$$1 = A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1)$$

$$\begin{aligned} x = -1: &\quad 1 = 3A + 0 \Rightarrow \boxed{A = 1/3} \\ x = 0: &\quad 1 = A + C \Rightarrow \boxed{C = 2/3} \\ x = 1: &\quad 1 = A + 2B + 2C \Rightarrow \boxed{B = -1/3} \end{aligned}$$

Сумма интегралов:

$$J \equiv \int \frac{1}{x^3+1}\,dx = \int \frac{1/3}{x+1}\,dx + \int \frac{-x/3+2/3}{x^2-x+1}\,dx$$

С первым интегралом понятно. Разберёмся со вторым. Чтобы его взять, выделим в числителе производную знаменателя $(x^2-x+1)' = 2x-1$:[10]

$$\int \frac{-x/3+2/3}{x^2-x+1}\,dx = -\frac{1}{3}\int \frac{x-2}{x^2-x+1}\,dx = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\int \frac{2(x-2)}{x^2-x+1}\,dx = -\frac{1}{6}\int \frac{(2x-1)-3}{x^2-x+1}\,dx = \blacktriangle$$

Теперь разложим этот интеграл в сумму двух:

$$\blacktriangle = -\frac{1}{6}\left(\int \frac{(2x-1)}{x^2-x+1}\,dx - 3\int \frac{1}{x^2-x+1}\,dx\right)$$

Из них первый — уже сразу берётся (ради этого и был “трюк” с выделением в числителе производной знаменателя):

$$\int \frac{(2x-1)}{x^2-x+1}\,dx = \ln(x^2-x+1) + C$$

Во втором же — выделим полный квадрат в знаменателе (чтобы прийти к одному из “табличных” с икс в квадрате внизу — типа арктангенса или высокого логарифма):

$$x^2 - x + 1 = x^2 - 2\cdot x\cdot\frac{1}{2} + 1 = \left(x^2 - 2\cdot x\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

---

[9] По сути логика такая же, как раньше. Отметим лишь, что если бы скобка, где икс в квадрате, была бы тоже ещё в степени (больше первой), скажем, тоже в квадрате, то разложение было бы такое:

$$\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1} + \frac{Dx+E}{(x^2-x+1)^2}$$

[10] Чтобы прийти к интегралу вида:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \int \frac{1}{f(x)}\,df(x) = \ln\left|f(x)\right| + C$$

где в процессе использована связь между производной и дифференциалом функции:

$$df(x) = f'(x)\,dx$$

И сам этот интеграл:

$$\int \frac{1}{x^2 - x + 1}\,dx = \int \frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}/2}\operatorname{arctg}\frac{x - 1/2}{\sqrt{3}/2} + C$$

Объединяя всё выше написанное, приходим к ответу:

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\left(\ln(x^2 - x + 1) - 3\cdot\frac{1}{\sqrt{3}/2}\operatorname{arctg}\frac{x - 1/2}{\sqrt{3}/2}\right) + C \\ &= \frac{1}{6}\ln\left\{\frac{(x+1)^2}{x^2 - x + 1}\right\} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + C \end{aligned}$$

□

2.2. Интегралы от иррациональных функций

Основной метод нахождения интегралов от иррациональных функций можно сформулировать следующим образом: проведение замен в попытках избавиться от иррациональности (и прийти к интегралу от рациональной функции).

Рассмотрим пример, демонстрирующий суть метода.

Пример. Рассмотрим интеграл:

$$J = \int \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx$$

С одной стороны, он берётся сразу (как табличный):

$$\int \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx = \int (x+1)^{-1/2}\,d(x+1) = 2\sqrt{x+1} + C$$

С другой стороны, можно бы было с помощью замены переменной сначала избавиться от иррациональности:

$$\begin{aligned} &x + 1 \equiv t^2, \quad t > 0 \text{ (для определённости)} \\ &x = t^2 - 1 \\ &dx = d(t^2 - 1) = 2t\,dt \end{aligned}$$

В результате такой замены интеграл примет вид:

$$J = \int \frac{1}{t}\cdot 2t\,dt = 2\int dt$$

Интегрируем и делаем обратную замену, возвращаясь к икс:[11]

$$J = 2t + C = 2\sqrt{x+1} + C$$

□

[11]Так как приняли $t > 0$, то $t = +\sqrt{x+1}$.

2.2.1. C2, §3, №2(7)

Найти интеграл:

$$\int \frac{1}{\sqrt[6]{(x-7)^7(x-5)^5}}\,dx \tag{12}$$

Решение. Пока не видно, что заменять. Но можно немного преобразовать подынтегральное выражение, так что получится интеграл, для которого известна замена, гарантированно приводящая к успеху.[12]

Сделаем так, чтобы под корнем оказалась дробь (точнее, чтобы получилось отношение "скобок"). Например:[13]

$$\frac{1}{\sqrt[6]{(x-7)^7(x-5)^5}} = (x-5)^2\sqrt[6]{\frac{(x-7)^7}{(x-5)^7}} = (x-5)^2\left(\frac{x-7}{x-5}\right)^{7/6}$$

В данном случае от иррациональности можно избавиться, заменив дробь[14] под корнем (и получившийся в результате этого интеграл можно будет взять):

$$\frac{x-5}{x-7} \equiv t^6, \quad t > 0$$

Поймём, на что при этом заменяются x и dx:

$$(t^6-1)x = 7t^6 - 5 \tag{13}$$

Отсюда икс:

$$\boxed{x = \frac{7t^6-5}{t^6-1}}, \quad x - 5 = \frac{2t^6}{t^6-1}$$

Дифференцируя же обе части (13), получаем:

$$d\big((t^6-1)x\big) = d(7t^6-5)$$

$$d(t^6-1)\cdot x + (t^6-1)\cdot dx = (7t^6-5)'\,dt$$

$$\boxed{dx = -\frac{12t^5}{(t^6-1)^2}\,dt}$$

Возвращаясь к интегралу (12):

$$J = \int \frac{1}{(x-5)^2}\cdot\left(\frac{x-5}{x-7}\right)^{7/6}\cdot dx$$

в результате замены получаем:

$$J = \int \frac{1}{\left(\frac{2t^6}{t^6-1}\right)^2}\cdot t^7\cdot\left(-\frac{12t^5}{(t^6-1)^2}\right)dt$$

Интеграл от рациональной функции:

$$J = -3\int dt = -3t + C = -3\left(\frac{x-5}{x-7}\right)^{1/6} + C$$

□

[12] Подробнее см. теорсправку в C2, §3.

[13] Можно бы было, наоборот, сделать так, чтобы $(x-5)$ оказалась сверху.

[14] Дробь вида $\frac{ax+b}{cx+d}$.

2.2.2. C2, §3, №18(3)

Найти интеграл:

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$$

Решение. To be continued… $\square$