Определение 0.1. Пусть есть функция $f: X \to Y$.

Обратной к ней называется функция $g: Y \to X$, такая что

$$\begin{cases} f\big(g(y)\big) = y, & \forall y \in Y \\ g\big(f(x)\big) = x, & \forall x \in X \end{cases}$$

Обозначается обратная к f функция[1] как f^{-1}.[2]

Утверждение 0.1 (Существование обратной функции)**.** *Если функция f определена, строго монотонна и непрерывна на отрезке, то обратная функция также определена, строго монотонна и непрерывна на отрезке (другом).*

Доказательство. Пусть функция f определена на отрезке $X \equiv [a, b]$. Пусть для определённости функция f монотонно возрастает, то есть $x_1 < x_2 \to f(x_1) < f(x_2)$.

Тогда, очевидно, $m \equiv f(a)$ есть минимум $f\big([a, b]\big)$ (минимум множества значений функции f на отрезке $[a, b]$), а $M \equiv f(b)$ есть максимум f на $[a, b]$. По теореме о промежуточных значениях непрерывной на отрезке функции, образ отрезка $[a, b]$ под действием f есть отрезок $Y \equiv [m, M]$.

Покажем, что непрерывная для f функция существует. Пусть $y \in Y$. Тогда найдётся $x \in X$, такой что $f(x) = y$. Но будет ли этот x *единственным*? (Можно ли построить *правило* перевода из Y в X?) Да, потому что f строго монотонна: если $x' \neq x$, то либо $f(x') < f(x)$ (при $x' < x$), либо $f(x') > f(x)$ (при $x' > x$), но в любом случае $f(x') \neq f(x)$. То есть не существует $x' \neq x$, такого чтоб было $f(x') = f(x)$. Итого, правило однозначного перевода из Y в X существует, то есть существует обратная функция f^{-1}.

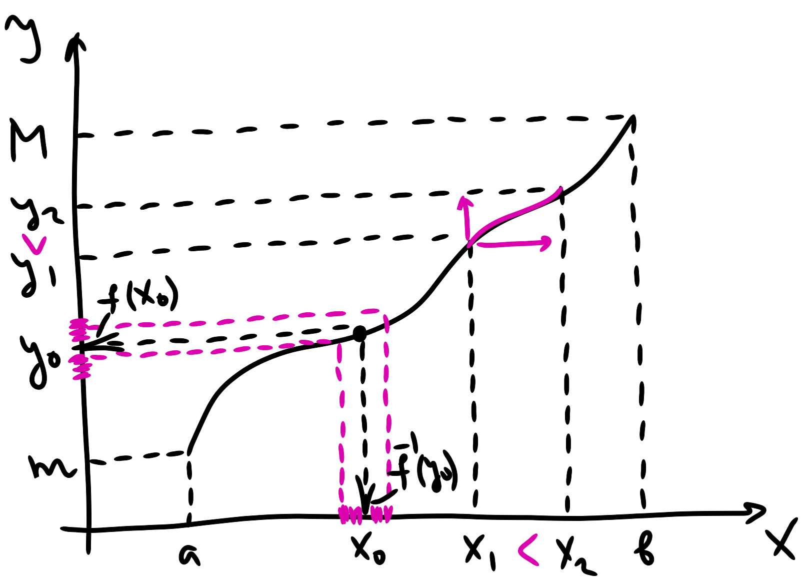

Рис. 1: Строго монотонная непрерывная на отрезке функция f (и обратная для неё f^{-1}, если смотреть на график под другим углом).

Покажем, что обратная функция f^{-1} строго монотонна (1). (При этом из графика видно, что она должна строго монотонно возрастать.) Надо показать, что $y_1 < y_2 \to f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$. Но тогда можно просто воспользоваться монотонностью f: если $y_1 = f(x_1)$ и

[1] Которая если есть, то единственная.

[2] Это не "f в степени минус один" — это одно неделимое обозначение.

$y_2 = f(x_2)$, то из неравенства для образов $y_1 < y_2$ сразу получаем аналогичное неравенство для прообразов $x_1 < x_2$. Потому что строгая монотонность f может по сути выражаться таким условием *в две стороны*:

$$x_1 < x_2 \quad \Leftrightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$$

(определение монотонной — это только "$\Rightarrow$", но "$\Leftarrow$" в таком случае также будет верна.)

Итак, осталось показать только непрерывность f^{-1} (1). Что есть непрерывность? "Близость там — близость тут". Но так как f^{-1} есть по сути "взгляд с другой стороны" на отношение между X и Y, налагаемое f, то и "взаимная близость" (непрерывность) должна сохраниться. То есть план такой, чтоб показать непрерывность f^{-1}, сведя всё к уже известной f (в принципе, как и в прошлом рассуждении про монотонность).

Итак, f непрерывна, значит, для любой последовательности $\{x_n\}: \ \lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ получим также $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ (где x_0 — любая фиксированная точка X). Аналогично, обратная f^{-1} будет непрерывной, если для любой последовательности $\{y_n\}: \ \lim_{n\to\infty} y_n = y_0$ получим также $\lim_{n\to\infty} \underbrace{f^{-1}(y_n)}_{x_n} = f^{-1}(y_0) \equiv x_0$ (где y_0 — любая фиксированная точка Y).

Это надо доказать. Как вариант, допустим, что это не так, то есть что верно противное:

$$\exists \{y_n\}: \ \lim_{n\to\infty} y_n = y_0, \ \neg\left(\lim_{n\to\infty} f^{-1}(y_n) = f^{-1}(y_0)\right)$$

Факт того, что предел $\left\{f^{-1}(y_n)\right\}$ не есть $f^{-1}(y_0)$, перепишем в терминах окрестностей:

$$\exists \{y_n\}: \ \lim_{n\to\infty} y_n = y_0, \ \exists \varepsilon > 0: \ \forall N \ \exists n \geq N: \ \left|f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y_0)\right| \geq \varepsilon$$

Иными словами, бесконечно много элементов $f^{-1}(y_n)$ последовательности $\left\{f^{-1}(y_n)\right\}$ лежат от $f^{-1}(y_0)$ на расстоянии ε и больше. Выделим их в отдельную подпоследовательность $\left\{f^{-1}\left(y_{n_k}\right)\right\} = \left\{x_{n_k}\right\}$ (все элементы этой подпоследовательности находятся вне "ε-трубки" от $f^{-1}(y_0) = x_0$). Эта подпоследовательность лежит на отрезке $X = [a, b]$, то есть ограничена, поэтому... из неё можно выделить сходящуюся подпоследовательность! (по теореме Больцано – Вейерштрасса) Обозначим её как $\left\{f^{-1}\left(y_{n_{k_l}}\right)\right\} = \left\{x_{n_{k_l}}\right\}$.[3] Она сходится к чему-то из того же отрезка X,[4] при этом, очевидно, её предел отличен от x_0, и пусть равен x_0'. Но на этом уже "всё", потому что тогда в силу непрерывности и строгой монотонности f получаем:

$$x_{n_{k_l}} \xrightarrow{l\to\infty} x_0' \neq x_0 \quad \Rightarrow \quad f\left(x_{n_{k_l}}\right) \xrightarrow{l\to\infty} f(x_0') \neq f(x_0)$$

Но ведь начали с того, что

$$y_n \xrightarrow{n\to\infty} y_0 \quad \Leftrightarrow \quad f\left(x_n\right) \xrightarrow{n\to\infty} f(x_0) \quad \Rightarrow \quad f\left(x_{n_{k_l}}\right) \xrightarrow{l\to\infty} f(x_0)$$

Противоречие. Значит, предположение было неверно и обратная функция f^{-1} также непрерывна. $\square$

[3] Уже поздно останавливаться с усложнением обозначений. На самом деле у автора появился даже интерес всё корректно до конца описать, и посмотреть, насколько громоздкое обозначение в итоге получится)

[4] Почему не может сходиться к чему-то вне отрезка?