Семинар 4

Алексеев Василий

28 февраля + 7 марта 2025

Содержание

К формулировкам и доказательствам (если такие вообще приводятся) стоит относиться критически. Основное в этом конспекте — решение задач (но "критичность" и здесь лучше не отключать). За строгой, ясной и последовательной теорией лучше обращаться к "нормальным" источникам. (Например, к лекциям.)

1. Эрэн

1.1. Предел функции (продолжение)

Так же, как в случае $\mathbb{R}$, вводится понятие *непрерывности функции в точке*. Функция непрерывна в точке, если значение функции в этой точке “предсказуемо” по её значениям в близких точках. Так, функция $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^n$ называется непрерывной в точке $\boldsymbol{x}_0 \in X$ (внутренней для X), если:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta : \; \forall \boldsymbol{x} : \; \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) < \delta \to \left| f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0) \right| < \varepsilon$$

Или, в терминах окрестностей:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta : \; \forall \boldsymbol{x} \in U_\delta(\boldsymbol{x}_0) \to f(\boldsymbol{x}) \in U_\delta\big(f(\boldsymbol{x}_0)\big)$$

Если функция f не является непрерывной в точке $\boldsymbol{x}_0$, то она *разрывна* в ней. Разрыв может быть в случаях, если (1):

- функция не определена в точке (устранимый разрыв): $\nexists f(\boldsymbol{x}_0)$;
- значение функции отличается от предела в точке (тоже устранимый разрыв): $f(\boldsymbol{x}_0) \neq \lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x})$;
- не существует предела функции в точке (неустранимый разрыв): $\nexists \lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x})$.

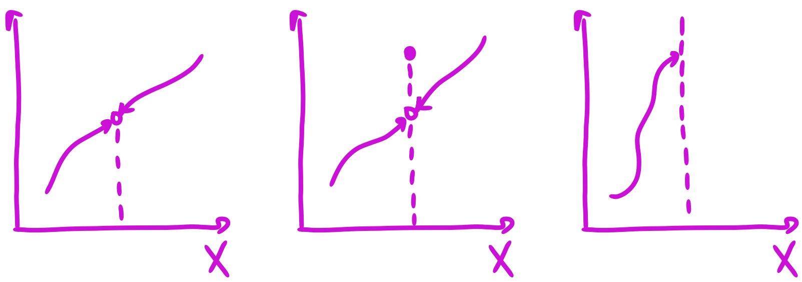

Рис. 1: Варианты разрывов функции $f : X \to \mathbb{R}$ в точке. (Картинка нарисована как будто для функции одной переменной, но можно считать, что это просто такой “упрощённый” вариант изобразить ситуацию на $\mathbb{R}^n$ (“набросок”, дающий простор для фантазии читателя).)

Кроме “просто” непрерывности, может рассматриваться непрерывность по какому-то множеству. Например, по множеству определения функции. Так, функция f непрерывна в $\boldsymbol{x}_0$ по множеству X, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta : \; \forall \boldsymbol{x} \in U_\delta(\boldsymbol{x}_0) \cap X \to f(\boldsymbol{x}) \in U_\delta\big(f(\boldsymbol{x}_0)\big)$$

то есть смотрятся близкие точки не из всего пространства, а только из X. По такому определению можно говорить и о непрерывности функции в *изолированных* точках X (функция будет в них непрерывна).

1.1.1. С3, §2, №54

Дана функция:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ a, & x=y=0\end{cases}$$

Найти значение a, при котором $f(x,y)$ в точке $(0,0)$ будет

- непрерывной по прямой
$$l:\ \begin{cases}x=\alpha t\\ y=\beta t\end{cases},\quad \alpha^2+\beta^2\neq 0$$
- непрерывной по кривой $y=\alpha x^2$
- "просто" непрерывной

Решение. Что значит, что функция $f:\ X\to\mathbb{R}$ непрерывна в некоторой точке $\boldsymbol{x}_0\in\mathbb{R}^n$:

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}_0)$$

Однако в случае, если $\boldsymbol{x}_0$ не является внутренней точкой множества X, говорить о пределе $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}$, по-хорошему, нельзя (так как "подходить" к $\boldsymbol{x}_0$ в данном случае не получится по произвольной "траектории"). Но можно говорить о пределе *по множеству определения* функции:

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0\\ \boldsymbol{x}\in X}} f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}_0)$$

А вообще, можно рассматривать пределы функций по произвольным множествам $X'\subset X$:[1]

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0\\ \boldsymbol{x}\in X'}} f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}_0)$$

Если предел функции в точке $\boldsymbol{x}_0$ существует, то он будет таким же и по любому множеству. Но если хотя бы по какому-то множеству в точке $\boldsymbol{x}_0$ нет предела (или если можно привести два множества, по которым пределы в точке существуют, но отличаются), то "просто" предела у функции в этой точке не будет.

Итак, проверка непрерывности в точке по прямой l будет заключаться в проверке равенства:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\in l}} f(x,y)\overset{?}{=}f(0,0)$$

Или, если подробнее:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\in l}} \frac{x^2y}{x^4+y^2}\overset{?}{=}a$$

Вычислим предел. Для этого можно выразить x и y через t из уравнений прямой и подставить в выражение под пределом (при этом $(x,y)\to(0,0)\Leftrightarrow t\to 0$):

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\in l}} \frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{t\to 0}\frac{(\alpha t)^2\beta t}{(\alpha t)^4+(\beta t)^2}=\lim_{t\to 0}\frac{\alpha^2\beta\cdot t}{\alpha^4\cdot t^2+\beta^2}=0$$

[1] Точнее, по произвольным множествам, для которых точка $\boldsymbol{x}_0$ является предельной.

(предел равен нулю вне зависимости от того, равен β нулю или нет).

Таким образом, чтобы функция была непрерывна в нуле по прямой, должно выполняться условие $a = 0$.

Перейдём к случаю непрерывности по кривой $y = \alpha x^2$. Для начала можно заметить, что при $\alpha = 0$ кривая становится прямой — этот случай уже был рассмотрен ранее (и получилось, что в этом случае должно быть $a = 0$).

Если же $\alpha \neq 0$, то кривая $y = \alpha x^2$ будет описывать параболу.

Для проверки непрерывности по рассматриваемой кривой, можно выразить y через x и подставить в выражение под пределом (при этом $(x, y) \to (0, 0) \Leftrightarrow x \to 0$):

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=\alpha x^2}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\alpha x^4}{x^4 + \alpha^2 x^4} = \frac{\alpha}{1 + \alpha^2}$$

Таким образом, непрерывность в нуле по параболе $y = \alpha x^2$ будет при условии:

$$a = \frac{\alpha}{1 + \alpha^2}$$

Также можно заметить, что для разных парабол, скажем, для $y = x^2$ и $y = -x^2$, значения a, дающие непрерывность, будут разными.

Из сказанного получаем, что "просто" непрерывной в нуле функция ни при каких a не будет (разные a для прямых и парабол, разные a для разных парабол — для разных множеств условия непрерывности отличаются).

$\square$

1.1.2. С3, §2, №62(5)

Найти все точки разрыва (устранимого и нет) функции двух переменных:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^3}{x + y}, & \text{если } x + y \neq 0 \\ 3, & \text{если } x + y = 0 \end{cases}$$

Решение. В каждой точке (x_0, y_0) не на прямой $l:\ x + y = 0$ функция задаётся "нормальной" (не кусочной) формулой (в каждой точке, а также в некоторой её окрестности). Формулой, которая, очевидно, задаёт непрерывную функцию:

$$f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x + y} = x^2 - xy + y^2, \quad x + y \neq 0$$

Вопросы возникают только по поводу точек прямой l.

Пусть $(x_0, y_0) \in l$. Будем проверять непрерывность в точке по определению:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) \stackrel{?}{=} f(x_0, y_0)$$

Очевидно, если считать предел в точке прямой l по самой прямой l, то непрерывность будет:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ (x,y)\in l}} f(x, y) = 3 = f(x_0, y_0)$$

Посмотрим на "просто" предел:[2]

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x^2 - xy + y^2 = x_0^2 - x_0y_0 + y_0^2 \xrightarrow{x_0+y_0=0} 3x_0^2 \stackrel{?}{=} 3$$

Видно условие непрерывности в точке на прямой: $x_0^2 = 1 \leftrightarrow x_0 = \pm 1$. Только в точках прямой с такими x-координатами функция f будет непрерывна. Эти точки: $(\pm 1, \mp 1)$. В остальных точках прямой l функция терпит устранимый разрыв (предел есть, но не равен значению функции в точке). □

1.2. Производные. Дифференциал

1.2.1. Производная и дифференциал на прямой (вспоминание)

Вспомним производную и дифференциал, какие они были для числовых функций.

Производная функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ показывает "скорость" её изменения в точке x_0:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} \equiv f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \end{aligned} \tag{1}$$

Производная несёт информацию, с одной стороны, о том, как быстро меняется функция (модуль производной), но также рассказывает о "характере" изменения: увеличивается функция при проходе через x_0 или, наоборот, уменьшается (знак производной).

Геометрический смысл производной — тангенс угла наклона касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 (касательная — как предел секущей при $x \to x_0$).

Вообще же, в "близкой" окрестности точки x_0 график функции "в некотором приближении" представим как раз как график касательной в точке x_0 (2),[3] — чем ближе окрестность, тем точнее такое представление — то есть приращение $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$ в точке x_0 функции можно "оценить" так:

$$f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Оказывается, что можно написать и "нормальное" (строгое) равенство без приближений:

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + o(x - x_0), \quad x \to x_0$$

где $o(x - x_0)$ есть o-малая от $x - x_0$, то есть некоторая функция $g(x)$, для которой верно, что $\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{x - x_0} = 0$. (Поправка, отвечающая за "точность" приближения приращения функции как линейной функции от приращения аргумента — чем ближе к x_0, тем точнее.) Итого, для значения $f(x)$ функции в некоторой точке x можно записать:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + o(x - x_0), \quad x \to x_0$$

Из этого соотношения возникают два понятия.

[2]На самом деле это тоже не "просто" предел — тоже предполагаем, что сходимся к точке по множеству — по множеству, не включающему в себя точки прямой l (ведь только для них работает формула, которая стоит под пределом). Если же всё-таки посмотреть на предел в целом, без ограничения по множеству, то что может получиться: при $x \to x_0$ встречаются как точки на прямой l, так и вне её. С точками на прямой уже показали, что по ним $f(\boldsymbol{x})$ сходится к 3. Чтобы предел существовал, 3 должна в пределе получаться и для значений функции на точках вне прямой.

[3]Источник: МА-1, семинар про дифференциал (шестой).

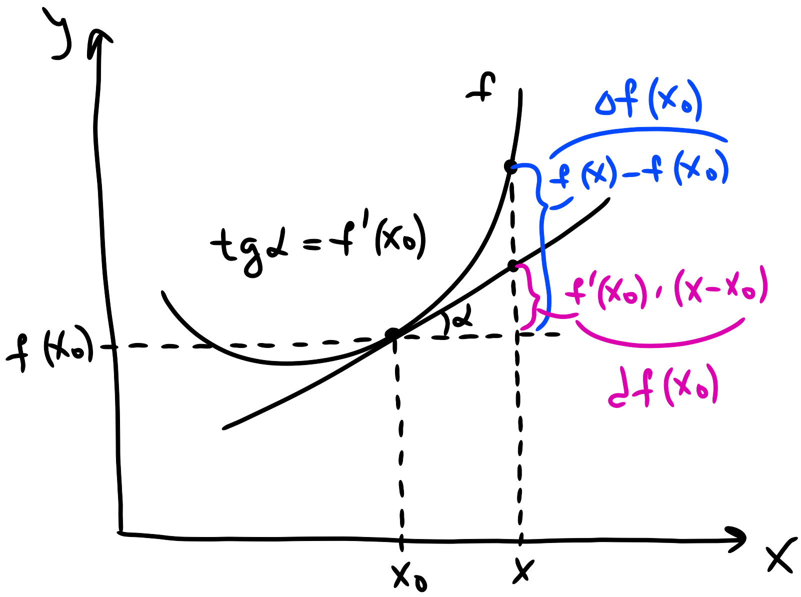

Рис. 2: Вблизи точки x_0 значение функции $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.

Дифференциалом независимой переменной называется её приращение:

$$dx = \Delta x = x - x_0$$

Дифференциалом функции в точке x_0 называется линейная по dx часть приращения функции в этой точке (линейное “приближение” приращения функции):

$$df(x_0) = f'(x_0)\,dx \tag{2}$$

А *дифференцированием* называется процесс взятия производной функции. При этом получение дифференциала (2) по сути тоже сводится к взятию производной. И правила дифференцирования функций во многом повторяют соответствующие правила для производных. Например, дифференциал константы $c \in \mathbb{R}$ равен нулю $dc = 0$. Дифференциал суммы равен сумме дифференциалов. Константу как множитель можно выносить за знак дифференциала.

Дифференциал произведения (распишем его подробнее):

$$d(fg) = df \cdot g + f \cdot dg$$

так как, с одной стороны:

$$d(fg) = (fg)'\,dx = (f'g + fg')\,dx$$

и, с другой стороны:

$$df \cdot g + f \cdot dg = f'\,dx \cdot g + f \cdot g'\,dx = (f'g + fg')\,dx$$

Дифференциал частного:

$$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{df \cdot g - f \cdot dg}{g^2}$$

1.2.2. Производная и дифференциал в многомерии

В многомерном пространстве формула (1) не применима и обобщить её не очень понятно, как: ведь теперь "движение" от $\boldsymbol{x}$ к $\boldsymbol{x}_0$ происходит в $\mathbb{R}^n$, и разность $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0$ будет вектором. Можно бы было посчитать *длину* этого вектора и поставить в знаменателе (1) — но тогда это уже была бы не производная, потому что потерялась бы информация о направлении движения от $\boldsymbol{x}$ к $\boldsymbol{x}_0$ ($|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|$ — это лишь часть информации об изменении аргумента).

То есть основная "проблема" в том, что переменных теперь много, они все могут меняться.

Поэтому можно (немного "искусственно") упростить картину так, чтобы всё-таки можно было ввести производную аналогично (1) (и при этом ввести её так, чтобы она обобщала производную в $\mathbb{R}$). *Будем следить за изменением функции не сразу по всем переменным, а только по одной.*

Рассмотрим для наглядности функцию на плоскости: $f(x,y)$, где (x,y) — это компоненты двумерного вектора: $\boldsymbol{x}=(x,y)$. Пусть есть точка (x_0,y_0). *Зафиксируем* координату y_0, тогда разность $f(x,y_0)-f(x_0,y_0)$ будет показывать изменение функции только при изменении x. Получается так, словно f — это теперь функция одной переменной x (на самом деле функция многих переменных, просто при зафиксированных всех, кроме одной), поэтому можно посчитать её производную так же, как в $\mathbb{R}$. Таким образом посчитанная производная называется *частной производной* функции $f(x,y)$ по x:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \equiv f'_x = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

Аналогичным образом рассчитываются частные производные и по другим переменным (в данном случае — только по y):

$$\frac{\partial f}{\partial y} \equiv f'_y = \lim_{y\to y_0}\frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

Частные производные не дают полной информации о "динамике" изменения функции при $x\to x_0$, но они показывают скорость изменения функции в x_0 вдоль соответствующих осей.

Функция в $\mathbb{R}^2$ называется *дифференцируемой* в точке (x_0,y_0), если в её окрестности верна формула:

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+A\Delta x+B\Delta y+o(\rho),\ \ \rho\to 0,\qquad \rho\equiv\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \tag{3}$$

где $A,B\in\mathbb{R}$, а $\Delta x=x-x_0$ и $\Delta y=y-y_0$. То есть если приращение функции линейно зависит от приращений аргументов при $\rho\to 0$.

И *если* функция дифференцируема, то:

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y}_{df(x_0,y_0)}+o(\rho),\ \ \rho\to 0 \tag{4}$$

где $df(x_0, y_0)$ — дифференциал функции в точке (линейное приближение её приращения в точке). (Но в $\mathbb{R}^n$ из того, что у функции в точке есть частные производные, вообще ещё не следует, что она дифференцируема — подробнее см. номер (1.2.4).

Кроме "просто" дифференциала, можно рассмотреть дифференциалы по отдельным переменным (при всех остальных фиксированных). Так, например, при константной $y \equiv \equiv y_0$ будет:

$$d_x f(x_0, y_0) \equiv df(x_0, y_0)|_{y=y_0} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\, dx$$

И в таком случае можно выразить частную производную через *отношение дифференциалов*:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d_x f}{dx}$$

А дифференциал функции в точке можно записать в виде суммы дифференциалов по отдельным переменным:

$$df = d_x f + d_y f$$

Кроме частных производных, для функций в $\mathbb{R}^n$ рассматриваются *производные по направлению*. Производная по направлению рассчитывается при "движении" к точке вдоль проходящей через неё прямой, которая задаётся вектором $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ (3). В отличие от частных производных (где "движение" к точке происходит вдоль оси), изменение функции будет определяться изменением *сразу по нескольким* переменным. Что тогда поставить в знаменателе дроби (предел которой будет производной)? При движении по прямой к точке в качестве изменения аргумента можно считать просто *расстояние* от текущей точки $\boldsymbol{x}$ до "нулевой" $\boldsymbol{x}_0$ — причём расстояние со знаком: с "плюсом", если точка $\boldsymbol{x}$ получается из $\boldsymbol{x}_0$ движением в направлении вектора $\boldsymbol{a}$ (то есть $(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \upuparrows \boldsymbol{a}$), и с "минусом", если точка $\boldsymbol{x}$ лежит с другой стороны от $\boldsymbol{x}_0$ (то есть $(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \uparrow\downarrow \boldsymbol{a}$). [4]

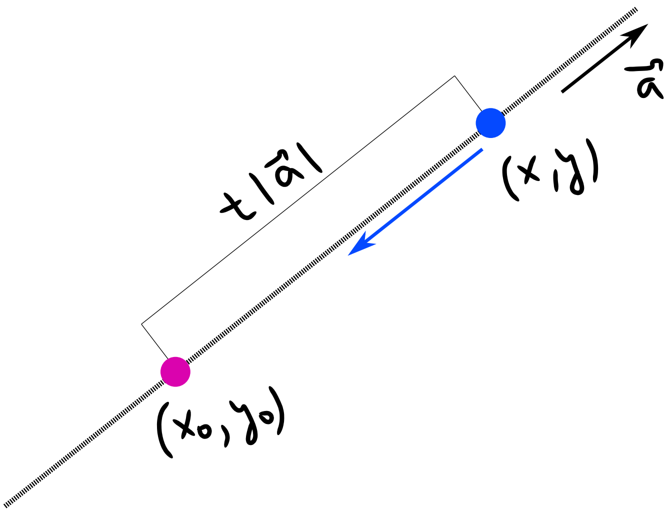

Рис. 3: К производной по направлению в точке (x_0, y_0) вдоль вектора $\boldsymbol{a}$.

Итак, распишем на примере $\mathbb{R}^2$ производную функции $f(x, y)$ вдоль вектора $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y)$:

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{a}}(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + ta_x, y_0 + ta_y) - f(x_0, y_0)}{t|\boldsymbol{a}|}$$

[4] Существует и другой подход к расчёту производной вдоль вектора: когда единичный "шаг" полагается равным длине вектора (шагаем к точке $\boldsymbol{x}_0$ вдоль вектора с шагом длиной в вектор).

Если вектор $\boldsymbol{a}$ единичный ($|\boldsymbol{a}| = 1$), то производная вдоль него:

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{a}}(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + ta_x, y_0 + ta_y) - f(x_0, y_0)}{t} \tag{5}$$

Таким образом, производная по направлению — это не что-то “другое совсем новое” — она обобщает понятие частной производной: частные производные — это производные вдоль направлений осей координат.

1.2.3. С3, §3, №3(6)

Найти частные производные первого порядка функции:

$$f(x, y, z) = \left(\frac{x}{y}\right)^z$$

Решение. Частные производные — производные по одной переменной. Чтобы их найти, можно просто дифференцировать по нужной переменной формулу, которой задаётся функция, считая все остальные переменные как бы постоянными (константами):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= z\left(\frac{x}{y}\right)^{z-1} \cdot \frac{1}{y} &&= \frac{z}{x} f(x, y, z) \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= z\left(\frac{x}{y}\right)^{z-1} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) &&= -\frac{z}{y} f(x, y, z) \\
\frac{\partial f}{\partial z} &= \left(\exp\left\{z \cdot \ln\frac{x}{y}\right\}\right)' &&= f(x, y, z) \ln\frac{x}{y}
\end{aligned}$$

□

1.2.4. С3, §3, №12

Верны ли для функции $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ следующие утверждения?

- ⧅ Если функция в некоторой точке имеет частные производные по всем переменным, то она непрерывна в этой точке.
- ⧅ Если функция в каждой точке пространства $\mathbb{R}^n$ имеет частные производные по всем переменным, то она непрерывна в $\mathbb{R}^n$.
- ☑ Если функция дифференцируема в некотором точке, то в этой точке у функции существуют частные производные по всем переменным.
- ⧅ Если у функции в некоторой точке существуют частные производные по всем переменным, то она дифференцируема в этой точке.
- ☒ Если функция дифференцируема в некотором точке, то в этой точке у функции существуют *непрерывные* частные производные по всем переменным.
- ☑ Если у функции в некоторой точке существуют *непрерывные* частные производные по всем переменным, то она дифференцируема в этой точке.

Решение.

Если функция в некоторой точке имеет частные производные по всем переменным, то она непрерывна в этой точке?

В случае функции одной переменной — это правда, потому что частная производная для неё — это такая производная, которая строится по оценке "общего" изменения функции в окрестности точки. Непрерывность — тоже про про поведение функции вблизи точки "в целом".

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Но для функций в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ утверждение вообще перестаёт работать. Потому что теперь частные производные — характеризующие изменения функции только вдоль соответствующих осей — не говорят о поведении функции в окрестности точки "в целом" (если про функцию ничего дополнительно не требовать).

Для большей конкретики рассмотрим пример функции в пространстве $\mathbb{R}^2$:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x = y = 0 \end{cases} \tag{6}$$

Очевидно, у этой функции "интересная" точка — это $(0, 0) \equiv (x_0, y_0)$ (в остальных точках точно всё "хорошо"). Поэтому проверим для неё: наличие частных производных и непрерывность.

Частные производные (считаем по определению):

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0 - 0}{\Delta x} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) &= /\text{аналогично}/ &= 0 \end{aligned}$$

Но непрерывна ли данная функция в нуле?

$$\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) \stackrel{?}{=} f(x_0, y_0)$$

Если предел в нуле существует, то можно попробовать его посчитать по некоторым "удобным" множествам...

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y = x}} \dfrac{x^2}{2x^2} = \dfrac{1}{2} \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y = -x}} \dfrac{-x^2}{2x^2} = -\dfrac{1}{2} \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y = 0}} \dfrac{0}{x^2} = 0 \\ \ldots \end{cases}$$

Уже по двум прямым $y = \pm x$ предел в точке $(0, 0)$ получился разным. Значит, "просто" предела в точке у функции нет. (Если бы он был, он был бы таким же по любому множеству, "касающемуся" точки.)

Если функция в каждой точке пространства $\mathbb{R}^n$ имеет частные производные по всем переменным, то она непрерывна в $\mathbb{R}^n$?

В случае функции на $\mathbb{R}$ утверждение снова верное.

С функцией на $\mathbb{R}^n$, вообще говоря, можно бы было и задуматься (не является ли требование наличия частных производных *во всех* точках настолько сильным: ведь если в данной точке есть частные производные и во всех точках сколь угодно близко к ней — тоже, то нельзя ли отсюда сделать положительный вывод о непрерывности?..)

Однако пример из прошлого пункта (6) показывает, что в $\mathbb{R}^n$ сказанное в общем случае тоже не верно.

Если функция дифференцируема в некотором точке, то в этой точке у функции существуют частные производные по всем переменным?

Очевидно, пункт снова верен для функций на $\mathbb{R}$: дифференцируемость для них равносильна существованию производной:

$$f(x) = f(x_0) + A\Delta x + o(\Delta x),\ \Delta x \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists \frac{df}{dx}(x_0) = A$$

Потому что:

$$\begin{aligned}
A = f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{\Delta x} \in \mathbb{R} \\
\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{\Delta x} - A = 0 \\
\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - A\Delta x}{\Delta x} = 0 \Leftrightarrow f(x) - f(x_0) - A\Delta x = o(\Delta x),\ \Delta x \to 0
\end{aligned}$$

Оказывается, что утверждение остаётся верным и для функций на $\mathbb{R}^n$! Попытаться объяснить это "на пальцах" можно следующим образом. Дифференцируемость — это комплексное понятие, описывающее возможность линейного приближения функции в окрестности точки; дифференцируемость — про то, что можно "предсказать" значение $f(\boldsymbol{x})$ по значению $f(\boldsymbol{x}_0)$ и разницам (покоординатным) между $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{x}_0$. Таким образом, в определении дифференцируемости уже как бы лежит возможность оценки общего изменения функции по её "отдельным" изменениям вдоль каждой из осей.

Покажем на примере функции на $\mathbb{R}^2$, что существование частных производных следует из дифференцируемости так же, как и в $\mathbb{R}$. Функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0), если:

$$\Delta f(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho),\ \rho \to 0, \quad \rho \equiv \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

Но тогда, например, при $y \equiv y_0 = \mathrm{const}$ будет:

$$\Delta_x f(x_0, y_0) = A\Delta x + 0 + o(\Delta x),\ \Delta x \to 0$$

где в качестве $\Delta_x f$ обозначено приращение функции при условии, что все переменные (в данном случае всего одна), кроме x, считаются константными и равными соответствующим "нулевым" значениям. Отсюда и из рассмотренного ранее случая $\mathbb{R}$ сразу видно, что:

$$A = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x}(x_0, y_0) = \frac{d_x f}{dx}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

где как $d_x f$ обозначен дифференциал функции по переменной x.

Аналогично с частной производной по y в точке.

Если у функции в некоторой точке существуют частные производные по всем переменным, то она дифференцируема в этой точке?

В случае $\mathbb{R}$ дифференцируемость равносильна наличию конечной производной, поэтому данное утверждение в $\mathbb{R}$ также выполняется.

Но покажем на примере, что в $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ из существования всех частных производных (скоростей изменения функции вдоль осей) дифференцируемость (“предсказуемость” изменения функции в окрестности) вообще не следует.

Вспомним (6) такую функцию на плоскости (4):

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$$

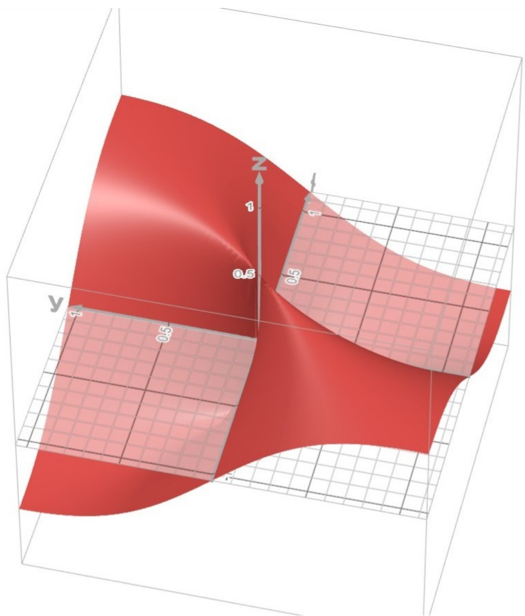

Рис. 4: График функции (6), у которой есть частные производные в нуле, но которая не дифференцируема в нуле. (Похож на лист бумаги, согнутый так, что ровно по осям он на нуле, а в других местах (особенно по “диагоналям”) изогнут сильно — то есть глядя только на оси нельзя ничего сказать об изменении в районе нуля в целом. Отметим также, что если “повернуть” график, рассмотрев таким образом, например, функцию $f(x, y) = \frac{(x-y)(x+y)}{(x-y)^2+(x+y)^2}$, то у неё в нуле не будет даже частных производных.)

В сюжете про непрерывность (её отсутствие) у этой функции в нуле уже показали, что частные производные в нуле существуют и равны нулю. Проверим теперь дифференцируемость (её отсутствие) в нуле.

Если функция дифференцируема в нуле $(0, 0) \equiv (x_0, y_0)$, то можно записать:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y + o(\rho),\ \rho \to 0, \quad \rho \equiv \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

Подставляя значение функции и частных производных в нуле, получаем:

$$\frac{xy}{x^2 + y^2} = 0 + 0 + 0 + o(\rho) = o(\rho),\ \rho \to 0$$

Верно ли это равенство? Иными словами, надо проверить, верно ли, что:

$$\lim_{\rho \to 0} \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} \Big/ \rho \right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = 0$$

(Сверху стоит что-то квадратичное относительно x и y, степень же снизу $2 \cdot 3/2 = 3$, поэтому сомнительно, чтобы в пределе получился ноль, ведь в пределе одной переменной x^2/x^3 при $x \to 0$ нуля не будет.)

Рассмотрим этот предел по множеству $y = x$:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2^{3/2}x^3} = \infty \neq 0$$

Значит, “просто” предел, без указания конкретного множества сходимости — это точно не ноль.

Если функция дифференцируема в некоторой точке, то в этой точке у функции существуют непрерывные *частные производные по всем переменным?*

(Сразу не очень понятно, почему частные производные вдруг должны ещё оказаться непрерывными, то есть утверждение заранее вызывает сомнения...)

Рассмотрим пример функции на $\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x = y = 0 \end{cases} \tag{7}$$

Проверим, что функция дифференцируема (в нуле — из формулы (7) видно, что интерес будет представлять эта точка), но что хотя бы одна частная производная (а раз одна, то и другая, потому что формула (7) симметрична относительно переменных x и y) не будет непрерывной в нуле.

Частные производные:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(0+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta x^2 \sin\left(\frac{1}{|\Delta x|}\right)}{\Delta x} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \text{/аналогично/} &= 0 \end{aligned}$$

Дифференцируемость (проверяем отдельно):

$$f(x,y) \overset{?}{=} f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y + o(\rho),\ \rho \to 0, \quad \rho \equiv \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$$

$$f(x,y) = 0 + 0 + 0 + o(\rho),\ \rho \to 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\rho} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = 0$$

так как $(x,y) \to (0,0) \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} \to 0$.

И наконец — проверим непрерывность частной производной (например, по y) в нуле:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \overset{?}{=} \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

Находим частную производную по y в точке просто по формуле функции (7) (ведь $(x,y) \neq (0,0)$) и подставляем под предел:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left\{ 2y \cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \right\} = 0 + \text{☺}$$

первое слагаемое под пределом стремится к нулю, второе же ни к чему не стремится, потому что имеет вид $\cos\phi(x,y)\cdot\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ — то есть ограничено, но при $(x,y)\to(0,0)$ может "скакать" туда-сюда (чтобы было не так "рокомахательно", можно, к примеру, рассмотреть предел от второго слагаемого по прямой $y = x$ – или даже лучше по прямой $x = 0$).

Таким образом, частные производные не являются непрерывными в нуле.

На самом деле... можно бы было придумать пример и для случая $\mathbb{R}$)

Возьмём "аналог" рассмотренной только что функции, только теперь на прямой:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Читателю предлагается в качестве упражнения проверить, что она дифференцируема в нуле, но что её производная в нуле непрерывной не является.

Если у функции в некоторой точке существуют непрерывные *частные производные по всем переменным, то она дифференцируема в этой точке?*

На прямой $\mathbb{R}$ утверждение верно и без требования непрерывности частных производных.

Оказывается же, что непрерывность частных производных обеспечивает дифференцируемость и в случае $\mathbb{R}^n$!

Не будем приводить здесь доказательства этого утверждения. Но предложим некоторую "интуицию", помогающую (возможно) принять этот факт.

Как уже отмечалось, дифференцируемость — про изменение функции в окрестности точки "в целом". Частные производные же смотрят на изменения только по осям. А область между осями остаётся как бы "белым пятном". Но *непрерывность* ("предсказуемость") частных производных приводит к тому, что по ним можно сделать вывод и об изменении функции "в целом", и на осях, и в районе между осями — во всей окрестности.

□

1.2.5. С3, §3, №15(7)

Дана функция:

$$f(x, y) = \operatorname{arctg}\frac{y}{1 + x^2}$$

Найти её дифференциал в точке $(1, -1)$.

Решение. (Видно, что функция "хорошая", поэтому она дифференцируема, во всех точках $\mathbb{R}^2$.)[5]

Можно искать дифференциал "по действиям" по формуле (4): найти значение функции в точке, частные производные в точке, подставить в формулу.

А можно — считать "каскадно", раскручивать дифференциал по цепочке, пользуясь

[5] Понятно, что частные производные по каждой из переменных будут непрерывными во всех точках $\mathbb{R}^2$, отсюда и следует дифференцируемость (1.2.4).

правилом взятия производной сложной функции.[6] Пойдём этим путём.

$$\begin{aligned}
d f(x, y) &= d \operatorname{arctg} \frac{y}{1+x^2} \\
&= \operatorname{arctg}' t\big|_{t=y/(1+x^2)} \, d\left(\frac{y}{1+x^2}\right) \\
&= \frac{1}{1+\left(\frac{y}{1+x^2}\right)^2} \cdot \frac{dy \cdot (1+x^2) - y \cdot d(1+x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{(1+x^2)\,dy - 2xy\,dx}{(1+x^2)^2 + y^2}
\end{aligned}$$

(При желании можно проверить, что то, что получилось перед dx и dy — это частные производные функции по соответствующим переменным.)

И значение дифференциала в точке:

$$d f(1, -1) = \frac{2\,dy + 2\,dx}{5} = \frac{2}{5}\,dx + \frac{2}{5}\,dy = \frac{2}{5}(x-1) + \frac{2}{5}(y+1)$$

(Коэффициенты перед dx и dy — это значения частных производных в указанной точке.) □

1.2.6. С3, §3, №19(2)

Доказать, что функция f дифференцируема в точке $(0, 0)$, если:

$$f(x, y) = |y| \sin x$$

Решение. Функция дифференцируема в точке (x_0, y_0) — значит, должна быть верна формула (3), при этом в качестве коэффициентов перед дифференциалами переменных обязательно будут выступать значения частных производных по этим переменным в точке. Поэтому план доказательства такой: найти частные производные в точке, составить формулу (4) и проверить, что она верна.

Чтобы найти частную производную по x, достаточно просто продифференцировать по x формулу, задающую функцию:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = |y| \cos x \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$$

Чтобы найти частную производную по y... Продифференцировать формулу?... Так как там стоит модуль $|y|$, найти производную в нуле путём дифференцирования формулы не получится.[7] Поэтому попробуем найти её по определению:[8]

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, 0 + \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = 0$$

[6]Точнее, тут будет использоваться правило взятия частной производной сложной функции: если $F(x, y) = f\big(g(x, y)\big)$, то

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{\partial g}{\partial x}$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{\partial g}{\partial y}$$

И тогда для дифференциала получаем:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}\,dy = \frac{df}{dg}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\,dx + \frac{\partial g}{\partial y}\,dy\right) = f'\,dg \tag{8}$$

[7]Могло бы даже показаться, что функция вообще не дифференцируема по y в нуле)

[8]Так как это функция двух переменных, то есть надежда, что производная по y всё-таки существует в нуле (если не за счёт y, которая под модулем, то, может, хотя бы за счёт x).

Значение частной производной по y в нуле тоже найдено.

Теперь проверим дифференцируемость (4):

$$f(x,y) \overset{?}{=} f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y + o(\rho),\ \rho \to 0, \qquad \rho \equiv \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

$$|y|\sin x = o(\rho),\ \rho \to 0$$

Заметим, что $\lim_{\rho\to 0} f(x,y) = 0$, однако необходимо проверить более сильное свойство:[9]

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|y|\sin x}{\sqrt{x^2+y^2}} \overset{?}{=} 0$$

Оценим функцию под пределом по модулю (раз хочется доказать *сходимость* к нулю, то надо бы оценить *сверху*):

$$\left|\frac{|y|\sin x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \frac{\big||y|\sin x\big|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{|y||x|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \spadesuit$$

(Сверху стоит что-то квадратичное по x, y, а снизу — степени $1/2 \cdot 2 = 1$...)

$$\spadesuit = \sqrt{\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}} = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x^2}}} \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$$

□

1.2.7. С3, §3, №39(1)

Найти производную функции f по направлению вектора $\boldsymbol{a} = \left(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right)$ в точке $(1,1)$, если:

$$f(x,y) = 3x^2 + 5y^2$$

Решение. Проверим длину вектора (единичная?):

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 1$$

(если бы оказалась не единичная, можно бы было отнормировать.)

Считаем производную вдоль вектора в точке (5):

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{a}}(x_0,y_0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+a_x t, y_0+a_y t) - f(x_0,y_0)}{t}\bigg|_{(x_0,y_0)=(1,1)} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\left(3\cdot(1-t/\sqrt{2})^2 + 5\cdot(1+t/\sqrt{2})^2\right) - (3+5)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\left(-3\sqrt{2}+5\sqrt{2}+\frac{3}{2}t+\frac{5}{2}t\right) = 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

□

[9] В качестве демонстрации того, что может быть стремление $f(x,y)$ к нулю, но без стремления к нулю отношения $f(x,y)/\rho$, можно посмотреть на функцию $f(x,y) = \sqrt{x}$: у неё $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt{x} = 0$, но $\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

1.3. Формула Тейлора

О формуле Тейлора можно думать как о способе приблизить в некотором смысле "хорошую" функцию с помощью многочлена в окрестности точки с любой желаемой точностью (функция должна быть дифференцируема в точке нужное число раз). Формула Тейлора — это продолжение формулы (4), где приращение функции оценивалось с помощью дифференциала.

Вспомним формулу Тейлора для случая функции в $\mathbb{R}$:

$$f(x) = f(x_0) + df(x_0) + \frac{1}{2}d^2 f(x_0) + \frac{1}{3!}d^3 f(x_0) + \ldots + \frac{1}{n!}d^n f(x_0) + o\big((x-x_0)^n\big),\ x \to x_0$$

Для функции в $\mathbb{R}^n$ формула Тейлора будет выглядеть точно так же! ("верхнеуровнево"):

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0) + df(\boldsymbol{x}_0) + \frac{1}{2}d^2 f(\boldsymbol{x}_0) + \frac{1}{3!}d^3 f(\boldsymbol{x}_0) + \ldots + \frac{1}{n!}d^n f(\boldsymbol{x}_0) + o\big(\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)^n\big),\ \rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0) \to 0$$

Вопрос только в том, как считать дифференциалы более высоких порядков.

Для простоты и наглядности рассмотрим функцию на $\mathbb{R}^2$ и её разложение по Тейлору до второго порядка:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + df(x_0,y_0) + \frac{1}{2}d^2 f(x_0,y_0) + o(\rho^2),\ \rho \to 0, \quad \rho \equiv \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \tag{9}$$

Дифференциалы высших порядков определяются рекурсивно. Так, второй дифференциал — дифференциал от первого:

$$d^2 f = d(df) = \spadesuit$$

Раз функция дифференцируема, её дифференциал первого порядка выражается через частные производные (4):

$$\spadesuit = d\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right) = \diamond$$

Можно расписать дифференциал суммы как сумму дифференциалов. При этом в $\mathbb{R}^n$ действует то же "правило", что и в $\mathbb{R}$, что дифференциалы независимых переменных порядка второго и выше равны нулю: $d^2x = 0$, $d^2y = 0$.

$$\diamond = d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx + d\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)dy = \blacktriangle$$

Частные производные — это тоже функции двух переменных, поэтому их первые дифференциалы считаются по тому же правилу (4):

$$\begin{aligned}
\blacktriangle &= \left(\frac{\partial f_x}{\partial x}dx + \frac{\partial f_x}{\partial y}dy\right)dx + \left(\frac{\partial f_y}{\partial x}dx + \frac{\partial f_y}{\partial y}dy\right)dy \\
&= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}dy\right)dx + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}dy\right)dy \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}dx^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)dx\,dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}dy^2
\end{aligned}$$

где $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \equiv f''_{xx}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \equiv f''_{yy}$ есть повторные частные производные, а $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \equiv f''_{xy}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \equiv f''_{yx}$ — смешанные частные производные.[10]

Смешанные частные производные вообще могут принимать разные значения в точке, но в случае достаточно “хороших” функций они будут совпадать.[11]

Итого, для второго дифференциала получаем выражение (общее, и “упрощённое”, верное для “хороших” функций):

$$\begin{aligned} d^2 f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\, dx^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) dx\, dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\, dy^2 \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\, dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\, dx\, dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\, dy^2 \end{aligned} \tag{10}$$

1.3.1. С3, §4, №2(1)

Вычислить частные производные второго порядка функции f в точке $(x_0, y_0) \equiv (1, 0)$, если:

$$f(x, y) = \frac{x}{x+y}$$

Решение. Частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{x}{x+y}\right)'_x = \frac{y}{(x+y)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \left(\frac{x}{x+y}\right)'_y = -\frac{x}{(x+y)^2}$$

Частные производные второго порядка — повторные:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \left(\frac{y}{(x+y)^2}\right)'_x = -\frac{2y}{(x+y)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \left(-\frac{x}{(x+y)^2}\right)'_y = \frac{2x}{(x+y)^3}$$

и смешанные:[12]

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \left(\frac{y}{(x+y)^2}\right)'_y = \frac{1}{(x+y)^2} - \frac{2y}{(x+y)^3} = \frac{x-y}{(x+y)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \left(-\frac{x}{(x+y)^2}\right)'_x = -\frac{1}{(x+y)} + \frac{2x}{(x+y)^3} = \frac{x-y}{(x+y)^3}$$

[10] “Общепринятый” порядок “дельт” в знаменателе смешанной производной — справа-налево, потому что более развёрнуто часто пишут так:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

Индексы же в другом обозначении производной располагаются более “естественно”: слева-направо:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{xy}$$

[11] Если смешанные частные производные, отличающиеся порядком дифференцирования, непрерывны в точке, то они совпадают в этой точке (см. С3, §4).

[12] Должны получиться равными, потому что, очевидно, они будут непрерывными во всех точках множества определения функции.

И значения производных в точке $(1,0)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0) = 0$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,0) = 2$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,0) = 1$$

□

1.3.2. С3, §4, №15(2)

Найти второй дифференциал функции f в точке $(1,1)$:

$$f(x,y) = e^{x^2/y}$$

Решение. Посчитаем второй дифференциал по формуле (10):

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\, dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 f}{d y^2}$$

(в формуле уже учтено, что смешанные производные функции равны, потому что, очевидно, будут непрерывны). Теперь задача свелась к поиску вторых частных производных.

А чтобы их найти, надо начать с частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x^2/y} \cdot \frac{2x}{y}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{x^2/y} \cdot \left(-\frac{x^2}{y^2}\right)$$

И теперь второго:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \left(\frac{2x}{y} \cdot e^{x^2/y}\right)'_x &&= \frac{2}{y} \cdot e^{x^2/y} + \left(\frac{2x}{y}\right)^2 \cdot e^{x^2/y} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \left(-\frac{x^2}{y^2} \cdot e^{x^2/y}\right)'_y &&= \frac{2x^2}{y^3} \cdot e^{x^2/y} + \left(-\frac{x^2}{y^2}\right)^2 \cdot e^{x^2/y} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \left(\frac{2x}{y} \cdot e^{x^2/y}\right)'_y &&= -\frac{2x}{y^2} \cdot e^{x^2/y} + \frac{2x}{y} \cdot \left(-\frac{x^2}{y^2}\right) \cdot e^{x^2/y}
\end{aligned}$$

Значения производных второго порядка в точке $(1,1)$:

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(1,1)} &= 2e + 4e &&= 6e \\
\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(1,1)} &= 2e + e &&= 3e \\
\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right|_{(1,1)} &= -2e - 2e &&= -4e
\end{aligned}$$

Тогда второй дифференциал функции в точке $(1,1)$:

$$d f(1,1) = 6e\, dx^2 + 2 \cdot (-4e)\, dx\, dy + 3e\, dy^2 = 6e(x-1)^2 - 8e(x-1)(y-1) + 3e(y-1)^2$$

□

1.3.3. С3, §4, №71(2)

Разложить функцию $f(x, y)$ по формуле Тейлора в окрестности точки $(x_0, y_0) = (0, 0)$ до $o(\rho^2)$, где $\rho \equiv \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$:

$$f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{1 + x}{1 + y}$$

Решение. Разложение по формуле Тейлора (9):

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0) + \frac{1}{2} d^2 f(x_0, y_0) + o(\rho^2), \ \rho \to 0$$

Таким образом, чтобы его получить, надо знать значение функции в точке, и значения дифференциалов: первого и второго.

Функция в точке:

$$f(x_0, y_0) = f(0, 0) = \operatorname{arctg} \frac{1 + x}{1 + y}\bigg|_{(x,y)=(0,0)} = \frac{\pi}{4}$$

А при поиске дифференциалов, в отличие от номера (1.3.2), где искали “составные части” дифференциала по отдельности, пойдём “цепочечным” путём: будем искать дифференциалы сразу целиком, просто дифференцируя формулу, которая задаёт функцию, пользуясь правилом дифференцирования сложной функции (8).

Так, первый дифференциал (аналогично (1.2.5)):

$$df = d \operatorname{arctg} \frac{1 + x}{1 + y} = \operatorname{arctg}' t|_{t=\frac{1+x}{1+y}} \cdot d\left(\frac{1 + x}{1 + y}\right) = \ldots = \frac{(1 + y)\,dx - (1 + x)\,dy}{(1 + x)^2 + (1 + y)^2}$$

Дифференциал в точке:

$$df(x_0, y_0) = df(0, 0) = \frac{dx - dy}{2}$$

Второй дифференциал:

$$\begin{aligned} d^2 f = d(df) &= d\left(\frac{(1 + y)\,dx - (1 + x)\,dy}{(1 + x)^2 + (1 + y)^2}\right) \\ &= \frac{0 - \big((1 + y)\,dx - (1 + x)\,dy\big) \cdot \big(2(1 + x)\,dx + 2(1 + y)\,dy\big)}{\big((1 + x)^2 + (1 + y)^2\big)^2} \end{aligned}$$

Не будем его до конца “причёсывать”, а просто сразу подставим координаты точки:

$$d^2 f(x_0, y_0) = d^2 f(0, 0) = -\frac{(dx - dy)(2\,dx + 2\,dy)}{4} = -\frac{1}{2}(dx^2 - dy^2)$$

В итоге разложение по Тейлору в окрестности точки (x_0, y_0):

$$f(x, y) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\,dx - \frac{1}{2}\,dy - \frac{1}{4}\,dx^2 + \frac{1}{4}\,dy^2 + o(\rho^2), \ \rho \to 0$$

при этом $dx = (x - 0) = x$ и $dy = (y - 0) = y$. □

1.3.4. С3, §4, №74(4)

Разложить f по формуле Маклорена до $o(\rho^4)$, где $\rho \equiv \sqrt{x^2+y^2}$:

$$f(x,y) = \frac{\sin x}{\cos y}$$

Решение. Видно, что в формуле функции переменные x и y сидят как бы “отдельно”. Точнее, функция двух переменных имеет вид $f(x,y) = \frac{f_1(x)}{f_2(y)}$. В этом случае для поиска разложения по Тейлору можно поступить так.

Раз разложение ищется при $\rho \to 0$ — это равносильно $x \to 0$ и $y \to 0$ одновременно. Таким образом, можно разложить по формуле Тейлора “однопеременные составляющие” $f(x,y)$. Каждое из таких разложений будет содержать дифференциал соответствующей переменной: dx или dy. “Причёсывая” далее формулу и оставляя только члены с суммарной степенью dx и dy не выше четвёртой, получим разложение по Тейлору $f(x,y)$ до $o(\rho^4)$.

Итак:

$$f(x,y) = \frac{\sin x}{\cos y} = \frac{x - \frac{x^3}{6}}{1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4!}} = \left(x - \frac{x^3}{6}\right) \cdot \left(1 + \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4!}\right) + \frac{y^4}{4}\right) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{xy^2}{2}$$

□