Семинар 9

Алексеев Василий

11 ноября 2024

Содержание

К формулировкам и доказательствам (если такие вообще приводятся) стоит относиться критически. Основное в этом конспекте — решение задач (но “критичность” и здесь лучше не отключать). За строгой, ясной и последовательной теорией лучше обращаться к “нормальным” источникам. (Например, к лекциям.)

1. Формула Тейлора

1.1. Сюжет из физики

Пусть материальная точка движется вдоль оси X с постоянным ускорением $a(t) = \text{const}$. В таком случае, если начальная скорость была равна v_0, то скорость в произвольный момент времени $v(t)$ можно рассчитать следующим образом:[1]

$$\begin{aligned} a(t) = \frac{dv(t)}{dt} &\Rightarrow dv(t) = a(t)\,dt \\ &\Rightarrow \int_0^t v(\tau) = \int_0^t a(\tau)\,d\tau \\ &\Rightarrow v(t) = v_0 + at \end{aligned}$$

Если начальная координата была равна x_0, то координату в зависимости от времени $x(t)$ тоже можно найти — из аналогичных рассуждений:

$$\begin{aligned} v(t) = \frac{dx(t)}{dt} &\Rightarrow dx(t) = v(t)\,dt \\ &\Rightarrow \int_0^t x(\tau) = \int_0^t v(\tau)\,d\tau \\ &\Rightarrow \int_0^t x(\tau) = \int_0^t (v_0 + a\tau)\,d\tau \\ &\Rightarrow x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2} \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} v(t) &= x'(t) \\ a(t) &= x''(t) \end{aligned}$$

соотношение для определения координаты $x(t)$ можно переписать так:

$$x(t) = x(0) + x'(0)t + \frac{x''(0)}{2}t^2$$

Если бы ускорение было переменным и была бы известна его скорость изменения, то в формуле возник бы член с t^3, и так далее. Но даже если бы ускорение было переменным, формулой выше (до t^2) можно бы было пользоваться — только надо бы было понимать, что эта формула будет тем точнее, чем *ближе* рассматриваемое время t к нулевому моменту времени. Это — пример формулы Тейлора для функции $x(t)$ в окрестности нуля (формула Маклорена).

Общий вид формулы Тейлора для некоторой функции $f(x)$ в окрестности точки x_0:[2]

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}\cdot(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n),\ x \to x_0$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n),\ x \to x_0 \tag{1}$$

[1] Под ускорением $a(t)$ и скоростью $v(t)$ в данном случае понимаются проекции соответствующих векторов на ось X: $a \equiv a_x$, $v \equiv v_x$.

[2] Точнее, это формула Тейлора *с остаточным членом в форме Пеано*. Для существования такого разложения функция должна быть определена в некоторой окрестности точки x_0, должна иметь в окрестности x_0 производные до $(n-1)$-го порядка включительно, а в самой x_0 должна существовать и n-ая производная.

И частный её случай — формула Маклорена (представление функции f в окрестности нуля: $x_0 = 0$):

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2} \cdot x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n + o(x^n),\ x \to 0$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n),\ x \to 0 \tag{2}$$

1.2. Некоторые “табличные” формулы Маклорена

Просто вычислением n-ых производных в нуле можно получить формулы Маклорена следующих функций.

Экспонента:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n),\ x \to 0 \tag{3}$$

Гиперболический синус (“шинус”):[3]

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$$

$$\operatorname{sh} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}),\ x \to 0 \tag{4}$$

Гиперболический косинус (“чосинус”):[4]

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

$$\operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}),\ x \to 0 \tag{5}$$

Просто синус:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}),\ x \to 0 \tag{6}$$

Просто косинус:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \ldots$$

[3]Как у нечётной функции: $f(-x) = -f(x)$, — в формуле Тейлора будут присутствовать члены только с x в *нечётной* степени. Иначе, если всё-таки допустить наличие ненулевого члена с чётной степенью: $f(x) = \ldots + Cx^{2k} + \ldots$, — то получим противоречие:

$$f(-x) = \ldots + Cx^{2k} + \ldots \neq - \ldots - Cx^{2k} - \ldots = -f(x)$$

[4]Как у чётной функции: $f(-x) = f(x)$, — в формуле Тейлора будут только члены с x в *чётной* степени.

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}),\ x \to 0 \tag{7}$$

Для полноты картины[5] приведём ещё "кусочки" (только первые члены) формул Тейлора для тангенса, арксинуса и арктангенса (и также вспомним в начале ещё синус для сравнения):[6,7]

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4) \tag{8}$$

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4) \tag{9}$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4) \tag{10}$$

"Скобка" ($\alpha \in \mathbb{R}$):[8]

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \ldots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n) \tag{11}$$

Пример. Приведём также пару популярных частных случаев "скобки".

Случай один:

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + \frac{-1(-2)}{2} x^2 + \frac{-1(-2)(-3)}{3!} x^3 + \ldots$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots \tag{12}$$

Случай два:

$$\frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} = (1+(-x))^{-1} = 1 - (-x) + \frac{-1(-2)}{2}(-x)^2 + \frac{-1(-2)(-3)}{3!}(-x)^3 + \ldots$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \tag{13}$$

□

[5] А также потому, что это может пригодиться при решении задач на пределы…

[6] Кусочки, а не полные формулы — потому, что составление формулы Тейлора через вычисление производной n-ого порядка в данных случаях кажется проблематичным…

[7] При этом можно иметь в виду, что:

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$$

$$\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$$

[8] Далее в формуле используется следующее ("продвинутое") обозначение для биномиального коэффициента ("цэ из эн по ка"):

$$\binom{\alpha}{k} = C_\alpha^k$$

И формула для логарифма:[9]

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n) \tag{14}$$

И ещё одна:

$$\ln(1-x) = \ln(1+(-x)) = -x - \frac{(-x)^2}{2} + \frac{(-x)^3}{3} - \dots$$

$$\ln(1-x) = \sum_{k=1}^{n} -\frac{x^k}{k} + o(x^n) \tag{15}$$

1.3. C1, §9, №50(1)

Установить, какое из утверждений верно:

a) $x^2 = o(x), \quad x \to 0$

b) $x^2 = o(x), \quad x \to \infty$

Решение. Что означает выражение $x^2 = o(x)$? Оно говорит о том, что x^2 "бесконечно" мал по сравнению с x. Если $x \approx 0$ ($x \to 0$), то x^2 будет намного меньше, чем x. Если же $x \gg 1$ ($x \to \infty$), то x^2, наоборот, будет намного больше, чем просто x. Итого:

$$x^2 = o(x), \quad x \to 0$$
$$x = o(x^2), \quad x \to \infty$$

И более "формально строгое" обоснование:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0} x = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = o(x), \quad x \to 0$$

□

1.4. C1, §9, №51(2)

Показать, что

$$o(x^n) \cdot o(x^k) = o(x^{n+k}), \quad x \to 0$$

(где $n, k \in \mathbb{N}$).

Решение. Доказываемое равенство — между классами функций. Функция "слева" — это произведение некоторых двух $f(x)$ и $g(x)$, про каждую из которых известно, что:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0, \quad \lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x^k} = 0$$

Проверим, лежит ли эта функция – произведение двух в классе $o(x^{n+k})$ при $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)\cdot g(x)}{x^{n+k}} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n} \cdot \frac{g(x)}{x^k} = 0 \quad \Rightarrow \quad (fg)(x) = o(x^{n+k}),\ x \to 0$$

□

[9] Получить её можно либо тоже "стандартно": нахождением n-ой производной. Либо через "трюк" с производной (через формулу Тейлора для производной) — пример про это см. далее (1.12).

Перед следующим номером рассмотрим сначала небольшой

Пример.

$$\big(x + o(x)\big) + \big(x^2 + o(x^2)\big) = x + o(x),\ x \to 0$$

□

1.5. T4

Упростить выражение:

$$(2x - 3x^4 + o(x^4)) \cdot (1 - x + 2x - x^3 + o(x^3))$$

Решение. Иными словами, считаем, что упростить надо такое выражение:

$$(2x - 3x^4 + o(x^4)) \cdot (1 + x - x^3 + o(x^3))$$

Можно по-честному раскрыть скобки и потом “спрятать” в о-малое всё лишнее. А можно попытаться сразу прикинуть, до какой точности имеет вообще смысл проводить вычисления. Какая получится “самая большая” о-малая в результате раскрытия скобок? Видно, что это $o(x^4)$ (так как $o(x^4) \cdot 1 = o(x^4)$ и $o(x^3) \cdot 2x = o(x^4)$). Таким образом, все слагаемые с x в степени 5 и выше нам “не интересны”. А для всех x в меньших степенях можем собрать коэффициенты в виде суммы. В результате такого “интеллектуального” раскрытия скобок получаем:

$$0 \cdot 1 + 2 \cdot x + 2 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 + (-3 - 2) \cdot x^4 + o(x^4) = 2x + 2x^2 - 5x^4 + o(x^4),\ x \to 0$$

□

1.6. C1, §18, №1(9)

Представить формулой Маклорена до $o(x^n)$ функцию:

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Решение. Выражение, задающее функцию, имеет вид $(1 + x)^\alpha$:

$$f(x) = (1 - x)^{-2}$$

Поэтому по (11) в качестве формулы Маклорена получаем:

$$f(x) = (1 - x)^{-2} = 1 + (-2) \cdot (-x) + \frac{(-2) \cdot (-2 - 1)}{2} \cdot (-x)^2 + \ldots + \binom{-2}{n}(-x)^n + o(x^n),\ x \to 0$$

Для полноты картины можем попробовать получить числовое выражение для n-ого коэффициента:

$$\begin{aligned}\binom{-2}{k} &= \frac{-2 \cdot (-2 - 1) \cdot \ldots \cdot (-2 - (k - 1))}{k!}\\ &= (-1)^k \cdot \frac{2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (k + 1)}{k!}\\ &= (-1)^k \frac{(k + 1)!}{k!} = (-1)^k \cdot (k + 1)\end{aligned}$$

Итого:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (k + 1) \cdot (-1)^k x^k + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} (k + 1) \cdot x^k + o(x^n)$$

□

1.7. С1, §18, №2(9)

Представить формулой Маклорена до $o(x^n)$ функцию:

$$f(x) = \ln(2 + x - x^2)$$

Решение. Так как $x - x^2 \to 0$ при $x \to 0$, то можно попробовать сразу воспользоваться формулой Тейлора для логарифма (14):

$$\begin{aligned}
\ln(2 + x - x^2) &= \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{x - x^2}{2}\right) \\
&= \ln 2 + \frac{x - x^2}{2} - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x - x^2}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{x - x^2}{2}\right)^3 - \ldots \\
&= \ln 2 + \frac{1}{2}x + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right)x^2 + o(x^2)
\end{aligned}$$

Видно, что разложение до какого-то фиксированного небольшого числа членов таким образом получить можно, но общую формулу до n-ого члена — уже как-то затруднительно… Поэтому придётся пойти другим путём.

Заметим, что выражение под логагифмом несложным образом раскладывается на множители:

$$2 + x - x^2 = -(x^2 - x - 2) = -(x + 1)(x - 2)$$

Поэтому функцию в окрестности нуля можно представить таким образом:[10]

$$f(x) = \ln\left\{-(x + 1)(x - 2)\right\} = \ln\left\{(1 + x)(2 - x)\right\} = \ln(1 + x) + \ln(2 - x)$$

Теперь уже понятно (14, 15), что делать дальше:

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + o(x^n),\ x \to 0$$

$$\begin{aligned}
\ln(2 - x) &= \ln 2 + \ln\left(1 - \frac{x}{2}\right) \\
&= \ln 2 - \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^3 - \ldots \\
&= \ln 2 - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(\frac{x}{2}\right)^k + o(x^n),\ x \to 0
\end{aligned}$$

(Замечаем, что до $o(x^2)$ таким образом полученное разложение $f(x)$ будет совпадать с первоначальным вариантом через логарифм в лоб.)

Итого:

$$f(x) = \ln 2 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\cdot\left((-1)^{k-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^k\right)\cdot x^k + o(x^n),\ x \to 0$$

$\square$

[10] Модулей при разложении одного логарифма в сумму двух нигде не ставим, потому что осознанно контролируем, чтоб выражения под логарифмами были положительными — в близкой окрестности нуля.

1.8. C1, §18, №3(4)

Представить формулой Маклорена до $o(x^n)$ функцию:

$$f(x) = x\sqrt[3]{4 - 4x + x^2}$$

Решение. Как и в номере 1.7, корень вообще можно бы было разложить да какого-то члена сразу, имея в виду, что $-4x + x^2 \to 0$ при $x \to 0$, но красивой формулы до произвольного n-ого члена таким образом, скорее всего, также не получится...

Поэтому, аналогично тому, как было сделано в упомянутом номере, заметим, что подкоренное выражение раскладывается на... представляет из себя полный квадрат:

$$4 - 4x + x^2 = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$$

Таким образом, функция выглядит так:

$$f(x) = x(x-2)^{2/3} = 2^{2/3} \cdot x \cdot (1 - x/2)^{2/3}$$

И её разложение в формулу Тейлора (11):[11]

$$\begin{aligned} f(x) &= 2^{2/3} \cdot x \cdot \left(1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{x}{2} + \frac{(2/3)(2/3-1)}{2}\left(-\frac{x}{2}\right)^2 + \ldots\right) \\ &= 2^{2/3} \cdot x \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{2/3}{k} \left(-\frac{x}{2}\right)^k + o(x^n)\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot 2^{2/3-k} \cdot \binom{2/3}{k} \cdot x^{k+1} + o(x^{n+1}) \end{aligned}$$

□

1.9. C1, §18, №14(2)

Представить формулой Тейлора в окрестности точки x_0 до $o((x-x_0)^n)$ функцию:

$$f(x) = \ln\sqrt[4]{\frac{x-2}{5-x}}, \; x_0 = 3$$

Решение. Сделаем замену:

$$\begin{aligned} &t \equiv x - x_0 = x - 3 && \leftrightarrow && x = t + 3 \\ &x \to x_0 && \leftrightarrow && t \to 0 \end{aligned}$$

Тогда функция:[12]

$$f(t) = \ln\sqrt[4]{\frac{t+3-2}{5-t-3}} = \ln\sqrt[4]{\frac{t+1}{2-t}}$$

---

[11] Получить “красивую” формулу для коэффициента $\binom{2/3}{k}$ у автора конспекта не получилось.

[12] Вообще это будет уже новая функция $\phi(t) \equiv f\left(x(t)\right)$ (новое правило расчёта зависимой переменной по независимой), но для простоты обозначим её так же: $f(t)$.

И преобразуем, чтобы прийти к “табличным” формулам Тейлора:[13]

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{4}\cdot\left\{\ln(1+t)-\ln(2-t)\right\}\\
&= \frac{1}{4}\cdot\left\{\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{t^k}{k}-\ln 2-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{(t/2)^k}{k}+o(t^n)\right\}\\
&= -\frac{\ln 2}{4}+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1-2^{-k}}{4k}t^k+o(t^n),\ t\to 0
\end{aligned}$$

Возвращаясь обратно к x:

$$f(x) = -\frac{\ln 2}{4}+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1-2^{-k}}{4k}(x-3)^k+o((x-3)^n),\ x\to 3$$

□

1.10. C1, §18, №30(1)

Представить формулой Маклорена до $o(x^n)$ функцию (число n выбрать наибольшим):

$$f(x) = x^3|x| + \cos^2 x$$

Решение. Раскроем модуль:

$$f(x) = \begin{cases} x^4+\cos^2 x,\ x\ge 0\\ -x^4+\cos^2 x,\ x<0\end{cases}$$

(Видно, что две формулы отличаются в слагаемом, отвечающем x^4...) И будем раскладывать по Тейлору. Рассмотрим отдельно косинус. Можно пытаться возводить в квадрат разложение косинуса, но лучше... Или всё-таки сделаем именно так: ведь не обязательно получать общую формулу до n-ого члена — можно дойти только до x^4:

$$\cos^2 x = \left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)\right)^2 = 1-2\cdot\frac{x^2}{2}+2\cdot\frac{x^4}{24}+o(x^5)$$

Тогда формула Тейлора для функции f:

$$f(x) = \begin{cases} 1-x^2+\left(\frac{1}{12}+1\right)\cdot x^4+o(x^5),\ x\to +0\\ 1-x^2+\left(\frac{1}{12}-1\right)\cdot x^4+o(x^5),\ x\to -0\end{cases}$$

Видно, что “единой” формулой Тейлора функция будет представляться только до куба:

$$f(x) = 1-x^2+o(x^3),\ x\to 0$$

□

[13] Модулей при разложении логарифма таким образом в сумму не возникает.

1.11. С1, §18, №39(7)

Представить формулой Маклорена до $o(x^5)$ функцию:

$$f(x) = (1+x)^{\sin x}$$

Решение. Чтобы в формуле появились "табличные" функции, надо воспользоваться "трюком":[14]

$$f(x) = (1+x)^{\sin x} = \exp\left(\ln(1+x)\cdot\sin x\right)$$

Далее пользуемся разложениями логарифма (14) и синуса (6):

$$\begin{aligned}
\exp\left\{\ln(1+x)\cdot\sin x\right\} &= \exp\left\{\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^5)\right)\cdot\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)\right\} \\
&= \exp\left\{x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right)x^4 + \left(\frac{1}{2\cdot 6} - \frac{1}{4}\right)x^5 + o(x^5)\right\} \\
&= \exp\left\{x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{6}x^5 + o(x^5)\right\} = \blacktriangle
\end{aligned}$$

И разложением экспоненты:

$$\begin{aligned}
\blacktriangle &= 1 + \left(x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{6}x^5 + o(x^5)\right) + \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{6}x^5 + o(x^5)\right)^2 \\
&= 1 + x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{2}{3}x^4 - \frac{2}{3}x^5 + o(x^5)
\end{aligned}$$

□

1.12. Т5(б, г, ё)

Представить формулой Маклорена до $o(x^6)$ функцию:

б) $y = \operatorname{arctg} x$

г) $y = \operatorname{th} x$

ё) $y = \operatorname{ctg} x$

Решение. В первых двух пунктах можно искать разложение "по-тупому": просто по формуле, посчитав производные в нуле до нужного порядка. Но приведём более "интересные" способы вычисления.

Пункт б) Пусть есть функция f, такая что известно разложение по формуле Тейлора в окрестности нуля её *производной*:

$$f'(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$$

Проинтегрировав обе части равенства по x от нуля до некоторого x,[15,16] получаем:

$$f(x) - f(0) = \int_0^x (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \ldots)\, dt$$

[14] Запись $\ln(1+x)$ корректна, так как $1 + x > 0$ при $x \to 0$.

[15] Интегрировать на данном этапе — педагогически не очень правильно, потому что определённых интегралов в курсе ещё не было. Однако автору кажется, что такой способ проще для понимания — ведь все и так уже знают про определённые интегралы :) Корректность же такого объяснения в рамках курса можно обеспечить, развернув рассказ в обратном порядке (с заменой интегрирования на дифференцирование).

[16] "По x от нуля до x" — звучит не очень аккуратно, но ради простоты записи не будем вводить никакого нового обозначения для верхнего предела интегрирования.

$$f(x) = f(0) + a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + a_3 \frac{x^4}{3} + \ldots$$

Запоминать формулу не надо — смысл в том, что, зная формулу Тейлора производной, можно на её основе составить формулу Тейлора исходной функции.

Вернёмся к пункту из номера. Функция:

$$f(x) = \operatorname{arctg} x$$

Её производная:

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

Для неё можно сразу выписать формулу Тейлора до нужного порядка (11):

$$f'(x) = 1 - x^2 + (x^2)^2 - (x^2)^3 + \ldots = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + o(x^7)$$

Тогда формула Тейлора для f:

$$f(x) = f(0) + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^6)$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^6)$$

Пункт г) Для поиска Тейлора для "щангенса" воспользуемся методом *неопределённых коэффициентов*. Будем искать формулу в таком виде (сразу пользуемся тем, что функция нечётная):

$$\operatorname{th} x = Ax + Bx^3 + Cx^5 + o(x^6)$$

Теперь распишем тангенс как отношение синуса и косинуса:

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$

И подставим разложения по Тейлору (известные и то, что ищем через неопределённые коэффициенты):

$$Ax + Bx^3 + Cx^5 = \frac{x + x^3/6 + x^5/5! + o(x^6)}{1 + x^2/2 + x^4/4! + o(x^5)}$$

Теперь избавимся от дроби, потом перемножим получившиеся скобки слева:

$$(Ax + Bx^3 + Cx^5)(1 + x^2/2 + x^4/4! + o(x^5)) = x + x^3/6 + x^5/5! + o(x^6)$$

$$Ax + (B + A/2)x^3 + (C + B/2 + A/4!)x^5 + o(x^5) = x + x^3/6 + x^5/5! + o(x^5)$$

и приравняем коэффициенты слева и справа при x в одинаковых степенях:

$$\begin{cases} A = 1 \\ B + A/2 = 1/6 \\ C + B/2 + A/4! = 1/5! \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1/3 \\ C = 2/15 \end{cases}$$

Итого:

$$\operatorname{th} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6)$$

С котангенсом пойдём будем считать в лоб — но в лоб не через вычисление производных, а через представление в виде формул Тейлора функций, отношением которых определяется котангенс:

$$\begin{aligned}
\operatorname{ctg} x &= \frac{\cos x}{\sin x} \\
&= \frac{1 - x^2/2 + x^4/4! + o(x^5)}{x - x^3/6 + x^5/5! + o(x^6)} \\
&= \frac{1}{x} \cdot (1 - x^2/2 + x^4/4! + o(x^5)) \cdot \frac{1}{1 - \left(x^2/6 - x^4/5! - o(x^5)\right)} \\
&= \frac{1}{x} \cdot (1 - x^2/2 + x^4/4! + o(x^5)) \cdot \left\{1 + \left(x^2/6 - x^4/5! + o(x^5)\right) + \left(x^2/6 - x^4/5! - o(x^5)\right)^2\right\} \\
&= \frac{1}{x} \cdot (1 - x^2/2 + x^4/4! + o(x^5)) \cdot \left(1 + x^2/6 + (1/36 - 1/5!)x^4 + o(x^5)\right) \\
&= \frac{1}{x} \cdot \left\{1 + (1/6 - 1/2)x^2 + (1/36 - 1/5! - 1/(2 \cdot 6) + 1/4!)x^4 + o(x^5)\right\} \\
&= \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + o(x^4)
\end{aligned}$$

(с точностью немного не угадали, но не будем ещё больше считать)

Итого:

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + o(x^4)$$

Можно заметить, что это “не совсем” формула Тейлора — за счёт первого члена $1/x$. Дело в том, что котангенс в нуле вообще не определён, то есть эта функция не удовлетворяет условиям для того, чтоб раскладывать её по Тейлору в окрестности нуля! Но, как видно, как-то разложить всё-таки можно) причём получается формула, похожая на формулу Тейлора.[17]

Для котангенса тоже можно было воспользоваться методом неопределённых коэффициентов. Только надо было включить в разложение член A/x с тем, чтобы обеспечить стремление приближения котангенса к бесконечности при $x \to 0$:[18]

$$\operatorname{ctg} x = \frac{A}{x} + Bx + Cx^3 + o(x^4)$$

□

2. Правило Лопиталя

Правило Лопиталя — это правило, по которому можно (пытаться) вычислять пределы вида:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

в которых наблюдается неопределённость $0/0$ или ∞/∞ (а предельная точка конечная либо бесконечная: $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$). Правило состоит в том, что исходный предел отношения функций равен пределу отношения их производных:

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

[17]Некоторые называют такое “расширение” Тейлора формулой Пюизё (источник).

[18]Может возникнуть вопрос, почему включать надо именно $1/x$, а не, скажем, $1/x^2$. Можно бы было искать и коэффициент для $1/x^2$ — и он получился бы нулевым.

если этот предел отношения производных существует (и если $g'(x) \neq 0$ в некоторой окрестности точки a)[19].

2.1. C1, §17, №49

Найти предел функции:

$$\lim_{x\to+\infty} x^n e^{-x^3}$$

Решение. Если переписать выражение под пределом в виде отношения:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^{x^3}}$$

то можно заметить, что сравнивается поведение x^n и экспоненты e^{x^3} на бесконечности. Но экспонента будет расти быстрее, чем x в любой степени. Поэтому в пределе должен получиться ноль.

Проверим это, попробовав вычислить предел про правилу Лопиталя (присутствует неопределённость вида ∞/∞):

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^{x^3}\cdot 3x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{n}{3}\cdot\frac{x^{n-3}}{e^{x^3}}$$

Видно, что процесс перехода к пределу отношения производных можно продолжать — до тех пор, пока степень x сверху не занулится. При этом экспонента внизу останется (а также, возможно, x или x^2). Итого, последний предел в цепочке будет равен нулю. А потому и все предыдущие пределы, включая исходный, по правилу Лопиталя также оказываются нулевыми. □

2.2. C1, §17, №76

Показать, что следующие пределы не могут быть вычислены по правилу Лопиталя, и найти эти пределы:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+\cos x}{x-\cos x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{x^3 \sin(1/x)}{\sin^2 x}$$

Решение. Первый предел равен единице, так как при устремлении $x \to \infty$ косинусы в числителе и знаменателе становятся пренебрежимо малыми по сравнению с x. То есть вообще нет никакой неопределённости. (И потому нет смысла использовать ещё какие-то правила для вычисления предела.) Попробуем, тем не менее, посчитать этот предел по Лопиталю:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x+\cos x)'}{(x-\cos x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\sin x}{1+\sin x}$$

Но такого предела не существует. Как видно, отсюда не следует, что не существует и исходного предела.

Посчитаем второй предел (без Лопиталя):

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 \sin(1/x)}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{x\sin(1/x)}{(\sin x/x)^2} = \frac{0}{1} = 0$$

[19] Чтобы в выражении под пределом не возникло деления на ноль.

Если же попробовать по Лопиталю (неопределённость 0/0):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(x^3\sin(1/x)\right)'}{\left(\sin^2 x\right)'} = \lim_{x\to 0}\frac{3x^2\sin(1/x) - x\cos(1/x)}{2\sin x\cos x}$$

Ещё раз:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\left(3x^2\sin(1/x) - x\cos(1/x)\right)'}{\sin' 2x} &= \lim_{x\to 0}\frac{6x\sin(1/x) - 4\cos(1/x) - 1/x\cdot\sin(1/x)}{2\cos 2x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{6x^2\sin(1/x) - 4x\cos(1/x) - \sin(1/x)}{2x\cos 2x}\end{aligned}$$

Последний предел не существует. То есть попытка считать по Лопиталю ни к чему не привела. (Кроме того, что стало понятно, что по Лопиталю это не считается.) □

3. Пределы (более сложные)

3.1. С1, §19, №14(5)

Найти предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x/(1-x)} - \operatorname{sh} x - \cos x}{\sqrt[6]{1+x} + \sqrt[6]{1-x} - 2}$$

Решение. Есть неопределённость вида 0/0.

Можно бы было попробовать посчитать предел по Лопиталю. Но у автора конспекта — и наверно, у читателей тоже — желания заниматься вычислением производных числителя и знаменателя особо нет (к тому же нет гарантии, что это всё приведёт к успеху). Поэтому воспользуемся более общим ("пробивным") способом нахождения таких (замороченных) пределов — через разложение всего по формуле Тейлора.

Будем раскладывать всё, например, хотя бы до $o(x^3)$. (Скорее всего, хватит. Хотя, возможно, и нет.)

Показатель экспоненты:

$$\frac{x}{1-x} = x(1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)) = x + x^2 + x^3 + x^4 + o(x^4)$$

Сама экспонента:

$$\begin{aligned}e^{x/(1-x)} &= \exp\{(x + x^2 + x^3 + x^4 + o(x^4))\}\\ &= 1 + (x + x^2 + x^3 + x^4 + o(x^4)) + \frac{1}{2}(x + x^2 + x^3 + o(x^3))^2 + \frac{1}{3!}(x + x^2 + o(x^2))^3\\ &= 1 + x + \left(1 + \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(1 + 1 + \frac{1}{6}\right)x^3 + o(x^3)\\ &= 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{13}{6}x^3 + o(x^3)\end{aligned}$$

"Шинус" (4):

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + o(x^4)$$

Косинус (7):

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)$$

Итого, числитель:

$$\left(1+x+\frac{3}{2}x^2+\frac{13}{6}x^3+o(x^3)\right)-\left(x+\frac{x^3}{3!}+o(x^4)\right)$$
$$-\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+o(x^5)\right)=2x^2+2x^3+o(x^3)$$

Далее, корень один:[20]

$$\sqrt[6]{1+x}=(1+x)^{1/6}=1+\frac{x}{6}+\frac{1/6\cdot(1/6-1)}{2}x^2+o(x^2)=1+\frac{x}{6}-\frac{5}{72}x^2+o(x^2)$$

Корень два:

$$\sqrt[6]{1-x}=(1-x)^{1/6}=1-\frac{x}{6}+\frac{1/6\cdot(1/6-1)}{2}(-x)^2+o(x^2)=1-\frac{x}{6}-\frac{5}{72}x^2+o(x^2)$$

Итого, знаменатель:

$$\left(1+\frac{x}{6}-\frac{5}{72}x^2+o(x^2)\right)+\left(1-\frac{x}{6}-\frac{5}{72}x^2+o(x^2)\right)-2=-\frac{5}{36}x^2+o(x^2)$$

Поэтому, возвращаясь к пределу:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+2x^3+o(x^3)}{-\frac{5}{36}x^2+o(x^2)}=-\frac{72}{5}$$

□

3.2. С1, §19, №47(5)

Найти предел:

$$\lim_{x\to+0}\left(\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{arctg}x}\right)^{\frac{1}{x^2}+\ln x}$$

Решение. Решаем аналогично номеру 3.1, раскладывая по Тейлору.

С показателем степени сделать особо ничего и нельзя, поэтому занимаемся основанием.

“Шинус” (4):

$$\operatorname{sh}x=x+\frac{x^3}{3!}+o(x^4)$$

Арктангенс (10):

$$\operatorname{arctg}x=x-\frac{x^3}{3}+o(x^4)$$

Основание степени:

$$\begin{aligned}\frac{x+\frac{x^3}{3!}+o(x^4)}{x-\frac{x^3}{3}+o(x^4)}&=\frac{1}{x}\cdot\frac{x+\frac{x^3}{6}+o(x^4)}{1-\left(\frac{x^2}{3}+o(x^3)\right)}\\&=\frac{1}{x}\cdot\left(x+\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)\left(1+\left(\frac{x^2}{3}+o(x^3)\right)\right)\\&=\frac{1}{x}\cdot\left(x+\left\{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right\}x^3+o(x^4)\right)\\&=1+\frac{x^2}{2}+o(x^3)\end{aligned}$$

[20]Будем раскладывать до квадрата ’:)

Возвращаясь к пределу:

$$\lim_{x\to+0}\left(1+\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)^{\frac{1}{x^2}+\ln x} = \lim_{x\to+0}\exp\left\{\ln\left(1+\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)\cdot\left(\frac{1}{x^2}+\ln x\right)\right\} = \blacktriangle$$

Видно, что нужно ещё одно разложение:

$$\ln\left(1+\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right) = \frac{x^2}{2}+o(x^3)$$

Поэтому:[21]

$$\begin{aligned}\blacktriangle &= \lim_{x\to+0}\exp\left\{\left(\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)\cdot\left(\frac{1}{x^2}+\ln x\right)\right\}\\ &= \lim_{x\to+0}\exp\left\{\frac{1}{2}+\frac{x^2\ln x}{2}+\ln x\cdot o(x^3)+o(x)\right\} = \sqrt{e}\end{aligned}$$

$\square$

[21] $x^2\ln x = o(x)\cdot\ln x,\ x\to 0$ (к сведению).