Семинар 3

Алексеев Василий

16 сентября 2024

Содержание

К формулировкам и доказательствам (если такие приводятся) стоит относиться критически. Основное в конспекте — решение задач (но “критичность” и здесь отключать не рекомендуется). За строгой, ясной и последовательной теорией лучше обращаться к “нормальным” источникам. (Например, к лекциям.)

1. Предел последовательности (продолжение)

Отметим несколько заметных наблюдений про сходимость последовательностей.

1.1. Ограниченная последовательность имеет сходящуюся подпоследовательность (теорема Больцано – Вейерштрасса)

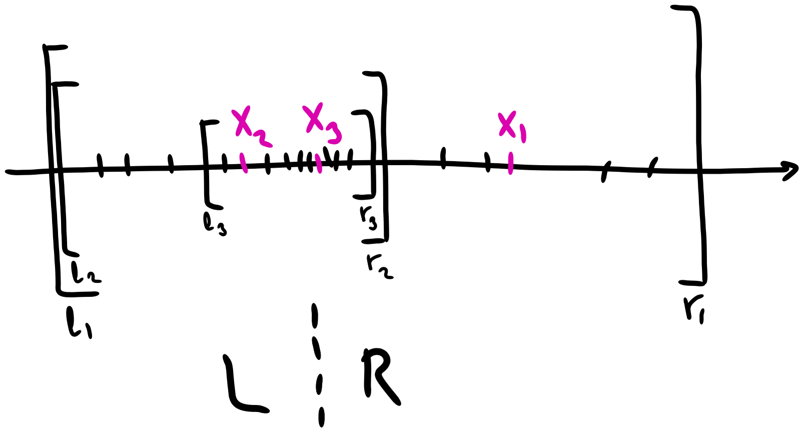

Рис. 1: Из ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство. Ограниченность последовательности $\{x_n\}$ равносильна тому, что все её члены лежат внутри некоторого отрезка:

$$\exists C > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \to -C \leq x_n \leq C \leftrightarrow |x_n| \leq C$$

Убедимся в том, что есть сходящаяся подпоследовательность, просто найдя (построя) эту самую подпоследовательность (1).

Пусть x_1 — какой-нибудь элемент последовательности из отрезка $[-C, C]$. Далее, поделим отрезок пополам. Раз бесконечная последовательность лежит на $[-C, C]$, то бесконечное число элементов будет лежать и хотя бы в одной из двух половин. “Перейдём” в эту самую половину. И выберем какой-нибудь x_2 (отличный от x_1, если он находится в этой же половине, и с номером, большим, чем номер элемента x_1).[1,2] И будем повторять этот процесс: деления пополам, перехода в нужную половину и выбора очередного x_k (отличного от всех выбранных ранее x_1, x_2, ..., x_{k-1}).[3] Что получается:

$$\begin{aligned}
&x_1 \in [l_1, r_1] = [-C, C] && \big|[l_1, r_1]\big| = 2C \\
&x_2 \in [l_2, r_2] = [-C, 0] \text{ или } [0, C] && \big|[l_2, r_2]\big| = C \\
&x_3 \in [l_3, r_3] = [-C/2, 0] \text{ (например)} && \big|[l_3, r_3]\big| = C/2 \\
&\ldots \\
&x_k \in [l_k, r_k] && \big|[l_k, r_k]\big| = 2C/2^{k-1}
\end{aligned}$$

[1] x_1, x_2 — это номера элементов как элементов строящейся подпоследовательности, то есть это “k” в индексах $\{x_{n_k}\}$. При этом “оригинальные” номера у этих элементов (как у элементов последовательности $\{x_n\}$) могли быть другими.

[2] Можно бы было немного “заморочиться” и описать процесс перехода к меньшему вложенному подотрезку так, чтобы он не содержал выбранный только что член подпоследовательности.

[3] На текущем отрезке $[l_k, r_k]$ всегда есть бесконечно много элементов последовательности — каждый раз можно будет выбрать новый элемент x_k подпоследовательности, сколько бы уже выбранных ранее элементов ни находились на этом же отрезке (их конечное число).

Получается *последовательность вложенных отрезков* $\{[l_k, r_k]\}$, и каждый член подпоследовательности $\{x_k\}$ берётся из соответствующего отрезка. Последовательность отрезков стягивающаяся:

$$\left|[l_k, r_k]\right| \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

(последовательность соответствующих длин отрезков стремится к нулю). При этом все левые концы отрезков $L = \{l_1, l_2, \dots\}$ "очевидно" лежат левее всех правых концов $R = \{r_1, r_2, \dots\}$. По аксиоме непрерывности $\mathbb{R}$ чисел, найдётся точка c, лежащая между L и R:[4]

$$\forall l \in L,\ \forall r \in R \to l < r \quad \Rightarrow \quad \exists c \in \mathbb{R} : \forall l \in L,\ \forall r \in R \to l < c < r$$

Расстояние от x_k до этой точки c, очевидно, неограниченно уменьшается по мере увеличения номера k:

$$|x_k - a| \le \frac{2C}{2^{k-1}} \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

поэтому $|x_k - a| \xrightarrow{k\to\infty} 0$,[5] а значит, и $x_k \xrightarrow{k\to\infty} a$.[6]

□

1.2. Ограниченная монотонная последовательность сходится (теорема Вейерштрасса)

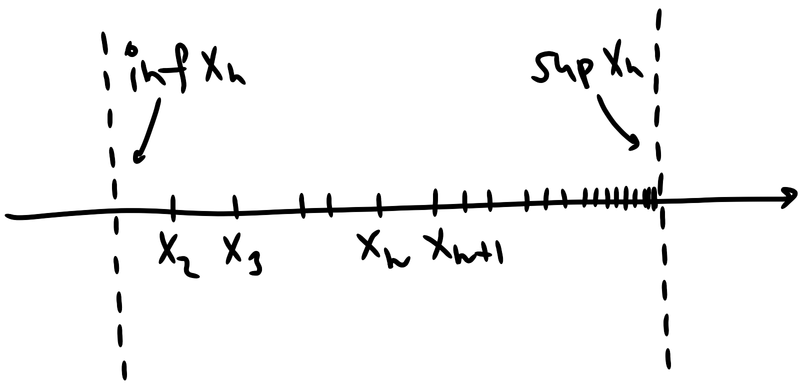

Рис. 2: Ограниченная монотонно возрастающая последовательность $\{x_n\}$ сходится к $\sup\{x_n\}$.

Доказательство. Пусть, для определённости, $\{x_n\}$ монотонно возрастает.

Раз последовательность ограничена, то у множества её элементов существуют конечные точная верхняя и точная нижняя грани.

Монотонно возрастает, ограничена сверху числом... Покажем, что точная верхняя грань (которую обозначим M) как раз будет являться пределом последовательности (2). Так как M — *точная* верхняя грань, то любое число $M - \varepsilon$ меньше него верхней гранью являться не будет, то есть найдётся элемент последовательности x_N больше него:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} :\ M - \varepsilon < x_N$$

[4] Вообще это объясняемое "между делом" утверждение о наличии общей точки у стягивающейся последовательности вложенных отрезков называется *теоремой Кантора о вложенных отрезках*.

[5] По-хорошему, это верно по теореме о двух милиционерах, о которой будет отдельно сказано несколько слов далее.

[6] А это тоже верно по одному из свойств сходящихся последовательностей (где про модуль), но о нём ничего сказано не будет.

а так как последовательность монотонно возрастает, то можно сказать и так:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} :\ \forall n \geq N \to M - \varepsilon < x_n$$

то есть все x_n, $n \geq N$ лежат в "левой половинке" ε-окрестности M.

Таким образом, M — предел $\{x_n\}$. □

1.3. "Иногда близость означает сходимость", или фундаментальная последовательность сходится (критерий Коши)

Из того, что последовательность $\{x_n\}$ сходится, следует, что её элементы становятся всё ближе, в том смысле что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} :\ \forall n, k \geq N \to |x_n - x_k| < \varepsilon \tag{1}$$

Оказывается, верно и "в другую сторону". То есть можно сформулировать следующий *критерий*.

Утверждение 1.1 (критерий Коши сходимости последовательности). *Последовательность* $\{x_n\}$ *сходится тогда и только тогда, когда она* фундаментальна*, то есть удовлетворяет соотношению* (1).

Доказательство. Из сходимости "очевидным" образом следует фундаментальность.

Поэтому покажем, что из фундаментальности последовательности также следует её сходимость. Имеем, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} :\ \forall n, k \geq N \to |x_n - x_k| < \varepsilon$$

Но тогда получается, что последовательность ограничена: почти все элементы лежат в ε-окрестности x_N (3), конечное число элементов может лежать вне окрестности, но в любом случае

$$\forall n \to |x_n| \leq C, \quad C = \max\left\{|x_N| + \varepsilon,\ |x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{N-1}|\right\}$$

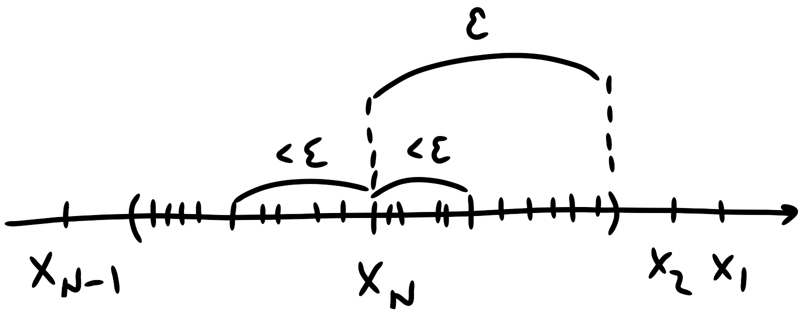

Рис. 3: Фундаментальная последовательность ограничена.

А из ограниченной последовательности, по теореме Больцано – Вейерштрасса, можно выделить сходящуюся подпоследовательность:

$$\exists \{x_{n_k}\} = \{y_k\} :\ \lim_{k \to \infty} y_k = a \leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists K \in \mathbb{N} :\ \forall k \geq K \to |y_k - a| < \varepsilon \tag{2}$$

где a — предел этой сходящейся подпоследовательности. Кажется естественным предположить, что a в таком случае будет пределом и всей последовательности. Для этого надо оценить расстояние от x_n до a (надо убедиться, что начиная с какого-то номера эта разность становится достаточно маленькой — меньше любого заданного наперёд $\tilde{\varepsilon}$):

$$|x_n - a| = \left|(x_n - y_k) + (y_k - a)\right| \le |x_n - y_k| + |y_k - a| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

при $n, k \ge N(\varepsilon)$ и $k \ge K(\varepsilon)$, итого при $n \ge \max(N, K)$ получаем $|x_n - a| < 2\varepsilon \equiv \tilde{\varepsilon}$ — все становятся близки к a с любой желаемой точностью $\tilde{\varepsilon} > 0$. Значит, $x_n \xrightarrow{n\to\infty} a$. □

1.4. Некоторые свойства сходящихся последовательностей

С элементами сходящихся последовательностей можно проводить ряд операций, получая в результате также сходящиеся последовательности: складывать, вычитать, умножать, даже делить (при некотором условии). Но не будем здесь подробно этого всего расписывать.[7] За деталями можно обратиться к более полным и компетентным источникам.

Отметим более-менее подробно лишь несколько свойств.[8] Свойств, связанных с неравенствами. Так, несложно принять, что если $a_n \le b_n$ начиная с какого-то номера, и при этом $a \xrightarrow{n\to\infty} A$, и $b \xrightarrow{n\to\infty} B$, то тогда обязательно $A \le B$:

$$a_n \le b_n,\ \forall n \ge N \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} b_n$$

Однако оказывается, что даже если известно, что члены одной последовательности *строго* меньше членов другой: $a_n < b_n$ — то и в таком случае неравенство с пределами в общем случае получается нестрогим:

$$a_n < b_n,\ \forall n \ge N \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} b_n$$

Например, $a_n = 1 - 1/n$ и $b_n = 1 + 1/n$: неравенство между членами с соответственными номерами, очевидно, строгое, но пределы, очевидно, равны (4).

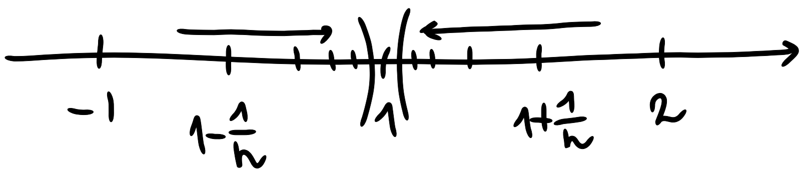

Рис. 4: Даже если $a_n < b_n$, пределы последовательностей могут быть равны.

Ещё одно свойство, связанное с неравенствами — *теорема о двух милиционерах*.

Утверждение 1.2. *Если есть три последовательности $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, такие что:*

$$\begin{cases} a_n \le b_n \le c_n, & \forall n \ge N \\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \\ \lim\limits_{n\to\infty} c_n = A \end{cases}$$

(то есть где неравенство выполнено для всех номеров больше некоторого $N \in \mathbb{N}$), то и "зажатая" последовательность сходится:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = A$$

[7]И так при решении номеров этим уже негласно пользовались :)

[8]Выбор их ничем не обусловлен, кроме "предпочтений" (причуд) автора конспекта.

Доказательство. Так как $\forall\varepsilon\ \exists N_a: \forall n \geq N_a \to a_n \in U_\varepsilon(A)$, и ещё для того же $\varepsilon\ \exists N_c: \forall n \geq N_c \to c_n \in U_\varepsilon(A)$, то при $n \geq \max(N_a, N_c)$:

$$A - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < A + \varepsilon \quad \leftrightarrow \quad b_n \in U_\varepsilon(A)$$

□

1.5. C1, §8, №143(1)

Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ сходится:

$$x_n = \frac{\sin a}{2} + \frac{\sin 2a}{2^2} + \ldots + \frac{\sin na}{2^n}, \quad a \in \mathbb{R}$$

Решение. Воспользуемся критерием Коши, чтобы показать сходимость (хотя, может быть, можно бы было и без него). Для сходимости последовательности $\{x_n\}$ в таком случае надо доказать, что

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}: \forall n,\ k \geq N \to |x_n - x_k| < \varepsilon$$

Рассмотрим разность (считая для определённости $n \geq k$):

$$|x_n - x_k| = \left|\frac{\sin(k+1)a}{2^{k+1}} + \frac{\sin(k+2)a}{2^{k+2}} + \ldots + \frac{\sin na}{2^n}\right| = \blacktriangle$$

Её нужно ограничить сверху произвольным $\varepsilon > 0$ (найти номер N, начиная с которого неравенство будет верно), поэтому продолжим, оценивая сверху. Модуль суммы:

$$\blacktriangle \leq \left|\frac{\sin(k+1)a}{2^{k+1}}\right| + \left|\frac{\sin(k+2)a}{2^{k+2}}\right| + \ldots + \left|\frac{\sin na}{2^n}\right| = \bigstar$$

Модули синусов:

$$\bigstar \leq \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+2}} + \ldots + \frac{1}{2^n} = \blacklozenge$$

Теперь оценим сумму так, что она не превосходит максимального слагаемого в количестве числа слагаемых:

$$\blacklozenge \leq \frac{1}{2^{k+1}} \cdot (n - k)$$

Кажется, с этим пока больше ничего не сделать, поэтому посмотрим, чего мы теперь хотим:

$$\frac{(n-k)}{2^{k+1}} < \varepsilon \tag{3}$$

где ε — какое-то любое произвольное больше нуля. Будет ли неравенство верным, начиная с какого-нибудь номера $N \in \mathbb{N}$? (которым можно ограничить номера $n,\ k \geq N$) В левой части неравенства — дробь, в числителе которой стоит что-то линейное от номера, а в знаменателе — что-то вида “2 в степени номера” (показательная функция от номера, причём основание больше единицы). Известно, что первое растёт намного медленнее второго, то есть

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$$

Раз левая часть рассматриваемого неравенства (3) в целом имеет такой вид, то и для неё это тоже должно быть верным (начиная с какого-то достаточно большого номера N она точно окажется меньше любого ε). Остаётся только как-то аккуратно разобраться с двумя номерами n и k… Но получится ли это сделать?.. Дробь $\frac{(n-k)}{2^{k+1}}$, в отличие от $\frac{n}{2^n}$, зависит от двух свободных параметров. В данном случае это означает, что каким бы большим ни был номер $k \geq N$, всегда можно будет найти разность $n - k$ ещё больше (за счёт выбора номера n, ведь n и k никак не связаны, кроме как условием $n \geq k$, поэтому $n - k \in \mathbb{N}$ без ограничений). Причём насколько угодно больше, так что условие "$< \varepsilon$" точно не сработает…

Хмм…

Откатимся немного назад. А именно, на этот шаг:

$$\bigstar \leq \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+2}} + \ldots + \frac{1}{2^n} = \spadesuit$$

Это сумма дробей, где каждая следующая меньше предыдущей. Оценка сверху типа "не больше максимальной, помноженной на количество" — она хоть и правильная, но, возможно, слишком грубая (ведь оригинальная сумма намного меньше, а с такой оценкой в итоге вообще пришли к неограниченно большой дроби). Однако можно заметить,[9] что здесь вообще не надо было ничего оценивать, потому что сумма дробей считается "по-честному" — как сумма членов геометрической прогрессии!

$$\spadesuit = \frac{1}{2^k}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-k}}\right) = \frac{1}{2^k} \cdot \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n-k}} \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^k} < \varepsilon$$

Теперь уже было очевидно, что с какого-то $N \in \mathbb{N}$ (при $k \geq N$), точно будет верно $\frac{1}{2^k} < \varepsilon$. □

1.6. С1, §8, №158

Привести пример расходящейся последовательности $\{x_n\}$, такой что

$$\lim_{n\to\infty} |x_{n+p} - x_n| = 0, \quad \forall p \in \mathbb{N}$$

Решение. Другими словами, последовательность должна быть такой, что

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} :\ \forall n \geq N \to |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$$

Это похоже на условие Коши сходимости последовательности (1):

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} :\ \forall n \geq N,\ \forall p \in \mathbb{N} \to |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$$

Похоже, но не совсем. Отличие в расположении условия на $p \in \mathbb{N}$. В условии задачи сначала выбирается какой-то p, потом ε и так далее — то есть p фиксируется с самого начала (и смотрится разность $x_{n+p} - x_n$ членов, отстоящих друг от друга на фиксированный номер). Но в условии Коши — выбирается какой-то ε, а потом варьируются оба и n, и p, и потом разность $x_{n+p} - x_n$ становится разностью любых двух произвольных членов последовательности. Поэтому кажется… что условие Коши — более сильное. И гипотеза такая, что условие из задачи ("ослабленное") допускает такие последовательности, члены которых становятся всё ближе, но не так "сильно" близко, как по условию Коши — и в итоге последовательность получается бесконечно большой (рост членов последовательности спадает, но всё равно неограничен)…

[9] Если посмотреть на задачу свежим взглядом, или под другим углом, и в любом случае — если повезёт.

Рассмотрим такую последовательность $\{x_n\}$:

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Покажем, что она удовлетворяет условию задачи, но при этом не сходится (а сходится к $+\infty$).[10] Начнём с проверки условия. Пусть $p \in \mathbb{N}$ (фиксированный). Посмотрим на разность:

$$|x_{n+p} - x_n| = \left|\frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+p}\right| < p \cdot \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

то есть при увеличении n стремится к нулю.

Теперь проверим расходимость последовательности. Для этого предлагается проверить выполнение "не-условия-Коши":

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geq N,\ \exists q \in \mathbb{N} \to |x_{n+q} - x_n| > \varepsilon$$

(где для чуть большей аккуратности используется другое обозначение для номера q, потому что p уже был зафиксирован в самом начале — в отрицании условия Коши используется "другой p"). Снова посмотрим на ту же разность, только теперь надо её оценить снизу (в идеале — оценить чем-то константным):

$$|x_{n+q} - x_n| = \left|\frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+q}\right| > q \cdot \frac{1}{n+q} = \heartsuit$$

Положим $q \equiv n$ (выбираем n и q, при этом q можно выбирать вообще каким хотим):

$$\heartsuit = \frac{n}{n+n} = \frac{1}{2} \equiv \varepsilon$$

Таким образом, показали отрицание условия Коши для $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

Способ 2: более "адекватный". (Эскиз).

Последовательность $\{x_n\}$ должна возрастать всё медленнее, и при этом неограниченно... Но тогда можно бы было рассмотреть в качестве x_n "обычный" корень!

$$x_n = \sqrt{n}$$

Можно показать, что эта последовательность тоже подходит.

Или логарифм:

$$x_n = \log_2 n$$

(Или ещё что угодно, что тоже "медленно", но неограниченно возрастает.) □

1.7. C1, §8, №91

Верны ли утверждения?

1. Всякая бесконечно большая последовательность неограничена.

2. Всякая неограниченная последовательность является бесконечно большой.

[10] "Не сходится" = "расходится" = "вообще ни к чему не сходится" или "сходится к какой-нибудь бесконечности".

Решение. Вспомним определения упоминаемых типов последовательностей.

Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно большой*, если она сходится к ∞:

$$\forall C > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \ \forall n \geq N \to |x_n| > C$$

Последовательность $\{x_n\}$ называется *неограниченной*, если она не является ограниченной ("не-ограниченная"):

$$\forall C > 0\ \exists n \in \mathbb{N} : \ |x_n| > C$$

Очевидно, что бесконечно большая последовательность является неограниченной (бесконечно большая = неограниченная + ещё сходится). Однако неограниченная последовательность может и не быть бесконечно большой (если нет сходимости). Например, рассмотрим последовательность...

А что за последовательность — постараемся всё-таки узнать на семинаре (если не забудем). To be continued... □

1.8. C1, §8, №119

Доказать, что последовательность сходится тогда и только тогда, когда она ограничена и имеет один (и только один) частичный предел.

Решение. "Тогда и только тогда" — означает, что надо показать "в две стороны".

⇒, или "только тогда, когда". Пусть последовательность сходится. Тогда, очевидно, она ограничена ("почти все" члены последовательности находятся в окрестности предела). Также очевидно, что она имеет всего один частичный предел (которым является предел всей последовательности).

⇐, или "тогда, когда". Пусть последовательность ограничена и имеет всего один частичный предел. Покажем, что в таком случае она обязательно сходится.

Обозначим этот частичный предел как $a \in \mathbb{R}$. В таком случае, вариантов не очень много: логичным кажется предположить, что и вся последовательность сходится к a. В этом можно убедиться, если, например, проверить сходимость по определению:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \ \forall n \geq N \to |x_n - a| < \varepsilon \tag{4}$$

Перед проверкой обозначим сходящуюся к a подпоследовательность как

$$y_k = x_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} a$$

А ограниченность $\{x_n\}$ обозначим как $|x_n| \leq C, \forall n \in N$ для некоторого $C > 0$.

Рассмотрим разность:

$$|x_n - a| = |x_n - y_k + y_k - a| \leq |x_n - y_k| + |y_k - a|$$

Хочется, чтобы было $|x_n - y_k| + |y_k - a| < \varepsilon$. Так как $y_k \xrightarrow{k\to\infty} a$, то можно будет сделать разность $|y_k - a|$ сколь угодно малой (выбором достаточно большого граничного номера). Например, $\exists K = K\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \in \mathbb{N} : \ \forall k \geq K \to |y_k - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Но можно ли будет сделать достаточно малой разность $|x_n - y_k|$? (Чтобы всё "сошлось", она должна быть $|x_n - y_k| < \varepsilon/2$...)

Предположим противное. Допустим, выбрать такой достаточно близкий к x_n элемент y_k не получится. Точнее, "противное", если сформулировать полностью, будет по сути означать практически отрицание (4) с акцентом на то, что не можем подобрать достаточно близкий y_k:

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n \geq N : |x_n - y_k| \geq \frac{\varepsilon}{2}\ \forall k \geq K\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Чем это "плохо"? Можно заметить, что получаем такую картинку (5). Для любого N найдётся x_n, $n \geq N$, который удалён на расстояние не менее $\frac{\varepsilon}{2}$ от *всего бесконечного хвоста* y_k при $k \geq K$. Но этот бесконечный хвост лежит "рядом" с a. Таким образом, x_n оказывается лежащим *далеко* от a, вне фиксированной его окрестности:

$$|x_n - a| = \left|(x_n - y_k) + (y_k - a)\right| \geq \left||x_n - y_k| - |y_k - a|\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}$$

(где последний переход обоснован тем, что $|y_k - a|$ может быть сколь угодно маленькой, ведь рассматриваются все номера $k \geq K$.) А таких далёких от a членов x_n можно будет выбрать бесконечно много! (Ведь начали с того, что "$\forall N \in \mathbb{N}\ \exists n$".) Нашли бесконечное число членов последовательности $\{x_n\}$ вне $\frac{\varepsilon}{2}$-окрестности a. Но, так как $\{x_n\}$ ограниченная, это приводит к тому, что можно будет найти ещё одну сходящуюся подпоследовательность, сходящуюся к чему-то, отличному от a. (Бесконечное число x_n лежит либо на $[-C, a - \varepsilon/2)$, либо на $(a + \varepsilon/2, C]$, либо и там, и там — в любом случае, по теореме Больцано – Вейерштрасса можно будет выделить сходящуюся подпоследовательность.) Противоречие с тем, что частичный предел единственный.

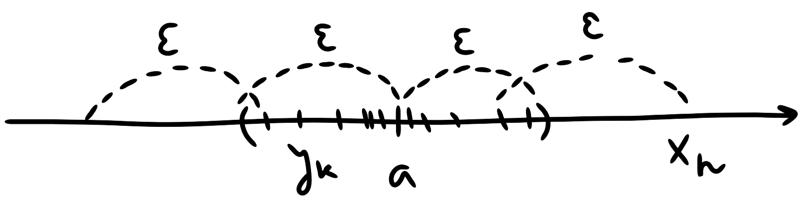

Рис. 5: Если все x_n расположены далеко от y_k, сходящихся к a, то они также расположены далеко от a.

Способ 2: сразу от противного.[11]

Допустим, последовательность $\{x_n\}$ не сходится к a, то есть что

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n \geq N : |x_n - a| \geq \varepsilon$$

Другими словами, это означает, что вне ε-окрестности a находится бесконечное число элементов последовательности (при $N_1 = 1$ найдётся $n_1 \geq N_1$, такой что элемент с этим номером x_{n_1} лежит вне окрестности; при $N_2 > n_1$ (например, $N_2 = n_1 + 1$) найдётся другой номер $n_2 \geq N_2$, такой что элемент x_{n_2} тоже вне окрестности; и так далее — таким образом можно без конца находить всё новые элементы последовательности, расположенные от a на расстояние не менее ε (6)).

Бесконечное число элементов $\{x_n\}$ находятся либо слева от ε-окрестности a, либо справа (либо и там, и там). Пусть для определённости они лежат справа, то есть на отрезке $[a + \varepsilon, C]$. Но тогда из этой бесконечной подпоследовательности элементов можно будет выделить ещё одну сходящуюся подпоследовательность (по теореме Больцано – Вейерштрасса). Сходящуюся, очевидно, к чему-то из отрезка $[a + \varepsilon, C]$, то есть к чему-то, отличному от a. Получили противоречие с тем, что a является единственным частичным пределом.

□

[11] По сути это более "адекватная" версия предыдущего решения, без лишних (как оказалось) усложнений.

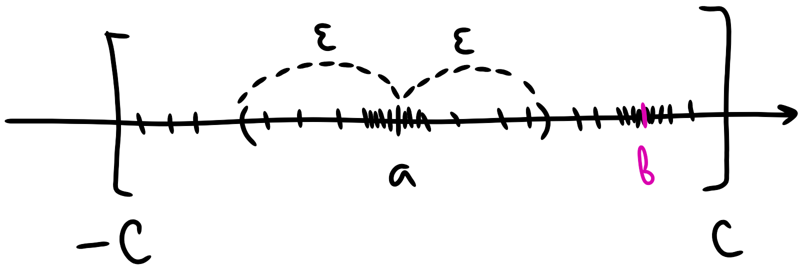

Рис. 6: Если вне ε-окрестности a лежит бесконечно много элементов ограниченной последовательности, то в ней можно будет найти подпоследовательность, сходящуюся не к a.

1.9. С1, §8, №120

У последовательности $\{x_n\}$ подпоследовательности $\{x_{2k}\}$, $\{x_{2k-1}\}$ и $\{x_{3k}\}$ сходятся. Доказать, что сходится и сама последовательность.

Решение. Заметим, что из условия, что сходятся только $\{x_{2k}\}$ и $\{x_{2k-1}\}$ подпоследовательности, ещё не следует сходимость всей последовательности. (Например, $x_n = (-1)^n$.)

Пусть

$$a = \lim_{k\to\infty} x_{2k}$$

$$b = \lim_{k\to\infty} x_{2k-1}$$

$$c = \lim_{k\to\infty} x_{3k}$$

Если покажем, что $a = b$, то отсюда будет понятно, и вся последовательность сходится к этому числу. Почему можно утверждать, что $a = b$? Подпоследовательность с чётными номерами: $\{x_{2k}\} = \{x_2, x_4, x_6, \ldots\}$ — с нечётными: $\{x_{2k-1}\} = \{x_1, x_3, x_5, \ldots\}$ — и с номерами, кратными трём: $\{x_{3k}\} = \{x_3, x_6, x_9, \ldots\}$. Видно, что элементы последней подпоследовательности чередуются, то с чётным номером, то с нечётным. Таким образом, сходящаяся $\{x_{3k}\}$ как бы “объединяет” две другие подпоследовательности, приводит к тому, что все три они сходятся к одному и тому же числу…

Оформим рассуждение более строго. Пойдём от противного: допустим, что $a \neq b$, а также что $c \neq a$, $c \neq b$. Тогда найдётся $\varepsilon > 0$, такой что ε-окрестности a и b не пересекаются — между ними будет “зазор” (7). (Например, можно взять $\varepsilon = (b-a)/4$.) При этом внутри каждой из окрестностей будут “почти всё” элементы: в одной с чётными номерами, в другой с нечётными, то есть $\forall k \geq K_1 \to x_{2k} \in U_\varepsilon(a)$, а $\forall k \geq K_2 \to x_{2k-1} \in U_\varepsilon(b)$ для некоторых K_1 и K_2. Получается, “половина” элементов $\{x_{3k}\}$ будет лежать в одной окрестности, “половина” в другой, а такого не может быть. Потому что можно взять $\tilde{\varepsilon}$-окрестность вокруг c, такую что в ней точно не будет или всех кроме конечного числа элементов с чётными номерам, или с нечётными. (Например, можно также взять $\tilde{\varepsilon} = (b-a)/4$.) Значит, обязательно должны выполняться равенства $c = a$, $c = b$, а отсюда и $a = b$.

Можно бы было и не думать вообще о расположении c. Получим противоречие из условия Коши сходимости $\{x_{3k}\}$. По условию Коши, должно быть:

$$\forall \tilde{\varepsilon} > 0\ \exists N : \forall p, q \geq N \to |x_{3p} - x_{3q}| < \tilde{\varepsilon}$$

Но при наличии “зазора” между ε-окрестностями a и b разности между элементами из этих окрестностей будут не меньше “зазора”, поэтому для $\tilde{\varepsilon}$, равного “зазору” (то есть снова можно взять $\tilde{\varepsilon} = (b-a)/4$), условие Коши сходимости для $\{x_{3k}\}$ выполняться не будет (всегда можно будет найти, например, x_{3p} с каким угодно большим чётным номером и x_{3q} с каким угодно большим нечётным). □

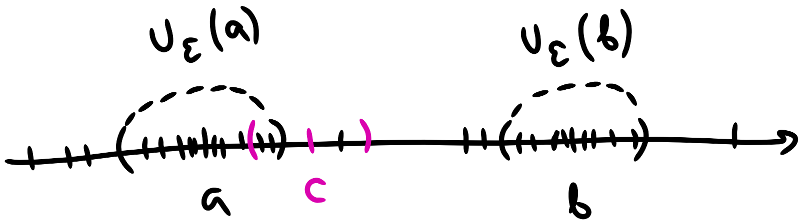

Рис. 7: Если два частичных предела $a \in \mathbb{R}$ и $b \in \mathbb{R}$ не равны, то в любой достаточно малой окрестности любого числа не будет либо бесконечного хвоста подпоследовательности, сходящейся к a, либо бесконечного хвоста подпоследовательности, сходящейся к b.