Семинар 1

Алексеев Василий

2 сентября 2024

Содержание

К формулировкам и доказательствам (если такие вообще приводятся) стоит относиться критически. Основное в этом конспекте — решение задач (но "критичность" и здесь лучше не отключать). За строгой, ясной и последовательной теорией лучше обращаться к "нормальным" источникам. (Например, к лекциям.)

1. Числа

Рис. 1: Одно яблоко, два яблока, … — натуральные числа используются при счёте предметов.

Натуральные числа используются при счёте предметов (1). Однако при измерении длины чего-то только натуральными числами уже не обойтись. И, скажем, линейка позволяет *оценить* длину в *долях* какого-то “эталона”, например сантиметра (2). Это *рациональные* числа. Но вообще, “идеально точное измерение” почти наверняка попадёт “мимо” любых делений, какие бы маленькие они ни были (3). Такие числа, не укладывающиеся в рациональные, называются *иррациональными*.

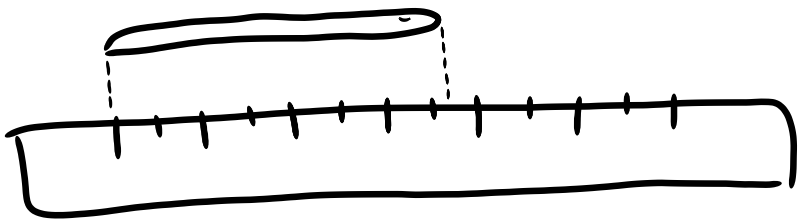

Рис. 2: Рациональные числа — когда для измерения чего-то натуральных уже не хватает. (Но “идеальную точность” достигнуть нельзя — довольствуемся приближениями.)

Кроме этого, выделяют ещё *ноль* и *отрицательные числа*. Вводится множество *целых* чисел — натуральные числа, противоположные им, и ноль. А рациональные и иррациональные могут быть как больше, так и меньше нуля. “Вообще все-все” числа (рациональные и иррациональные) образуют множество *действительных* чисел.

Более формально, действительное число — такое, которое может быть представлено в виде десятичной дроби (конечной или бесконечной). Рациональное число — это такое, которое может быть представлено в виде $\frac{p}{q}$, где $p \in \mathbb{Z}$, а $q \in \mathbb{N}$. При этом также верно, что *рациональные числа и только они представимы в виде конечных или бесконечных периодических десятичных дробей*.

Пример. Периодическая десятичная дробь — такая, у которой дробная часть с какого-то момента строится бесконечным повторением какого-то фрагмента. Например:

$$1{,}0809202420242024\ldots = 1{,}0809(2024)$$

Получим представление приведённого числа в виде обычной дроби. Для этого надо как-то “избавиться” от бесконечной части. И можно прийти к такому способу:

$$10000 \cdot 1{,}0809(2024) = 10809{,}2024(2024)$$
$$10000 \cdot 1{,}0809(2024) - 1{,}0809(2024) = 10809{,}2024 - 1{,}0809$$

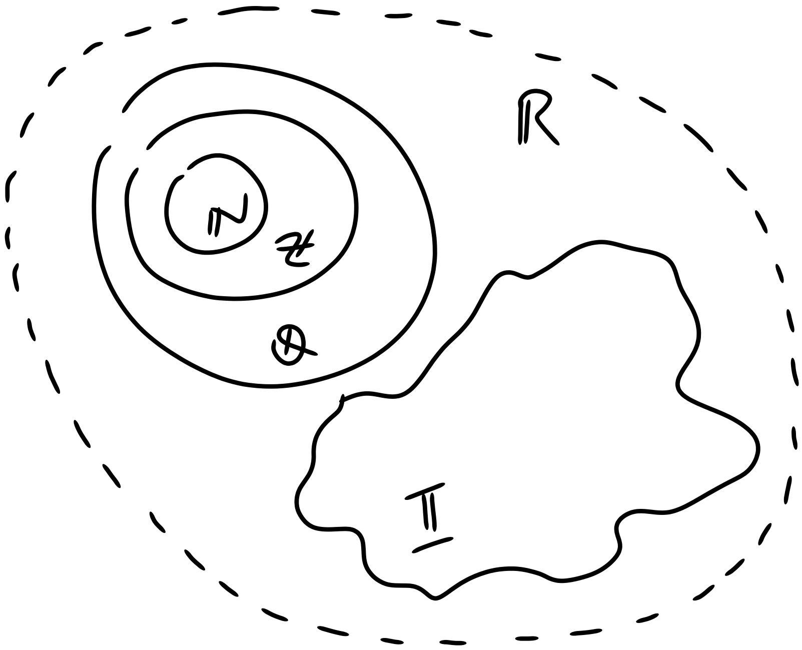

Рис. 3: Иррациональные числа — “не такие, как рациональные” (всё, что не попадает чётко на штрихи, отмеченные на линейке).

И в итоге в виде дроби число выражается так:

$$1{,}0809(2024) = \frac{10809{,}2024 - 1{,}0809}{10000 - 1} = \frac{108092024 - 10809}{9999 \cdot 10000}$$

$\square$

Кроме самих чисел (“придуманных объектов”) существуют ещё действия, которые можно с ними делать (“придуманные операции”). Например, сложение. Со сложением натуральных чисел “всё понятно”: $1 + 1 = 2$. Однако при сложении рациональных уже приходится пользоваться “правилами”, как вообще их складывать. (А как сложить два иррациональных числа?..) Но даже с натуральными числами может быть не так просто: если за “абстрактными” числами стоят какие-то реальные объекты, а за “абстрактным” сложением — какое-то “реальное”, работающее по своим правилам. Например, “одна счётная палочка” + “ещё одна палочка” = “две палочки”. Но “масса одного нуклона” + “масса другого нуклона” > “массы ядра, состоящего из этих нуклонов”. Или распродажное “1 + 1 = 3” (“купи две перчатки — получи третью в подарок”).

В общем, на числа, как и на операции с ними — можно смотреть как отчасти на придуманные “правила игры”, как на модель (возможно) чего-то “реального”, живущего по своим (возможно, не до конца известным) правилам…

1.1. C1, §3, №4

Доказать, что для любых рациональных чисел a и b, таких что $a < b$, найдётся иррациональное число c, удовлетворяющее условию $a < c < b$.

Решение.

Вариант 1, где проводится сопоставление с отрезком, для которого точно "всё хорошо".

Известно, что $\sqrt{3} \in \mathbb{I}$.[1] При этом $\sqrt{3} \approx 1{,}7\ldots \in [1, 2]$. То есть на отрезке $[1, 2]$ точно есть хотя бы одно иррациональное число.

Вернёмся теперь к "абстрактному" отрезку $[a, b]$ из условия. Можно заметить, что каждое число этого отрезка можно представить в виде "a плюс сдвиг". Так, $a = a + 0$, $b = a + (b - a)$ — а у всех внутренних точек сдвиг варьируется от 0 до $(b - a)$:

$$\begin{aligned} x \in [a, b] &\leftrightarrow x = a + s,\ \ s \in [0, b - a] \\ &\leftrightarrow x = a + d(b - a),\ \ d \in [0, 1] \end{aligned} \tag{1}$$

где в последнем переходе сдвиг был выражен через параметр $d \in [0, 1]$ как "доля длины отрезка $[a, b]$".[2]

Но точно такое же представление точек можно привести и для точек "заведомо хорошего" отрезка $[1, 2]$:

$$x \in [1, 2] \leftrightarrow x = 1 + d(2 - 1) = 1 + d,\ \ d \in [0, 1]$$

Получаем *взаимно однозначное соответствие* между точками отрезков $[a, b]$ и $[1, 2]$: точки с одинаковыми значениями d "связаны" (если на отрезке $[a, b]$ точке x_0 соответствует сдвиг с параметром d_0, то на отрезке $[1, 2]$ найдётся единственная точка y_0, которой соответствует сдвиг с таким же d_0, и наоборот). Посмотрим, какая точка x^* отрезка $[a, b]$ соответствует точке $\sqrt{3} \in [1, 2]$. Пусть $\sqrt{3} = 1 + d^*$. Тогда и $x^* = a + d^*(b - a)$. Но из представления $\sqrt{3}$ как суммы $1 + d^*$ следует, что доля $d^* \in \mathbb{I}$! А потому и $x^* \in \mathbb{I}$.

Вариант 2, где просто находится нужное c.

В прошлом сюжете рассматривались сдвиги от начальной точки отрезка. А можно ли из a просто сразу "перепрыгнуть" в иррациональное число? Да, можно, если величина "прыжка" будет иррациональной и не очень большой (чтоб не вылететь на пределы $[a, b]$). Приведём пример такого "прыжка":

$$x^* = a + \frac{\sqrt{3}}{100}(b - a)$$

Вариант 3, где c не находится в явном виде, но немного "замороченно" строится руками.

Перепрыгнуть сразу в иррациональное число — можно, но, возможно, не очень интересно. Поэтому теперь последовательно построим руками "своё" иррациональное число!

Пусть, для наглядности, $a = 1{,}729$ и $b = 1{,}730$. Начнём строить иррациональное число из отрезка $[a, b]$. В первом "приближении" возьмём $x_1 = 1{,}729$ (то есть просто $x_1 = a$). Далее, уйдём чуть в сторону от a (за b уже точно не перелетим): $x_2 = 1{,}7291$. Оба x_1 и x_2 рациональные… И как бы мы ни "плодили" ещё цифр справа после запятой — всё равно

[1]От противного: допустим, $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$. Тогда $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$, где $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$. Домножая на q обе части равенства и потом ещё возводя в квадрат, получаем: $3q^2 = p^2$. Но такого не может быть, потому что если разложить на простые множители левую и правую части, то слева множитель 3 будет в нечётной степени, а справа — в чётной. Противоречие. Значит, $\sqrt{3} \in \mathbb{I}$.

[2]Символом $\leftrightarrow$ обозначена "равносильность переходов": если "слева", то и "справа" ($\rightarrow$), и если "справа", то и "слева" ($\leftarrow$).

десятичная дробь будет конечной. Иррациональное же число не представимо ни в виде конечной, ни в виде бесконечной периодической десятичной дроби. Поэтому надо предложить алгоритм, такой чтоб *в пределе* (при неограниченном количестве присоединений ещё одной цифры справа) получалась бесконечная непериодическая дробь. Сделать так, чтоб дробь была просто бесконечной — не сложно. Можно, например, просто бесконечное число раз приписывать справа единицу:

$$\begin{aligned}
&x_1 = 1{,}729\\
&x_2 = 1{,}7291\\
&x_3 = 1{,}72911\\
&\ldots\\
&x_n = 1{,}72911\ldots 1\\
&\ldots
\end{aligned}$$

Но в таком случае, очевидно, в пределе получаем $1{,}729(1)$ — периодическая десятичная дробь, а потому число рациональное. Нужно как-то "предотвратить" образование периода в дроби... Поэтому опять будем приписывать справа единицы, но, например, будем чередовать их с двойками, так чтобы периода никогда не возникло:

$$\begin{aligned}
&x_1 = 1{,}729\\
&x_2 = 1{,}7291\\
&x_3 = 1{,}72912\\
&x_4 = 1{,}729121\\
&x_5 = 1{,}7291212\\
&x_6 = 1{,}72912122\\
&x_7 = 1{,}729121221\\
&\ldots\\
&x_n = 1{,}72912122122212222122222 1\ldots
\end{aligned}$$

Число x^*, получаемое в пределе при $n \to +\infty$ (при переходе в члену последовательности x_n со всё более высоким номером, то есть при бесконечном дописывании справа цифр по описанному выше алгоритму), лежит на отрезке $[a, b]$ и по построению является бесконечной непериодической десятичной дробью, а потому иррациональное. (Видно, что по такой "схеме" можно построить ещё сколько угодно иррациональных чисел на заданном отрезке.) $\square$

2. Производная

Пусть есть функция $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$. Пусть $x_0 \in X$, и функция определена в некоторой окрестности точки x_0[3] (определена во всех точках "рядом" с x_0). Тогда производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется следующий предел (если он существует):

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Или, в немного других обозначениях:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

[3] Иными словами, x_0 — *внутренняя точка* X.

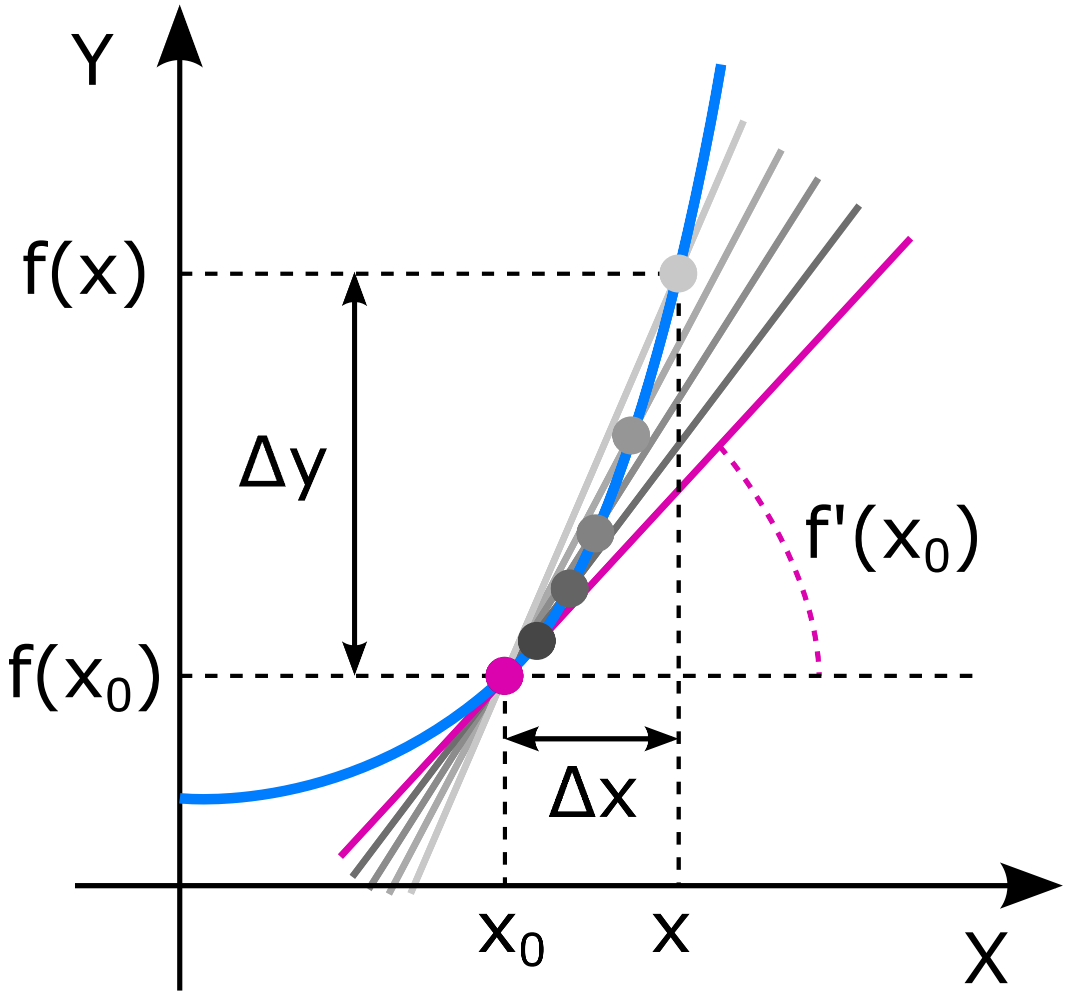

Рис. 4: Производная функции $f(x)$ в точке x_0 — тангенс угла наклона касательной к графику функции в этой точке. А касательная — как *предел* секущей при приближении второго её конца в $x_0 + \Delta x$ к интересуемой точке: $\Delta x \to 0$. (Таким образом, чтобы можно было говорить о производной функции в точке, функция должна быть определена как в самой точке, так и рядом с ней — в её *окрестности*.) (Источник картинки: commons.wikimedia.org/wiki/File:Derivative_of_a_function.svg.)

Саму производную тоже есть несколько вариантов, как обозначать. Так,

$$f'(x_0) \equiv f'(x)|_{x=x_0}$$

(запись справа — подстановка, её смысл: "взяли производную, получили функцию $f'(x)$, и потом подставили вместо x конкретную точку x_0, в которой хотим узнать значение производной"). Или, ещё способ:

$$f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx}$$

где d означает *дифференциал*.[4] Отсюда же можно получить выражение для дифференциала функции в точке:

$$df(x_0) = f'(x_0)\,dx$$

[4]О дифференциале "с физической точки зрения" часто думают как о "(бесконечно) малом приращении". Но на математике так лучше не говорить, потому что такому определению "недостаёт точности" (хотя бы потому, что не понятно, насколько всё-таки малое). С другой стороны, что-то про "малость дифференциала" есть и в математике... Дифференциал функции в точке — это просто линейная функция от дифференциала аргумента: $df(x_0) \equiv f'(x_0)\,dx$ (функция, проходящая через точку x_0 с наклоном $f'(x_0)$).

Пример. Найдём из определения производную функции $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$. Тогда производная в этой точке:

$$\begin{aligned} f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0+\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_0\Delta x + \Delta^2 x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0 \end{aligned}$$

(где в последнем переходе при вычислении предела уже ничего не мешало "просто занулить" Δx).

Таким образом, $f'(x) = 2x$. □

2.1. Некоторые свойства производной

Из определения производной следует, что производная обладает свойством *линейности*:

$$\big(\alpha f(x)\big)' = \alpha f'(x), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$
$$\big(f(x) + g(x)\big)' = f'(x) + g'(x)$$

Производная произведения функций $(fg)(x) = f(x)g(x)$:

$$\boxed{(fg)' = f'g + fg'} \tag{2}$$

Проверим:

$$(fg)'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta)g(x_0+\Delta) - f(x_0)g(x_0)}{\Delta x} = \blacktriangle$$

Добавим и вычтем в числителе слагаемое, так чтобы можно было перегруппировать, вынести за скобку общий множитель и прийти к разности значений в точках "одиночных" функций f и g:

$$\begin{aligned} \blacktriangle &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\big(f(x_0+\Delta x)g(x_0+\Delta x) - f(x_0)g(x_0+\Delta x)\big) + \big(f(x_0)g(x_0+\Delta x) - f(x_0)g(x_0)\big)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\big(f(x_0+\Delta x) - f(x_0)\big)g(x_0+\Delta x) + f(x_0)\big(g(x_0+\Delta x) - g(x_0)\big)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\big(f(x_0+\Delta x) - f(x_0)\big)g(x_0+\Delta x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0)\big(g(x_0+\Delta x) - g(x_0)\big)}{\Delta x} \\ &= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \end{aligned} \tag{3}$$

Производная частного функций $\frac{f(x)}{g(x)}$:

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}} \tag{4}$$

Показать это можно, сведя всё к уже рассмотренному ранее произведению:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(fg^{-1}\right)' = f'g^{-1} + f\left(g^{-1}\right)' = \frac{f'}{g} + f \cdot \left(y^{-1}\right)'\big|_{y=g} \cdot g' = \frac{f'}{g} - f \cdot \frac{1}{g^2} \cdot g' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Дифференциал аргумента — это просто приращение аргумента: $dx = x - x_0$. Но при приближении к x_0 приращение функции становится всё больше "похоже" на дифференциал, так что в пределе отношение "малых приращений" в самом деле становится равно отношению дифференциалов, то есть производной ("касательная в пределе становится секущей").

2.2. Производная сложной функции

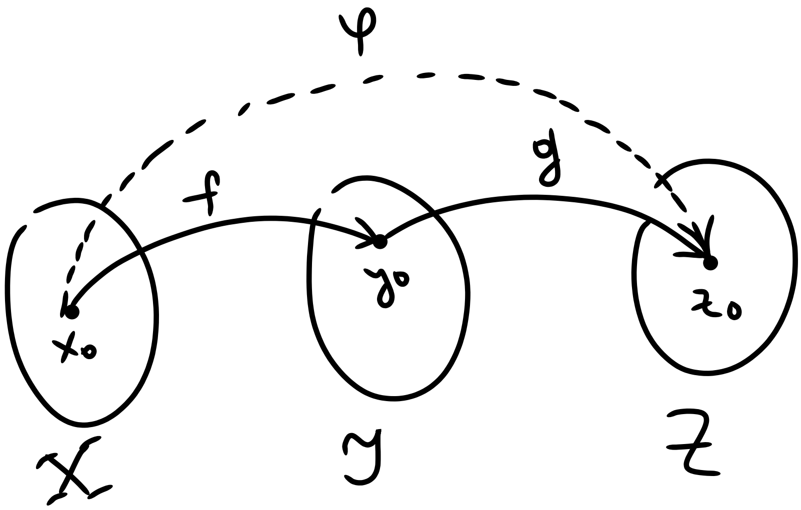

Рис. 5: Функции $f: X \to Y$ и $g: Y \to Z$ и сложная функция $\phi: X \to Z$, $\phi(x) = g\big(f(x)\big)$.

Пусть есть функции $f: X \to Y$ и $g: Y \to Z$. Пусть $x_0 \in X$, $f(x_0) \equiv y_0$. Тогда если существуют производные $f'(x_0)$ и $g'(y_0)$, то производная *сложной функции* $\phi(x) = g\big(f(x)\big)$ (см. рисунок 5) равна:

$$\phi'(x_0) = \Big(g\big(f(x)\big)\Big)'\Big|_{x=x_0} = g'(y_0)|_{y_0=f(x_0)} f'(x_0) \tag{5}$$

Это тоже можно показать из определения производной (с парой “махинаций” типа “добавления/убирания” чего-то (3)):

$$\begin{aligned}
\phi'(x_0) &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{g\big(f(x_0+\Delta x)\big) - g\big(f(x)\big)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{g\big(f(x_0+\Delta x)\big) - g\big(f(x)\big)}{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta y\to 0} \frac{g(y_0+\Delta y) - g(y_0)}{y - y_0} \cdot \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\
&= g'(y_0) f'(x_0)
\end{aligned}$$

2.3. Некоторые табличные производные

Приведём “базовые” производные.

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad \alpha \in \mathbb{R},\ x > 0 \quad (\text{или } \alpha \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}) \tag{6}$$

$$(e^x)' = e^x \tag{7}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a \tag{8}$$

Пример. Покажем последнюю формулу:

$$(a^x)' = \left(e^{x\ln a}\right)' = \left(e^y\right)'|_{y=x\ln a} \cdot (x\ln a)' = a^x \cdot \ln a$$

□

$$\ln' x = \frac{1}{x} \tag{9}$$

$$\sin' x = \cos x \tag{10}$$

$$\cos' x = -\sin x \tag{11}$$

$$\operatorname{tg}' x = \frac{1}{\cos^2 x} \tag{12}$$

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{13}$$

Пример. Посмотрим, почему получается такое выражение для производной арксинуса. Область значений arcsin есть $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Значит, на этом промежутке arcsin будет функцией, *обратной* функции sin:

$$\arcsin \sin x = x, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

С другой стороны, sin будет обратной для arcsin (на другом промежутке):

$$\sin \arcsin x = x, \quad x \in [-1, 1]$$

Продифференцируем последнее равенство:

$$\begin{aligned}
&(\sin \arcsin x)' = x' \\
&\sin' y|_{y=\arcsin x} \cdot \arcsin' x = 1 \\
&\cos \arcsin x \cdot \arcsin' x = 1
\end{aligned}$$

Откуда получаем:

$$\arcsin' x = \frac{1}{\cos \arcsin x}$$

Но так как $\arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, то $\cos \arcsin x > 0$. Поэтому можно выразить косинус следующим образом (корень с “плюсом”):

$$\cos \arcsin x = \sqrt{1 - \sin^2 \arcsin x} = \sqrt{1-x^2}$$

В результате имеем (13). □

$$\operatorname{arctg}' x = \frac{1}{1+x^2} \tag{14}$$

Пример. Найдём производную функции $y = |x|$.

Если нарисовать график функции, то будет видно, что в любой его точке, кроме $x = 0$, можно провести единственную касательную: правее нуля тангенс угла наклона будет равен $+1$, левее он будет -1. В нуле же можно провести несколько касательных, поэтому производная в этой точке не определена.

Если решать не графически, а аналитически, то можно просто раскрыть модуль и рассмотреть функцию на двух участках:

$$y = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Тогда производная:

$$y' = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

При взятии производной из первого условия $x \geq 0$ был исключён ноль, потому что это "крайняя" точка промежутка — а чтобы производная существовала, функция должна быть определена в окрестности (то есть таким образом, разбивкой на случаи "$x \geq 0$"/"$x < 0$" производную в нуле не найти). Точку ноль можно бы было рассмотреть отдельно, попытавшись найти производную в ней по определению. Но это бы тоже ни к чему не привело, потому что при "движении" в разные стороны от нуля (влево или вправо, то есть $\Delta x < 0$ или $\Delta x > 0$) получались бы разные производные, чего быть не может. □

2.4. С1, §13, №32

Найти производную функции $y = f(x)$ и указать её область существования:

$$y = \log_x 2^x$$

Решение. Логарифм с переменным основанием — такой функции нет среди "табличных производных". Но можно перейти к новому основанию (фиксированному):

$$\log_x 2^x = \frac{\ln 2^x}{\ln x} \tag{15}$$

Теперь можно воспользоваться правилом вычисления производной частного:

$$\left(\frac{\ln 2^x}{\ln x}\right)' = \frac{(\ln 2^x)' \ln x - \ln 2^x (\ln x)'}{\ln^2 x} = \blacktriangle$$

Производная сложной функции в числителе:[5,6]

$$(\ln 2^x)' = \left.\frac{1}{y}\right|_{y=2^x} \cdot (2^x)' = \frac{1}{2^x} \cdot 2^x \ln 2 = \ln 2$$

Поэтому, возвращаясь к производной $f'(x)$:

$$\blacktriangle = \frac{\ln 2 \ln x - \ln 2^x \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{\ln 2(\ln x - 1)}{\ln^2 x}$$

Область определения $f'(x)$:

$$\begin{cases} x > 0 \\ \ln^2 x \neq 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \leftrightarrow x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$$

□

[5] Или, если предварительно упростить, можно было обойтись и без сложной функции: $\ln 2^x = x \ln 2 \Rightarrow (\ln 2^x)' = (x \ln 2)' = \ln 2$.

[6] (И упрощать тогда уж лучше было ещё раньше, выражение (15) для самой функции $f(x)$…)

2.5. С1, §13, №79

Найти производную функции $y = f(x)$:

$$y = \sin \ln |x|$$

Решение. Данная в условии функция является “сложной-сложной” функцией:

$$y = \sin\Big(\ln\big(|x|\big)\Big)$$

Поэтому её производная (две ступени “разворачивания”):

$$\begin{aligned}
y' &= \sin' z|_{z=\ln|x|} \cdot \ln' y|_{y=|x|} \cdot |x|' \\
&= \cos z|_{z=\ln|x|} \cdot \frac{1}{y}\bigg|_{y=|x|} \cdot \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \\
&= \cos \ln |x| \cdot \frac{1}{|x|} \cdot \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Можно заметить, что “ветвление” для случаев $x > 0$ и $x < 0$ можно убрать, придя к такому выражению:

$$y' = \frac{\cos \ln |x|}{x}$$

□

3. Неопределённый интеграл

Первообразной функции $f(x)$ на некотором промежутке называется функция $F(x)$, такая что на данном промежутке $F'(x) = f(x)$.

Пример. Пусть $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$. Тогда $F(x) = \frac{x^2}{2}$ будет первообразной. Но и $\frac{x^2}{2} + 1$ тоже будет первообразной, и $\frac{x^2}{2} + 10$, и вообще $F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$.

Существуют ли первообразные “другого” вида? Пусть $F'(x) = f(x)$ и $G'(x) = f(x)$. Что можно сказать про связь между $F(x)$ и $G(x)$?

$$F'(x) = G'(x) \leftrightarrow F'(x) - G'(x) = 0 \leftrightarrow \big(F(x) - G(x)\big)' = 0$$

то есть производная функции $F - G$ равна нулю на $\mathbb{R}$ (промежуток, на котором $F(x)$ и $G(x)$ являются первообразными функции $f(x)$). Но в таком случае “очевидно”, что это константная функция, то есть $F - G = C \in \mathbb{R}$.

Поэтому все первообразные функции $f(x)$ имеют вид $F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$. □

Неопределённым интегралом функции $f(x)$ называется *совокупность всех первообразных* этой функции (см. рисунок 6):

$$\int f(x)\,dx = \{F(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\}$$

где $F(x)$ — какая-то одна первообразная. Обычно эту запись упрощают, опуская скобки, означающее множество (хотя это всё так же остаётся множеством):[7]

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

[7] В некоторых таблицах интегралов можно увидеть, что в упрощениях идут ещё дальше и пишут просто $\int f(x)\,dx = F(x)$. Но на контрольных или экзаменах так точно писать не надо :)

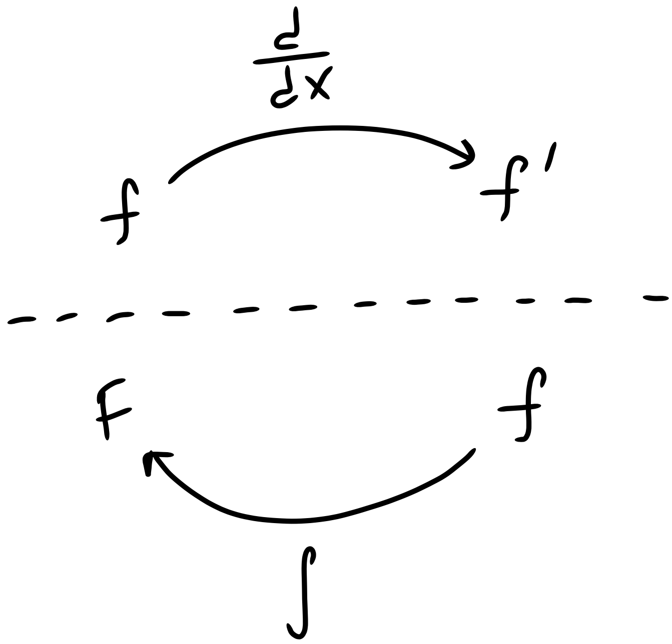

Рис. 6: Об интегрировании можно думать как о действии, в некотором смысле обратном дифференцированию (в том смысле, что интегрирование действует “в другую сторону”). Однако в строгом смысле интегрирование не является обратной операцией, хотя бы потому что результат взятия производной от функции — функция, результат же взятия неопределённого интеграла от функции — *множество* функций.

3.1. Некоторые свойства неопределённого интеграла

Из определения производной и связи интеграла с производной:

$$\int f'(x)\,dx = \int df(x) = f(x) + C$$

Из свойств производных следует свойство *линейности* неопределённого интеграла:

$$\int \alpha f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$
$$\int \big(f(x) + g(x)\big)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

3.2. Интегрирование по частям

Если существует интеграл вида $\int u(x)v'(x)\,dx$, то его можно считать следующим образом (формула интегрирования по частям):

$$\int uv'\,dx = uv - \int vu'\,dx \tag{16}$$

Формулу можно представить и в таком виде:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \tag{17}$$

Убедимся, что (16) “работает”. В левой и правой частях формулы стоят множества первообразных. Пусть $F(x)$ — какая-то первообразная у интеграла слева, то есть $F'(x) = uv'$.

Пусть $G(x)$ — какая-то первообразная у интеграла справа, то есть $G'(x) = vu'$. Но тогда в правой части формулы (16) оказывается функция $uv - G$, производная которой:

$$(uv - G)' = (uv)' - G' = u'v + uv' - vu' = uv' = F'(x)$$

совпадает с производной первообразной слева. Таким образом, первообразная слева лежит во множестве первообразных справа, и наоборот. То есть множества первообразных совпадают. О чём и говорит формула (16).

3.3. Некоторые табличные интегралы

Приведём формулы некоторых "популярных" интегралов.

$$\int x^\alpha\, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1 \tag{18}$$

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + C \tag{19}$$

Замечание. Почему справа в (19) стоит модуль?

Если $x > 0$, то очевидно, что $\ln' x = \frac{1}{x}$. Однако подынтегральная функция $\frac{1}{x}$ определена и при $x < 0$, поэтому и на этой области хорошо бы узнать первообразную. Убеждаемся, что

$$\ln'(-x) = \left.\frac{1}{y}\right|_{y=-x} \cdot (-x)' = \frac{1}{-x} \cdot -1 = \frac{1}{x}$$

Таким образом, в самом деле $\ln'|x| = \frac{1}{x}$. (Ещё это можно попробовать представить графически.)

$$\int e^x\, dx = e^x + C \tag{20}$$

$$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0,\ a \neq 1 \tag{21}$$

Пример. Последнее соотношение можно проверить просто по производной, а можно и "по-честному" вычислить интеграл, сведя его к интегралу от e^x. Сделаем это ради дополнительной демонстрации "приёмов интегрирования":

$$\begin{aligned}\int a^x\, dx = \int e^{x\ln a}\, dx = \frac{1}{\ln a}\int e^{x\ln a}\, d(x\ln a) \\ = \frac{1}{\ln a}\int e^y\, dy\Big|_{y=x\ln a} = \frac{1}{\ln a}e^y\Big|_{y=x\ln a} + C = \frac{a^x}{\ln a} + C\end{aligned}$$

□

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C \tag{22}$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C \tag{23}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \operatorname{tg} x + C \tag{24}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C \tag{25}$$

Пример. Рассмотрим ещё "усложнённую версию" последнего интеграла (при $a > 0$):

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\,d\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy\bigg|_{y=x/a} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

Итого:

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C, \quad a > 0 \tag{26}$$

□

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + C \tag{27}$$

Опять, усложним и по аналогии с примером выше получим:

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + C, \quad a \neq 0 \tag{28}$$

Пример. Помимо того, чтоб "усложнять", можно что-то поменять. Так, сделаем разность вместо суммы в знаменателе подынтегральной функции (28):

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \int \frac{1}{(x-a)(x+a)}\,dx = \blacktriangle$$

"Заметим", что дробь, стоящая под интегралом, представима как сумма дробей:

$$\frac{1}{(x-a)(x+a)} = \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)\cdot\frac{1}{2a}$$

Поэтому интеграл можно переписать как сумму интегралов:

$$\blacktriangle = \frac{1}{2a}\left(\int \frac{1}{x-a}\,dx - \int \frac{1}{x+a}\,dx\right) = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

Итого ("высокий логарифм"):

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, \quad a \neq 0 \tag{29}$$

□

Изменение же знаков в знаменателе (26) приводит к такому интегралу ("длинный логарифм"):

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\,dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C, \quad a \neq 0 \tag{30}$$

3.4. C2, §1, №13(7)

Найти интеграл:

$$J = \int \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}}\,dx$$

Решение. Сделаем замену, ~~в надежде, что это поможет~~, упростив вид подынтегральной функции:

$$\begin{aligned}
&e^x = y, \quad y > 0\\
&x = \ln y\\
&dx = d(\ln y) = \ln' y\,dy = \frac{1}{y}\,dy
\end{aligned}$$

В результате замены приходим к интегралу вида:

$$J = \int \frac{1}{\sqrt{y-1}} \cdot \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{1}{y\sqrt{y-1}}\,dy$$

Интеграл всё ближе к какому-то табличному. Единственное, что теперь "мешает" — это корень в знаменателе (точнее, что в знаменателе стоит произведение одночлена на корень). Устраним корень ещё одной заменой, ~~в надежде, что это упрощение не приведёт к усложнению чего-то другого~~:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{y-1} = z, \quad z \geq 0\\
&y = z^2 + 1\\
&dy = d(z^2+1) = (z^2+1)'\,dz = 2z\,dz
\end{aligned}$$

Интеграл после замены:

$$J = \int \frac{1}{(z^2+1)z} \cdot 2z\,dz = 2\int \frac{1}{z^2+1}\,dz$$

А это табличный интеграл, поэтому теперь остаётся только выписать первообразную и ещё провести обратные замены:

$$\begin{aligned}
J &= 2\,\mathrm{arctg}\,z + C\\
&= 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{y-1} + C\\
&= 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{e^x-1} + C
\end{aligned}$$

□

3.5. C2, §1, №23(1)

Найти интеграл:

$$J = \int \ln^2 x\,dx$$

Решение.

Способ 1: замена + по частям.

Заменим ~~неудобный~~ "нетабличный" логарифм:

$$\begin{aligned}
&\ln x = y, \quad y \in \mathbb{R}\\
&x = e^y\\
&dx = d(e^y) = e^y\,dy
\end{aligned}$$

Интеграл после замены:

$$J = \int y^2 e^y \, dy$$

А теперь можно несколько раз проинтегрировать по частям, чтобы y^2 ушла. Первое "по-частям":

$$J = \int y^2 \, de^y = y^2 e^y - \int e^y \, d(y^2) = y^2 e^y - 2\int y e^y \, dy = \blacktriangle \tag{31}$$

Второе "по-частям":

$$\blacktriangle = y^2 e^y - 2\int y \, d(e^y) = y^2 e^y - 2\left(y e^y - \int e^y \, dy\right) = y^2 e^y - 2(y e^y - e^y) + C \tag{32}$$

Заменяя обратно y на x, получаем:

$$J = x \ln^2 x - 2(x \ln x - x) + C$$

Способ 2: сразу по частям.

Можно попробовать интегрировать сразу по частям, без замены. При этом в качестве "dv" выступает просто dx:

$$J = \int \ln^2 x \, dx = x \ln^2 x - \int x \, d(\ln^2 x) = \bigstar$$

Найдём отдельно дифференциал:

$$d(\ln^2 x) = \left(\ln^2 x\right)' dx = 2y|_{y=\ln x} \cdot \ln' x \, dx = 2\frac{\ln x}{x} \, dx$$

Возвращаясь к интегралу и беря аналогично второй раз по частям:

$$\begin{aligned} \bigstar = x \ln^2 x - 2\int \ln x \, dx &= x \ln^2 x - 2\left(x \ln x - \int x \, d\ln x\right) \\ &= x \ln^2 x - 2\left(x \ln x - \int dx\right) = x \ln^2 x - 2(x \ln x - x) + C \end{aligned} \tag{33}$$

□

3.6. C2, §1, №24(3)

Найти интеграл:

$$J = \int e^{ax} \sin bx \, dx, \quad a^2 + b^2 \neq 0$$

Решение. Выражение $a^2 + b^2 \neq 0$ есть лишь "математичный" способ сказать, что хотя бы один из коэффициентов a и b точно не ноль.

Что можно сделать с J? Точно можно посмотреть на него как на интеграл вида $\int u \, dv$ и попробовать взять его по частям. Причём в качестве "dv" можно выбрать и $e^{ax} \, dx$, и $\sin bx \, dx$. Только вот дифференцирование "u" в этом случае (которая будет либо $\sin bx$, либо e^{ax} соответственно) ни к чему хорошему вроде бы не приведёт (она не пропадёт)… Но "по частям" прямо напрашивается, да и других вариантов особо нет, к тому же "не знаешь, что делать — делай то, что можешь". В общем, по частям.

Пусть $u = e^{ax}$ и $dv = \sin bx\, dx$. Преобразуем выражение для dv, выделив дифференциал функции:

$$\sin bx\, dx = \sin bx\, d\left(\frac{bx}{b}\right) = \frac{1}{b}\sin bx\, d(bx) = \frac{1}{b}\sin y\, dy|_{y=bx} = \frac{1}{b}d(-\cos y)|_{y=bx} = -\frac{1}{b}d\cos bx \tag{34}$$

Из выражения выше видно, что мы "неявно предположили", что $b \neq 0$. Хотя, возможно, могло быть и так, что $b = 0$, но $a \neq 0$. Но примем всё-таки, что $b \neq 0$, и если получим ответ для этого случая, то потом уже посмотрим, имеет ли смысл рассматривать отдельно вариант $b = 0$.

Возвращаемся к интегралу:

$$J = -\frac{1}{b}\int e^{ax}\, d\cos bx = -\frac{1}{b}\left(e^{ax}\cos bx - \int \cos bx\, de^{ax}\right)$$

Дифференциал функции в получившемся после интегрирования по частям новом интеграле:

$$de^{ax} = \left(e^{ax}\right)'\, dx = \left(e^{y}\right)'|_{y=ax}\cdot(ax)'\, dx = ae^{ax}\, dx \tag{35}$$

Итого, выражение для интеграла J после применения "по частям":

$$J = -\frac{1}{b}\Bigg(e^{ax}\cos bx - a\underbrace{\int e^{ax}\cos bx\, dx}_{I}\Bigg) \tag{36}$$

Ничего хорошего вроде бы не получилось (а как будто даже наоборот). Зато снова есть возможность проинтегрировать по частям — интеграл I, возникший в правой части. Так как e^{ax} только что вынесли из-под дифференциала (35), то занесём теперь под дифференциал функцию $\cos bx$ (иначе придём ровно к тому же, с чего начали). (Преобразования аналогичны (34)):

$$\cos bx\, dx = \frac{1}{b}\cos bx\, d(bx) = \frac{1}{b}d\sin bx$$

Теперь берём по частям интеграл I:

$$I = \frac{1}{b}\int e^{ax}\, d\sin bx = \frac{1}{b}\left(e^{ax}\sin bx - \int \sin bx\, de^{ax}\right) \overset{(35)}{=} \frac{1}{b}\left(e^{ax}\sin bx - a\int e^{ax}\sin bx\, dx\right)$$

Внимательно вглядываясь в получившееся выражение, можно заметить, что справа опять появился интеграл J!

$$I = \frac{1}{b}\left(e^{ax}\sin bx - aJ\right) \tag{37}$$

Но интеграл I сам возник ранее при вычислении J (36). Поэтому, если подставить в (36) вместо I выражение (37), то придём к уравнению относительно J![8]

$$J = -\frac{1}{b}\left(e^{ax}\cos bx - a\cdot\frac{1}{b}\left(e^{ax}\sin bx - aJ\right)\right)$$

Раскрывая скобки, перенося туда-сюда слагаемые из одной части в другую, упрощая (и не забывая добавить "$+C$", чтоб получить множество первообразных), получаем:

$$J = \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2 + b^2} + C$$

[8]Всё-таки не совсем "уравнению", потому что J — это множество.

Вспомним, что мы начали с допущения $b \neq 0$. Но видно, что в финальном ответе разрешается случай и $b = 0$. Единственное, что важно — это что $a^2 + b^2 \neq 0$. Но это дано по условию. Таким образом, интеграл нашли. (Можно было бы в самом начале по-другому выбрать u и dv — путь вычислений был бы немного другой, но ответ бы получился такой же.) $\square$