Семинар 4 + 5

Алексеев Василий

23 + 30 сентября 2024

Содержание

К формулировкам и доказательствам (если такие вообще приводятся) стоит относиться критически. Основное в этом конспекте — решение задач (но “критичность” и здесь лучше не отключать). За строгой, ясной и последовательной теорией лучше обращаться к “нормальным” источникам. (Например, к лекциям.)

1. Предел функции

При разговоре о производной функции в точке x_0 было важно, как *меняется* функция в окрестности точки — смотрели на разницу значений функции $f(x) - f(x_0)$ для "близких" к x_0 точек x. (По сути производная и показывает скорость изменения.) Получается, для существования вообще производной функии $f(x)$ в точке x_0 функция должна быть определена в некоторой $U_\delta(x_0)$ окрестности этой точки, включая саму точку.

Но можно ещё задаться таким вопросом: как *ведёт* себя функция в окрестности точки? какие значения принимает функция в "близких" к x_0 точках x? Для всех "нормальных" функций, очевидно, ожидается, что по мере приближения x к x_0 будет наблюдаться и сближение $f(x)$ с $f(x_0)$. Но всегда ли так будет происходить? Да и вообще: ведь *не важно значение функции в самой точке* x_0, чтобы понять, как она ведёт себя в её окрестности? (приближается ли $f(x)$ к чему-то вообще или нет) Это поведение функции при приближении к точке x_0 описывается понятием *предела функции в точке*. Получается, для существования предела функции $f(x)$ в точке x_0 функция должна быть определена в некоторой $U_\delta(x_0)$ окрестности этой точки, *исключая, возможно, саму точку* — то есть важна окрестность без "центральной" точки, или *проколотая окрестность* точки:

$$\mathring{U}_\delta(x_0) \equiv U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} = \{x : \ 0 < |x - x_0| < \delta\}$$

Существует два подхода к "формализации" описания того, что значит "поведение функции $f(x)$ при приближении x к x_0"... (При этом суть за обоими подходами одинаковая — кусочек графика функции лежит в квадратике около некоторой точки с абсциссой x_0, как бы сильно этот квадратик ни уменьшать 1).

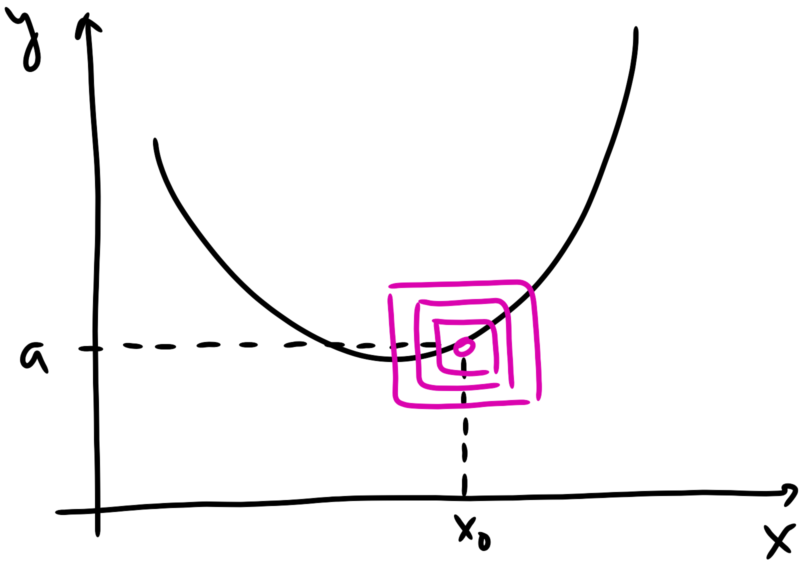

Рис. 1: Предел функции в точке — чем ближе по оси X точки x к x_0, тем ближе по оси Y значения $f(x)$ к a.

1.1. Определения предела функции

Определение 1.1 (Предел по Коши). Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой проколотой $\mathring{\delta}_0$-окрестности точки x_0.

Элемент $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty, \infty\}$ (число или какая-то бесконечность) называется *пределом* функции в точке $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty, \infty\}$ в смысле Коши, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \to f(x) \in U_\varepsilon(a) \tag{1}$$

Если и x_0, и a — это просто числа, то можно написать и так:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall x :\ 0 < |x - x_0| < \delta \to |f(x) - a| < \varepsilon$$

Определение 1.2 (Предел по Гейне)**.** Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой проколотой $\mathring{\delta}_0$-окрестности точки x_0.

Элемент $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty, \infty\}$ (число или какая-то бесконечность) называется *пределом* функции в точке $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty, \infty\}$ в смысле Гейне, если

$$\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} :\ \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \\ x_n \neq x_0,\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \to \lim_{n\to\infty} f(x_n) = a \tag{2}$$

где описанная последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется *последовательностью Гейне* в точке x_0 (то есть это такая последовательность, которая сходится к x_0, при этом в саму x_0 никогда не попадая).

Замечание. Проколотость окрестности около точки x_0 в определении предела по Коши, условие $x_n \neq x_0$ в определении предела по Гейне — всё это выражение того, что для предела функции в точке не важно, что происходит с функцией в самой точке — важно лишь её поведение вблизи точки.

Два определения (пусть и с похожей идеей) — по-хорошему, стоило бы предположить, что они, возможно, определяют разные понятия: что может быть предел a функции в точке x_0 по Коши, но это не будет пределом по Гейне, или наоборот. Но "оказывается", что два определения предела *равносильны*, взаимозаменяемы. Из одного следует другое, и наоборот. Покажем это...

Коши → Гейне. Считаем, что a есть предел функции $f(x)$ в точке x_0 в смысле Коши (1). Надо показать, что a будет и пределом в той же точке по Гейне (2).

То есть надо доказать, что "для *любой* последовательности Гейне..." Как это сделать? Все-все последовательности Гейне в точке, очевидно, перебрать не сможем. Но можно взять *произвольную* последовательность Гейне в точке x_0 и доказать всё для неё. Или можно допустить, что *найдётся хотя бы одна* последовательность Гейне, для которой условие предела по Гейне выполняться не будет, и попробовать получить отсюда какое-нибудь противоречие (с тем, что a есть предел по Коши). Второй способ — способ от противного. Пойдём по нему. То есть допускаем отрицание (2): найдётся последовательность Гейне $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ в точке x_0, такая что предела $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ не существует, либо $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq a$. Почему это "плохо"? Это может противоречить тому, что про a известно, что это — предел по Коши. То есть отсюда можно выйти на отрицание условия Коши (1) предела...[1]

$$\exists \varepsilon > 0 :\ \forall \delta > 0\ \exists x \in \mathring{U}_{\delta}(x_0) :\ f(x) \notin U_{\varepsilon}(a)$$

Почему при наличии "нехорошей" последовательности Гейне $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ верно отрицание Коши? Потому что "нехорошесть"$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — она по сути означает то же самое, что и отрицание Коши! (Читателю рекомендуется сделать здесь паузу, чтобы "прочувствовать и осознать".) Для строгости и понятности изложения, поясним идею более конкретно, не на словах. Ещё раз: последовательность Гейне $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к x_0, то есть:

$$\forall \delta > 0\ \exists N(\delta) \in \mathbb{N} :\ \forall n \geq N(\delta) \to x_n \in \mathring{U}_{\delta}(x_0)$$

[1] Забавно. Идём по от-противным, сначала отрицание "по Гейне", теперь "по Коши".

но $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ при этом к a не сходится, то есть:

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \widetilde{N}(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \exists n(\varepsilon, \widetilde{N}) \geq \widetilde{N} : \ f(x_n) \notin U_\varepsilon(a)$$

(где выражением $\exists n(\varepsilon, \widetilde{N})$ подчёркнуто, что этот номер n зависит от обозначенных ранее в том же условии ε и $\widetilde{N}$ — то есть выбор этого n есть по сути *функция* от ε и $\widetilde{N}$ (ну, и вообще, конечно, можно ещё считать n функцией только ε, ведь $\widetilde{N}$ тоже определяется ε...)). Объединяя два в одном, получаем:

$$\exists \varepsilon > 0 : \ \forall \delta > 0\ \exists x = x_{n(\varepsilon, N(\varepsilon))} \in \mathring{U}_\delta(x_0) : \ f(x) \notin U_\varepsilon(a)$$

что уже просто один-в-один совпадает с отрицанием Коши равенства a предела функции $f(x)$ в точке x_0. □

Гейне → Коши. Теперь, наоборот, считаем, что a есть предел функции $f(x)$ в точке x_0 в смысле Гейне (2). Надо показать, что a будет и пределом в той же точке по Коши (1).

Опять, есть два пути. Можно взять *произвольное* $\varepsilon > 0$ и убедиться, что для него найдётся $\delta > 0$, такой что... (и так далее по определению предела в точке в смысле Коши) — таким образом доказав "предельность" по Коши для всех $\varepsilon > 0$. А можно — допустить, что *найдётся хотя бы одно* $\varepsilon > 0$, для которого "предельность" по Коши верна не будет, и как-нибудь из этого получить противоречие. Таким образом доказав "предельность" по Коши от противного.

Продолжим "путь по от-противным".

Допустим, что a **не** будет пределом в x_0 по Коши (1), то есть что будет верно отрицание "предельности" по Коши:

$$\exists \varepsilon > 0 : \ \forall \delta > 0\ \exists x \in \mathring{U}_\delta(x_0) : \ f(x) \notin U_\varepsilon(a) \tag{3}$$

Как из этого получить противоречие? По аналогии с предыдущим доказательством — получим противоречие с тем, что начали-то с верности "предельности" по Гейне. То есть надо как-то выйти на *отрицание* того, что a есть предел в x_0 по Гейне (2): найдётся последовательность Гейне $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ в точке x_0, такая что предела $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ не существует, либо он не равен a.[2] Построим же эту последовательность (2)! Возьмём некоторый δ_1 (такой чтоб функция f была определена в δ_1-окрестности x_0). Из верности отрицания Коши ("от противного" (3)) — найдётся $x_1 \in \mathring{U}_{\delta_1}(x_0)$, такой что $f(x_1) \notin U_\varepsilon(a)$. Далее, продолжаем процесс так: $\delta_2 = \frac{\delta_1}{2}$, $x_2 \in \mathring{U}_{\delta_2}(x_0)$ ($f(x_2) \notin U_\varepsilon(a)$), и так далее: уменьшаем δ_{n-1}-окрестность около x_0 в несколько раз, выбираем из новой окрестности новый x_n (отличный от всех выбранных до этого $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$), такой чтоб $f(x_n)$ было на расстоянии ε от a или ещё дальше. Получаются последовательности $\{x_n\}$ и $\{f(x_n)\}$. Для первой имеем:

$$0 < |x_n - x_0| < \delta_n = \frac{\delta_1}{2^{n-1}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

то есть $\{x_n\}$ — в самом деле последовательность Гейне в точке x_0. Но последовательность из значений функций $\{f(x_n)\}$ к a, очевидно, не сходится (на расстоянии ε от a нет вообще ни одного члена последовательности $\{f(x_n)\}$). Противоречие.

□

[2] Строчка с отрицанием Гейне скопирована из предыдущего доказательства (где тоже отрицался Гейне, только где это было "первым" отрицанием, которое "от противного", а не вторым, которое "для противоречия").

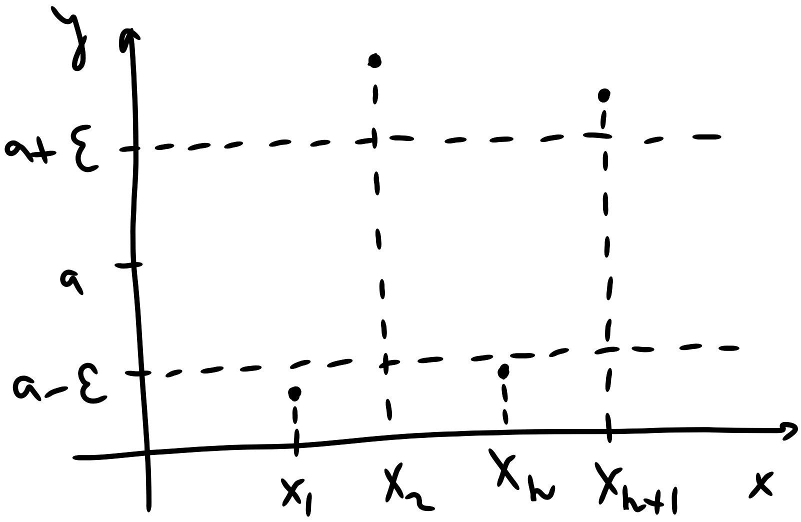

Рис. 2: “ε-трубка” вокруг a.

1.2. Односторонние пределы

При нахождении предела функции в точке x_0 “двигаемся” всё ближе к x_0, глядя на значения $f(x)$. Но приближаться к x_0 можно по-разному. Так, можно приближаться к ней *слева* или *справа*. Двигаясь таким образом, находясь всегда с одной стороны от x_0, приходим к понятию *односторонних* пределов. Сформулируем это точнее.

Число или бесконечность a называется *пределом слева* функции f в числовой точке x_0, если:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \ \forall x : \ x_0 - \delta < x < 0 \to f(x) \in U_\varepsilon(a)$$

(то есть как предел по Коши (1), только находимся всегда в левой половинке $\mathring{U}_\delta(x_0)$).[3] Или, если смотреть на предел как Гейне (2), то левый односторонний предел функции f в x_0 есть a, если

$$\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} : \ \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \\ x_n < x_0, \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \to \lim_{n\to\infty} f(x_n) = a$$

то есть когда все элементы последовательности Гейне находятся “слева” от x_0.

Аналогично определяется предел справа функции f в x_0.

Обозначаются левый и правый пределы так:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x-0) \quad \text{(левый)}$$
$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x+0) \quad \text{(правый)}$$

Кажется понятным, что если существует “просто” предел функции f в x_0, то существуют также и левый и правый пределы в той же точке, и они равны “просто” пределу.

Но верно и обратное: если существуют и равны оба односторонних предела в x_0, то существует и “просто” предел (и равен односторонним). Это тоже, вроде бы, понятно… Правда, тут уже, кажется, стоит всё-таки привести какие-то более строгие пояснения. Итак, что значит, что существуют односторонние пределы и что они равны (и равны

[3] У окрестностей бесконечностей со знаком $\pm\infty$, видимо, “половинок” нет. Но половинки есть у окрестности “просто бесконечности” ∞… Получается, можно говорить о пределе слева при $x \to \infty$?.. (И это будет предел как при $x \to -\infty$?..)

некоторому a):

$$\begin{cases} \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 :\ \forall x :\ x_0 - \delta < x < 0 \to f(x) \in U_\varepsilon(a) \\ \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 :\ \forall x :\ 0 < x < x_0 + \delta \to f(x) \in U_\varepsilon(a) \end{cases}$$

(смотрели на пределы как Коши — можно бы было и по Гейне). Но просто “объединяя” вместе эти условия, и получаем, что a есть “просто” предел! (Из половинок окрестностей складывается целая (но проколотая) окрестность.)

1.3. Замечательные пределы

Существуют два “интересных” (необычных, важных, удивительных — замечательных) предела функций в точке. Приведём их без доказательства.

Утверждение 1.1 (Первый замечательный предел)**.**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \tag{4}$$

Утверждение 1.2 (Второй замечательный предел)**.**

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \tag{5}$$

Без доказательства, но с попыткой осмыслить...

Замечание (“Попытка принять”). Функция под первым замечательным пределом:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

Что можно про неё заметить? Во-первых, при $x_0 = 0$ и числитель $\sin x$, и знаменатель обращаются в ноль (отсюда и интересность предела). Кроме этого, посмотрим на производные числителя и знаменателя в нуле:

$$(\sin x)'|_{x=0} = \cos 0 = 1, \quad x'|_{x=0} = 1$$

то есть производные тоже равны! Что получается: $\sin x$ и x равны в нуле, и изменяются одинаково в окрестности нуля (бесконечно малой). Таким образом, в этой малой окрестности нуля функции $\sin x$ и x получаются равными! (Стартуют из одной точки, и, изменяясь одинаково, приходят снова в одну точку.)

Теперь посмотрим на второй замечательный предел...[4] Что можно бы было с ним сделать, если бы стояла задача найти его?

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = ?$$

Функция под пределом — это сложная функция, в табличных такой нет. При вычислении производных от функций такого вида можно было преобразовать выражение так, чтобы получилась показательная (с которой уже понятно, что делать). Воспользуемся таким же приёмом:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}}$$

[4] Сразу возникает вопрос, откуда там вообще e)

Посмотрим, к чему стремится показатель:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = ?$$

Что можно сказать про функцию под пределом? (Проведём по пунктам то же “исследование”, что и при рассмотрении первого замечательного предела.) Числитель и знаменатель равны в нуле:

$$\ln(1+x)|_{x=0} = \ln 1 = 0 = x|_{x=0}$$

И их производные — тоже равны в нуле:

$$\big(\ln(1+x)\big)'|_{x=0} = \frac{1}{1+x}\bigg|_{x=0} = 1 = x'|_{x=0}$$

Получается, равны в начале, изменяются одинаково — а потому равны в конце, вблизи нуля, бесконечно близко к нулю, то есть верно соотношение:[5]

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

А потому верно и следующее:

$$\lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e^1 = e$$

Хочется верить, что приведённое рассуждение помогло читателю, хоть и не доказать, но, по крайней мере, “принять” для себя эти замечательные пределы. (Убрать из “замечательности” компоненту “удивительности”.)

1.4. Эквивалентность функций

Если, как в первом замечательном приделе (4), отношение двух функций в пределе в некоторой точке x_0 равно единице, то такие функции называются *эквивалентными* при $x \to x_0$:

$$f(x) \sim g(x) \text{ при } x \to x_0 \quad \leftrightarrow \quad \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Пример. Кроме $\sin x$ и x при $x \to 0$, эквивалентными будут, например, $x+1$ и $x+100$ при $x \to \infty$. □

Ещё один особый случай отношения между двумя функциями в пределе в некоторой точке — когда это отношение $\frac{f(x)}{g(x)}$ равно нулю при $x \to x_0$. Тогда говорят, что функция $f(x)$ является o-малой относительно $g(x)$ при $x \to x_0$:[6]

$$f(x) = o\big(g(x)\big) \text{ при } x \to x_0 \quad \leftrightarrow \quad \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Пример. Например, $1 = o(x)$ при $x \to \infty$, $1000x^3 = o\left(x^2\right)$ при $x \to 0$. □

Между эквивалентностью и “o-малостью” существует связь…

[5]Подчеркнём ещё раз, что это не строгое доказательство. Можно сказать, что это… немного рукомахательное доказательство, основанное на здравом смысле.

[6]o-малая от $g(x)$ — не одна функция, а семейство функций.

Утверждение 1.3. *Две функции эквивалентны при $x \to x_0$ тогда и только тогда, когда одна из них представима как другая плюс o-малая от неё при $x \to x_0$:*

$$f(x) \sim g(x) \text{ при } x \to x_0 \quad \leftrightarrow \quad f(x) = g(x) + o\big(g(x)\big) \text{ при } x \to x_0$$

Доказательство. Достаточность ($\Leftarrow$) кажется очевидной. Убедимся:

$$f(x) = g(x) + o\big(g(x)\big) \text{ при } x \to x_0 \to \frac{f(x)}{g(x)} = 1 + o(1) \text{ при } x \to x_0 \leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Покажем необходимость ($\Rightarrow$). Имеем:

$$f(x) \sim g(x) \text{ при } x \to x_0 \leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

то есть для любого (даже сколь угодно малого) $\varepsilon > 0$ в некоторой δ-окрестности x_0 будет верно, что

$$1 - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < 1 + \varepsilon$$

...Сделаем по-другому. Откатимся назад:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Воспользуемся приёмом “вычесть и добавить”:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x) + g(x)}{g(x)} = 1 + \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)}$$

Так как этот предел равен единице, получаем:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = 0 \leftrightarrow f(x) - g(x) = o\big(g(x)\big)$$

$\square$

В контексте нахождения пределов функций эквивалентность полезна тем, что *функции можно заменять на эквивалентные им при нахождении пределов произведения и частного*. Например, пусть $f_1(x) \sim f_2(x)$ и $g_1(x) \sim g_2(x)$ при $x \to 0$. Тогда

$$\lim_{x \to x_0} f_1(x) \cdot g_1(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} f_2(x) \cdot \frac{g_1(x)}{g_2(x)} g_2(x) = \lim_{x \to x_0} f_2(x) \cdot g_2(x)$$

Приведём несколько “популярных” эквивалентных пар функций (и связанных с ними представлений в виде суммы с o-малой) при $x \to 0$.

Тригонометрические:[7]

$$\begin{array}{ll}
\sin x \sim x & \sin x = x + o(x) \\
\cos x \sim 1 - \dfrac{x^2}{2} & \cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2) \\
\operatorname{tg} x \sim x & \operatorname{tg} x = x + o(x) \\
\arcsin x \sim x & \arcsin x = x + o(x) \\
\operatorname{arctg} x \sim x & \operatorname{arctg} x = x + o(x)
\end{array}$$

[7] Задача: найти телепузика...

"Связанные с e":

$$e^x \sim 1 + x \qquad e^x = 1 + x + o(x)$$
$$\ln(1 + x) \sim x \quad \ln(1 + x) = x + o(x)$$

И "скобка" ($\alpha \in \mathbb{R}$):[8]

$$(1 + x)^\alpha \sim 1 + \alpha x \quad (1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$$

1.5. Избранные свойства пределов функций

При некоторых условиях можно искать пределы в точке суммы, разности, произведения, частного функций. (Благодаря взгляду на предел через определение по Гейне все эти свойства сводятся к таковым для сходящихся последовательностей.) Есть свойства, связанные с неравенствами. Но оставим это всё намеренно "за кадром".[9]

Обратим внимание лишь на одно свойство...

Утверждение 1.4 (Предел сложной функции)**.** *Пусть известно, что*

$$\lim_{y \to y_0} f(y) = a$$
$$\lim_{x \to x_0} g(x) = y_0$$

и при этом существует δ-окрестность x_0, где $g(x) \neq y_0$.

Тогда

$$\lim_{x \to x_0} f\big(g(x)\big) = \lim_{y \to y_0} f(y) = a$$

Доказательство. Пользуясь определением предела функции в точке по Гейне:

$$\forall \{x_n\} : \begin{cases} \lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0 \\ x_n \neq x_0, \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \to \lim_{n \to \infty} g(x_n) = y_0$$

$$\forall \{y_n\} : \begin{cases} \lim\limits_{n \to \infty} y_n = y_0 \\ y_n \neq y_0, \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \to \lim_{n \to \infty} f(y_n) = a$$

и аккуратно "соединяя" одно с другим, получаем требуемое:

$$\Rightarrow \forall \{x_n\} : \begin{cases} \lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0 \\ x_n \neq x_0, \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \to \lim_{n \to \infty} f\big(g(x_n)\big) = \lim_{n \to \infty} f(y_n)|_{y_n = g(x_n)} = a$$

то есть "основной момент", вся суть в том, что $\{g(x_n)\}$ составили последовательность Гейне в точке y_0 (последовательность сходится, плюс в саму точку не попадает). □

[8]До этого уже встречалась скобка $(1+x)^n$, при $n \in \mathbb{N}$. Тогда можно бы было получить сколь угодно точное (по степеням x) разложение, просто перемножая скобки: $(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2} \cdot x^2 + \ldots$

[9]Автор конспекта в очередной раз пользуется привилегией не рассказывать в конспекте подробно ту теорию, которую не особо хочется рассказывать)

1.6. C1, §9, №20(2)

Найти предел функции:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+4x-5}{x^2-1}$$

Решение. Имеем неопределённость (вида 0/0), поэтому пока "просто подставить" значение в формулу не получится. Но видно, что можно разложить на множители знаменатель (и числитель) — возможно, "проблемность" сократится:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+4x-5}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+5)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+5}{x+1}=\frac{6}{2}=3$$

То, на что сокращали — это не ноль! потому что x *стремится* к 1, то есть подходит всё ближе и ближе к единице, никогда в неё не попадая, и потому выражение $x-1$ *стремится* к нулю, но никогда нулю не равно. А в конце, когда "проблема" ушла, уже можно было просто "подставить" в формулу значение $x=1$. □

1.7. C1, §9, №25(5)

Найти предел функции:

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{6-x}-1}{3-\sqrt{4+x}}$$

Решение. Снова неопределённость (0/0). В данном случае же, очевидно, на множители ничего не раскладывается. Однако можно воспользоваться другим приёмом — "домножить и поделить":

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{6-x}-1}{3-\sqrt{4+x}}=\lim_{x\to 5}\frac{\left(\sqrt{6-x}-1\right)\left(\sqrt{6-x}+1\right)\left(3+\sqrt{4+x}\right)}{\left(3-\sqrt{4+x}\right)\left(3+\sqrt{4+x}\right)\left(\sqrt{6-x}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{(5-x)\left(3+\sqrt{4+x}\right)}{(5-x)\left(\sqrt{6-x}+1\right)}=\lim_{x\to 5}\frac{3+\sqrt{4+x}}{\sqrt{6-x}+1}=\left.\frac{3+\sqrt{4+x}}{\sqrt{6-x}+1}\right|_{x=5}=3$$

В итоге снова почти-равный-но-до-конца-не-равный нулю множитель сократился, и неопределённости после этого уже не было. □

1.8. C1, §9, №30(2)

Найти предел функции:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\pi^2-x^2}$$

Решение. Видно, что предел "похож" на первый замечательный (4). (И кроме как сведения к первому замечательному не понятно, как его вообще находить.) Поэтому попробуем "выделить" в явном виде этот табличный предел, немного повертев выражение, задающее функцию:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\pi^2-x^2}=\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{(\pi-x)(\pi+x)}$$

$$=\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(\pi-x)}{(\pi-x)(\pi+x)}=\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(\pi-x)}{(\pi-x)(\pi+x)}=\blacktriangle$$

Теперь первый замечательный предел виден. Это в самом деле он, так как при $x \to \pi$ имеем $(\pi - x) \to 0$. Можно сделать замену, чтоб совсем было один-в-один по виду, как в замечательном:

$$\pi - x \equiv t, \quad x = \pi + t, \quad x \to \pi \Leftrightarrow t \to 0$$

Тогда, возвращаясь к пределу:

$$\blacktriangle = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} \frac{1}{2\pi + t} = \frac{1}{2\pi}$$

$\square$

1.9. C1, §9, №36(2)

Найти предел функции:

$$\lim_{x\to 0} \left(\sqrt{1+x} - x \right)^{1/x}$$

Решение. А этот предел чем-то напоминает второй замечательный (5). Поэтому снова попробуем немного "причесать" функцию под пределом. Так как

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2}$$

то можно воспользоваться следующим равенством:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x), \quad x \to 0$$

Подставим это в предел:

$$\lim_{x\to 0} \left(\sqrt{1+x} - x \right)^{1/x} = \lim_{x\to 0} \left(1 + \frac{1}{2}x - x + o(x) \right)^{1/x} = \lim_{x\to 0} \left(1 - \frac{1}{2}x + o(x) \right)^{1/x} = \blacktriangle$$

$o(x)$ — это какая-то функция, бесконечно малая[10] по отношению к функции x при $x \to$ $\to 0$. Так как в той же скобке присутствует ещё и сам x (с коэффициентом $-1/2$), то на $o(x)$ можно смотреть как "практически" на ноль (это поправка, которая несравнимо меньше члена $-x/2$ по величине). Другими словами, можно просто "забыть" про $o(x)$:[11,12]

$$\blacktriangle = \lim_{x\to 0} \left(1 - \frac{x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = \spadesuit$$

[10] Дающая в пределе ноль (а не "минус бесконечность").

[11] "Забывать" можно не всегда, а только тогда, когда это в самом деле "бесконечно малая" поправка, по сравнению с другими членами. Например, в пределе $\lim_{x\to 0} \left(1 + x^2\right)^{1/x^2}$ функция x^2 тоже будет $o(x)$, но "отметание" её в сумме в скобке приведёт к приделу $\lim_{x\to 0} 1^{1/x^2}$. Который, очевидно, не равен исходному. Бывают также случаи, когда... не только не стоит "отметать" поправку, а когда, наоборот, необходимо её как-то уточнить, разложить до ещё большей точности. Например, пусть есть предел $\lim_{x\to 0} \left(\sqrt{1+x} - x/2 \right)^{1/x^2}$. Раскладывая до $o(x)$ корень, переходим к пределу $\lim_{x\to 0} (1 + o(x))^{1/x^2}$, с которым уже и не понятно, что делать. Потому что выкинуть $o(x)$ нельзя: она хоть и малая, но играет роль. Например, вместо $o(x)$ могла бы быть, например, функция x^2, или $-17.5x^2$, или x^{2024} — итоговый ответ в каждом из случаев был бы другим. Таким образом, в данном примере нужно бы было каким-то образом раскладывать корень не до $o(x)$, а до какой-то более высокой точности (до ещё более малой поправки)...

[12] Или не "забыть", а сделать так: $\lim_{x\to 0} \left(1 - \frac{1}{2}x + o(x)\right)^{1/x} = \lim_{x\to 0} \exp\left\{ \ln\left(1 - \frac{1}{2}x + o(x)\right) / x \right\}$. И тогда всё сводится к рассмотрению предела степени, а там уже стоит дробь, и можно заменять на эквивалентные.

Второй замечательный предел почти проявился, правда, ещё не до конца... Но его можно получить, если теперь "домножить и поделить" в степени:

$$\spadesuit = \lim_{x\to 0}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{x}\cdot\frac{1}{2}} = e^{1/2} = \sqrt{e}$$

(По ходу пользовались тем, что $x/2 \to 0$ при $x \to 0$. Можно бы было сделать замену, чтоб получить второй замечательный предел прям в как в табличном виде. Но можно было и просто иметь это в виду (делая "мысленную замену").) $\square$

1.10. C1, §9, №61

Пусть известно, что

$$\lim_{y\to y_0} f(y) = a$$

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = y_0$$

Следует ли отсюда, что

$$\lim_{x\to x_0} f\big(g(x)\big) = \lim_{y\to y_0} f(y) = a$$

Решение. Очевидно, условие задачи представляет "практически" утверждение о непрерывности сложной функции (1.5). С тем отличием, что не требуется, чтобы $g(x) \neq y_0$ хотя бы в некоторой δ-окрестности x_0. Таким образом, при взятии предела

$$\lim_{x\to x_0} f\big(g(x)\big)$$

может получиться так, что при стремлении $x \to x_0$ функция $g(x)$ пройдёт через y_0. Но ведь при рассмотрении предела

$$\lim_{y\to y_0} f(y)$$

вообще не важно, что происходит с $f(y)$ в самой точке y_0 (функция $f(y)$ может быть даже не определена в ней). Отсюда и может возникнуть противоречие: с $f(y)$ что-то "нехорошо" в самой y_0, а $g(x)$ в неё попадает при $x \to x_0$ (функция $g(x)$ в любом случае *стремится* к y_0 при $x \to x_0$ — тут же важно, что она может именно пройти через y_0, принять это значение — не в пределе).

Наверняка можно придумать не один (контр)пример, решающий задачу...

Как вариант, предлагается завязаться снова на замечательный предел (первый). Рассмотрим ситуацию:

$$f(y) = \frac{\sin y}{y}, \quad g(x) = 0$$

то есть $g(x)$ просто константный ноль; в качестве же y_0, очевидно, берём $y_0 = 0$; точка же x_0 может быть любой, пусть, для определённости, тоже $x_0 = 0$. Тогда получаем

$$\begin{cases} \lim\limits_{y\to y_0} f(y) = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin y}{y} = 1 \\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0 \end{cases}$$

Однако

$$\lim_{x\to x_0} f\big(g(x)\big) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 0}{0} \quad (☹)$$

Получили в явном виде деление на ноль. Дальнейшие объяснения кажутся излишними.[13] □

1.11. С1, §9, №36(8)

Найти предел функции:

$$\lim_{x\to 0}\big(\ln(e+x)\big)^{\operatorname{ctg} x}$$

Решение. Попытаемся постепенно прийти ко второму замечательному пределу:

$$\lim_{x\to 0}\big(\ln(e+x)\big)^{\operatorname{ctg} x} = \lim_{x\to 0}\left(\ln\left\{e\left(1+\frac{x}{e}\right)\right\}\right)^{\operatorname{ctg} x} = \lim_{x\to 0}\left(1+\ln\left\{1+\frac{x}{e}\right\}\right)^{\operatorname{ctg} x} = \blacktriangle$$

Воспользуемся равенствами при $x \to 0$:

$$\begin{cases} \ln\left(1+\frac{x}{e}\right) = \frac{x}{e} + o(x) \\ \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{1}{x+o(x)} \sim \frac{1}{x} \end{cases}$$

Подставляя в формулу для предела:

$$\blacktriangle = \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{e}+o(x)\right)^{\frac{1}{x}} = \diamondsuit$$

“Забывая” про $o(x)$ и “подкручивая” (в рамках правил) степень, наконец получаем замечательный предел:

$$\diamondsuit = \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{e}\right)^{\frac{e}{x}\cdot\frac{1}{e}} = e^{1/e}$$

□

2. Непрерывность функции

При вычислении пределов функции $f(x)$ в точке x_0, говорили, что не важно, что происходит с функцией в самой точке x_0. Для вычисления предела, это, может, и не важно, но так-то ведь вообще интересно, в частности, интересно, будет ли значение функции в точке $f(x_0)$ (если она там определена) совпадать с пределом функции в точке $\lim_{x\to x_0} f(x)$… Иными словами, “предсказуема” ли функция в точке x_0: можно ли по окрестности точки “догадаться”, чему равна функция в самой точке. Такие “предсказуемые” функции имеют специальное название…

Функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке x_0, если она определена в этой точке и имеет в ней предел, который совпадает с её значением в этой точке:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Пользуясь определениями предела функции, можно это расписать подробнее (в двух вариантах — по Коши и по Гейне). (Далее фактически скопированы определения пределов по Коши (1) и по Гейне (2). Скопированы — но с небольшими изменениями…)

[13] Всё-таки на всякий случай ещё одно небольшое замечание: в первом замечательном пределе $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ нет деления на ноль! ноль никогда не возникает в знаменателе (при $x \to 0$ знаменатель становится *всё ближе* к нулю, бесконечно близко, но всё-таки не “чистый” ноль).

Определение 2.1 (“Непрерывность в точке по Коши”). Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой δ_0-окрестности точки x_0.

Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty, \infty\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall x \in U_\delta(x_0) \to f(x) \in U_\varepsilon(a) \tag{6}$$

Если и x_0, и a — это просто числа, то можно написать и так:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall x :\ |x - x_0| < \delta \to |f(x) - a| < \varepsilon$$

Определение 2.2 (“Непрерывность в точке по Гейне”). Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой δ_0-окрестности точки x_0.

Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty, \infty\}$, если

$$\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} :\ \left\{ \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \ \to\ \lim_{n\to\infty} f(x_n) = a \right. \tag{7}$$

(то есть теперь последовательность просто должна сходиться к x_0 — возможно, попадая при этом и в саму x_0).

Замечание. Если при использовании определения предела по Гейне не сказать, что функция $f(x)$ должна быть определена хотя бы в некоторой δ_0-окрестности x_0, то это приведёт к тому, что под определение непрерывной в точке функции попадут все случаи, когда у функции в области определения есть *изолированная* точка x_0 — то есть такая точка, вокруг которой существует окрестность, не содержащая, кроме самой x_0, никаких других точек из области определения функции (“изолирована” от других точек области определения).

При этом ещё может быть ситуация, когда, например, рассматривается функция на отрезке $[a, b]$. У точки a слева “ничего нет”, у точки b — справа. То есть о непрерывности функции в точках a и b говорить нельзя. Но можно говорить о *непрерывности справа* в точке a и *слева* — в точке b:

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = f(a), \qquad \lim_{x\to b-0} f(x) = f(b)$$

Если функция непрерывна на “внутренности” отрезка $[a, b]$ — то есть во всех точках интервала (a, b) — а также непрерывна с соответствующей стороны на концах отрезка в точках a и b, то говорят, что функция f *непрерывна на отрезке*.

Но функция может и не быть непрерывной в некоторых точках. Такая точка x_0, в которой функция не является непрерывной, называется *точкой разрыва*.

2.1. Типы точек разрыва

Но разрывы бывают разные (3).

Так, если есть $\lim_{x\to x_0} f(x)$, но при этом функция либо просто не определена в точке x_0, либо определена, но $f(x_0) \neq \lim_{x\to x_0} f(x)$, то эта точка — точка *устранимого разрыва*. (Разрыв устраняется “нормальным” переопределением функции в x_0.)

Если же предела в точке нет, но при этом в ней всё-таки существуют конечные односторонние пределы $\lim_{x\to x_0\pm 0} f(x) \in \mathbb{R}$ (не равные друг другу), то эта x_0 — точка *разрыва первого рода*.

И, наконец, если хотя бы один из односторонних пределов $\lim_{x\to x_0\pm 0} f(x)$ не существует или бесконечен, то эта точка — точка разрыва *второго рода*.

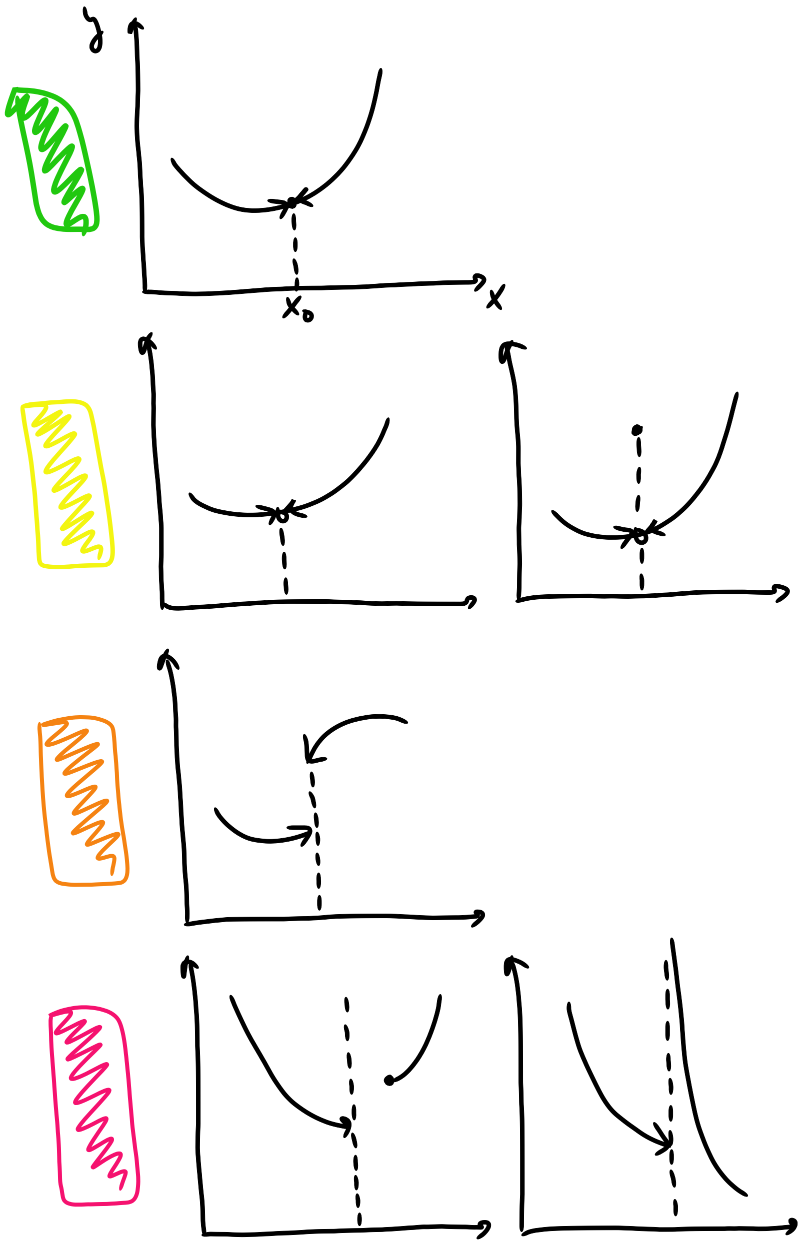

Рис. 3: Сверху вниз: функция непрерывна в точке x_0, функция имеет устранимый разрыв в точке, разрыв первого рода, разрыв второго рода.

2.2. Теорема Вейерштрасса о достижении непрерывной на отрезке функцией своих точных верхней и нижней граней

Сформулируем и покажем это свойство непрерывных функций.

Утверждение 2.1 (Теорема Вейерштрасса). *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда $\exists p \in [a, b]$, такая что $f(p) = \sup_{[a,b]} f$, а также $\exists q \in [a, b]$, такая что $f(q) = \inf_{[a,b]} f$.*

Доказательство. Покажем, например, что функция достигает на отрезке точной верхней грани. (То есть что $\sup_{[a,b]} f = \max_{[a,b]} f$.) Обозначим $M \equiv \sup_{[a,b]} f$.

Пусть $x_1 \in [a, b]$ — некоторая точка отрезка. Тогда $f(x_1) < M$. Но так как M — *точная* верхняя грань, то $f(x_1)$ верхней гранью являться не будет, то есть $\exists x_2 : f(x_1) < f(x_2) < < M$. Очевидно, процесс можно продолжать, находя каждый раз точку x_n, в которой $f(x_n)$ будет всё ближе к M — но будет ли последовательность значений функций $\{f(x_n)\}$ в получаемых точках $\{x_n\}$ подбираться к M бесконечно близко?.. (будет ли она сходиться, и сходиться к M?) Но можно также заметить, что последовательность $\{f(x_n)\}$ монотонно возрастает. Ещё она ограничена. А значит, по теореме Вейерштрасса (другой), она сходится (к чему-то). Допустим,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A \neq M$$

то есть сходится к чему-то, отличному от M. Но тогда этот предел A будет верхней гранью $\{f(x_n)\}$. …Кажется, противоречий нет. В самом деле можно построить такую $\{f(x_n)\}$, которая не сходится к M (если величина монотонного роста не контролируется). Хм…

Способ 1, версия 2. "Контролируемое возрастание".

Зайдём с другой стороны.

Пусть есть $\varepsilon_1 > 0$. Тогда число $M - \varepsilon_1$ не будет являться точной верхней гранью для множества значений функции на отрезке, то есть $\exists x_1 \in [a, b]$, такой что $M - \varepsilon_1 < f(x_1) < M$. Теперь возьмём $\varepsilon_2 = \min\left\{M - f(x_1), \frac{\varepsilon_1}{2}\right\}$.[14] И снова найдём $x_2 \in [a, b]$, такой что $M - \varepsilon_2 < f(x_2) < M$. И так далее:

$$M - \varepsilon_1 < f(x_1) < M - \varepsilon_2 < f(x_2) < \ldots < M - \varepsilon_n < f(x_n) < M - \varepsilon_{n+1} < f(x_n + 1) < \ldots < M$$

Последовательность $\{f(x_n)\}$ снова монотонно возрастает. И она ограничена. И… она сходится к M! Потому что

$$0 < |f(x_n) - M| < \varepsilon_n = \frac{\varepsilon_1}{2^{n-1}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Итак, сходится к M:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = M$$

Мы уже почти получили, что требуется — осталось только разобраться с "иксами". Ведь пока нельзя утверждать, что $\{x_n\}$ сходится к некоторому x_0, в котором как раз $f(x_0) = M$. Это ниоткуда вроде бы не следует. Но… Можно воспользоваться тем, что $\{x_n\}$ — ограниченная последовательность, а потому, по теореме Больцано – Вейерштрасса, имеет сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$! Вот теперь уже "всё":

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$$
$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = M$$

Видно, что $\{x_{n_k}\}$ — это последовательность Гейне в точке x_0 (правда, она ещё может проходить через саму x_0). Поэтому, в силу непрерывности функции f на отрезке:

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f\left(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}\right) = f(x_0)$$

Нашли точку x_0, в которой $f(x_0) = \sup_{[a,b]} f$. □

2.3. C1, §10, №5(9)

Доказать (по определению), что функция $y(x)$ непрерывна в каждой точке своей области определения:

$$y(x) = \frac{1}{x^2}$$

[14]Такой немного замороченный выбор ε_2 — для того, чтобы, с одной стороны, окрестность около M стала как минимум в два раза меньше; с другой — чтобы уже выбранная ранее x_1 осталась "за бортом", вне новой окрестности.

Решение. Область определения: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Пусть есть $x_0 \neq 0$. Покажем, что $f(x)$ непрерывна в x_0.

Непрерывна — то есть значение функции в точке совпадает с её пределом в точке. Поэтому, чтобы доказать непрерывность по определению, воспользуемся определением предела функции в точке, например, по Коши. Итого, надо показать, что:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall x \in U_\delta(x_0) \to f(x) \in U_\varepsilon\big(f(x_0)\big)$$

или, если через неравенства:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall x :\ |x - x_0| < \delta \to |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Посмотрим на разность между значениями функции:

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x_0^2}\right| = \left|\frac{x_0^2 - x^2}{x^2 x_0^2}\right| = \left|\frac{(x_0 - x)(x_0 + x)}{x^2 x_0^2}\right|$$

Может ли эта разность быть меньше любого наперёд заданного ε для всех x, достаточно близких к x_0? (можно ли это обеспечить выбором δ?) Посмотрим внимательно на дробь. Разность $x_0 - x$ можно сделать сколь угодно малой (x — точка такая, что $|x_0 - x| < \delta$, а δ выбираем, какой хотим); $x_0 + x$ — при достаточно малом δ есть “нечто, сравнимое с x_0”, это что-то около x_0, “примерно” x_0; то же самое с x в знаменателе — если δ достаточно малая, x будет близко к x_0, “практически” x_0. Итого, о дроби под модулем при достаточно малом δ можно думать как

$$\left|\frac{(x_0 - x)(x_0 + x)}{x^2 x_0^2}\right| \lesssim \frac{\delta \cdot x_0}{x_0^4}$$

А это, очевидно, можно выбором δ сделать таким малым, как захотим (меньше любого $\varepsilon > 0$).

Разберёмся теперь аккуратнее со всеми упомянутыми “практически”, “примерно”, “что-то около” и прочими (4). Пусть для определённости $x_0 > 0$. Тогда выбором δ можно добиться того, чтобы $x_0 + \delta$ было меньше, чем, скажем, $100x_0$. С другой стороны, также можно выбрать и такой маленький δ, чтобы $x_0 - \delta$ было, например, больше $0{,}01x_0$. Выбирая самый маленький из двух упомянутых δ (или ещё сколь угодно меньше), и получаем такую оценку:

$$\left|\frac{(x_0 - x)(x_0 + x)}{x^2 x_0^2}\right| < \frac{\delta \cdot 100x_0}{(0{,}01x_0)^2 x_0^2} < \varepsilon$$

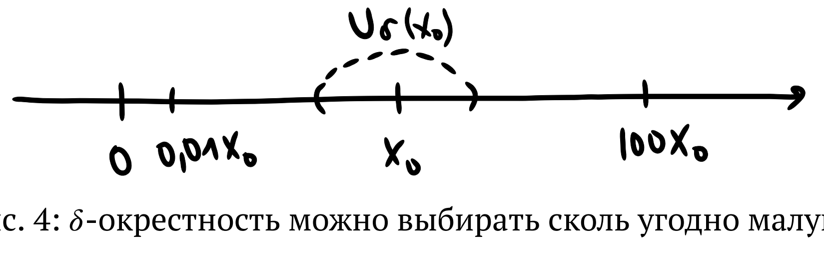

Рис. 4: δ-окрестность можно выбирать сколь угодно малую.

И из неё уже выходит такое условие на δ:

$$\delta < \varepsilon \cdot \left(\frac{x_0}{100}\right)^3$$

Показали непрерывность в x_0, используя определение предела в x_0 по Коши.

Способ 2: по Гейне. Покажем теперь интереса ради непрерывность, если опираться на определение предела функции в точке по Гейне. Тогда фраза "предел в точке x_0 равен значению в точке" будет переводиться так:

$$\forall \{x_n\} \subset U_\delta(x_0),\ \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \to \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0) \leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \big(f(x_n) - f(x_0)\big) = 0$$

(где последовательности Гейне берутся из элементов из некоторой δ-окрестности x_0, где функция $f(x)$ определена). В таком случае, рассмотрим предел:

$$\lim_{n\to\infty} \big(f(x_n) - f(x_0)\big) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{x_n^2} - \frac{1}{x_0^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{(x_0 - x_n)(x_0 + x_n)}{x_n^2 x_0^2} = 0$$

он равен нулю, так как $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0$. □

2.4. С1, §10, №22

Доказать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{если } x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

разрывна в каждой точке.

Решение. Докажем разрывность из противоречия с непрерывностью. То есть покажем, например, выполнение *отрицания непрерывности*, если смотреть на неё по Гейне:

$$\exists \{x_n\} : \lim_{n\to\infty} x_n = x_0,\ \neg\left(\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)\right) \tag{8}$$

где x_0 — некоторая точка, а символом $\neg$ обозначено отрицание — в данном случае отрицание условия равенства предела последовательности $\{f(x_n)\}$ числу a (то есть предел последовательности либо не равен a, либо вообще не существует). Получается, для произвольного x_0 надо научиться предъявлять описанную последовательность Гейне в этой точке.

Пусть $x_0 \in \mathbb{I}$. Кажется естественным попытаться составить $\{x_n\}$ так, чтобы все элементы последовательности, наоборот, было бы рациональными. (Тогда сразу получится, что $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1 \neq 0 = f(x_0)$.) Можно поступить так: пусть x_1 — произвольное рациональное число (пусть оно ещё и меньше x_0 для определённости). Определим $\delta_1 = x_0 - x_1$. Далее, положим $\delta_2 = \frac{\delta_1}{2}$, и выберем какой-нибудь любой рациональный $x_2 \in (x_0 - \delta_2, x_0)$. И "зацикливаем" процесс: следующий $\delta_3 = \frac{\delta_2}{2}$, выбираем произвольный рациональный $x_3 \in (x_0 - \delta_3, x_0)$, и так далее. Получаем последовательность $\{x_n\} \subset \mathbb{Q}$. Почему она сходится к x_0? Потому что она построена так, чтобы каждый очередной x_n был всё ближе к x_0, причём в несколько раз ближе, чем предыдущий x_{n-1}:

$$0 < |x_n - x_0| < \delta_n = \frac{\delta_1}{2^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Можно бы было предложить и ещё, например, вот такой способ нахождения $\{x_n\} \subset \subset \mathbb{Q}$. Так как $x_0 \in \mathbb{I}$, то x_0 представимо в виде бесконечной непериодической десятичной дроби:

$$x_0 = a_0\,,a_1\,a_2\,a_3\,\ldots\,a_n\,\ldots$$

где a_0, a_1, a_2 и так далее — цифры. Тогда предлагается такая последовательность $\{x_n\}$:

$$\begin{cases} x_1 = a_0\,,a_1 \\ x_2 = a_0\,,a_1\,a_2 \\ x_3 = a_0\,,a_1\,a_2\,a_3 \\ \dots \\ x_n = a_0\,,a_1\,a_2\,a_3\,\dots\,a_n \end{cases}$$

Очевидно, $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0$. Также очевидно, что $x_n \in \mathbb{Q}$. А значит, это и есть подпоследовательность Гейне, "ломающая" непрерывность функции в точке x_0 по Гейне.

Пусть теперь $x_0 \in \mathbb{Q}$. Опять, хочется составить последовательность Гейне $\{x_n\}$ из, наоборот, иррациональных чисел (вообще не обязательно прям только из иррациональных — по-хорошему, достаточно лишь, чтобы иррациональные просто время от времени встречались среди элементов последовательности). Пусть x_1 — это, например, $\frac{x_0}{\sqrt{3}}$. Очевидно, $x_1 \in \mathbb{I}$. Далее, положим, например

$$x_n = x_1 + (x_0 - x_1)\cdot\frac{n}{n+1}$$

Очевидно, что $x_n \in \mathbb{I}$.[15] Также понятно, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(x_1 + (x_0 - x_1)\cdot\frac{n}{n+1}\right) = x_0$$

Итого, это нужная последовательность Гейне в иррациональном x_0.

Способ 2: по Коши

Решим задачу, смотря на предел функции в точке как Коши. Отрицание, которое надо доказать (чтоб показать разрывность в произвольной x_0):

$$\exists\varepsilon > 0 : \forall\delta > 0\ \exists x \in U_\delta(x_0) : f(x) \notin U_\varepsilon\big(f(x_0)\big)$$

Но какой бы ни был x_0 ($\mathbb{Q}$ или $\mathbb{I}$) — это будет верно! Потому что в любой δ-окрестности рационального (иррационального) числа x_0 на числовой прямой есть иррациональное (рациональное) число x (и тогда $|f(x) - f(x_0)| = 1$ — так что в качестве ε можно взять, например, $\varepsilon = 1/2$.)

Способ 3: Гейне + Коши (другой Коши)

Вернёмся к взгляду на предел в точке по Гейне. Как ещё можно показать (8)? Предъявив такую последовательность Гейне $\{x_n\}$ в x_0, чтоб предела $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ просто не существовало! Из критерия Коши сходимости последовательности, предела не будет, если

$$\exists\varepsilon > 0 : \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n, m \geq N : |f(x_n) - f(x_m)| \geq \varepsilon$$

Тогда можно построить $\{x_n\}$, чередуя попеременно рациональные и иррациональные элементы, которые становятся всё ближе к x_0 (можно опять ввести окрестность δ_n, из которой произвольно выбирается очередной $\mathbb{Q}$ или $\mathbb{I}$ элемент x_n — чтобы окрестности δ_n стягивались к нулю).

Способ 3: Коши - Гейне ("минус Гейне")

[15] Или не так очевидно... В общем, получается, что x_n есть сумма иррационального и рационального.

На самом деле *критерий Коши существования предела в функции* — не привязан к последовательностям (к определению предела в точке по Гейне). Его можно сформулировать в более общем виде так: функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall x_1, x_2 \in U_\delta(x_0) \to |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

И его *отрицание*:

$$\exists \varepsilon > 0 :\ \forall \delta > 0\ \exists x_1, x_2 \in U_\delta(x_0) :\ |f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon$$

Но тогда можно и не искать никакую последовательность Гейне в точке x_0! Просто достаточно сказать, что в любой δ-окрестности любого числа x_0 есть как рациональные, так и иррациональные числа (а потому подойдёт $\varepsilon = 1/2$). □

2.5. C1, §10, №42 (вариант Теоремы о промежуточных значениях непрерывной функции)

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на интервале (a, b), и пусть

$$m_0 \equiv \inf_{(a,b)} f, \quad M_0 \equiv \sup_{(a,b)} f$$

Доказать, что для любого $y_0 \in (m, M)$ найдётся $x_0 \in (a, b)$, такой что $f(x_0) = y_0$.

Решение. Отметим, что непрерывная на интервале функция может и не достигать на этом интервале своих инфимума и/или супремума. Например, функция $f(x) = \frac{1}{x}$ на интервале $(0, 1)$ (не достигает инфимума). Или $f(x) = \operatorname{tg} x$ на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (не достигает "ничего").

Поэтому сперва осторожно определим, в каких "границах" лежит y_0. Границах — в смысле между какими значениями, которые функция $f(x)$ точно принимает. Но это сразу получаем из определения точных граней: если $y_0 > m_0$, то обязательно найдётся $m_1 = f(l_1)$, $l_1 \in (a, b)$, такое что $y_0 > m_1 > m_0$. Аналогично и с точной верхней гранью. Итого, имеем:

$$\inf_{(a,b)} f = m_0 < m_1 = f(l_1) < y < f(r_1) = M_1 < M_0 = \sup_{(a,b)} f$$

(для определённости также будем считать $l_1 < r_1$, хотя это ни на что не влияет, кроме смысла за именами.)

Теперь предлагается следующая процедура поиска точки x_0, где $f(x_0) = y_0$. Будем приближаться к ней, всё ближе и ближе. Точнее даже, будем *стягиваться* к ней — по оси X. Но так как функция непрерывна — то параллельно мы будем приближаться и к интересуемому значению y_0 по оси Y! Таким образом, 2D "область поиска" точки (x_0, y_0) тоже стягивается — и в итоге получается одна точка графика, где функция принимает искомое значение (график не видим, но нужную точку на нём найти сможем).

Определим процесс более формально (5). Первый отрезок — это $[l_1, r_1]$. Точка x_0 должна быть на нём. Далее, начинаем делить пополам: $c_1 = \frac{l_1 + r_1}{2}$. Если вдруг $f(c_1) = y_0$, то процесс завершён, точку нашли. Иначе, либо $f(c_1) < y_0$, либо $f(c_1) > y_0$. В любом случае, можно будет от "большого" отрезка $[l_1, r_1]$ перейти к отрезку в два раза меньше — такому, чтоб y_0 было между значениями на его концах ($[c_1, r_1]$ или $[l_1, c_1]$ соответственно). Это будет отрезок $[l_2, r_2]$. Далее всё повторяется: смотрим середину, сравниваем, переходим в нужный подотрезок. И так далее. Получается последовательность точек $\{x_n\}$ и стягивающаяся последовательность вложенных отрезков $\{[l_n, r_n]\}$. Раз стягивающаяся, то, по теореме Кантора, имеет общую точку x_0 (назовём её так же, как искомую, где $f(x_0) = y_0$, потому что это в самом деле она и есть, что далее покажем). При этом

$$0 < |x_n - x_0| < \frac{r_1 - l_1}{2^{n-1}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

то есть $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0$. Осуществили "стяжку" в x_0. Посмотрим, что при этом происходит по другой оси. Строили отрезки так, чтобы

$$f(l_n) < y_0 < f(r_n)$$

при стяжке же $l_n, r_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0$, а в силу *непрерывности* функции $f(x)$ при этом выходит также $f(l_n), f(r_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(x_0)$. По теореме о двух милиционерах: $y_0 = f(x_0)$. Значит, нашли "ту самую" x_0.

Получается, при поиске как бы двигались от граничных точек в нужную сторону "шажками". При этом шаги уменьшались от очень больших ко всё более и более маленьким — уменьшались по мере приближения к искомой точке.

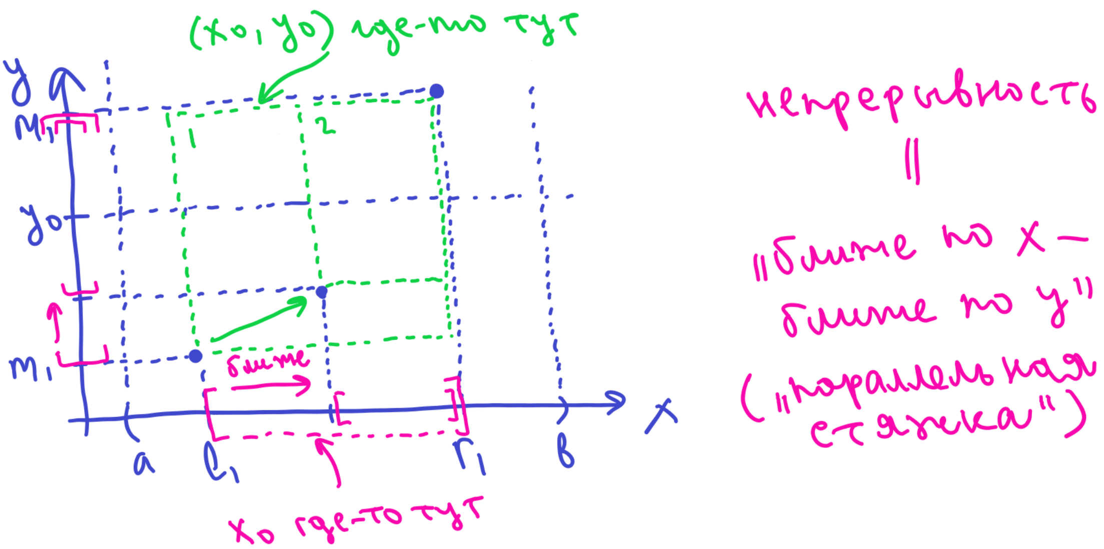

Рис. 5: Функция $f(x)$, определённая на интервале (a, b), непрерывна… И это — всё, что про неё вообще по условию известно. Графика нет — только чистый лист. И пара граничных точек m_1 и M_1 — границы, между которыми заключено интересуемое значение y_0 (произвольное между инфимумом $\inf_{(a,b)} f$ и супремумом $\sup_{(a,b)} f$ функции на интервале). Как тогда показать, что функция обязательно проходит через y_0? ("Обязательно" — в данном контексте это скорее как "математический троп", подчёркивающий, что предстоит доказать "стрелку вправо" $\Rightarrow$, что из условий *следует* желаемое. Хотя, пожалуй, "обязательно" можно бы было и опустить…)

$\square$

2.6. C1, §10, №97(2)

Построить взаимно однозначное отображение отрезка на интервал.

Решение. TBA $\square$

2.7. T4

Приведите пример разрывной функции $f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которая отображает любой отрезок в отрезок.

Решение. TBA $\square$