Семинары 6 + 7 + 8 (половинка)

Алексеев Василий

7 + 21 + 28 октября 2024

Содержание

К формулировкам и доказательствам (если такие вообще приводятся) стоит относиться критически. Основное в этом конспекте — решение задач (но "критичность" и здесь лучше не отключать). За строгой, ясной и последовательной теорией лучше обращаться к "нормальным" источникам. (Например, к лекциям.)

1. Функции

1.1. Обратная функция

Определение 1.1. Пусть есть функция $f : X \to Y$.

Обратной к ней называется функция $g : Y \to X$, такая что

$$\begin{cases} f\big(g(y)\big) = y, & \forall y \in Y \\ g\big(f(x)\big) = x, & \forall x \in X \end{cases}$$

Обозначается обратная к f функция[1] как f^{-1}.[2]

Утверждение 1.1 (Существование обратной функции)**.** *Если функция f определена, строго монотонна и непрерывна на отрезке, то обратная функция также определена, строго монотонна и непрерывна на отрезке (другом).*

Доказательство. Пусть функция f определена на отрезке $X \equiv [a, b]$. Пусть для определённости функция f монотонно возрастает, то есть $x_1 < x_2 \to f(x_1) < f(x_2)$.

Тогда, очевидно, $m \equiv f(a)$ есть минимум $f\big([a, b]\big)$ (минимум множества значений функции f на отрезке $[a, b]$), а $M \equiv f(b)$ есть максимум f на $[a, b]$. По теореме о промежуточных значениях непрерывной на отрезке функции, образ отрезка $[a, b]$ под действием f есть отрезок $Y \equiv [m, M]$.

Покажем, что непрерывная для f функция существует. Пусть $y \in Y$. Тогда найдётся $x \in X$, такой что $f(x) = y$. Но будет ли этот x *единственным*? (Можно ли построить *правило* перевода из Y в X?) Да, потому что f строго монотонна: если $x' \neq x$, то либо $f(x') < f(x)$ (при $x' < x$), либо $f(x') > f(x)$ (при $x' > x$), но в любом случае $f(x') \neq f(x)$. То есть не существует $x' \neq x$, такого чтоб было $f(x') = f(x)$. Итого, правило однозначного перевода из Y в X существует, то есть существует обратная функция f^{-1}.

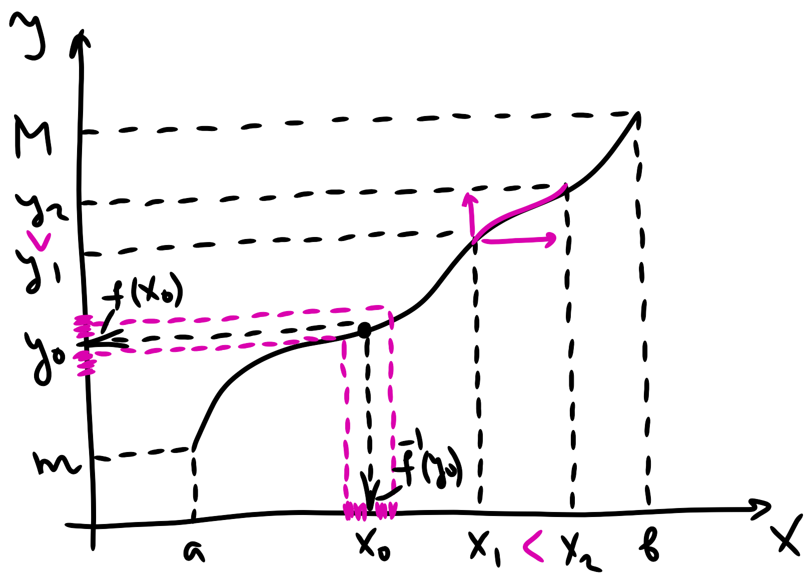


Рис. 1: Строго монотонная непрерывная на отрезке функция f (и обратная для неё f^{-1}, если смотреть на график под другим углом).

[1]Которая если есть, то единственная.
[2]Это не “f в степени минус один” — это одно неделимое обозначение.

Покажем, что обратная функция f^{-1} строго монотонна (1). (При этом из графика видно, что она должна строго монотонно возрастать.) Надо показать, что $y_1 < y_2 \to f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$. Но тогда можно просто воспользоваться монотонностью f: если $y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$, то из неравенства для образов $y_1 < y_2$ сразу получаем аналогичное неравенство для прообразов $x_1 < x_2$. Потому что строгая монотонность f может по сути выражаться таким условием *в две стороны*:

$$x_1 < x_2 \quad \Leftrightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$$

(определение монотонной — это только “$\Rightarrow$”, но “$\Leftarrow$” в таком случае также будет верна.)

Итак, осталось показать только непрерывность f^{-1} (1). Что есть непрерывность? “Близость там — близость тут”. Но так как f^{-1} есть по сути “взгляд с другой стороны” на отношение между X и Y, налагаемое f, то и “взаимная близость” (непрерывность) должна сохраниться. То есть план такой, чтоб показать непрерывность f^{-1}, сведя всё к уже известной f (в принципе, как и в прошлом рассуждении про монотонность).

Итак, f непрерывна, значит, для любой последовательности $\{x_n\}: \lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ получим также $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ (где x_0 — любая фиксированная точка X). Аналогично, обратная f^{-1} будет непрерывной, если для любой последовательности $\{y_n\}: \lim_{n\to\infty} y_n = y_0$ получим также $\lim_{n\to\infty} \underbrace{f^{-1}(y_n)}_{x_n} = f^{-1}(y_0) \equiv x_0$ (где y_0 — любая фиксированная точка Y).

Это надо доказать. Как вариант, допустим, что это не так, то есть что верно противное:

$$\exists\{y_n\}: \lim_{n\to\infty} y_n = y_0,\ \neg\left(\lim_{n\to\infty} f^{-1}(y_n) = f^{-1}(y_0)\right)$$

Факт того, что предел $\left\{f^{-1}(y_n)\right\}$ не есть $f^{-1}(y_0)$, перепишем в терминах окрестностей:

$$\exists\{y_n\}: \lim_{n\to\infty} y_n = y_0,\ \exists\varepsilon > 0: \forall N\ \exists n \geq N: \left|f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y_0)\right| \geq \varepsilon$$

Иными словами, бесконечно много элементов $f^{-1}(y_n)$ последовательности $\left\{f^{-1}(y_n)\right\}$ лежат от $f^{-1}(y_0)$ на расстоянии ε и больше. Выделим их в отдельную подпоследовательность $\left\{f^{-1}\left(y_{n_k}\right)\right\} = \left\{x_{n_k}\right\}$ (все элементы этой подпоследовательности находятся вне “ε-трубки” от $f^{-1}(y_0) = x_0$). Эта подпоследовательность лежит на отрезке $X = [a, b]$, то есть ограничена, поэтому… из неё можно выделить сходящуюся подпоследовательность! (по теореме Больцано – Вейерштрасса) Обозначим её как $\left\{f^{-1}\left(y_{n_{k_l}}\right)\right\} = \left\{x_{n_{k_l}}\right\}$.[3] Она сходится к чему-то из того же отрезка X,[4] при этом, очевидно, её предел отличен от x_0, и пусть равен x_0'. Но на этом уже “всё”, потому что тогда в силу непрерывности и строгой монотонности f получаем:

$$x_{n_{k_l}} \xrightarrow{l\to\infty} x_0' \neq x_0 \quad \Rightarrow \quad f\left(x_{n_{k_l}}\right) \xrightarrow{l\to\infty} f(x_0') \neq f(x_0)$$

Но ведь начали с того, что

$$y_n \xrightarrow{n\to\infty} y_0 \quad \Leftrightarrow \quad f\left(x_n\right) \xrightarrow{n\to\infty} f(x_0) \quad \Rightarrow \quad f\left(x_{n_{k_l}}\right) \xrightarrow{l\to\infty} f(x_0)$$

Противоречие. Значит, предположение было неверно и обратная функция f^{-1} также непрерывна. □

[3]Уже поздно останавливаться с усложнением обозначений. На самом деле у автора появился даже интерес всё корректно до конца описать, и посмотреть, насколько громоздкое обозначение в итоге получится)

[4]Почему не может сходиться к чему-то вне отрезка?

1.2. Отображение. Инъективность и сюръективность

Источник раздела: *ЛА5*.

Об *отображении* $\phi : X \to Y$ можно думать как о правиле, которое *каждому* элементу множества X ставит в соответствие *единственный* элемент множества Y[5] (2). Если отображение ϕ переводит элемент $x \in X$ в элемент $y \in Y$, то можно записать $\phi(x) = y$, при этом y называется *образом* x, а x — прообразом y (одним из возможных, если их несколько).

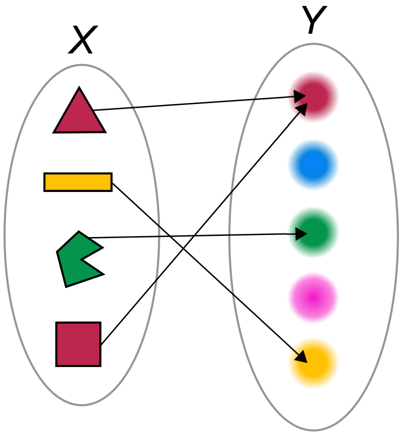


Рис. 2: Отображение: каждому элементу X соответствует единственный элемент Y. (Источник картинки.)

Можно отметить несколько свойств, которыми могут обладать произвольные отображения.

Определение 1.2. Отображение ϕ называется *инъективным*, если разные элементы отображаются в разные (3a): $x_1, x_2 \in X,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow \phi(x_1) \neq \phi(x_2)$. Иными словами, если у элемента $y \in Y$ есть прообраз, то он единственный.

Определение 1.3. Отображение ϕ называется *сюръективным*, если у *любого* элемента $y \in Y$ есть прообраз (3b): $\forall y \in Y\ \exists x \in X : \phi(x) = y$.

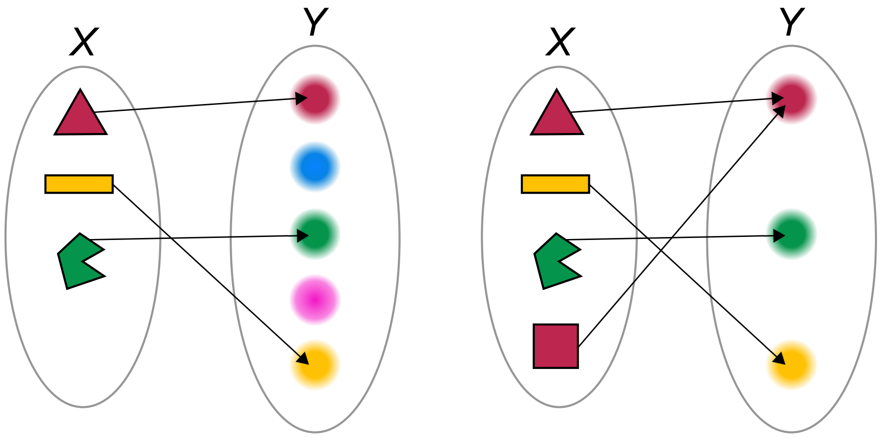
Факт наличия у отображения обоих приведённых выше свойств сразу выделяется в отдельное свойство.

Определение 1.4. Отображение ϕ называется *биективным*, если у *любого* элемента $y \in Y$ есть *единственный* прообраз: $\forall y \in Y\ \exists! x \in X : \phi(x) = y$.

Помимо множества X (области определения отображения ϕ, или domain), и множества Y (для которого, похоже, в русском языке нет специального названия, а по-английски — codomain) можно выделить ещё одно "интересное" множество, связанное с отображением ϕ — это *множество значений* отображения $\operatorname{Im}\phi \subseteq Y$, которое определяется как совокупность всех элементов $y \in Y$, в которые в принципе "можно попасть" под действием отображения:

$$\operatorname{Im}\phi = \{y \in Y \mid \exists x \in X : \phi(x) = y\}$$

[5]Множество X в таком случае называется *областью определения* отображения ϕ (множество "допустимых" входов). Таким образом, область определения — это часть определения отображения (определение области определения отображения — "тот самый X" из определения отображения). Поэтому, когда в "школьных" номерах по математике просили "найти область определения функции", то имели в виду найти "максимально возможное по количеству элементов множество, которое могло бы выступать в роли области определения функции" (если бы привели полноценное определение этой функции, а не просто формулу).



(a) Инъекция. (b) Сюръекция.

Рис. 3: Инъекция: "разные в разные", или "если есть прообраз, то один". Сюръекция: "у каждого есть хотя бы один прообраз".

Тогда сюръективность означает, что $\operatorname{Im}\phi = Y$.

2. Дифференциал

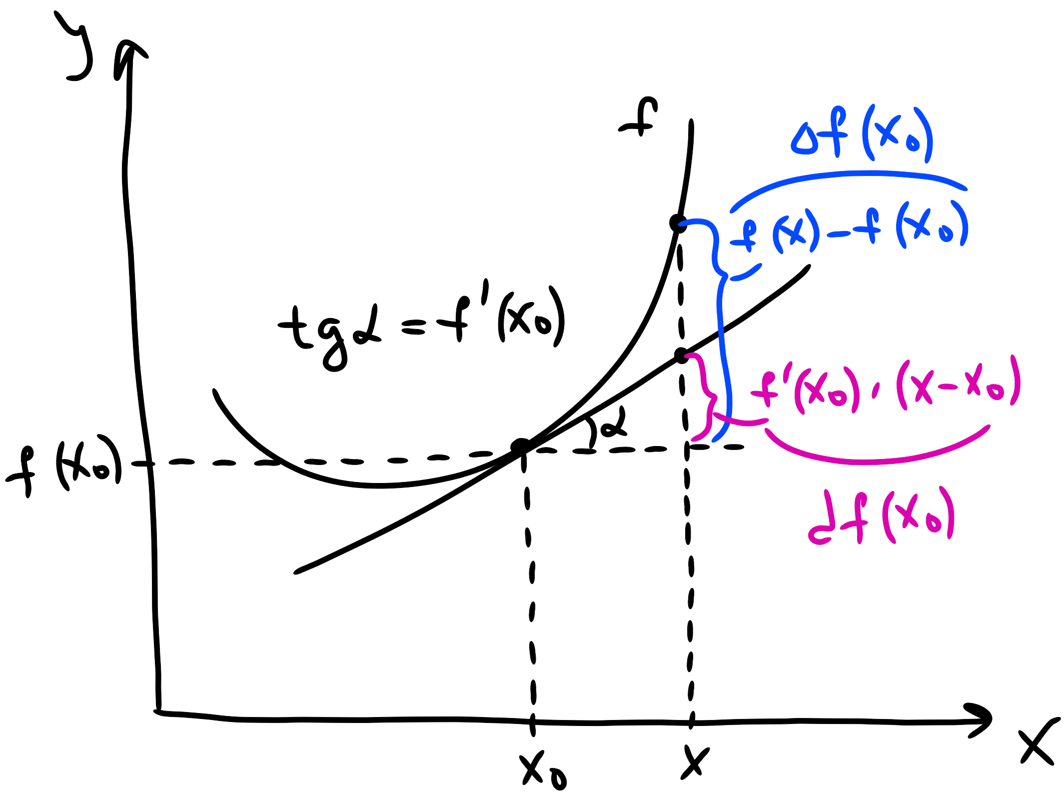


Рис. 4: Вблизи точки x_0 значение функции $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.

В "близкой" окрестности точки x_0 график функции "в некотором приближении" представим как график касательной в точке x_0 (4), — чем ближе окрестность, тем точнее такое представление — то есть приращение $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$ в точке x_0 функции можно "оценить" так:

$$f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Оказывается, что можно написать и “нормальное” (строгое) равенство без приближений:

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0) + o(x - x_0), \quad x \to x_0$$

где $o(x - x_0)$ есть o-малая от $x - x_0$, то есть некоторая функция $g(x)$, для которой верно, что $\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{x-x_0} = 0$. (Поправка, отвечающая за “точность” приближения приращения функции как линейной функции от приращения аргумента — чем ближе к x_0, тем точнее.) Итого, для значения $f(x)$ функции в некоторой точке x можно записать:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0) + o(x - x_0), \quad x \to x_0$$

Из этого соотношения возникают два понятия.

Дифференциалом независимой переменной называется её приращение:

$$dx = \Delta x = x - x_0$$

Дифференциалом функции в точке x_0 называется линейная по dx часть приращения функции в этой точке (линейное “приближение” приращения функции):

$$df(x_0) = f'(x_0)\,dx \tag{1}$$

А *дифференцированием* называется процесс взятия производной функции. При этом получение дифференциала (1) по сути тоже сводится к взятию производной. И правила дифференцирования функций во многом повторяют соответствующие правила для производных. Например, дифференциал константы $c \in \mathbb{R}$ равен нулю $dc = 0$. Дифференциал суммы равен сумме дифференциалов. Константу как множитель можно выносить за знак дифференциала. Дифференциал произведения (распишем его подробнее):

$$d(fg) = df\cdot g + f\cdot dg$$

так как, с одной стороны:

$$d(fg) = (fg)'\,dx = (f'g + fg')\,dx$$

и, с другой стороны:

$$df\cdot g + f\cdot dg = f'\,dx\cdot g + f\cdot g'\,dx = (f'g + fg')\,dx$$

2.1. “История”

Приведём краткий пересказ “истории развития” понятия производной. (Который кажется небесполезным для некоторого прояснения понятия дифференциала и его связи с производной.)

Исторически производная первоначально определялась как отношение “бесконечно малых приращений” $\frac{dy}{dx}$. То есть дробь $\frac{dy}{dx}$ в самом деле была дробью, в буквальном смысле. Но в связи с тем, что с “бесконечно малым приращением” есть некоторые проблемы (насколько бесконечно малое?), понятие производной в итоге пережило “переосмысление”. Было предложено новое определение, через предел (то определение, которым и пользовались ранее). Таким образом, производная перестала быть отношением — она стала *пределом* отношения. Но *обозначение* $\frac{dy}{dx}$ сохранилось — и теперь оно обозначало не отношение “бесконечно малых”, а просто производную, на это надо было смотреть не как на отношение чего-то, а как на один *неделимый символ*. Однако... после производной (выше в конспекте) было введено понятие дифференциалов dx и dy. И получили, что производная $\frac{dy}{dx}$ (неделимый символ) равна отношению дифференциалов $\frac{dy}{dx}$ (а это уже просто дробь). Таким образом, выражение $\frac{dy}{dx}$ может восприниматься двояко: либо как производная, либо как отношение дифференциалов (но не как отношение "бесконечно малых" приращений).

2.2. C1, §13, №179(3)

Исследовать на дифференцируемость функцию:

$$y = x|x|$$

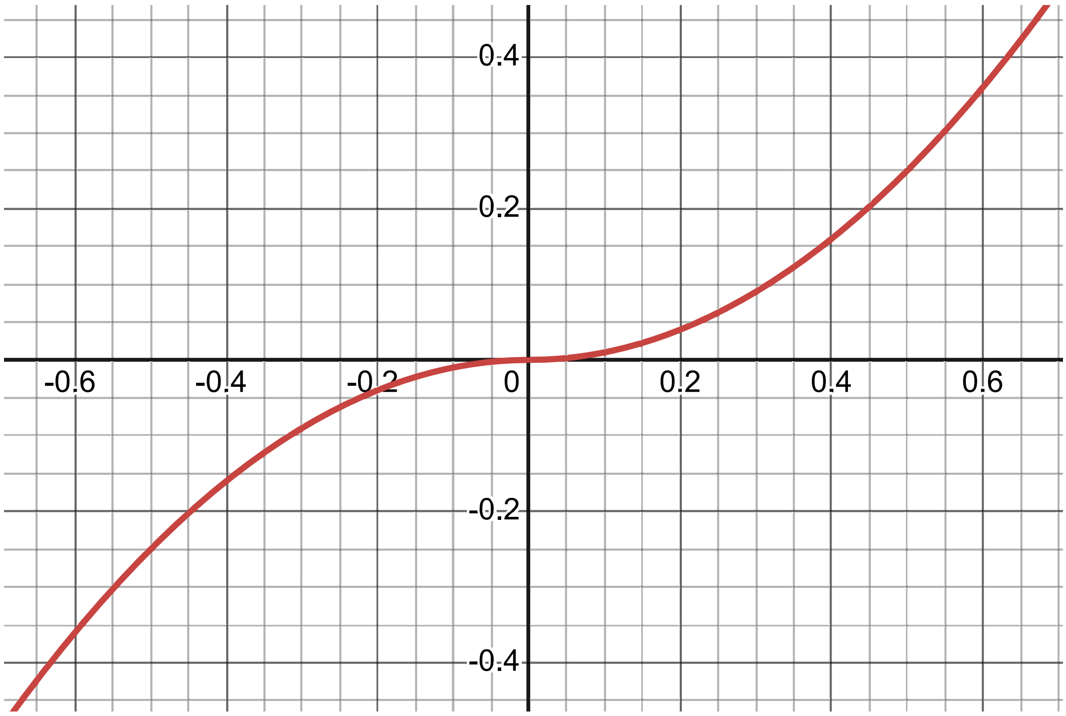


Рис. 5: График функции $y = x|x|$.

Решение. Перепишем функцию в таком виде (без модуля):

$$y = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases}$$

При рассмотрении функции на промежутках $(0, +\infty)$ и $(-\infty, 0)$ вопросов с производной нет — она получается просто из формулы, задающей функцию, по правилам взятия производной (на графике (5) это тоже видно):

$$y' = \begin{cases} 2x, & x > 0 \\ -2x, & x < 0 \end{cases}$$

Отдельно стоит разобраться только с "граничной" точкой $x = 0$ (граничной — в смысле на границах промежутков, где функция задаётся разными "нормальными" формулами). Попробуем найти производную в нуле по определению:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x|x|}{x} = \lim_{x \to 0} |x| = 0$$

Таким образом, функция дифференцируема на всей области определения ($\mathbb{R}$), и производная находится по формуле:

$$y' = 2|x|$$

$\square$

2.3. C1, §13, №197(3)

Найти производную обратной к f функции в указанной точке:

$$y = \underbrace{0.1x + e^{0.1x}}_{f(x)}, \quad y = 1 \tag{2}$$

Решение. Если есть функция $f : X \to Y$, то *обратной* к ней называется функция $g : Y \to X$, такая что:

$$\begin{cases} g\big(f(x)\big) = x, & \forall x \in X \\ f\big(g(y)\big) = y, & \forall y \in Y \end{cases}$$

Обратная к f функция обычно обозначается как f^{-1} (это одно неделимое обозначение, а не "f в степени").

Дифференцируя по x первое уравнение системы, получаем:

$$g'\big(f(x)\big) = x'$$
$$g'(y)\big|_{y=f(x)} \cdot f'(x) = 1$$

Таким образом,

$$\boxed{g'(y) = \left.\frac{1}{f'(x)}\right|_{x=g(y)}}$$

Получить связь между производными прямой и обратной функций можно бы было и из связи между производной и дифференциалами:

$$\left.\begin{aligned} f'(x) &= \frac{dy}{dx} \\ g'(y) &= \frac{dx}{dy} \end{aligned}\right| \Rightarrow g'(y) = \frac{1}{dy/dx} = \frac{1}{f'(x)}$$

Возвращаясь к функции из номера (2), найдём сначала тот x, который соответствует $y = 1$ (точке, где просят посчитать производную обратной функции):

$$1 = 0.1x + e^{0.1x} \Leftrightarrow x = 0$$

Производная исходной функции:

$$y' = 0.1 + 0.1 \cdot e^{0.1x}$$
$$y'(0) = 0.2$$

Тогда производная обратной функции:

$$(f^{-1})' = \frac{1}{0.1 + 0.1 \cdot e^{0.1x}}$$
$$(f^{-1})'(1) = 5$$

$\square$

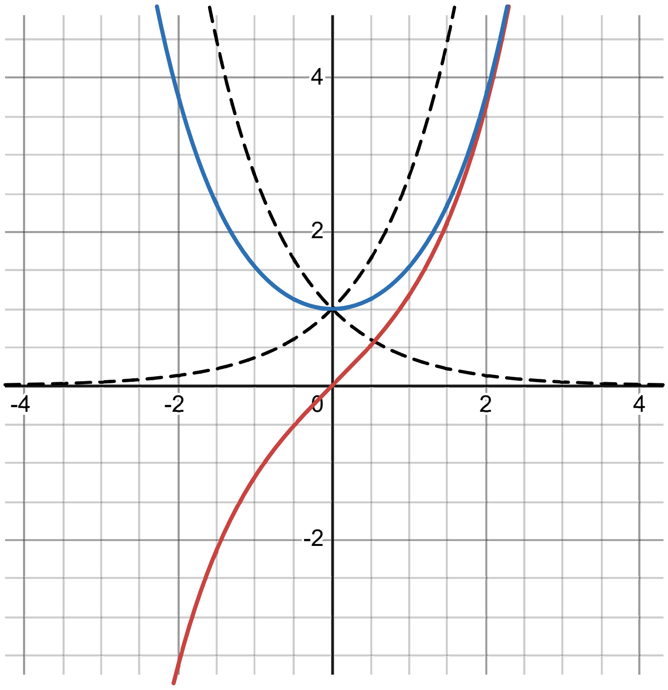


Рис. 6: Графики “чосинуса” (синий) и “шинуса” (красный). Пунктиром приведены графики функций $y = e^x$ и $y = e^{-x}$.

2.4. C1, §13, №201(4)

Найти $f'(x)$ для функции $y = f(x)$, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = x(t) = a\,\mathrm{ch}\,t \\ y = y(t) = b\,\mathrm{sh}\,t \end{cases}, \quad -\infty < t < 0 \tag{3}$$

Замечание. Скажем пару слов про упоминаемые в задаче гиперболические функции.

Гиперболический косинус (“чосинус”):

$$\mathrm{ch}\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Гиперболический синус (“шинус”):

$$\mathrm{sh}\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Кажется, что понять, что это вообще такое, лучше помогают графики (6).

Так, например, видно, что:

$$\mathrm{ch}\,0 = 1$$
$$\mathrm{sh}\,0 = 0$$

Очевидно, что $\mathrm{ch}\,x > \mathrm{sh}$. Но, кроме этого, можно заметить, что:

$$\mathrm{sh}\,x \sim \mathrm{ch}\,x, \quad x \to +\infty$$

Также из графиков можно увидеть, что $\mathrm{ch}\,x$ — это выпуклая вверх функция (“чашка”), а $\mathrm{sh}\,x$ меняет выпуклость в нуле: с выпуклой вниз (вогнутой — “колокол”), на выпуклую вверх.

Ещё из свойств можно отметить: чётность у $\mathrm{ch}\,x$:

$$\mathrm{ch}\,x = \mathrm{ch}\,{-x}$$

и нечётность у $\operatorname{sh} x$:

$$\operatorname{sh} x = -\operatorname{sh} -x$$

Соотношение же, которого из графиков уже не видно:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

Но можно проверить, просто подставив в формулу выражения, которыми определяются $\operatorname{ch} x$ и $\operatorname{sh} x$:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = 1$$

Производные:

$$\operatorname{ch}' x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \operatorname{sh} x$$
$$\operatorname{sh}' x = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \operatorname{ch} x$$

Решение. Параметрически заданная функция — построить её график (в осях X и Y) можно по точкам, перебирая значения t из заданного промежутка: $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$, и вычисляя по ним через функции $x(t)$ и $y(t)$ координаты: $\Big\{ \big(x(t_1), y(t_1)\big), \big(x(t_2), y(t_2)\big), \ldots \Big\}$.

В данном же случае можно получить зависимость $y = f(x)$ и в явном виде. Так как $t < 0$, то $\operatorname{sh} t < 0$, поэтому:

$$y = b \operatorname{sh} t = b \cdot \left(-\sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1}\right) = -b\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1} \tag{4}$$

Но вернёмся к параметрическому заданию функции… Производную такой функции можно найти как:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{y'_t}{x'_t}$$

Поэтому для функции из задачи:

$$f'(x) = \frac{b \operatorname{ch} t}{a \operatorname{sh} t} \tag{5}$$

Производная $f'(x)$ — функция от x, но выражение в (5) справа — это функция от t… Понимать запись стоит в том смысле, что значение производной в точке x считается с помощью t, соответствующего этому самому x. Но можно попробовать и выразить f' через x в явном виде. Из (3) имеем $\operatorname{ch} t = x/a$. Что делать с $\operatorname{sh} t$? Так как по условию $t < 0$, то $\operatorname{sh} t < 0$, поэтому можно выразить его из тождества:

$$\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1 \xrightarrow{\operatorname{sh} t < 0} \operatorname{sh} t = -\sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1} = -\sqrt{(x/a)^2 - 1}$$

И итоговое выражение для $f'(x)$ в таком случае:

$$f'(x) = -\frac{b}{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

(Убеждаемся, что оно совпадает с производной, которую можно бы было посчитать по связи $y = f(x)$, полученной в явном виде (4).) □

2.5. C1, §13, №214(1)

Найти дифференциал функции в указанной точке:

$$d\left(\frac{1}{x}+\ln\frac{x-1}{x}\right), \quad x=-1$$

Решение. Если есть функция

$$y=f(x)$$

то её дифференциал равен:

$$df(x)=f'(x)\,dx$$

Имея в виду, что интересует дифференциал функции в точке $x=-1$, можно немного упростить (с целью дальнейшего дифференцирования) выражение, которым определяется функция:

$$f(x)=\frac{1}{x}+\ln\frac{x-1}{x}=\frac{1}{x}+\ln(1-x)-\ln -x, \quad x<0$$

(хотя можно бы было и не упрощать логарифм — взятие производной было бы не сильно сложнее…)

Поэтому дифференциал равен:

$$\begin{aligned}df(x)&=d\left(\frac{1}{x}+\ln\frac{x-1}{x}\right)=d\left(\frac{1}{x}+\ln(1-x)-\ln -x\right)\\&=-\frac{1}{x^2}\,dx+\frac{1}{1-x}\cdot(-1)\,dx-\frac{1}{-x}\cdot(-1)\,dx=\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right)dx\end{aligned}$$

В указанной точке:

$$df(x)|_{x=-1}=\left.\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right)\right|_{x=-1}dx=-\frac{1}{2}\,dx$$

□

2.6. C1, §13, №173

Дана функция $y=f(x)$:

$$y=\begin{cases}|x|^\alpha\sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{если } x\neq 0\\ 0, & \text{если } x=0\end{cases}$$

При каких значениях α функция в точке $x=0$:

1. непрерывна
2. имеет производную
3. имеет непрерывную производную

Решение.
Непрерывность. Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, если она определена в некоторой окрестности этой точки и если:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

Стремление $x \to x_0$ означает приближение x неограниченно близко к x_0. В задаче $x_0 = 0$, а формула, которой функция определяется во всех точках, кроме нуля, включает модуль $|x|$ — поэтому можно рассмотреть случаи приближения к нулю с каждой из сторон: слева и справа (тогда модуль можно будет раскрыть с определённым знаком). Например, рассмотрим предел при $x \to x_0 + 0$ (то есть x приближается к x_0 неограниченно близко, но всегда остаётся больше x_0):

$$\lim_{x\to+0} f(x) \overset{?}{=} f(0) = 0$$

$$\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to+0} x^\alpha \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Равенство этого предела нулю равносильно равенству нулю следующего предела:[6]

$$\lim_{x\to+0} x^\alpha = 0$$

Когда это будет выполняться? Очевидно, подходят $\alpha > 0$. При этом $\alpha < 0$ не подходят (тогда в пределе будет бесконечность, а не ноль). При $\alpha = 0$ в пределе будет единица. Таким образом:

$$\lim_{x\to+0} f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to+0} x^\alpha = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 0$$

С приближением к нулю слева $x \to -0$ всё бы было аналогично (только появился бы знак “минус”, который бы ни на что не повлиял).

Наличие производной. В нуле функция определяется “по-особому”, поэтому посчитать в этой точке производную можно только по определению.[7] Итак, функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0, если существует предел:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

(конечный либо “плюс-минус-бесконечный”).[8]

Опять же, вместо “просто” стремления $x \to 0$, можно начать с рассмотрения более простого (понятного в условиях задачи) случая стремления $x \to 0$ с какой-нибудь одной стороны — то есть с поиска левой ($x \to 0-0$) или правой ($x \to 0+0$) производной. Например, будем опять приближаться к нулю справа:

$$\lim_{x\to+0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to+0} \frac{x^\alpha \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to+0} x^{\alpha-1} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Когда этот предел будет существовать? Из-за множителя с синусом снова остаётся единственная возможность: когда $x^{\alpha-1} \xrightarrow{x\to+0} 0$ (если этот предел будет определённого знака бесконечен, то производной справа из-за синуса всё равно никакой не будет). Таким образом:

$$\exists f'_+(0) = \lim_{x\to+0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to+0} x^{\alpha-1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 1$$

[6]Будем считать, что это “очевидно”, хотя можно и более строго объяснить (при этом в одну сторону точно очевидно).

[7]По крайней мере, автор конспекта другого способа не знает)

[8]Но не “просто бесконечный”.

С приближением к нулю слева $x \to -0$ всё бы было аналогично. То есть при $\alpha > 1$ получили бы также:

$$f'_{-}(0) = \lim_{x \to -0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$$

А из равенства односторонних производных следует и существование "просто" производной:

$$f'(0) = f'_{+}(0) = f'_{-}(0) = 0$$

(если приближаться к нулю попеременно с двух сторон, на каждой из которых в качестве производной получается ноль, то и в итоге будет ноль).

Наличие непрерывной производной. Производная $f'(x)$ функции $f(x)$ непрерывна в точке x_0, если она определена в некоторой окрестности этой точки и если:

$$\lim_{x \to x_0} f'(x) = f'(x_0)$$

Надо искать предел производной. Поэтому получим сначала формулу, которой определяется $f'(x)$.

Исходная функция:

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x > 0 \\ (-x)^\alpha \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x < 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Производная:

$$f'(x) = \begin{cases} \alpha x^{\alpha-1} \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^\alpha \cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right), & x > 0 \\ \alpha(-x)^{\alpha-1} \cdot (-1) \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) + (-x)^\alpha \cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right), & x < 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим сначала односторонний предел производной:

$$\lim_{x \to +0} f'(x) \stackrel{?}{=} f'(0)$$

$$\lim_{x \to +0} \alpha x^{\alpha-1} \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^\alpha \cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) \stackrel{?}{=} 0$$

$$\lim_{x \to +0} x^{\alpha-2} \cdot \left\{\alpha x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right\} \stackrel{?}{=} 0$$

Видно, что равенство этого предела нулю равносильно равенству нулю предела:

$$\lim_{x \to +0} x^{\alpha-2} = 0$$

Что приводит к условию $\alpha > 2$.

С приближением к нулю слева $x \to -0$ всё бы было аналогично. То есть при $\alpha > 2$ получили бы также:

$$\lim_{x \to -0} f'(x) = 0 = f'(0)$$

Значит, и при "просто" стремлении к нулю (возможно, попеременно с двух сторон) получили бы в пределе $f'(0)$.

Замечание. Из полученных условий на α видно, что свойства непрерывности функции в точке, наличия в этой точке производной и непрерывности производной в точке — упорядочены по "силе", от более слабых к более сильным. Из непрерывности производной следует существование конечной производной, из чего в свою очередь следует непрерывность (7).[9]

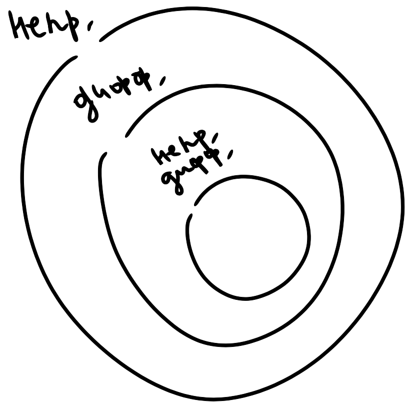


Рис. 7: Соотношения между непрерывными на промежутке функциями, дифференцируемыми и непрерывно дифференцируемыми.

Совокупность всех функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$ (класс функций), может обозначаться как $C[a, b]$. Совокупность функций, дифференцируемых на отрезке $[a, b]$, похоже, никак специальным образом не обозначается.[10] Класс же непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций есть $C^1[a, b]$.

Таким образом, тот факт, что из непрерывной дифференцируемости функции на отрезке следует её непрерывность на этом отрезке, можно выразить таким образом:

$$C^1[a, b] \subset C[a, b]$$

$\square$

2.7. С1, §14, №10(1)

Написать уравнение касательной и нормали к кривой в точке:

$$x^3 + y^2 + 2x - 6 = 0, \quad (x_0, y_0) = (-1, 3) \tag{6}$$

Решение. Заметим, что уравнением (6) задаётся зависимость y от x, но эта зависимость — не функция! (Например, одному "икс" $x = 0$ удовлетворяют два "игрека" $y = \pm\sqrt{6}$.)

Проверим для начала на всякий случай, что точка в самом деле лежит на кривой:

$$(-1)^3 + 3^2 + 2 \cdot (-1) - 6 = 0$$

Уравнение касательной получается сразу из связи между производной функции в точке и её дифференциалом в этой точке:[11]

$$df(x_0) = f'(x_0)\, dx$$

[9] В определении производной под пределом стоит дробь, в числителе которой находится разность $f(x) - f(x_0)$. Если она не стремится к нулю при стремлении x к x_0, то предел не будет конечным.

[10] Не только автор конспекта так считает.

[11] Функции — по которой y определяется через x хотя бы в некоторой окрестности точки (x_0, y_0).

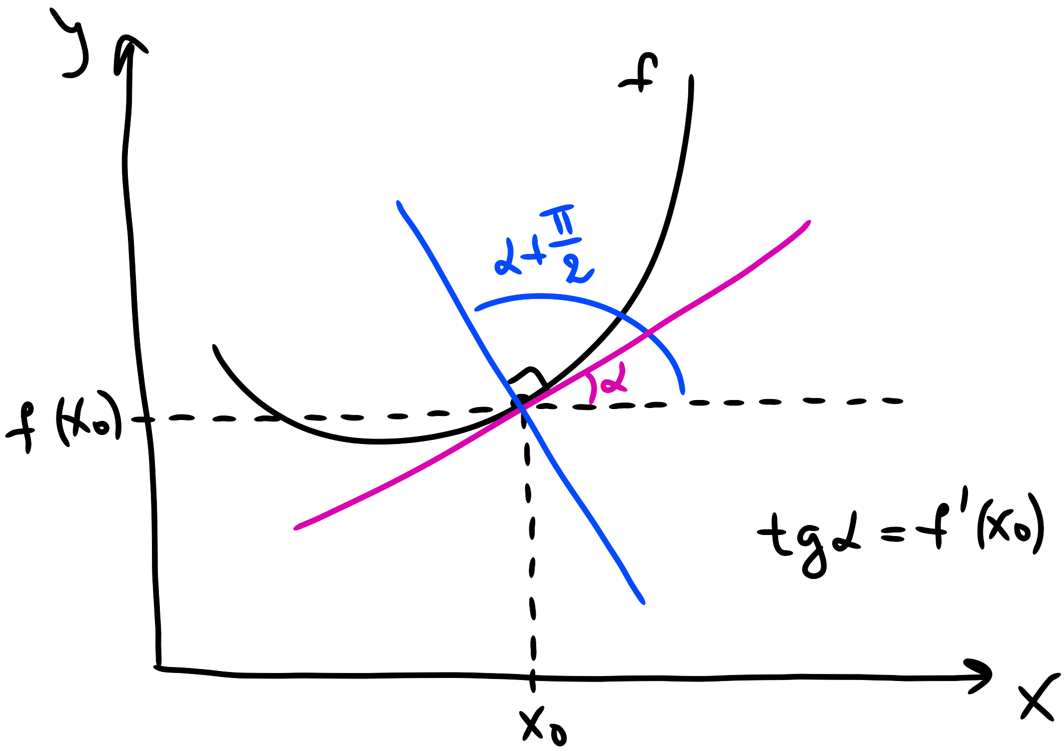


Рис. 8: Касательная и нормаль к графику кривой $F(x, y) = 0$ в точке (x_0, y_0).

Дифференциал в точке — это как линейное приближение приращения функции в точке $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$. Сам же дифференциал тоже по сути равен приращению, но не самой функции, а функции $f_{\text{кас}}$, задающей касательную:

$$df(x_0) = f_{\text{кас}}(x) - f_{\text{кас}}(x_0)$$

(при этом $f_{\text{кас}}(x_0) = f(x_0)$)

Дифференциал же независимой переменной dx просто равен её приращению (относительно исходной точки x_0):

$$dx = \Delta x = x - x_0$$

Объединяя вместе приведённые рассуждения, получаем уравнение касательной к функции f в точке x_0 в общем виде:

$$f_{\text{кас}}(x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Чтобы выписать это уравнение для указанной кривой, не хватает производной $f'(x_0)$. Но в явном виде зависимости $f(x)$ нет — функция задана неявно. Поэтому, например, продифференцируем обе части (6):

$$3x^2\,dx + 2y\,dy + 2\,dx = 0$$

Отсюда получаем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2 - 3x^2}{2y}$$

В интересуемой точке $(x_0, y_0) = (-1, 3)$:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x,y)=(x_0,y_0)} = \frac{-5}{6}$$

А это и есть $f'(x_0)$.

Поэтому для уравнения касательной получаем:

$$f_{\text{кас}}(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) = 3 - \frac{5}{6} \cdot (x + 1)$$

Нормаль к графику функции $f(x)$ в точке x_0 также проходит через (x_0, y_0), но под углом 90°к касательной (8). То есть если α — угол наклона касательной (угол между касательной и положительным направлением оси X), то $\alpha + \frac{\pi}{2}$ будет углом наклона нормали:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\alpha &= f'(x_0) = \frac{-5}{6} \\ \operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) &= -\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{6}{5} \end{aligned}$$

Уравнение нормали:

$$f_{\text{норм}}(x) = 3 + \frac{6}{5} \cdot (x + 1)$$

□

3. Производные и дифференциалы высших порядков

Производная $f'(x)$ функции $f(x)$ — тоже функция. У которой тоже может быть производная. У которой тоже может быть производная. И так далее. Приходим к понятию производных порядка $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} &f''(x) = (f')'(x) \\ &f'''(x) = (f'')'(x) \\ &\dots \\ &f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}\right)'(x) \end{aligned}$$

Если положить $f^{(0)}(x) \equiv f(x)$, то можно привести такое рекурсивное определение производной:

$$f^{(n)} = \begin{cases} f, & n = 0 \\ \left(f^{(n-1)}\right)', & n \geq 1 \end{cases}$$

Пример. Найдём n-ую производную функции $\cos x$:

$$\begin{aligned} &\cos' x = -\sin x \\ &\cos'' x = (-\sin x)' = -\cos x \\ &\cos''' x = (-\cos x)' = \sin x \\ &\cos^{(4)} x = \sin' x = \cos x \qquad \dots \end{aligned}$$

(после третьей производной, очевидно, процесс "зацикливается" — опят получился $\cos x$). Можно заметить, что $\left|\cos^{(2k)}\right| = |\cos x|$ и $\left|\cos^{(2k+1)}\right| = |\sin x|$, а знак "как-то" чередуется, итого n-ую производную можно описать формулой:

$$\cos^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^{n/2} \cos x, & n = 2k,\ k = 0, 1, \dots \\ (-1)^{(n+1)/2} \sin x, & n = 2k + 1,\ k = 0, 1, \dots \end{cases}$$

□

Отдельно стоит отметить сюжет о вычислении n-ой производной произведения... Пусть есть две функции f и g. Производная их произведения:

$$(fg)' = f'g + fg'$$

Вторая производная произведения:

$$(fg)'' = (f'g + fg')' = f''g + f'g' + f'g' + fg'' = f''g + 2f'g' + fg''$$

Третья производная:

$$(fg)''' = \big((fg)''\big)' = (f''g + 2f'g' + fg'')' = f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg'''$$

Можно заметить закономерность, аналогичную раскрытию скобки в n-ой степени:[12]

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \tag{7}$$

Пример. Найдём n-ую производную функции $x^2 \cos x$.

Можно считать, что это произведение двух функций: x^2 и $\cos x$. Производные первой:

$$\begin{aligned} \left(x^2\right)' &= 2x \\ \left(x^2\right)'' &= (2x)' = 2 \\ \left(x^2\right)''' &= \left(x^2\right)^{(4)} = \ldots = 0 \end{aligned}$$

Производную n-ого порядка $\cos x$ уже считали (3).

Объединяя, получаем:

$$\left(x^2 \cos x\right)^{(n)} = x^2 \cos^{(n)} x + n \cdot 2x \cdot \cos^{(n-1)} x + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 \cdot \cos^{(n-2)} x + 0 = \ldots$$

(при желании можно бы было расписать подробнее, упростить...) □

Кроме производной, вводятся понятия *дифференциалов* порядка больше одного. Так, дифференциалы независимой переменной более высоких порядков определяются следующим образом:

$$d^n x \equiv 0, \quad n \geq 2$$

(то есть просто нулевые)[13]

Дифференциалы же функции высоких порядков определяются, как и производная, рекурсивно:

$$d^n f(x_0) = d\left(d^{n-1} f\right)(x_0), \quad n \geq 2$$

В результате, например для дифференциала второго порядка, получается:

$$d^2 f(x_0) = d(df)(x_0) = d\big(f'(x)\,dx\big)\Big|_{x=x_0} = d\big(f'(x)\big)\Big|_{x=x_0} dx = f''(x_0)(dx)^2$$

Итого, для порядка n:

$$d^n f(x_0) = f^{(n)}(x_0)\,dx^n \tag{8}$$

[12] $\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-(k-1))}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$.

[13] Кажется, что это не обязательно принимать просто как “правило”, а можно попытаться осмыслить... По определению, дифференциал независимой переменной — это просто разница: $dx = x - x_0$. И если посмотреть на дифференциал второго порядка d^2x — какой может быть за ним смысл? Дифференциал от дифференциала? “Разница разниц”? Каких “разниц”, если просто дифференциал — это всего одна “разница”?.. Возможно, эти “смысловые неопределённости” отчасти и привели к тому, что дифференциалы высоких порядков от x решили положить просто равными нулю.

3.1. C1, §15, №1(5)

Найти производную второго порядка:

$$y = \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x$$

Решение. Первая производная:

$$f'(x) = \left(\operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x\right)' = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x + 2 \operatorname{ch} x \operatorname{sh} x = 4 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$$

Вторая:

$$f''(x) = (f')'(x) = (4 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x)' = 4 \operatorname{ch}^2 x + 4 \operatorname{sh}^2 x$$

Замечание. Посмотрим, чему равна сумма $\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$:

$$\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = \operatorname{ch} 2x$$

А с помощью “основного тождества” её можно бы было ещё переписать и так:

$$\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch}^2 x + (\operatorname{ch}^2 x - 1) = 2 \operatorname{ch}^2 x - 1$$

Итого получаем соотношение:

$$\operatorname{ch} 2x = 2 \operatorname{ch}^2 x - 1$$

И более компактный способ записи ответа:

$$f''(x) = 4 \operatorname{ch}^2 x + 4 \operatorname{sh}^2 x = 4 \operatorname{ch} 2x$$

□

3.2. C1, §15, №13(1)

Найти $d^2 y$, считая известными du, $d^2 u$, dv, $d^2 v$:

$$y = u(2 + v) \tag{9}$$

Решение. Второй дифференциал — дифференциал от первого:

$$d^2 y = d(dy)$$

Поэтому найдём сначала dy. Для этого продифференцируем обе части соотношения (9) (при взятии дифференциала работают похожие правила, что и при нахождении производной):

$$dy = d\big(u(2 + v)\big) = du \cdot (2 + v) + u \cdot d(2 + v) = (2 + v)\, du + u\, dv$$

Ещё раз дифференцируем обе части:

$$\begin{aligned} d^2 y &= d\big((2 + v)\, du + u\, dv\big) \\ &= \left\{d(2 + v) \cdot du + (2 + v) \cdot d^2 u\right\} + \left\{du \cdot dv + u \cdot d^2 v\right\} = (2 + v) \cdot d^2 u + 2\, du\, dv + u \cdot d^2 v \end{aligned}$$

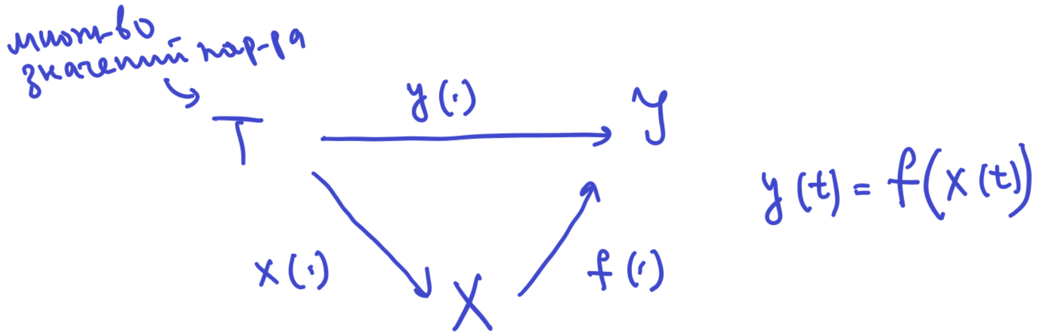


Рис. 9: Задаваемая параметрически функция — это зависимость y от x: $y = f(x)$, которой в явном виде нет, но которая тем не менее “узнаваема” через параметр t.

Замечание. В финальной формуле также участвуют u и v, но про них в условии не сказали, что их можно “считать известными” — можно ли тогда считать, что то, что получили, это и есть ответ? Скорее всего, да. Потому что сделать уже больше ничего нельзя) Но ещё и потому, что... Скорее всего, имелось в виду, что дифференциалы первого и второго порядков u и v известны *как функции* (раз речь идёт о вторых дифференциалах, то обе, ну, или, по крайней мере, хотя бы одна из “букв” u и v не является независимой переменной). Таким образом, дифференциал d^2y также найден как функция. Точное же значение дифференциала определяется точкой, где этот дифференциал считается (точкой, где принимают определённые значения сама функция y, задающие её u, v, и их дифференциалы).

$\square$

3.3. C1, §15, №14(1)

Найти $\frac{d^2y}{dx^2}$ для функции, заданной параметрически (9) уравнениями:

$$\begin{cases} x = x(t) = t^3 \\ y = y(t) = t^2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Решение.
Способ 1: через производные.

Начнём с первой производной:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy(t)/dt}{dx(t)/dt} = \frac{y'_t}{x'_t}$$

$$f'(x) = \frac{2t}{3t^2} = \frac{2}{3t}$$

Вторая производная:

$$f''(x) = (f')'(x) = \frac{df'(x)}{dx} = \frac{df'\big(x(t)\big)/dt}{dx(t)/dt}$$

$$f''(x) = \frac{-2/(3t^2)}{3t^2} = -\frac{2}{9t^4}$$

Замечание. Можно бы было получить и формулу для второй производной $f''(x)$ через производные только $x(t)$ и $y(t)$:

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{df'\left(x(t)\right)/dt}{dx(t)/dt} \\
&= \frac{d\left(\frac{dy(t)}{dx(t)}\right)/dt}{x'_t} \\
&= \frac{1}{x'_t}\cdot\frac{d^2y(t)\cdot dx(t) - dy(t)\cdot d^2x(t)}{dx(t)^2}\Big/ dt \\
&= \frac{1}{x'_t}\cdot\left(\frac{d^2y(t)}{dx(t)\,dt} - \frac{dy(t)\,d^2x(t)}{dx(t)^2\,dt}\right) \\
&= \frac{1}{x'_t}\cdot\left(\frac{d^2y(t)/dt^2}{dx(t)/dt} - \frac{(dy(t)/dt)\cdot(d^2x(t)/dt^2)}{dx(t)^2/dt^2}\right) \\
&= \frac{1}{x'_t}\cdot\left(\frac{y''_{tt}}{x'_t} - \frac{y'_t x''_{tt}}{x'^2_t}\right) \\
&= \frac{y''_{tt}x'_t - y'_t x''_{tt}}{x'^3_t}
\end{aligned}$$

Способ 2: через дифференциалы.

Пользуясь тем, что

$$y(t) = f\left(x(t)\right)$$

найдём первый и второй дифференциалы $y(t)$.

Первый:

$$\begin{cases} dy(t) = y'(t)\,dt \\ dy(t) = df\left(x(t)\right) = f'(x)\,dx(t) = f'(x)x'(t)\,dt \end{cases}$$

Второй:

$$d^2y(t) = d\big(dy(t)\big)$$

$$\begin{cases} d^2y(t) = d\big(y'(t)\,dt\big) = y''(t)\,dt^2 \\ d^2y(t) = d\big(f'(x)\,dx(t)\big) = f''(x)\,dx(t)^2 + f'(x)\cdot d^2x = f''(x)x'^2(t)\,dt^2 + f'(x)x''(t)\,dt^2 \end{cases}$$

Отсюда получаем:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y(t)}{dx(t)^2} = \dfrac{y''(t)\,dt^2}{x'^2(t)\,dt^2} = \dfrac{y''(t)}{x'^2(t)} \\ \dfrac{d^2y(t)}{dx(t)^2} = \dfrac{f''(x)x'^2(t)\,dt^2 + f'(x)x''(t)\,dt^2}{x'^2(t)\,dt^2} = f''(x) + \dfrac{f'(x)\cdot x''(t)}{x'^2(t)} \end{cases}$$

Приравнимаем:

$$\frac{y''(t)}{x'^2(t)} = f''(x) + \frac{\frac{y'(t)}{x'(t)}\cdot x''(t)}{x'^2(t)}$$

Откуда получаем общее выражение для второй производной:

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = f''(x) = \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{x'^3(t)}$$

В условиях задачи:

$$f'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{2}{3t}$$

$$\frac{d^2y(t)}{dx(t)^2} = \frac{y''(t)}{x'^2(t)} = \frac{2}{9t^4}$$

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = \frac{y''(t)}{x'^2(t)} - \frac{y'(t)x''(t)}{x'^3(t)} = \frac{2}{9t^4} - \frac{4}{9t^4} = -\frac{2}{9t^4}$$

Заметим, что в данном случае

$$\frac{d^2y(t)}{dx(t)^2}! = \frac{d^2f(x)}{dx^2}$$

Благодаря относительно аккуратным обозначениям всех участвующих в задаче функций это вроде бы и не вызывает удивления. Хотя если бы обозначения были такими ("по-проще"):

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad y = y(x)$$

то с ними приведённое выше неравенство могло бы читаться так:

$$\frac{d^2y}{dx^2}! = y''_{xx}$$

что уже могло бы вызвать "лёгкое" недоумение, потому что вторая производная y''_{xx} по определению вроде бы и есть d^2y/dx^2. □

3.4. С1, §15, №22(1)

Найти d^2y в точке (x_0, y_0) для функции $y = y(x)$, заданной неявно:[14]

$$x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 2 = 0, \quad (x_0, y_0) = (1, 1)$$

Решение. Продифференцируем обе части:

$$d\left(x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 2\right) = 0$$
$$2x\,dx + (2\,dx \cdot y + 2x\,dy) + 2y\,dy - 4\,dx + 2\,dy = 0$$
$$(2x + 2y - 4)\,dx + (2x + 2y + 2)\,dy = 0$$

В точке $(x_0, y_0) = (1, 1)$:

$$(2 + 2 - 4)\,dx + (2 + 2 + 2)\,dy = 0 \Rightarrow dy|_{(x_0,y_0)} = 0$$

Продифференциуем обе части полученного ранее дифференциального соотношения:

$$d\big((2x + 2y - 4)\,dx + (2x + 2y + 2)\,dy\big) = 0$$
$$d(2x + 2y - 4)\,dx + \Big(d(2x + 2y + 2)\,dy + (2x + 2y + 2)\,d\big(dy\big)\Big) = 0$$
$$2\,dx^2 + 4\,dx\,dy + 2\,dy^2 + (2x + 2y + 2)\,d^2y = 0$$

В точке $(x_0, y_0) = (1, 1)$:

$$2\,dx^2 + 0 + 0 + 6\,d^2y = 0 \Rightarrow d^2y|_{(x_0,y_0)} = -\frac{1}{3}\,dx^2$$

□

[14] Параметрически зададанная функция из номера (3.3) — тоже есть по сути функция, заданная неявно. (В явном виде зависимость y от x не приведена.)

3.5. С1, §15, №24(14)

Найти $y^{(n)}(x)$ для функции:

$$y = \frac{1+x^2}{1-x^2}$$

Решение. Можно бы было попробовать считать производную этот функции, смотря на неё как на произведение:

$$y = \left(1+x^2\right)\left(1-x^2\right)^{-1}$$

Но ни к чему хорошему это бы не привело: проще бы не стало — потому что закономерности в вычислении n-ой производной скобки $\left(1-x^2\right)^{-1}$ "не прослеживается".

Поэтому попробуем немного "покрутить" выражение, которым определяется функция. Так, видно, что знаменатель раскладывается на множители:

$$y = \frac{1+x^2}{(1-x)(1+x)}$$

А дробь $\frac{1}{(1-x)(1+x)}$ можно разложить в сумму дробей следующим образом:

$$\frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)$$

Поэтому функцию можно представить так:

$$y = \frac{1}{2}\cdot\left(1+x^2\right)\cdot\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)$$

Можно ли будет теперь найти производную с помощью формулы производной произведения (7)? Да!

Начнём с того, что найдём n-ые производные дробей-слагаемых. Первой:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{1-x}\right)' = (-1)\cdot\frac{1}{(1-x)^2}\cdot(-1)\\
&\left(\frac{1}{1-x}\right)'' = (-1)\cdot(-2)\cdot\frac{1}{(1-x)^3}\cdot(-1)\cdot(-1)\\
&\ldots\\
&\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}},\quad n\geq 0
\end{aligned}$$

И второй:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{1+x}\right)' = (-1)\cdot\frac{1}{(1+x)^2}\cdot 1\\
&\left(\frac{1}{1+x}\right)'' = (-1)\cdot(-2)\cdot\frac{1}{(1+x)^3}\cdot 1\cdot 1\\
&\ldots\\
&\left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}},\quad n\geq 0
\end{aligned}$$

Теперь можно и вернуться к производной рассматриваемой функции:

$$\begin{aligned}
y^{(n)} &= \frac{1}{2}\cdot\left(1+x^2\right)\cdot\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)^{(n)} + \frac{1}{2}\cdot n\cdot\left(1+x^2\right)'\cdot\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)^{(n-1)}\\
&\quad + \frac{1}{2}\cdot\frac{n(n-1)}{2}\cdot\left(1+x^2\right)''\cdot\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)^{(n-2)}\\
&= \frac{1}{2}\cdot\left(1+x^2\right)\cdot\left(\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}+\frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}\right) + \frac{1}{2}\cdot n\cdot 2x\cdot\left(\frac{(n-1)!}{(1-x)^n}+\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}\right) + \ldots
\end{aligned}$$

Пожалуй, стоило бы попробовать ещё немного упростить формулу $y(x)$...
Имеем:

$$y = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + x^2\right) \cdot \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)$$

Рассмотрим дробь $\frac{1+x^2}{1-x}$. Выделим целую часть:[15]

$$x^2 + 1 = -x \cdot (-x+1) + x + 1 = -x \cdot (-x+1) - 1 \cdot (-x+1) + 2 \Rightarrow \frac{1+x^2}{1-x} = -x - 1 + \frac{2}{1-x}$$

Аналогично с дробью $\frac{1+x^2}{1+x}$:

$$x^2 + 1 = x \cdot (x+1) - x + 1 = x \cdot (x+1) - 1 \cdot (x+1) + 2 \Rightarrow \frac{1+x^2}{1+x} = x - 1 + \frac{2}{1+x}$$

Поэтому функцию можно представить в таком виде:[16]

$$y = \frac{1}{2} \cdot \left(-x - 1 + \frac{2}{1-x} + x - 1 + \frac{2}{1+x}\right) = -1 + \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}$$

Вот теперь уже остаётся только взять производную:

$$y^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} + \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}, \quad n \geq 1$$

□

3.6. C1, §15, №25(7)

Найти $y^{(n)}(x)$ для функции:

$$y = x \ln\left(x^2 - 3x + 2\right)$$

Решение. Как и в задаче 3.5, сразу напрашивается способ попробовать считать производную как производную произведения (7). Можно попробовать, но, как и в задаче 3.5, придётся убедиться в том, что такой способ ни к чему хорошему не приведёт...

Что ещё можно сделать? Можно попробовать найти корни многочлена под логарифмом, разложить его на множители, тогда логарифм разложится в сумму логарифмов, вместо одного сложного станет два логарифма попроще, и, возможно, производную взять уже получится. Пойдём по этому плану.

Разложение на множители многочлена:

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$$

Тогда формулу $y(x)$ можно переписать так:[17]

$$y = x \ln(x-1)(x-2) = x\big(\ln|x-1| + \ln|x-2|\big), \quad (x-1)(x-2) > 0$$

[15] Делением в столбик.

[16] Пожалуй, выделять целую часть проще бы было в самом начале, до разложения дроби в сумму дробей...

[17] Про модули можно бы было и “забыть” — на последующее вычисление производной это бы не повлияло. Но правильно, конечно, в данном случае раскрывать логарифм с модулями.

Теперь уже можно воспользоваться формулой для производной произведения. Потому что n-ая производная $\ln(x-1)$ (и $\ln(x-2)$) уже считается:

$$\begin{aligned}
&\ln'(x-1) = \frac{1}{x-1}\\
&\ln''(x-1) = \left(\frac{1}{x-1}\right)' = (-1)\cdot\frac{1}{(x-1)^2}\cdot 1\\
&\ln'''(x-1) = (-1)\cdot(-2)\cdot\frac{1}{(x-1)^3}\cdot 1\cdot 1\\
&\ldots\\
&\ln^{(n)}(x-1) = (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{(x-1)^n}
\end{aligned}$$

В результате, n-ая производная функции ($n \geq 1$):

$$\begin{aligned}
y^{(n)} &= x\left(\ln^{(n)}(x-1) + \ln^{(n)}(x-2)\right) + n\cdot x'\left(\ln^{(n-1)}(x-1) + \ln^{(n-1)}(x-2)\right)\\
&= x\left((-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{(x-1)^n} + (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{(x-2)^n}\right)\\
&\qquad + n\left((-1)^{n-2}(n-2)!\frac{1}{(x-1)^{n-1}} + (-1)^{n-2}(n-2)!\frac{1}{(x-2)^{n-1}}\right)\\
&= (-1)^{n-2}(n-2)!\frac{1}{(x-1)^n}\cdot\left((x\cdot(-1)\cdot(n-1) + n(x-1)\right)\\
&\qquad + (-1)^{n-2}(n-2)!\frac{1}{(x-2)^n}\cdot\left((x\cdot(-1)\cdot(n-1) + n(x-2)\right)\\
&= (-1)^{n-2}(n-2)!\left(\frac{1}{(x-1)^n}\cdot(x-n) + \frac{1}{(x-2)^n}\cdot(x-2n)\right)
\end{aligned}$$

□

4. Теоремы о среднем

Приведём эти теоремы.

Теорема 4.1 (Ролля о среднем). *Пусть на отрезке* $[a,b]$ *определена функция* f*, которая:*

- *непрерывна на* $[a,b]$
- *дифференцируема на* (a,b)[18]
- *принимает одинаковые значения на концах:* $f(a) = f(b)$

Тогда найдётся точка $\xi \in (a,b)$*, такая что* $f'(\xi) = 0$ *(10).*

Почему "работает" теорема Ролля?[19] Допустим, в точке a отрезка односторонняя производная больше нуля: $f'_+(a) > 0$. Это значит, что функция возрастает (в некоторой (полу)окрестности около a будет принимать значения, большие, чем $f(a)$). Но она не может возрастать на всём отрезке — иначе она не вернётся в то же $f(b)$ значение, откуда

[18] Вообще говоря, также допускаются случаи, когда функция имеет в некоторых точках интервала и определённого знака *бесконечную* производную — то есть когда её график проходит через точку "вертикально". (См. теорсправку в соответствующем параграфе (§16) соответствующего сборника задач (C1).)

[19] Не строгое доказательство.

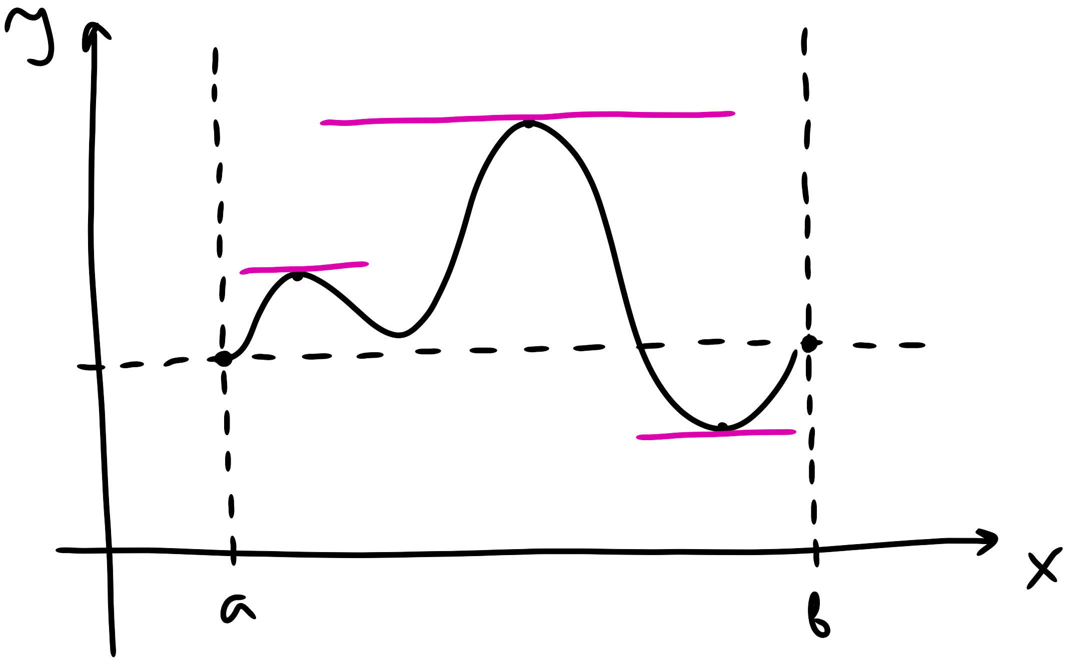


Рис. 10: Функция, удовлетворяющая условиям теоремы Ролля, и горизонтальная касательная к её графику в одной из точек.

начала ($f(b) = f(a)$). Поэтому производная должна будет рано или поздно стать отрицательной — пройдя в некоторой точке через ноль?.. Да, потому что кажется, что если допустить, что производная была сначала больше нуля, а потом сразу меньше (минуя сам ноль), то в некоторой точке будет "излом" (11) — то есть производной не будет, что не согласуется с условием дифференцируемости функции на всём интервале (a, b).

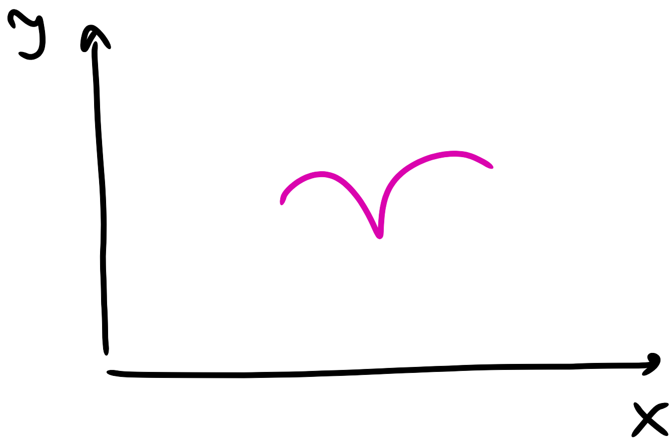


Рис. 11: Излом графика функции f в точке x_0 — производная f' в x_0 не определена.

Аналогичные рассуждения будут в случае, если $f'_+(a) < 0$ (раз сначала убывает, то должна будет когда-нибудь и возрастать). Если же $f'_+(a) = 0$, то либо возрастание/убывание начнётся позже, либо ещё становится возможным случай, когда просто $f'(x) = 0$ на всём интервале (a, b).

Следующая теорема является "расширением" теоремы Ролля.

Теорема 4.2 (Лагранжа о среднем). *Пусть на отрезке* $[a, b]$ *определена функция* f*, которая:*

- *непрерывна на* $[a, b]$

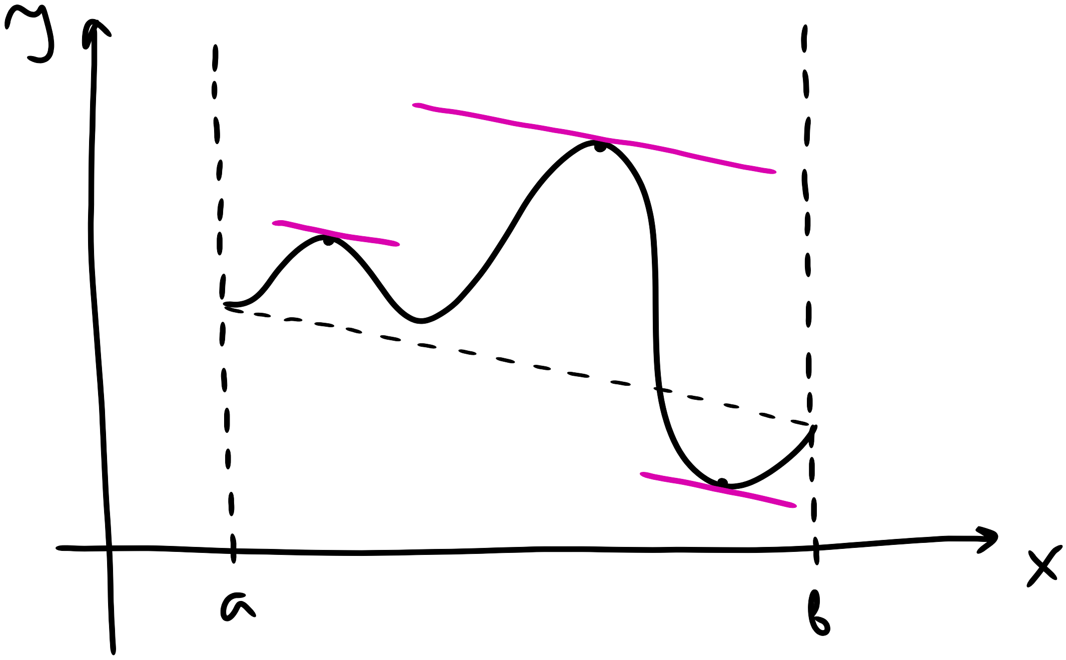


Рис. 12: Функция, удовлетворяющая условиям теоремы Лагранжа, и касательная к её графику в одной из точек, параллельная секущей $\Big(\big(a, f(a)\big), \big(b, f(b)\big)\Big)$.

- *дифференцируема на* (a, b)

Тогда найдётся точка $\xi \in (a, b)$*, такая что:*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

то есть касательная в которой наклонена под таким же углом, как прямая, проходящая через крайние точки графика функции f *на отрезке* $[a, b]$ *(12).*

Или, немного другая формулировка того же самого утверждения (с немного другим акцентом):

$$f(b) = f(a) + f'(\xi) \cdot (b - a)$$

Почему "работает" теорема Лагранжа?[20] Ровно потому же, почему и теорема Ролля.[21]

Введём короткое обозначение для тангенса угла наклона секущей, проведённой через концы графика функции f на отрезке $[a, b]$:

$$c^* \equiv \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Допустим, в точке a отрезка односторонняя производная больше тангенса угла наклона секущей: $f'_+(a) > c^*$. Это значит, что функция возрастает *сильнее*, чем нужно для того, чтобы из точки $(a, f(a))$ попасть в точку $(b, f(b))$: если она продолжит возрастание с такой

[20] Аналогично.

[21] В связи между теоремами ещё можно убедиться при таком взгляде на суть утверждений: теорема Ролля говорит о том, что график функции можно заключить в "трубку" со стенками, параллельными оси X (параллельными "оси" трубки — прямой, проходящей через точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$); теорема же Лагранжа — утверждает то же самое, что график функции можно заключить в "трубку", только теперь допускаются случаи, когда "трубка" расположена под наклоном (ось трубки есть прямая, проходящая через точки те же точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$, только теперь $f(a)$ и $f(b)$ не обязательно совпадают, в отличие от теоремы Ролля). (Источник наблюдения.)

же или ещё большей скоростью, или даже если производная после точки a будет всегда хотя бы не меньше c^*, то функция точно пройдёт “выше” $f(b)$ в точке b. Поэтому производная должна будет рано или поздно стать меньше c^* — пройдя в некоторой точке через саму c^*?.. Да, иначе опять может быть “излом”.

Замечание. Пусть функция f дифференцируема на интервале (a, b). Какие могут быть (и могут ли быть вообще) точки разрыва у производной f'? (Ведь не факт, что она тоже непрерывна?)

Точки устранимого разрыва у производной быть не может: если в некоторой точке x_0 имеем равенство односторонних пределов производной

$$\lim_{x\to x_0-0} f'(x) = \lim_{x\to x_0+0} f'(x)$$

то и сама производная $f'(x_0)$ не может быть равна ничему другому, кроме как этому пределу. (Потому что в этом случае будут существовать односторонние производные, каждая из которых будет равна соответствующему пределу производной.)[22]

[22] Покажем, что если у функции f существует односторонний предел производной в точке x_0, например:

$$\exists \lim_{x\to x_0+0} f'(x)$$

то в этом случае будет существовать и соответствующая односторонняя производная $f'_+(x_0)$ в этой точке, причём:

$$f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0+0} f'(x)$$

Заметим, что вопрос по сути сводится к тому, можно ли “переставить” пределы:

$$\lim_{x\to x_0+0} f'(x) = \lim_{x\to x_0+0}\lim_{z\to x}\frac{f(z)-f(x)}{z-x}$$
$$\stackrel{?}{=} \lim_{z\to x}\lim_{x\to x_0+0}\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \stackrel{?}{=} \lim_{z\to x_0+0}\frac{f(z)-f(x_0)}{z-x_0} = f'_+(x_0)$$

Пусть (для краткости):

$$\lim_{x\to x_0+0} f'(x) \equiv A$$

Что имеем:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 :\ \forall x \in U_{+\delta}(x_0) \to f'(x) \in U_\varepsilon(A)$$

где за $U_{+\delta}(x_0)$ обозначена правая половинка δ-окрестности x_0. При этом производная $f'(x)$ есть:

$$f'(x) = \lim_{z\to x}\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \equiv A_x$$

и раз эта производная существует, то можно также записать:

$$\forall\tilde\varepsilon\ \exists\tilde\delta :\ \forall z \in U_{\tilde\delta}(x) \to \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \in U_{\tilde\varepsilon}(A_x)$$

Итак, собирая всё вместе:

$$\begin{cases} \left|\dfrac{f(z)-f(x)}{z-x} - A_x\right| < \tilde\varepsilon, & z \in U_{\tilde\delta}(x) \\ |A_x - A| < \varepsilon, & x \in U_{+\delta}(x_0) \end{cases}$$

Откуда получаем (просто “замечаем” — пока не понятно, пригодится ли это вообще):

$$\left|\frac{f(z)-f(x)}{z-x} - A\right| < \varepsilon + \tilde\varepsilon, \quad x \in U_{+\delta}(x_0),\ z \in U_{\tilde\delta}(x)$$

(по сути это означает, что модуль разности в левой части можно сделать сколь угодно маленьким — так как ε и $\tilde\varepsilon$ произвольные больше нуля).

Точки разрыва первого рода у производной также быть не может: если в некоторой точке x_0 существуют пределы производной слева $\lim_{x\to x_0-0} f'(x)$ и справа $\lim_{x\to x_0+0} f'(x)$, но они не равны, то производной в точке x_0 не существует. (Что противоречит тому, что по условию функция f должна быть дифференцируема на всём (a, b).)

Остаётся разрыв второго рода: когда в некоторой точке x_0 не существует (конечного) предела производной слева или справа. Такие разрывы у производной могут быть.

Пример. Рассмотрим функцию (13):

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \tag{11}$$

Её производная:

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \neq 0$$

В нуле:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x} = 0$$

Очевидно, что

$$\nexists \lim_{x\to 0} f'(x)$$

то есть в нуле производная f' терпит разрыв второго рода. □

Что хотим:

$$\lim_{z\to x_0+0} \frac{f(z) - f(x_0)}{z - x_0} \overset{?}{=} A$$

Это равносильно:

$$\forall \hat{\varepsilon} > 0\ \exists \hat{\delta} > 0 :\ \forall z \in U_{+\hat{\delta}}(x_0) \to \frac{f(z) - f(x_0)}{z - x_0} \in U_{\hat{\varepsilon}}(A)$$

Теперь "соединяем": что есть — с тем, что хотим получить:

$$\left|\frac{f(z) - f(x_0)}{z - x_0} - A\right| \leq \left|\frac{f(z) - f(x_0)}{z - x_0} - \frac{f(z) - f(x)}{z - x}\right| + \left|\frac{f(z) - f(x)}{z - x} - A\right| \tag{10}$$

(где x есть некоторая точка из некоторой окрестности $U_{+\delta}(x_0)$, а z при этом находится рядом с ней: $z \in$ $\in U_{\tilde{\delta}}(x)$ — итого, при достаточно малой $\tilde{\delta}$ точка z также лежит правее x_0).

Второй модуль разности справа не больше $\varepsilon + \tilde{\varepsilon}$ (уже показали выше). А что с первым модулем разности? Его тоже можно сделать сколь угодно маленьким! Потому что $x \approx x_0$ (можно считать, что x расположен к x_0 так близко, как хотим — с любой желаемой наперёд заданной "точностью"), а ввиду непрерывности функции f также имеем $f(x) \approx f(x_0)$ (причём выбирая x всё ближе к x_0 получаем одновременно и $f(x)$ всё ближе к $f(x_0)$). А значит, $z - x \approx z - x_0$, и $f(z) - f(x) \approx f(z) - f(x_0)$. А потому и

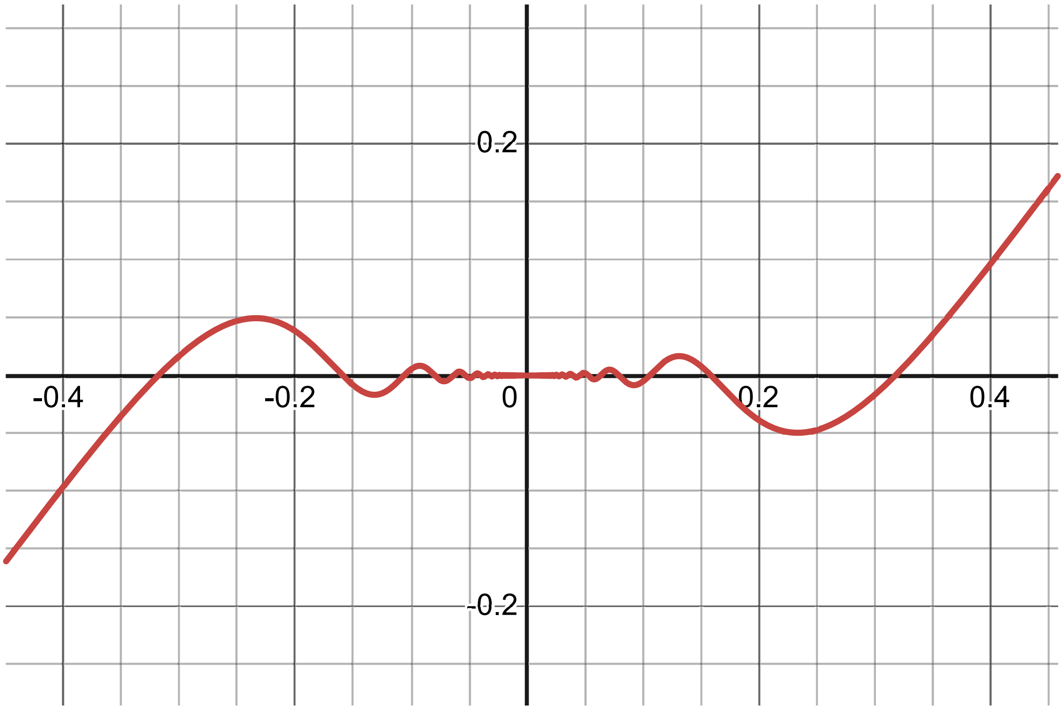
$$\frac{f(z) - f(x_0)}{z - x_0} \approx \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

то есть первый модуль разности в (10) выбором окрестности δ также можно сделать сколь угодно маленьким.

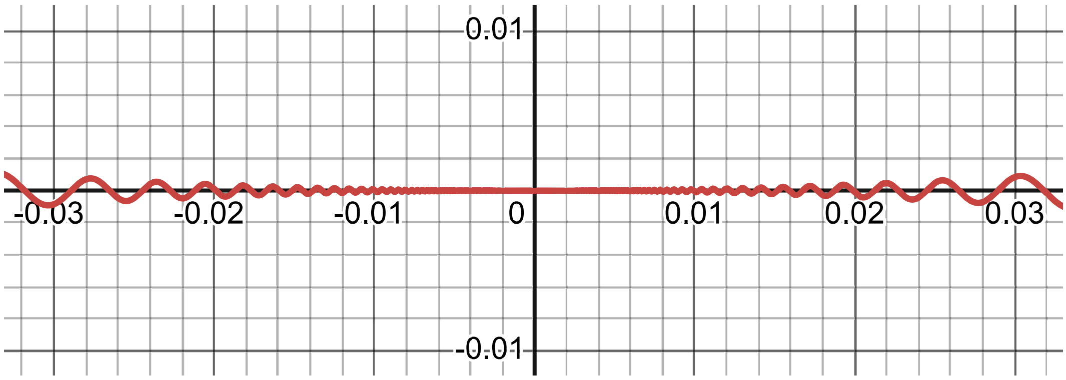
Итого, в некоторой окрестности x_0 (зависящей от δ, $\tilde{\delta}$ и от близости между x и x_0, необходимой для достаточной малости "первого модуля разности")

$$\left|\frac{f(z) - f(x_0)}{z - x_0} - A\right| < \hat{\varepsilon}$$

для произвольного $\hat{\varepsilon} > 0$.



(a) “Взгляд сверху”.



(b) “Зум” в область около нуля.

Рис. 13: График функции (11).

Излома у функции быть не может, потому что это соответствует разрыву первого рода производной, что невозможно. Но у производной может быть разрыв второго рода — может быть, производная всё-таки может “проскочить” c^*?..

Итак, начнём сначала.[23] На отрезке $[a, b]$ найдутся две точки l и r, такие что $f'(l) < c^*$ и $f'(r) > c^*$ (или наоборот) — в противном случае $f'(x) = c^*$ на всём отрезке. Рассмотрим отрезок $[l, r] \equiv [l_1, r_1]$. В точке – середине отрезка $m_1 \equiv \frac{l_1+r_1}{2}$ возможны случаи: $f'(m_1) > c^*$, $f'(m_1) = c^*$ и $f'(m_1) < c^*$. Во втором случае поиск закончен. В первом — переходим к новому отрезку $[l_2, r_2] = [l_1, m_1]$, в третьем — к отрезку $[m_1, r_1]$. И так далее. В общем случае получаем стягивающуюся последовательность вложенных отрезков $\{[l_n, r_n]\}$. Стягивающуюся в некоторую точку x^*. При этом имеем:

$$\begin{cases} f'(l_n) < c^* \\ f'(r_n) > c^* \end{cases} \quad n = 1, 2, \ldots$$

Что можно сказать про $f'(x^*)$?[24] Если в точке x^* производная непрерывна, то сразу

[23] Более строгое доказательство.

[24] Из симметрии всей ситуации кажется, что не остаётся никаких вариантов, кроме $f'(x^*) = c^*$ ...или

получаем $f'(x^*) = c^*$.[25] Если в точке x^* производная разрывна, то это точно разрыв второго рода... Может ли $f'(x^*) \neq c^*$ (а быть больше либо меньше c^*)? не получится ли в этом случае какого-нибудь противоречия?.. Размышления приводят к заключению, что в возможном отличии $f'(x^*)$ от c^* ничего плохого нет. Более того, можно просто предложить функцию, у которой в некоторой точке у производной будет разрыв второго рода, а сама производная в этой точке может принимать любое наперёд заданное значение (14).

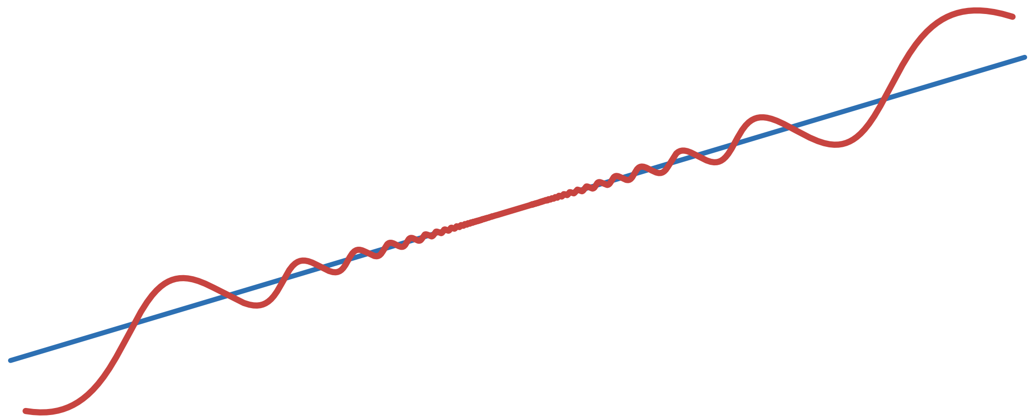


Рис. 14: "Эскиз" ситуации, когда у функции (красный график) в некоторой точке есть разрыв производной, но значение производной в этой точке при этом (синяя прямая) какое-нибудь любое заранее заданное ненулевое (очевидно, можно нарисовать синюю прямую под любым углом, а потом как-нибудь аккуратно организовать "бесконечный волнообразный спад" в точку около этой прямой.

Итак, в точке x^* может быть разрыв производной, и поиск c^* завершается неудачно... Что можно сделать в этом случае? Предлагается такой "обходной путь". Пусть $x^* \equiv x_1^*$. Если $f'(x_1^*) > c^*$, то положим $[\tilde{l}_1, \tilde{r}_1] \equiv [l_1, x_1^*]$; если же $f'(x_1^*) < c^*$, то положим $[\tilde{l}_1, \tilde{r}_1] \equiv$ $\equiv [x^*, r_1]$. И далее будем стягивать по описанной ранее процедуре делением пополам отрезок $[\tilde{l}_1, \tilde{r}_1]$! Он стянется в некоторую точку x_2^*, в которой опять либо производная будет непрерывна и равна c^* (и на этом конец), либо будет разрывна и равна c^* (тоже конец), либо... будет разрывна и не равна c^*. В случае очередного "неудачного стягивания" — снова переходим к новому начальному отрезку, стягиваем его, получаем точку, и так далее. В общем случае "неудачных" точек стягивания может получиться бесконечно много (может получиться последовательность таких точек $\{x_n^*\}$): в каждой из которых у производной f' наблюдается разрыв второго рода, но значение производной не равно c^*. По теореме Больцано – Вейерштрасса, из такой последовательности (ограниченной) можно будет выделить сходящуюся подпоследовательность — подпоследовательность $\left\{x_{n_k}^*\right\}$ из точек разрыва производной f' второго рода, сходящуюся к некоторой точке $z^* \in (a, b)$. Что можно сказать про эту точку z^*?[26] Может ли она, например, также быть точкой разрыва второго рода производной? Кажется, что да (15). Более того, кажется, что $f'(z^*)$ в общем случае может быть любой...

Предлагается на этом закончить текущее "доказательство".

варианта, когда $f'(x^*)$ может быть как больше, так и меньше c^* (когда оба неравенства возможны и однозначно определить "правильное" в общем случае нельзя).

[25]Как в теореме о промежуточном значении непрерывной на отрезке функции.

[26]Будет ли в ней наконец выполняться $f'(z^*) = c^*$? ':D

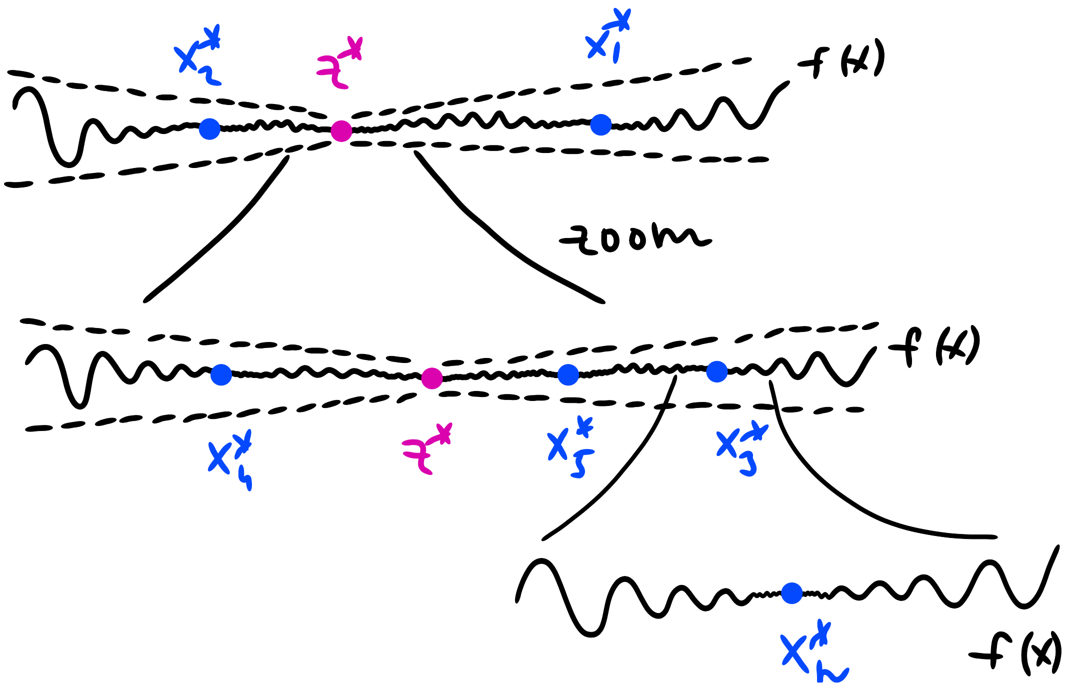


Рис. 15: “Эскиз” ситуации, когда у функции есть последовательность точек разрыва второго рода производной, которая сходится к точке — также разрыву второго рода производной. (Развитие примера (14).)

Однако отметим, что если к условиям из теоремы Лагражна добавить *ещё одно*, состоящее в том, что у функции f может быть лишь *конечное* число точек разрыва производной на интервале (a, b),[27] то представленное выше рассуждение из “доказательства” в самом деле становится доказательством. (*Последовательности* $\{x_n^*\}$ не получится — на каком-то шаге очередная точка x_k^* окажется точкой непрерывности производной и в ней будет достигнуто $f'(x_k^*) = c^*$.) Более того, это уже будет не просто доказательство *существования* нужной точки (где касательная наклонена под определённым углом), но ещё и алгоритм *поиска* такой точки.

Замечание. Для полноты картины представим более адекватный (стандартный) способ доказательства теоремы Лагранжа (и Ролля).

Раз функция f непрерывна на $[a, b]$, то она достигает на нём своих верхней и нижней граней (конечных). Пусть, например, $f(x^*) = \sup_{[a,b]} f$. Если значения на концах отрезка у функции совпадают, а сама она не константная, то $x^* \in (a, b)$ (то есть точка, где достигается супремум, лежит внутри отрезка). Так как функция f дифференцируема на интервале (a, b), то она дифференцируема и в x^*, причём $f'(x^*) = 0$, так как

$$\left.\begin{array}{ll} f(x) - f(x^*) \le 0 & \text{для всех точек правее } x^* \\ f(x^*) - f(x) \ge 0 & \text{для всех точек левее } x^* \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} f'_+(x^*) \le 0 \\ f'_-(x^*) \ge 0 \end{array} \Rightarrow f'(x^*) = 0$$

Это доказывает теорему Ролля.

Если же функция f принимает разные значения на концах, то на её основе можно определить *новую* непрерывную на $[a, b]$ функцию, такую чтоб у неё уже значения на концах совпадали. Например, искать эту функцию можно в виде: $g(x) = f(x) - \alpha \cdot x$. Из условия $g(a) = g(b)$ получается коэффициент $\alpha = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. А теорема Ролля в применении к g даёт наличие точки ξ, где $g'(\xi) = 0$, а потому $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

[27] Строгое ли это условие? Или, другими словами — много ли читатель знает функций, у которых производная имела бы бесконечное число точек разрыва на каком-нибудь интервале?

И последняя теорема о среднем.

Теорема 4.3 (Коши о среднем)**.** *Пусть на отрезке* $[a, b]$ *определены функции* $x = \phi(t)$ *и* $y = \psi(t)$*, причём:*

- $\phi(t)$ *и* $\psi(t)$ *непрерывна на* $[a, b]$
- $\phi(t)$ *и* $\psi(t)$ *дифференцируемы на* (a, b)
- $\phi'(t) \neq 0$[28,29]

Тогда найдётся точка $\xi \in (a, b)$*, такая что*[30]

$$\frac{\psi'(\xi)}{\phi'(\xi)} = \frac{\psi(b) - \psi(a)}{\phi(b) - \phi(a)}$$

4.1. С1, §16, №5

Доказать, что если функция f дифференцируема n раз на отрезке $[a, b]$ и обращается на нём в ноль в $n + 1$ точках, то найдётся $\xi \in (a, b)$, такая что $f^{(n)}(\xi) = 0$.

Решение. Функция обращается на отрезке $[a, b]$ в ноль в $n + 1$ точках — значит, весь отрезок нулями функции разбивается на n подотрезков, на каждом из которых функция f удовлетворяет условиям теоремы Ролля (4.1). Поэтому найдётся n точек, где обращается в ноль производная $f'(x)$.

А это значит, что весь отрезок $[a, b]$ нулями производной разбивается на $n - 1$ подотрезков, на каждом из которых производная функции f' удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Поэтому найдётся $n-1$ точка, где обращается в ноль производная производной, то есть $f''(x)$.

А это значит, что… И так далее. Очевидно, цепочку рассуждений можно аналогичным образом продолжать. Получается, что:

f	$n + 1$ нулей
f'	n нулей
f''	$n - 1$ нулей
…	
$f^{(n-1)}$	2 нуля
$f^{(n)}$	1 ноль ☺

□

4.2. С1, §16, №15(3)

Пользуясь теоремой Лагранжа, доказать неравенство:

$$e^x \geq 1 + x, \quad x \in \mathbb{R}$$

[28] Отсюда же по теореме Ролля следует, что $\phi(a) \neq \phi(b)$.

[29] Это условие можно ослабить или даже вообще опустить (если переписать формулу из теоремы в виде равенства произведений, а не в виде пропорции).

[30] Касательная в ней к графику параметрически заданной кривой будет параллельна секущей, соединяющей начало и конец графика кривой на отрезке.

Решение. (Графически убеждаемся, что неравенство — правда.)

Что говорит теорема Лагранжа? Один из вариантов её "прочитать" такой. Что для "хорошей" функции f верно, что её значение в некоторой точке x можно представить таким образом (через "поправку" к значению в какой-то другой точке x_0):

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi) \cdot (x - x_0), \quad \xi \text{ между } x \text{ и } x_0 \tag{12}$$

Определим в качестве функции f:

$$f(x) \equiv e^x - 1 - x$$

А в качестве x_0 возьмём, например: $x_0 = 0$.

Тогда имеем:

$$\begin{cases} f(x_0) = \left(e^x - 1 - x\right)|_{x=x_0} = 0 \\ f'(x) = e^x - 1 \end{cases}$$

и, по теореме Лагранжа (12):

$$e^x - 1 - x = 0 + \left(e^\xi - 1\right) \cdot x$$

Если $x > 0$, то правая часть тоже больше нуля (таким образом, $e^x - 1 - x > 0$). Если $x = 0$, то обе части зануляются. Если $x < 0$, то правая часть снова становится больше нуля. Итого, объединяя все случаи, получаем:

$$e^x - 1 - x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^x \geq 1 + x$$

Можно бы было попробовать взять в качестве функции из теоремы Лагранжа какую-нибудь другую. Например:

$$g(x) \equiv e^x$$

"Начальную точку" x_0 оставим прежней ($x_0 = 0$). Тогда можем записать:

$$\begin{aligned} &g(x) = g(x_0) + g'(\xi) \cdot (x - x_0) \\ &e^x = 1 + e^\xi \cdot x \end{aligned}$$

Очевидно, при $x > 0$ будет:

$$1 + e^\xi \cdot x > 1 + x$$

При $x = 0$ будет равенство, при $x < 0$ снова будет знак "больше". Поэтому в итоге снова получаем $e^x \geq 1 + x$. □

4.3. C1, §16, №19

Доказать, что если функция f дифференцируема и неограничена на конечном интервале (a, b), то её производная также неограничена на этом интервале.

Решение. Графически утверждение кажется понятным (16). Как доказать более строго? При движении по графику функции в сторону, где она бесконечно возрастает, её производная становится всё "круче"…

Применим теорему Лагранжа. Пусть x_0 — некоторая точка интервала. Тогда для произвольной x из интервала можно записать (при некоторой ξ лежащей между x_0 и x):

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi) \cdot (x - x_0)$$

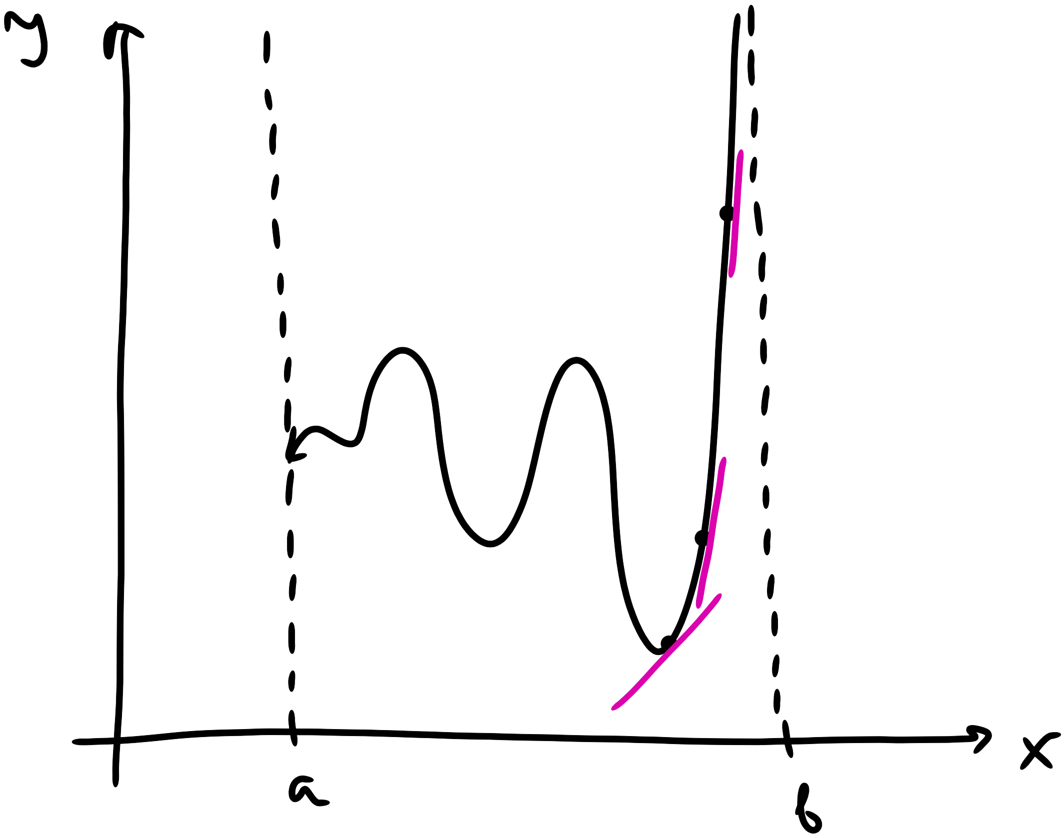


Рис. 16: Функция, неограниченная на интервале (a, b).

Так как функция f неограничена на интервале, значение $f(x)$ может каким угодно большим. Если же допустить, что производная ограничена ($|f'(\xi)| \leq C, \forall \xi \in (a, b)$), то и вся правая часть будет ограничена:

$$\left|f(x_0) + f'(\xi) \cdot (x - x_0)\right| \leq |f(x_0)| + C \cdot (b - a)$$

Что означает противоречие.

Иначе, можно бы было просто из теоремы Лагранжа выразить значение производной в точке ξ:

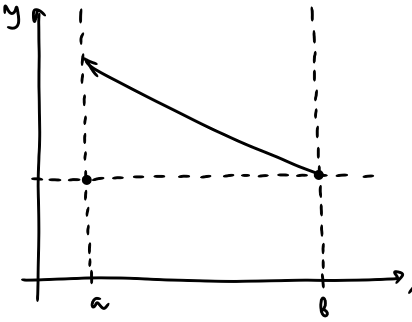
$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad x \neq x_0$$

Числитель дроби справа неограничен по величине, знаменатель ограничен, итого производная неограничена. □

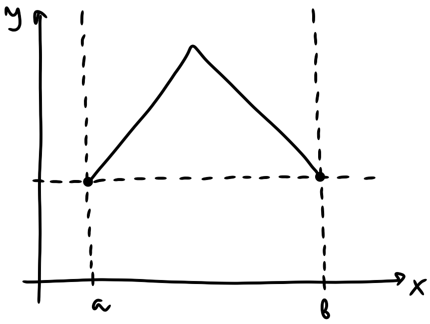
4.4. С1, §16, №33

Выяснить, будет ли всегда существовать точка $\xi \in (a, b)$, такая что $f'(\xi) = 0$, если функция f удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля (4.1), кроме одного из следующих:

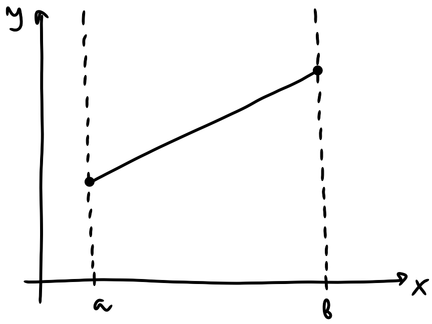
- функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$
- функция f имеет во всех точках интервала (a, b) конечную или определённого знака бесконечную производную
- $f(a) = f(b)$



(a) Без непрерывности функции на отрезке теорема Ролля может не работать.



(b) Без существования производной функции на интервале теорема Ролля может не работать.



(c) Без равенства значений функции на концах отрезка теорема Ролля может не работать.

Решение. Вместо слов, приведём по картинке-контрпримеру на каждый из пунктов: первый (17a), второй (17b) и третий (17c).

□

4.5. C1, §16, №30

Доказать, что если функция f дифференцируема на отрезке $[1, 2]$, то существует такая точка $\xi \in (1, 2)$, что:

$$f(2) - f(1) = \frac{\xi^2}{2} f'(\xi)$$

Решение.
Эскиз решения.

На теорему Ролля не похоже, на Лагранжа тоже, поэтому...

Перепишем доказываемое соотношение так, чтобы оно стало похоже хотя бы на "третью теорему о среднем" (4.3):

$$f(2) - f(1) = \frac{f'(\xi)}{2/\xi^2}$$

На этом "эскиз" заканчивается. Кажется, что сказанного достаточно, чтобы при желании довести решение до конца. □