Семинар 3

Алексеев Василий

21 февраля 2025

Содержание

К формулировкам и доказательствам (если такие вообще приводятся) стоит относиться критически. Основное в этом конспекте — решение задач (но "критичность" и здесь лучше не отключать). За строгой, ясной и последовательной теорией лучше обращаться к "нормальным" источникам. (Например, к лекциям.)

1. Эрэн

> В домах флатландцев нет окон.
> Свет проникает в наши дома и выходит из них днём и ночью, одинаково в любое время суток и в любом месте.
> Откуда он берётся, неизвестно.
> С давних времён наших учёных весьма занимал вопрос о происхождении света.
> Но неоднократные попытки найти ответ на него, к сожалению, приводили лишь к одному плачевному результату: увеличивали число пациентов в приютах для умалишённых.
>
> *(“Флатландия”, Эдвин Э. Эбботт)*

1.1. Множества

Элементы $\mathbb{R}^n$ — это n-мерные числовые *векторы*:

$$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n),\ x_i \in \mathbb{R}$$

при этом составляющие вектора называются его компонентами, или координатами.[1] Сам вектор также будем называть *точкой*.

На множестве векторов $\mathbb{R}^n$ можно “естественным” — покомпонентным — образом ввести операции сложения и умножения вектора на число (начиная отсюда и далее будем для простоты и большей наглядности использовать размерность $n = 2$, хотя всё остаётся верным и для произвольного $n \in \mathbb{N}$):

$$\begin{aligned} &(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ &\alpha \cdot (x, y) = (\alpha \cdot x, \alpha \cdot y), \quad \alpha \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Можно проверить, что таким образом введённые операции удовлетворяют ряду “привычных” аксиом,[2] поэтому множество векторов вместе с этими операциями $\langle \mathbb{R}^n, +, \cdot \rangle$ образуют *линейное пространство*.

---

[1] В базисе $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, ..., $\boldsymbol{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)$.

[2] Эти аксиомы (четыре чисто про сложение + четыре про сложение и умножение):

1. $\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z}$ (ассоциативность)
2. $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$ (коммутативность)
3. $\exists \boldsymbol{0} :\ \boldsymbol{x} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{x},\ \forall \boldsymbol{x}$
4. $\forall \boldsymbol{x}\ \exists (-\boldsymbol{x}) :\ \boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$
5. $\alpha(\beta \boldsymbol{x}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{x}$
6. $1 \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ (1 — просто единица, число из $\mathbb{R}$)
7. $\alpha(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \alpha\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{y}$ (дистрибутивность умножения вектора на число относительно сложения векторов)
8. $(\alpha + \beta)\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{x}$ (дистрибутивность умножения вектора на число относительно сложения чисел)

Кроме того, чтоб выполнять операции с векторами, можно бы было их каким-то образом *сравнивать* между собой по *близости* — оценивая *расстояние* ρ между ними. В качестве расстояние можно взять, например, евклидово:

$$\rho\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Можно проверить, что таким образом введённое расстояние удовлетворяет ряду "привычных" аксиом,[3] поэтому множество векторов вместе с такой функцией расстояния $\langle \mathbb{R}^n, \rho \rangle$ образуют *метрическое пространство*.[4]

Далее будем работать в метрическом пространстве $\langle \mathbb{R}^n, \rho \rangle$.

Имея возможность оценивать расстояние между векторами, можно ввести понятие *окрестности* вектора:

$$U_r(\boldsymbol{a}) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) < r\}$$

так можно обозначить окрестность вектора $\boldsymbol{a}$ радиуса $r > 0$ (1). Таким образом, это множество векторов, удалённых от данного на расстояние меньше r — то есть по сути *шар* (без границы). "Соседство" вектора.

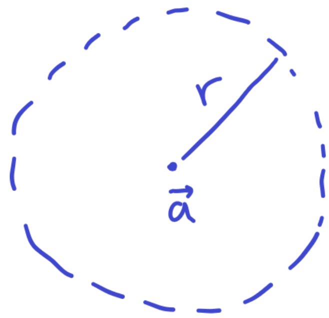


Рис. 1: Окрестность $U_r(\boldsymbol{a})$ — множество точек, удалённых от $\boldsymbol{a}$ на расстояние ближе r.

Анализируя окрестности точек некоторого множества $X \subseteq \mathbb{R}^n$, можно выделить следующие "категории" точек (2).

Определение 1.1. *Внутренней точкой* множества $X \subseteq \mathbb{R}^n$ называется такая точка $\boldsymbol{x}$, принадлежащая X, что вокруг неё можно найти окрестность, целиком лежащую в X:

$$\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(\boldsymbol{x}) \subseteq X \quad \Leftrightarrow \quad U_\varepsilon(\boldsymbol{x}) \cap X = U_\varepsilon(\boldsymbol{x})$$

---

[3] Эти аксиомы:

1. $\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geq 0$, $\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$
2. $\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \rho(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ (симметричность)
3. $\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \leq \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \rho(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ (неравенство треугольника)

[4] Это не единственный возможный способ ввести расстояние в $\mathbb{R}^n$. Например, можно бы было использовать манхэттенское расстояние:

$$\rho_m\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

(Более того, манхэттенское расстояние в некотором смысле *эквивалентно* евклидовому. Подробнее можно см. "Добавление к лекциям по математическому анализу" за 1 семестр Балашова М. В., раздел «Эквивалентность норм в $\mathbb{R}^n$» (норма — это как длина вектора), а также небольшое обсуждение на Math Stack Exchange про то, что норма и расстояние, хоть и связаны, но не всегда. (Поэтому из эквивалентности норм в $\mathbb{R}^n$ не следует вообще эквивалентность всех расстояний.))

Или дискретное:

$$\rho_d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \begin{cases} 1, & \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y} \\ 0, & \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \end{cases}$$

Или ещё какое-нибудь.

Определение 1.2. *Изолированной точкой* множества $X \subseteq \mathbb{R}^n$ называется такая точка $\boldsymbol{x}$, принадлежащая X, что вокруг неё можно найти окрестность, не содержащую ни одной точки X (кроме самой $\boldsymbol{x}$):

$$\exists \varepsilon > 0 : \; U_\varepsilon(\boldsymbol{x}) \cap X = \boldsymbol{x}$$

Определение 1.3. *Граничной точкой* множества $X \subseteq \mathbb{R}^n$ называется такая точка $\boldsymbol{x}$, возможно, принадлежащая X, возможно, нет, что любая её окрестность содержит как точки X, так и точки, не принадлежащие X:[5]

$$\forall \varepsilon > 0 \to \begin{cases} U_\varepsilon(\boldsymbol{x}) \cap X \neq \varnothing \\ U_\varepsilon(\boldsymbol{x}) \not\subseteq X \end{cases}$$

Очевидно, изолированные точки множества X будут также и граничными для него.[6,7]

Определение 1.4. *Точкой прикосновения* множества $X \subseteq \mathbb{R}^n$ называется такая точка $\boldsymbol{x}$, возможно, принадлежащая X, возможно, нет, что любая её окрестность содержит точки X:

$$\forall \varepsilon > 0 \to U_\varepsilon(\boldsymbol{x}) \cap X \neq \varnothing$$

Очевидно, внутренние точки, изолированные, граничные — являются точками прикосновения. (Есть ли ещё варианты "прикосновения", кроме этих?)

Помимо выделения таких интересных классов точек, возможность оценивать расстояние даёт возможность ввести в $\mathbb{R}^n$ понятие *предела последовательности*.

Пределом последовательности n-мерных векторов $\{\boldsymbol{x}^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ называется вектор $\boldsymbol{a}$, такой что:[8]

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \, \exists M > 0 : \; \forall m \geq M \to \rho(\boldsymbol{x}^{(m)}, \boldsymbol{a}) < \varepsilon \\ \Leftrightarrow \boldsymbol{x}^{(m)} \in U_\varepsilon(\boldsymbol{a}) \end{aligned} \tag{1}$$

Можно заметить, что такое определение предела работает также и для рассмотренного ранее в курсе "более простого" случая точек на прямой $\mathbb{R}$ — просто тогда расстояние будет считаться как модуль разности между числами: $\rho(x, a) = |x - a|$.[9]

[5] Иными словами, содержит как точки X, так и точки его *дополнения*: $\overline{X} \equiv \mathbb{R}^n \setminus X$.

[6] На самом деле не всегда: такая логика работает только в том случае, когда в качестве "всего пространства" рассматривается $\mathbb{R}^n$. Но метрическое пространство — это не обязательно всё $\mathbb{R}^n$. (Метрическое пространство — это просто какое-то множество векторов + функция расстояния между ними.) И если смотреть на множество точек X — как на множество в каком-то метрическом пространстве, отличном от $\mathbb{R}^n$, то тогда могут возникать некоторые дополнительные "интересности".

В том числе, изолированная точка множества — не обязательно будет граничной.

Пример: прямая R, на ней можно в качестве метрического пространства взять $M = [0, 1] \cup \{2\}$ (с обычным расстоянием). Если в таком пространстве теперь рассмотреть множество из одной точки $X = \{2\}$, то эта точка будет изолированной для X в M, но не граничной (достаточно близко вокруг 2 в пространстве M просто "пусто" — нет точек, не принадлежащих X).

(Получается, у такого X в M не будет ни внутренних, ни граничных точек?)

Ещё сколько-то примеров и в таком духе наблюдений можно найти в конспекте лекций по метрическим пространствам.

[7] Если проводить аналогию с машинным обучением, то изолированная точка множества — это как выброс, какое-то "экстремальное значение", нетипичный представитель. Внутренняя точка — это, наоборот, что-то типовое, обычное. Граничная — ...что-то "непонятное", "ненадёжное", может, тут, а может, тут.

Например, в семье тупоконечников, тупоконечник — это типичный представитель (внутренняя точка). Остроконечник — "изгой", не такой, как все (изолированная). А если человеку без разницы, с какого конца быть (бить), сегодня так, завтра, может, по-другому — то он "никакой" (граничная).

[8] Индекс элемента последовательности указан сверху, да ещё и в "каких-то непонятных" скобках только по "техническим причинам": для того, чтобы избежать путаницы с индексами координат вектора.

[9] Таким образом, точки на $\mathbb{R}$ и в $\mathbb{R}^n$ в некотором смысле поддерживают общий "предельный интерфейс": общее определение предела работает всегда, просто конкретная "реализация" участвующего в нём расстояния может быть разной.

Относительно сходимости последовательностей векторов в $\mathbb{R}^n$ также остаются верными некоторые утверждения, работающие для точек на $\mathbb{R}$. Но так как для решения задач они не понадобятся, то мы их упоминать не будем.[10]

Вооружившись понятиями сходимости и предела, можем продолжить "классификацию" точек множества $X \subseteq \mathbb{R}^n$.

Определение 1.5. *Предельной точкой* множества $X \subseteq \mathbb{R}^n$ называется такая точка $\boldsymbol{x}$, возможно, принадлежащая X, возможно, нет, что любая её *проколотая* окрестность содержит точки X:[11]

$$\forall \varepsilon > 0 \to \mathring{U}_\varepsilon(\boldsymbol{x}) \cap X \neq \varnothing$$

Очевидно, предельные точки — это почти как точки прикосновения (1.4), но с дополнительным ограничением — которое, очевидно, приводит к тому, что изолированные точки предельными не будут.

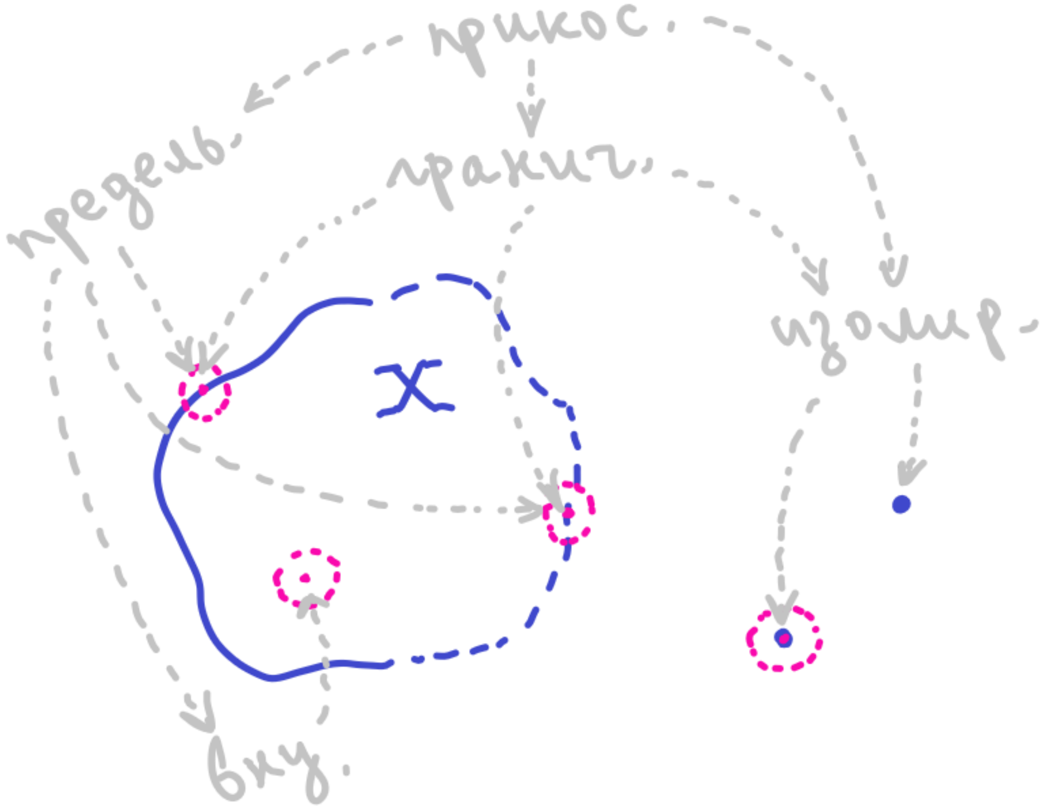


Рис. 2: "Классификация" точек множества $X \subseteq \mathbb{R}^n$ в зависимости от расположения относительно X.

Мы рассмотрели несколько типов точек в $\mathbb{R}^n$ ("микроопределения"). Введём ещё несколько типов множеств в $\mathbb{R}^n$ ("макроопределения"). (Типов — в зависимости от составляющих множества точек.)

Определение 1.6. *Открытым* множеством $X \subseteq \mathbb{R}^n$ называется множество, все точки которого внутренние.

[10] Подробнее можно см. хотя бы теорсправку в С3, §1.

[11] "Предельность" точки связана с "проколотостью" окрестности так: раз в любой проколотой окрестности можно найти точку X, отличную от самой $\boldsymbol{x}$, то можно построить сходящуюся к $\boldsymbol{x}$ последовательность точек X (уменьшая радиус окрестности и каждый раз выбирая из неё новую точку — расположенную всё ближе к $\boldsymbol{x}$).

Множество внутренних точек множества X называется *внутренностью* множества и обозначается как $\operatorname{int} X$.

Таким образом, открытое — это такое X, что:[12]

$$X = \operatorname{int} X$$

Определение 1.7. *Замкнутым* множеством $X \subseteq \mathbb{R}^n$ называется множество, которое содержит все свои точки прикосновения.

Множество точек прикосновения множества X называется *замыканием* множества и обозначается как $\overline{X}$.

Таким образом, замкнутое — это такое X, что:[13]

$$\overline{X} = X$$

Пример. На прямой $\mathbb{R}$ открытыми множествами будут, например, интервалы, замкнутыми — отрезки.

Окрестность точки в $\mathbb{R}^n$ — также пример открытого множества.

Всё пространство $\mathbb{R}^n$ и пустое множество $\varnothing$ — примеры (единственные?) одновременно открытых и замкнутых множеств. □

Открытые и замкнутые множества могут быть "цельными". Например, открытое $(0, 1) \subset \subset \mathbb{R}$, замкнутое $[0, 1] \subset \mathbb{R}$. А могут быть "разбиты" на несколько обособленных, не связанных друг с другом частей. Например, открытое $(0, 1) \cup (2, 3) \subset \mathbb{R}$ или замкнутое $[0, 1] \cup \cup [2, 3] \subset \mathbb{R}$. Свойство "цельности" можно сформулировать так.

Определение 1.8. Множество $X \subseteq \mathbb{R}^n$ называется *линейно связным*, если любую пару точек множества X можно соединить непрерывной кривой (содержащейся во множестве).[14]

И отдельно выделяется класс "цельных" открытых множеств.

Определение 1.9. Множество $X \subseteq \mathbb{R}^n$ называется *областью*, если оно открыто и линейно связно.

В классификации множеств можно пойти ещё дальше: среди "цельных" можно выделить "размазанные" ("амёбеобразные") и "плотно упакованные" (3).

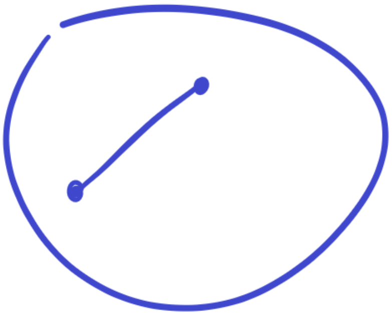
Определение 1.10. Множество $X \subseteq \mathbb{R}^n$ называется *выпуклым*, если любую пару точек множества X можно соединить отрезком (содержащимся во множестве).

[12] Точнее, единственное, что надо требовать, это: $X \subseteq \operatorname{int} X$

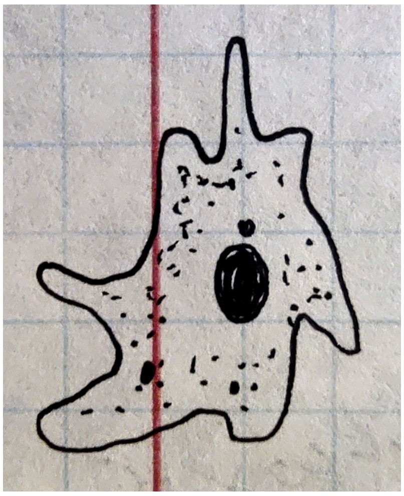
[13] Точнее, единственное, что надо требовать, это: $\overline{X} \subseteq X$

[14] Возможно (но не точно), что "линейно связное" надо понимать в том смысле, что между любой парой точек можно провести "линию". Непрерывная кривая, линия… "Принимаемо".

В английском же это называется path-connected — "путесвязное множество". Это более сильное свойство, чем "просто" связность, которая про то, представимо или нет данное множество как объединение двух или более непересекающихся открытых множеств (непустых). На первый взгляд может показаться, что разницы между такими "связностями" особо как будто и нет. Оказывается, что в некотором приближении так и есть: на числовой прямой R связность просто эквивалентна "путесвязности"; в R^n же *открытое* множество связно тогда и только тогда, когда оно "путесвязно". Но примеры, иллюстрирующие разницу между понятиями связности, тоже при желании можно придумать.



(a) Выпуклое.



(b) Не выпуклое.
(Рисунок Виолетты Филатовой)

Рис. 3: Линейно связные множества: выпуклое и нет.

1.1.1. С3, §1, №8(1)

Для последовательности $\{\boldsymbol{x}^{(m)}\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$ найти предел $\lim_{m\to\infty} \boldsymbol{x}^{(m)}$:

$$\boldsymbol{x}^{(m)} = \left(\sqrt{m+1} - \sqrt{m},\ \frac{m-1}{m},\ \frac{2m^2-1}{m^2},\ \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right)$$

Решение. По определению (1), предел последовательности $\{\boldsymbol{x}^{(m)}\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$ — это такой вектор $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$, что

$$\lim_{m\to\infty} \rho(\boldsymbol{x}^{(m)}, \boldsymbol{a}) = 0$$

или, если подробнее расписать евклидово расстояние между векторами:

$$\lim_{m\to\infty} \sqrt{\left(x_1^{(m)} - a_1\right)^2 + \left(x_2^{(m)} - a_2\right)^2 + \left(x_3^{(m)} - a_3\right)^2 + \left(x_4^{(m)} - a_4\right)^2} = 0$$

Очевидно, что равенство нулю такого предела равносильно одновременному выполнению следующих "покомпонентных" равенств с пределами:[15,16]

$$\begin{cases} \lim\limits_{m\to\infty} x_1^{(m)} = a_1 \\ \lim\limits_{m\to\infty} x_2^{(m)} = a_2 \\ \lim\limits_{m\to\infty} x_3^{(m)} = a_3 \\ \lim\limits_{m\to\infty} x_4^{(m)} = a_4 \end{cases}$$

Таким образом, в качестве предельного вектора имеем:

$$\boldsymbol{a} = (0, 1, 2, e)$$

□

[15] В одну сторону равносильность очевидна: если по каждой компоненте последовательность векторов $\{\boldsymbol{x}^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ стремится к соответствующей компоненте предельного вектора $\boldsymbol{a}$, то расстояние $\rho(\boldsymbol{x}^{(m)}, \boldsymbol{a}) \to 0$. В другую сторону можно доказать от противного: если расстояние между векторами стремится к нулю, но хотя бы по какой-то компоненте "стремления" нет, то получается противоречие.

[16] См. также: С3, §1, номер 7.

1.1.2. T2

Дано множество (4):

$$X = [1,2) \cup \{3\} \cup \big((4,5] \cap \mathbb{Q}\big) \subset \mathbb{R}$$

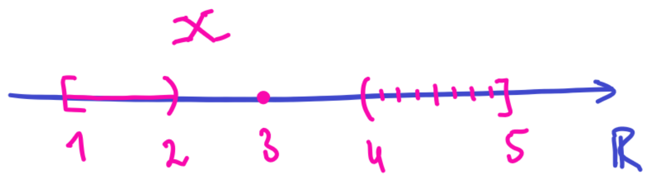


Рис. 4: Множество X на прямой $\mathbb{R}$.

Надо описать его точки в терминах “внутренняя” и т. д.

Решение.

a) внутренние точки: $(1,2)$.

b) изолированные точки: $\{3\}$.

c) граничные точки: $\{1,2,3\} \cup [4,5]$.

d) предельные точки: $[1,2] \cup [4,5]$.

e) точки прикосновения: $[1,2] \cup \{3\} \cup [4,5]$.

Граничными точками для X являются как рациональные, так и иррациональные точки отрезка $[4,5]$, потому что в любой окрестности как рационального, так и иррационального числа есть точки обоих типов. □

1.1.3. С3, §1, №14–15

Пусть $\{G_i\}_{i=1}^{\infty}$ — это произвольные открытые в $\mathbb{R}^n$ множества. Доказать, что в таком случае открытыми будут также следующие множества:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i, \quad \bigcap_{i=1}^{N} G_i$$

(то есть объединение, вплоть до бесконечного числа, открытых множеств открыто; также открыто пересечение, но лишь *конечного* числа открытых множеств).

Решение. Как проверить, что объединение открытых открыто? Открыто — значит, каждая точка должна быть внутренней. Пусть некоторый вектор лежит в объединении: $\boldsymbol{x} \in \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$. Тогда он должен быть хотя бы в каком-то из объединяемых множеств: $\exists i^* : \boldsymbol{x} \in G_{i^*}$. Но раз так, то вектор лежит в этом множестве вместе с какой-то своей окрестностью (раз это множество открыто): $U_\varepsilon(\boldsymbol{x}) \subset G_{i^*}$. Значит, эта окрестность лежит и в объединении (хоть в конечном, хоть в бесконечном): $U_\varepsilon(\boldsymbol{x}) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$.

Аналогичным образом проверим, что пересечение открытых открыто. Пусть $\boldsymbol{x} \in \bigcap_{i=1}^{N} G_i$. Это значит, что $\boldsymbol{x}$ принадлежит всем множествам:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} \in G_i \\ i = 1, \ldots, N \end{cases}$$

Раз так, то для каждого G_i найдётся окрестность $U_{\varepsilon_i}(\boldsymbol{x})$ вокруг вектора $\boldsymbol{x}$, которая целиком лежит в этом G_i: $U_{\varepsilon_i}(\boldsymbol{x}) \subset G_i$. А так как пересекаемых множеств конечное число, то можно взять *минимальный* из радиусов этих окрестностей:

$$\varepsilon^* = \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N\}$$

и окрестность такого радиуса $U_{\varepsilon^*}(\boldsymbol{x})$ (или ещё меньшего радиуса) будет находиться во всех пересекаемых множествах: $U_{\varepsilon^*}(\boldsymbol{x}) \subset \bigcap_{i=1}^N G_i$.

Покажем на примере, что пересечение бесконечного числа открытых множеств не обязательно является открытым.

Рассмотрим последовательность интервалов на прямой (5):

$$\left\{\left(-1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$$

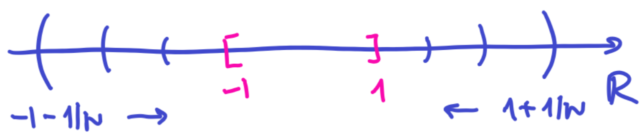


Рис. 5: Последовательность интервалов $\left\{\left(-1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ стягивается в отрезок $[-1, 1]$.

Очевидно, их пересечением будет отрезок:[17]

$$\bigcap_{i=1}^{\infty}\left(-1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right) = [-1, 1]$$

□

1.1.4. С3, §2, №9(1)

Дана функция двух переменных:

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2 - 1}$$

Является ли множество определения функции $f(x, y)$ открытым, замкнутым и т. д.?[18]

Решение. Множество определения функции:

$$x^2 + y^2 - 1 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 \neq 1$$

представляет собой всю плоскость $\mathbb{R}^2$ без окружности радиуса 1 около нуля (6).

Очевидно, такое множество точек на плоскости:

- открытое

[17] Указанный отрезок очевидно лежит в пересечении. Если допустить, что кроме отрезка в пересечении есть ещё хотя бы одна какая-то точка, то получим противоречие. Таким образом, отрезок совпадает с пересечением.

[18] Более привычный — по крайней мере, для кого-то — термин "область определения функции" намеренно не используется, чтобы избежать "коллизии" с другой "областью".

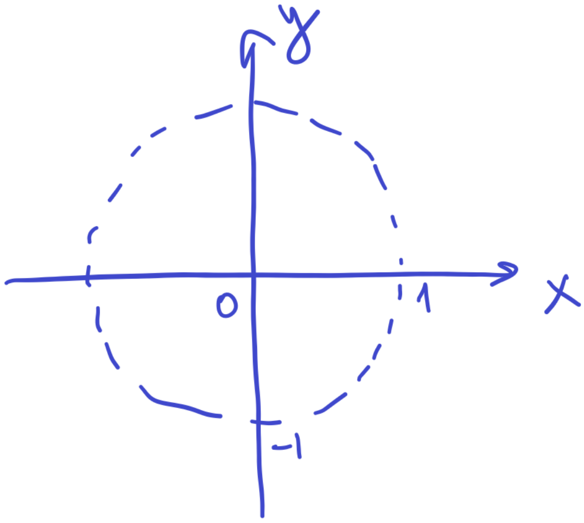


Рис. 6: $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

- не замкнутое, так как содержит не все точки прикосновения (окружность)
- не линейно связное, так как точки внутри и вне круга непрерывной кривой не соединить
- не область (= открытое + линейно связное)
- не замкнутая область (= область + её замыкание)
- не выпуклое (раз какие-то точки не соединить непрерывной кривой, то их не соединить и отрезком)

□

1.1.5. Т3

Дано множество в пространстве $\mathbb{R}^4$:

$$A = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < x_4^2\right\}$$

Является ли оно:

a) открытым

b) замкнутым

c) областью

Решение. Что из себя представляет множество A?

При фиксированной координате $x_4 = r$ получим шар (в оставшихся трёх координатах):

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < r^2$$

Варьируя $x_4 \in \mathbb{R}$, получаем совокупность шаров. Можно думать об этом так: мы живём в трёхмерном пространстве, и четвёртой оси не видим. Однако можем каким-то образом перемещаться по этой невидимой оси, и каждый раз при этом видим перед собой новый шар.

Возможно, стало чем-то понятнее, но вопросы всё равно остаются. (Кроме, возможно, вопроса по поводу открытости.)

Поэтому поступим так. Раз в четырёхмерном пространстве множество A вообразить сложно, посмотрим на "аналоги" A в пространствах меньшей размерности. Получается, можем начать с плоскости $\mathbb{R}^2$. "Двумерная версия" A определяется так:

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 < y^2\right\}$$

Условие $x^2 < y^2$ можно, извлёкши[19] корень, переписать как $|x| < |y|$. Но как изобразить такое A на плоскости? Границы A задаются условием $|x| = |y|$ — это две прямые $y = x$ и $y = -x$, которые делят всю плоскость на четверти. Отклоняясь с этих прямых равных модулей в какую-либо сторону, можно понять, как изменяется при этом соотношение между модулями $|y|$ и $|x|$. В итоге получается, что A состоит из двух четвертей, образующих "конус" (без границы) (7). Этот конус открыт, но не замкнут, а также не линейно связан (из одной половинки конуса никак не "пройти" в другую).

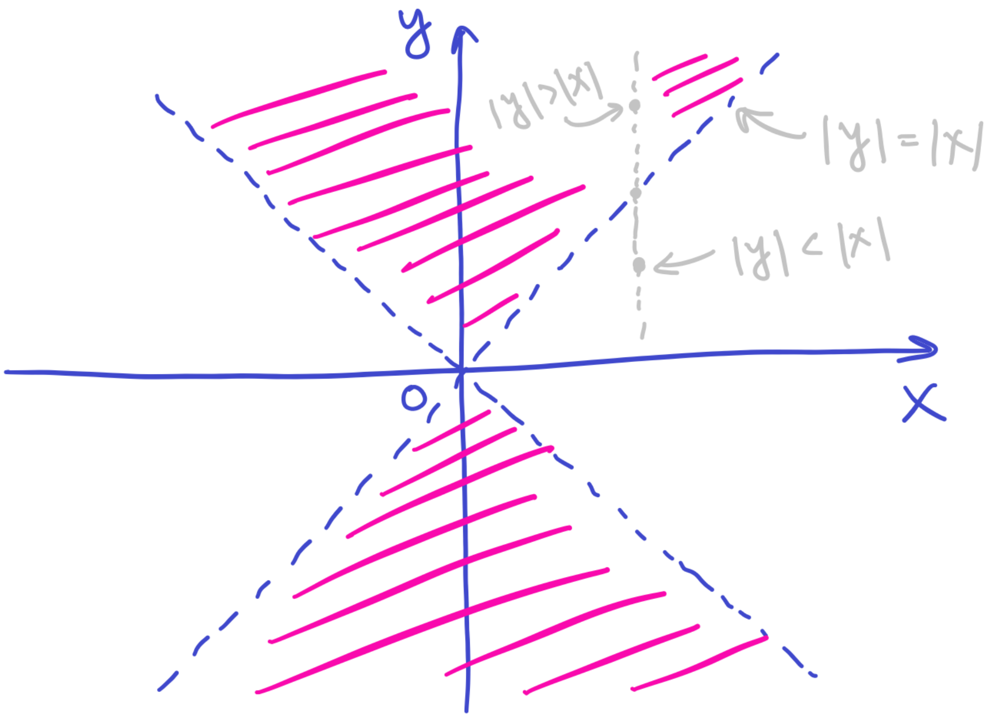


Рис. 7: "Конус" $|y| > |x|$ на плоскости.

По идее, стоит ожидать, что и четырёхмерный "аналог" A будет (не)обладать такими же свойствами (так, из одного шара тоже не попасть в другой, потому что единственная точка, которая могла бы быть связующей, выколота как граничная). Но посмотрим ещё на всякий случай на A в "трёхмерии":

$$A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < z^2\right\}$$

Фиксируя и варьируя третью координату, получаем A как совокупность кругов:

$$A = \bigcup_{r \in \mathbb{R}} \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{aligned} & x^2 + y^2 < r^2 \\ & z = r \end{aligned} \right\}$$

[19]Это слово существует.

образующих, как и до этого на плоскости, конус. Который, очевидно, также является открытым, но не замкнутым и не линейно связным.

□

1.2. О функциях

О *функции* (отображении) $\phi : X \to Y$ можно думать как о правиле,[20] которое *каждому* элементу множества X ставит в соответствие *единственный* элемент множества Y[21] (8). Если отображение ϕ переводит элемент $x \in X$ в элемент $y \in Y$, то можно записать $\phi(x) = y$, при этом y называется *образом* x, а x — прообразом y (одним из возможных, если их несколько).

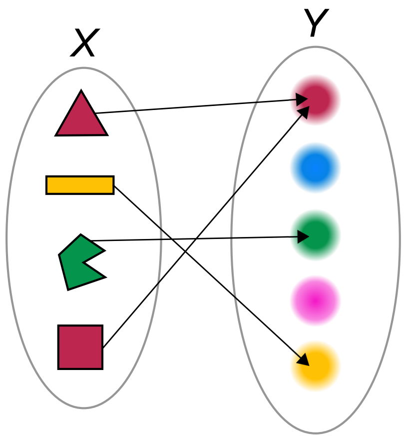


Рис. 8: Отображение: каждому элементу X соответствует единственный элемент Y. (Источник.)

Можно отметить несколько свойств, которыми могут обладать произвольные отображения.

Определение 1.11. Отображение ϕ называется *инъективным*, если разные элементы отображаются в разные (9a): $x_1, x_2 \in X,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow \phi(x_1) \neq \phi(x_2)$. Иными словами, если у элемента $y \in Y$ есть прообраз, то он единственный.

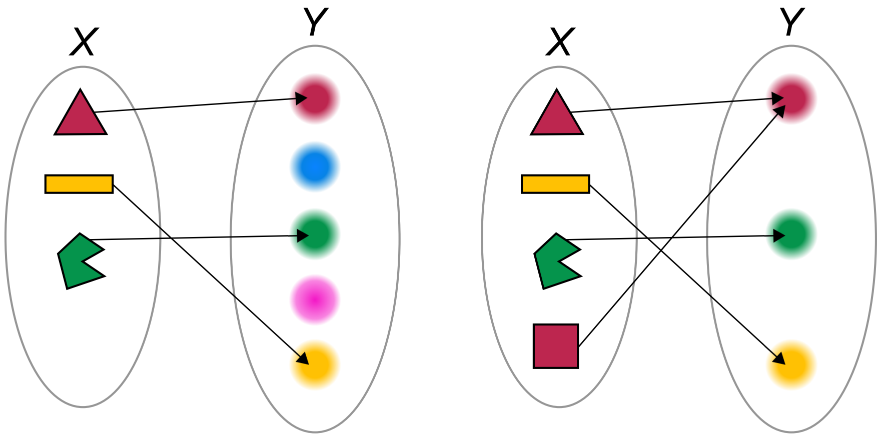
Определение 1.12. Отображение ϕ называется *сюръективным*, если у *любого* элемента $y \in Y$ есть прообраз (9b): $\forall y \in Y\ \exists x \in X : \phi(x) = y$.

Факт наличия у отображения обоих приведённых выше свойств сразу выделяется в отдельное свойство.

Определение 1.13. Отображение ϕ называется *биективным*, если у *любого* элемента $y \in Y$ есть *единственный* прообраз: $\forall y \in Y\ \exists! x \in X : \phi(x) = y$.

[20]Источник раздела: ЛА 5.

[21]Множество X в таком случае называется *областью определения* отображения ϕ (множество "допустимых" входов). Таким образом, область определения — это часть определения отображения (определение области определения отображения — "тот самый X" из определения отображения). Поэтому, когда в "школьных" номерах по математике просили "найти область определения функции", то имели в виду найти "максимально возможное по количеству элементов множество, которое могло бы выступать в роли области определения функции" (если бы привели полноценное определение этой функции, а не просто формулу).



(a) Инъекция. (b) Сюръекция.

Рис. 9: Инъекция: “разные в разные”, или “если есть прообраз, то один”. Сюръекция: “у каждого есть хотя бы один прообраз”.

Помимо множества X (области определения отображения ϕ, или domain), и множества Y (для которого, похоже, в русском языке нет специального названия, а по-английски — codomain) можно выделить ещё одно “интересное” множество, связанное с отображением ϕ — это *множество значений* отображения $\operatorname{Im}\phi \subseteq Y$, которое определяется как совокупность всех элементов $y \in Y$, в которые в принципе “можно попасть” под действием отображения:

$$\operatorname{Im}\phi = \{y \in Y \mid \exists x \in X : \phi(x) = y\}$$

Тогда сюръективность означает, что $\operatorname{Im}\phi = Y$.

1.3. Предел функции

Введём (обобщим) понятие предела функции для случая функции многих переменных $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$.

Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки $\boldsymbol{x}_0$, кроме, возможно, самой $\boldsymbol{x}_0$.[22] (При разговоре о пределе функции в точке важно поведение функции вблизи точки.)

Число a называется пределом функции f в точке $\boldsymbol{x}_0$ по Коши, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall \boldsymbol{x} : \begin{cases} \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) < \delta \\ \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}_0 \end{cases} \to |f(\boldsymbol{x}) - a| < \varepsilon \tag{2}$$

Или, то же самое, но немного другими словами:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall \boldsymbol{x} \in \mathring{U}_\delta(\boldsymbol{x}_0) \to f(\boldsymbol{x}) \in U_\varepsilon(a) \tag{3}$$

И второй (равносильный) взгляд на предел.

Число a называется пределом функции f в точке $\boldsymbol{x}_0$ по Гейне, если

$$\forall \{\boldsymbol{x}^{(m)}\}_{m=1}^{\infty} : \begin{cases} \lim\limits_{m\to\infty} \boldsymbol{x}^{(m)} = \boldsymbol{x}_0 \\ \boldsymbol{x}^{(m)} \neq \boldsymbol{x}_0 \end{cases} \to \lim_{m\to\infty} f\left(\boldsymbol{x}^{(m)}\right) = a \tag{4}$$

[22] Индекса “0” ни у одной координаты вектора нет, поэтому здесь путаницы возникнуть не должно, и будем писать индекс привычным образом снизу.

1.3.1. C3, §2, №37(8)

Дана функция:

$$f(x, y) = x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x}$$

Найти для неё повторные и “просто” пределы:

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x, y), \quad \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x, y), \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$$

Решение. При вычислении, например, повторного предела

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\left(x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x}\right) = \spadesuit$$

надо сначала взять внутренний предел, по одной переменной y, считая вторую переменную x как бы постоянной (и при этом можно считать её отличной от нуля, так как следующим надо будет брать предел при $x \to 0$):

$$\spadesuit = \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} (\text{🎃} + 0)$$

Внутренний предел взять не получается. С другим повторным пределом будет то же самое.

Найдём “просто” предел.

Способ 1: “Очевидно”. Можно, не долго думая, сразу прийти к выводу, что предел функции в точке $(0, 0)$ будет равен нулю:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x}\right) = 0$$

просто потому что оба слагаемых при одновременном стремлении $x \to 0$ и $y \to 0$ также стремятся к нулю.

Способ 2: “Модуль за скобку” (отсылка к $\mathbb{C}$). Немного преобразуем выражение под пределом, вынеся за скобку корень $\sqrt{x^2 + y^2}$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x}\right) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2 + y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \sin \frac{1}{y} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \sin \frac{1}{x}\right)$$

Что таким образом получаем: множитель $\sqrt{x^2 + y^2} \to 0$.[23] Оставшаяся же “скобка” ограничена: $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ и $\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ могут быть синусом и косинусом некоторого угла, в результате в скобках получается что-то в духе развёрнутого синуса или косинуса суммы. И всё выражение стремится к нулю.

Способ 3: По определению.

Из здравого смысла понимаем, что предел функции в нуле — это, скорее всего, ноль. Докажем теперь это по определению (2).

Функция сходится к нулю в точке $(0, 0)$, если:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta :\ \forall \boldsymbol{x} :\ 0 < \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) < \delta \to |f(\boldsymbol{x}) - 0| < \varepsilon$$

[23] Потому что одновременное стремление $x \to 0$ и $y \to 0$ по сути и равносильно стремлению $\sqrt{x^2 + y^2} \to 0$. Или же можно сказать, что это просто следует из определения: $(x, y) \to (0, 0) \Leftrightarrow \rho\big((x, y), (0, 0)\big) \to 0$

где $\boldsymbol{x} = (x, y)$ и $\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Начнём расписывать (оценивать сверху) $|f(\boldsymbol{x})|$ (в расчёте прийти в итоге к выражению, где можно будет воспользоваться какой-угодно-малостью $\sqrt{x^2 + y^2}$):

$$|f(\boldsymbol{x})| = \left| x \sin\frac{1}{y} + y \sin\frac{1}{x} \right| = \spadesuit$$

Вынесем расстояние $\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0})$ "за скобку":

$$\spadesuit = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \left| \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \sin\frac{1}{y} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \sin\frac{1}{x} \right| \le \diamondsuit$$

Что можно сказать про сумму под модулем? То же, что и раньше — на неё можно смотреть как на синус суммы углов, и она ограничена. И эта скобка умножается на $\sqrt{x^2 + y^2}$, который может быть сделан сколь угодно малым. Хочется же в итоге получить $|f(\boldsymbol{x})| < \varepsilon$:

$$\diamondsuit \le \delta \cdot 1 < \varepsilon$$

Выходит, $\forall \varepsilon > 0$ найдётся $\delta < \varepsilon$ (например, $\delta = \varepsilon/2$), при котором $|f(\boldsymbol{x})| < \varepsilon$ для всех $\boldsymbol{x}$, таких что $\sqrt{x^2 + y^2} < \delta$. Таким образом, в самом деле $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$.

Способ 4: Графический.

В дополнение к аналитическим ("формульным") решениям можно ещё посмотреть на картинку (10).

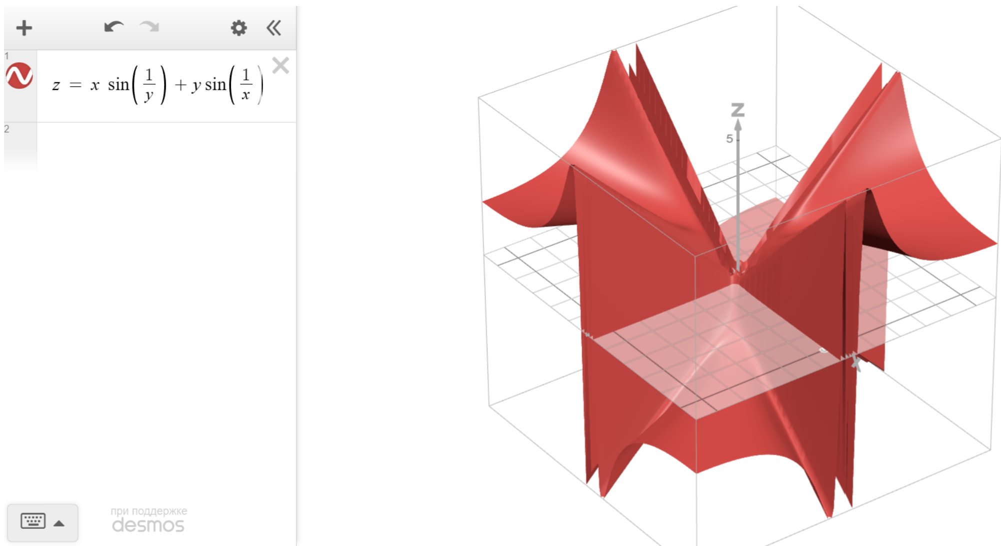


Рис. 10: График функции $z = x \sin\frac{1}{y} + y \sin\frac{1}{x}$.

Видно, что если, например, зафиксировать (вообще никак не трогать) переменную y, а двигаться к нулю только по x, то ни к чему сойтись не получится. Поэтому повторных пределов в нуле нет. Двигаться к нулю надо одновременно по обеим переменным. $\square$

1.3.2. С3, §2, №48(7)

Найти предел функции $f(x, y)$ в точке:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2 + y^2} \ln(x^2 + y^2)$$

Решение. Для простоты (и чтобы получить некоторую “интуицию”) рассмотрим предел, например, вдоль прямой $y = x$:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x}} \sqrt{x^2+y^2}\ln(x^2+y^2) = \lim_{x\to 0}\sqrt{2x^2}\ln(2x^2) = \spadesuit$$

Далее, можно ещё заменить $\sqrt{2x^2} \equiv t \geq 0$ (хотя можно бы было и без этого):

$$\spadesuit = \lim_{t\to +0} t\ln t^2 = 2\lim_{t\to +0}\frac{\ln t}{1/t} = 0$$

где равенство нулю в конце можно доказать с помощью правила Лопиталя.

Таким образом, гипотеза, что:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2}\ln(x^2+y^2) = 0$$

Как это доказать? Можно заметить, что... в этом пределе от двух переменных тоже можно сделать замену! Положим $t \equiv x^2 + y^2 \geq 0$. Тогда стремление $(x, y) \to (0, 0)$ будет равносильно $t \to 0+$, и предел перепишется следующим образом:

$$\lim_{t\to 0+}\sqrt{t}\ln t$$

А предел такого вида уже как раз находили выше. □

1.3.3. C3, §2, №62(5)

Найти все точки разрыва (устранимого и нет) функции двух переменных:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x+y}, & \text{если } x+y\neq 0\\ 3, & \text{если } x+y=0 \end{cases}$$

Решение. To be continued... □