

Семинар 4 + 5

Алексеев Василий

23 + 30 сентября 2024

Содержание

1	Функции	1
2	Предел функции	1
3	Непрерывность функции	1
3.1	C1, §9, №20(2)	1
3.2	C1, §9, №25(5)	1
3.3	C1, §9, №30(2)	1
3.4	C1, §9, №36(2)	2
3.5	C1, §9, №61	3
3.6	C1, §9, №36(8)	4
3.7	C1, §10, №5(9)	5
3.8	C1, §10, №22	6
3.9	C1, §10, №42	8
3.10	C1, §10, №97(2)	9
3.11	T4	10

К формулировкам и доказательствам (если такие вообще приводятся) стоит относиться критически. Основное в этом конспекте — решение задач (но “критичность” и здесь лучше не отключать). За строгой, ясной и последовательной теорией лучше обращаться к “нормальным” источникам. (Например, к лекциям.)

1. Функции

2. Предел функции

3. Непрерывность функции

3.1. С1, §9, №20(2)

Найти предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 1}$$

Решение. Имеем неопределённость (вида 0/0), поэтому пока “просто подставить” значение в формулу не получится. Но видно, что можно разложить на множители знаменатель (и числитель) — возможно, “проблемность” сократится:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+5)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+5}{x+1} = \frac{6}{2} = 3$$

То, на что сокращали — это не ноль! потому что x *стремится* к 1, то есть подходит всё ближе и ближе к единице, никогда в неё не попадая, и потому выражение $x-1$ *стремится* к нулю, но никогда нулю не равно. А в конце, когда “проблема” ушла, уже можно было просто “подставить” в формулу значение $x = 1$. \square

3.2. С1, §9, №25(5)

Найти предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{6-x}-1}{3-\sqrt{4+x}}$$

Решение. Снова неопределённость (0/0). В данном случае же, очевидно, на множители ничего не раскладывается. Однако можно воспользоваться другим приёмом — “домножить и поделить”:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{6-x}-1}{3-\sqrt{4+x}} &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(\sqrt{6-x}-1)(\sqrt{6-x}+1)(3+\sqrt{4+x})}{(3-\sqrt{4+x})(3+\sqrt{4+x})(\sqrt{6-x}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(5-x)(3+\sqrt{4+x})}{(5-x)(\sqrt{6-x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3+\sqrt{4+x}}{\sqrt{6-x}+1} = \frac{3+\sqrt{4+x}}{\sqrt{6-x}+1} \Big|_{x=5} = 3 \end{aligned}$$

В итоге снова почти-равный-но-до-конца-не-равный нулю множитель сократился, и неопределённости после этого уже не было. \square

3.3. С1, §9, №30(2)

Найти предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\pi^2 - x^2}$$

Решение. Видно, что предел “похож” на первый замечательный. (И кроме как сведения к первому замечательному не понятно, как его вообще находить.) Поэтому попробуем “выделить” в явном виде этот табличный предел, немного повертев выражение, задающее функцию:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\pi^2 - x^2} &= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{(\pi - x)(\pi + x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(\pi - x)}{(\pi - x)(\pi + x)} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(\pi - x)}{(\pi - x)(\pi + x)} = \blacktriangle\end{aligned}$$

Теперь первый замечательный предел виден. Это в самом деле он, так как при $x \rightarrow \pi$ имеем $(\pi - x) \rightarrow 0$. Можно сделать замену, чтоб совсем было один-в-один по виду, как в замечательном:

$$\pi - x \equiv t, \quad x = \pi + t, \quad x \rightarrow \pi \Leftrightarrow t \rightarrow 0$$

Тогда, возвращаясь к пределу:

$$\blacktriangle = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \frac{1}{2\pi + t} = \frac{1}{2\pi}$$

□

3.4. C1, §9, №36(2)

Найти предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\sqrt{1+x} - x \right)^{1/x}$$

Решение. А этот предел чем-то напоминает второй замечательный. Поэтому снова попробуем немного “причесать” функцию под пределом. Так как

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2}$$

то можно воспользоваться следующим равенством:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x), \quad x \rightarrow 0$$

Подставим это в предел:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\sqrt{1+x} - x \right)^{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{2}x - x + o(x) \right)^{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{1}{2}x + o(x) \right)^{1/x} = \blacktriangle$$

$o(x)$ — это какая-то функция, бесконечно малая¹ по отношению к функции x при $x \rightarrow 0$. Так как в той же скобке присутствует ещё и сам x (с коэффициентом $-1/2$), то на $o(x)$ можно смотреть как “практически” на ноль (это поправка, которая несравнимо меньше

¹Дающая в пределе ноль (а не “минус бесконечность”).

члена $-x/2$ по величине). Другими словами, можно просто “забыть” про $o(x)$:²

$$\blacktriangle = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \spadesuit$$

Второй замечательный предел почти проявился, правда, ещё не до конца... Но его можно получить, если теперь “домножить и поделить” в степени:

$$\spadesuit = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{x} \cdot \frac{1}{2}} = e^{1/2} = \sqrt{e}$$

(По ходу пользовались тем, что $x/2 \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$. Можно бы было сделать замену, чтоб получить второй замечательный предел прям в как в табличном виде. Но можно было и просто иметь это в виду (делая “мысленную замену”). \square

3.5. С1, §9, №61

Пусть известно, что

$$\lim_{y \rightarrow y_0} f(y) = a$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = y_0$$

Следует ли отсюда, что

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = \lim_{y \rightarrow y_0} f(y) = a$$

Решение. Очевидно, условие задачи представляет “практически” утверждение о непрерывности сложной функции. С тем отличием, что не требуется, чтобы $g(x) \neq y_0$ хотя бы в некоторой δ -окрестности x_0 . Таким образом, при взятии предела

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x))$$

может получиться так, что при стремлении $x \rightarrow x_0$ функция $g(x)$ пройдёт через y_0 . Но ведь при рассмотрении предела

$$\lim_{y \rightarrow y_0} f(y)$$

вообще не важно, что происходит с $f(y)$ в самой точке y_0 (функция $f(y)$ может быть даже не определена в ней). Отсюда и может возникнуть противоречие: с $f(y)$ что-то “нехорошо” в самой y_0 , а $g(x)$ в неё попадает при $x \rightarrow x_0$ (функция $g(x)$ в любом случае *стремится* к y_0 при $x \rightarrow x_0$ — тут же важно, что она может именно пройти через y_0 , принять это значение — не в пределе).

Наверняка можно придумать не один (контр)пример, решающий задачу...

²“Забыть” можно не всегда, а только тогда, когда это в самом деле “бесконечно малая” поправка, по сравнению с другими членами. Например, в пределе $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{1/x^2}$ функция x^2 тоже будет $o(x)$, но “отметание” её в сумме в скобке приведёт к пределу $\lim_{x \rightarrow 0} 1^{1/x^2}$. Который, очевидно, не равен исходному. Бывают также случаи, когда... не только не стоит “отметать” поправку, а когда, наоборот, необходимо её как-то уточнить, разложить до ещё большей точности. Например, пусть есть предел $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\sqrt{1+x} - x/2\right)^{1/x^2}$. Раскладывая до $o(x)$ корень, переходим к пределу $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + o(x))^{1/x^2}$, с которым уже и не понятно, что делать. Потому что выкинуть $o(x)$ нельзя: она хоть и малая, но играет роль. Например, вместо $o(x)$ могла бы быть, например, функция x^2 , или $-17.5x^2$, или x^{2024} — итоговый ответ в каждом из случаев был бы другим. Таким образом, в данном примере нужно бы было каким-то образом раскладывать корень не до $o(x)$, а до какой-то более высокой точности (до ещё более малой поправки)...

Как вариант, предлагается завязаться снова на замечательный предел (первый). Рассмотрим ситуацию:

$$f(y) = \frac{\sin y}{y}, \quad g(x) = 0$$

то есть $g(x)$ просто константный ноль; в качестве же y_0 , очевидно, берём $y_0 = 0$; точка же x_0 может быть любой, пусть, для определённости, тоже $x_0 = 0$. Тогда получаем

$$\begin{cases} \lim_{y \rightarrow y_0} f(y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0 \end{cases}$$

Однако

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 0}{0} \quad (\otimes)$$

Получили в явном виде деление на ноль. Дальнейшие объяснения кажутся излишними.³ □

3.6. С1, §9, №36(8)

Найти предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\ln(e + x))^{\operatorname{ctg} x}$$

Решение. Попробуем постепенно прийти ко второму замечательному пределу:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\ln(e + x))^{\operatorname{ctg} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\ln \left\{ e \left(1 + \frac{x}{e} \right) \right\} \right)^{\operatorname{ctg} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \ln \left\{ 1 + \frac{x}{e} \right\} \right)^{\operatorname{ctg} x} = \blacktriangle$$

Воспользуемся равенствами при $x \rightarrow 0$:

$$\begin{cases} \ln \left(1 + \frac{x}{e} \right) = \frac{x}{e} + o(x) \\ \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{1}{x + o(x)} \sim \frac{1}{x} \end{cases}$$

Подставляя в формулу для предела:

$$\blacktriangle = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{e} + o(x) \right)^{\frac{1}{x}} = \diamond$$

“Забывая” про $o(x)$ и “подкручивая” (в рамках правил) степень, наконец получаем замечательный предел:

$$\diamond = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{e} \right)^{\frac{e}{x} \cdot \frac{1}{e}} = e^{1/e}$$

□

³Всё-таки на всякий случай ещё одно небольшое замечание: в первом замечательном пределе $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ нет деления на ноль! ноль никогда не возникает в знаменателе (при $x \rightarrow 0$ знаменатель становится всё ближе к нулю, бесконечно близко, но всё-таки не “чистый” ноль).

3.7. С1, §10, №5(9)

Доказать (по определению), что функция $y(x)$ непрерывна в каждой точке своей области определения:

$$y(x) = \frac{1}{x^2}$$

Решение. Область определения: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Пусть есть $x_0 \neq 0$. Покажем, что $f(x)$ непрерывна в x_0 .

Непрерывна — то есть значение функции в точке совпадает с её пределом в точке. Поэтому, чтобы доказать непрерывность по определению, воспользуемся определением предела функции в точке, например, по Коши. Итого, надо показать, что:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0) \rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(f(x_0))$$

или, если через неравенства:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x : |x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Посмотрим на разность между значениями функции:

$$|f(x) - f(x_0)| = \left| \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x_0^2} \right| = \left| \frac{x_0^2 - x^2}{x^2 x_0^2} \right| = \left| \frac{(x_0 - x)(x_0 + x)}{x^2 x_0^2} \right|$$

Может ли эта разность быть меньше любого наперёд заданного ε для всех x , достаточно близких к x_0 ? (можно ли это обеспечить выбором δ ?) Посмотрим внимательно на дробь. Разность $x_0 - x$ можно сделать сколь угодно малой (x — точка такая, что $|x_0 - x| < \delta$, а δ выбираем, какой хотим); $x_0 + x$ — при достаточно малом δ есть “нечто, сравнимое с x_0 ”, это что-то около x_0 , “примерно” x_0 ; то же самое с x в знаменателе — если δ достаточно малая, x будет близко к x_0 , “практически” x_0 . Итого, о дроби под модулем при достаточно малом δ можно думать как

$$\left| \frac{(x_0 - x)(x_0 + x)}{x^2 x_0^2} \right| \lesssim \frac{\delta \cdot x_0}{x_0^4}$$

А это, очевидно, можно выбором δ сделать таким малым, как захотим (меньше любого $\varepsilon > 0$).

Разберёмся теперь аккуратнее со всеми упомянутыми “практически”, “примерно”, “что-то около” и прочими. Пусть для определённости $x_0 > 0$. Тогда выбором δ можно добиться того, чтобы $x_0 + \delta$ было меньше, чем, скажем, $100x_0$. С другой стороны, также можно выбрать и такой маленький δ , чтобы $x_0 - \delta$ было, например, больше $0,01x_0$. Выбирая самый маленький из двух упомянутых δ (или ещё сколь угодно меньше), и получаем такую оценку:

$$\left| \frac{(x_0 - x)(x_0 + x)}{x^2 x_0^2} \right| < \frac{\delta \cdot 100x_0}{(0,01x_0)^2 x_0^2} < \varepsilon$$

И из неё уже выходит такое условие на δ :

$$\delta < \varepsilon \cdot \left(\frac{x_0}{100} \right)^3$$

Показали непрерывность в x_0 , используя определение предела в x_0 по Коши.

Способ 2: по Гейне. Покажем теперь интереса ради непрерывность, если опираться на определение предела функции в точке по Гейне. Тогда фраза “предел в точке равен значению в точке” для $x_0 \neq 0$ будет переводиться так:

$$\forall \{x_n\} \subset U_\delta(x_0), \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0) \leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) - f(x_0)) = 0$$

(где последовательности Гейне берутся из элементов из некоторой δ -окрестности x_0 , где функция $f(x)$ определена). В таком случае, рассмотрим предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) - f(x_0)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x_n^2} - \frac{1}{x_0^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x_0 - x_n)(x_0 + x_n)}{x_n^2 x_0^2} = 0$$

он равен нулю, так как $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$. □

3.8. С1, §10, №22

Доказать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{если } x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

разрывна в каждой точке.

Решение. Докажем разрывность из противоречия с непрерывностью. То есть покажем, например, выполнение *отрицания непрерывности*, если смотреть на неё по Гейне:

$$\exists \{x_n\} : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, \neg \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0) \right) \quad (1)$$

где x_0 — некоторая точка, а символом \neg обозначено отрицание — в данном случае отрицание условия равенства предела последовательности $\{f(x_n)\}$ числу a (то есть предел последовательности либо не равен a , либо вообще не существует). Получается, для произвольного x_0 надо научиться предъявлять описанную последовательность Гейне в этой точке.

Пусть $x_0 \in \mathbb{I}$. Кажется естественным попытаться составить $\{x_n\}$ так, чтобы все элементы последовательности, наоборот, было бы рациональными. (Тогда сразу получится, что $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 1 \neq 0 = f(x_0)$.) Можно поступить так: пусть x_1 — произвольное рациональное число (пусть оно ещё и меньше x_0 для определённости). Определим $\delta_1 = x_0 - x_1$. Далее, положим $\delta_2 = \frac{\delta_1}{2}$, и выберем какой-нибудь любой рациональный $x_2 \in (x_0 - \delta_2, x_0)$. И “зацикливаем” процесс: следующий $\delta_3 = \frac{\delta_2}{2}$, выбираем произвольный рациональный $x_3 \in (x_0 - \delta_3, x_0)$, и так далее. Получаем последовательность $\{x_n\} \subset \mathbb{Q}$. Почему она сходится к x_0 ? Потому что она построена так, чтобы каждый очередной x_n был всё ближе к x_0 , причём в несколько раз ближе, чем предыдущий x_{n-1} :

$$0 < |x_n - x_0| < \delta_n = \frac{\delta_1}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Можно бы было предложить и ещё, например, вот такой способ нахождения $\{x_n\} \subset \mathbb{Q}$. Так как $x_0 \in \mathbb{I}$, то x_0 представимо в виде бесконечной непериодической десятичной дроби:

$$x_0 = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots$$

где a_0, a_1, a_2 и так далее — цифры. Тогда предлагается такая последовательность $\{x_n\}$:

$$\begin{cases} x_1 = a_0, a_1 \\ x_2 = a_0, a_1 a_2 \\ x_3 = a_0, a_1 a_2 a_3 \\ \dots \\ x_n = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \end{cases}$$

Очевидно, $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$. Также очевидно, что $x_n \in \mathbb{Q}$. А значит, это и есть подпоследовательность Гейне, “ломающая” непрерывность функции в точке x_0 по Гейне.

Пусть теперь $x_0 \in \mathbb{Q}$. Опять, хочется составить последовательность Гейне $\{x_n\}$ из, наоборот, иррациональных чисел (вообще не обязательно прямо только из иррациональных — по-хорошему, достаточно лишь, чтобы иррациональные просто время от времени встречались среди элементов последовательности). Пусть x_1 — это, например, $\frac{x_0}{\sqrt{3}}$. Очевидно, $x_1 \in \mathbb{I}$. Далее, положим, например

$$x_n = x_1 + (x_0 - x_1) \cdot \frac{n}{n+1}$$

Очевидно, что $x_n \in \mathbb{I}$.⁴ Также понятно, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x_1 + (x_0 - x_1) \cdot \frac{n}{n+1} \right) = x_0$$

Итого, это нужная последовательность Гейне в иррациональном x_0 .

Способ 2: по Коши

Решим задачу, смотря на предел функции в точке как Коши. Отрицание, которое надо доказать (чтоб показать разрывность в произвольной x_0):

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \exists x \in U_\delta(x_0) : f(x) \notin U_\varepsilon(f(x_0))$$

Но какой бы ни был x_0 (\mathbb{Q} или \mathbb{I}) — это будет верно! Потому что в любой δ -окрестности рационального (иррационального) числа x_0 на числовой прямой есть иррациональное (рациональное) число x (и тогда $|f(x) - f(x_0)| = 1$ — так что в качестве ε можно взять, например, $\varepsilon = 1/2$.)

Способ 3: Гейне + Коши (другой Коши)

Вернёмся к взгляду на предел в точке по Гейне. Как ещё можно показать (1)? Предъявив такую последовательность Гейне $\{x_n\}$ в x_0 , чтоб предела $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ просто не существовало! Из критерия Коши сходимости последовательности, предела не будет, если

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall N \in \mathbb{N}, \exists n, m \geq N : |f(x_n) - f(x_m)| \geq \varepsilon$$

Тогда можно построить $\{x_n\}$, чередуя попеременно рациональные и иррациональные элементы, которые становятся всё ближе к x_0 (можно опять ввести окрестность δ_n , из которой произвольно выбирается очередной \mathbb{Q} или \mathbb{I} элемент x_n — чтобы окрестности δ_n стягивались к нулю).

Способ 3: Коши - Гейне

⁴Или не так очевидно... В общем, получается, что x_n есть сумма иррационального и рационального.

На самом деле *критерий Коши существования предела в функции* — не привязан к последовательностям (к определению предела в точке по Гейне). Его можно сформулировать в более общем виде так: функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in U_\delta(x_0) \rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

И его *отрицание*:

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \exists x_1, x_2 \in U_\delta(x_0) : |f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon$$

Но тогда можно и не искать никакую последовательность Гейне в точке x_0 ! Просто достаточно сказать, что в любой δ -окрестности любого числа x_0 есть как рациональные, так и иррациональные числа (а потому подойдёт $\varepsilon = 1/2$). \square

3.9. С1, §10, №42

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на интервале (a, b) , и пусть

$$m_0 \equiv \inf_{(a,b)} f, \quad M_0 \equiv \sup_{(a,b)} f$$

Доказать, что для любого $y_0 \in (m, M)$ найдётся $x_0 \in (a, b)$, такой что $f(x_0) = y_0$.

Решение. Отметим, что непрерывная на интервале функция может и не достигать на этом интервале своих инфимума и/или супремума. Например, функция $f(x) = \frac{1}{x}$ на интервале $(0, 1)$ (не достигает инфимума). Или $f(x) = \operatorname{tg} x$ на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (не достигает “ничего”).

Поэтому сперва осторожно определим, в каких “границах” лежит y_0 . Границах — в смысле между какими значениями, которые функция $f(x)$ точно принимает. Но это сразу получаем из определения точных граней: если $y_0 > m_0$, то обязательно найдётся $m_1 = f(l_1)$, $l_1 \in (a, b)$, такое что $y_0 > m_1 > m_0$. Аналогично и с точной верхней гранью. Итого, имеем:

$$\inf_{(a,b)} f = m_0 < f(l_1) < y < f(r_1) < M_0 = \sup_{(a,b)} f$$

(для определённости также будем считать $l_1 < r_1$, хотя это ни на что не влияет, кроме смысла за именами.)

Теперь предлагается следующая процедура поиска точки x_0 , где $f(x_0) = y_0$. Будем приближаться к ней, всё ближе и ближе. Точнее даже, будем *стягиваться* к ней — по оси X . Но так как функция непрерывна — то параллельно мы будем приближаться и к интересующему значению y_0 по оси Y ! Таким образом, 2D “область поиска” точки (x_0, y_0) тоже стягивается — и в итоге получается одна точка графика, где функция принимает искомое значение (график не видим, но нужную точку на нём найти сможем).

Определим процесс более формально (1). Первый отрезок — это $[l_1, r_1]$. Точка x_0 должна быть на нём. Далее, начинаем делить пополам: $c_1 = \frac{l_1 + r_1}{2}$. Если вдруг $f(c_1) = y_0$, то процесс завершён, точку нашли. Иначе, либо $f(c_1) < y_0$, либо $f(c_1) > y_0$. В любом случае, можно будет от “большого” отрезка $[l_1, r_1]$ перейти к отрезку в два раза меньше — такому, чтоб y_0 было между значениями на его концах ($[c_1, r_1]$ или $[l_1, c_1]$ соответственно). Это будет отрезок $[l_2, r_2]$. Далее всё повторяется: смотрим середину, сравниваем, переходим в нужный подотрезок. И так далее. Получается последовательность точек $\{x_n\}$ и стягивающаяся последовательность вложенных отрезков $\{[l_n, r_n]\}$. Раз стягивающаяся, то, по

теореме Кантора, имеет общую точку x_0 (назовём её так же, как искомую, где $f(x_0) = y_0$, потому что это в самом деле она и есть, что далее покажем). При этом

$$0 < |x_n - x_0| < \frac{r_1 - l_1}{2^{n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

то есть $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$. Осуществили “стяжку” в x_0 . Посмотрим, что при этом происходит по другой оси. Строили отрезки так, чтобы

$$f(l_n) < y_0 < f(r_n)$$

при стяжке же $l_n, r_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$, а в силу непрерывности функции $f(x)$ при этом выходит также $f(l_n), f(r_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x_0)$. По теореме о двух милиционерах: $y_0 = f(x_0)$. Значит, нашли “ту самую” x_0 .

Получается, при поиске как бы двигались от граничных точек в нужную сторону “шажками”. При этом шаги уменьшались от очень больших ко всё более и более маленьким — уменьшались по мере приближения к искомой точке.

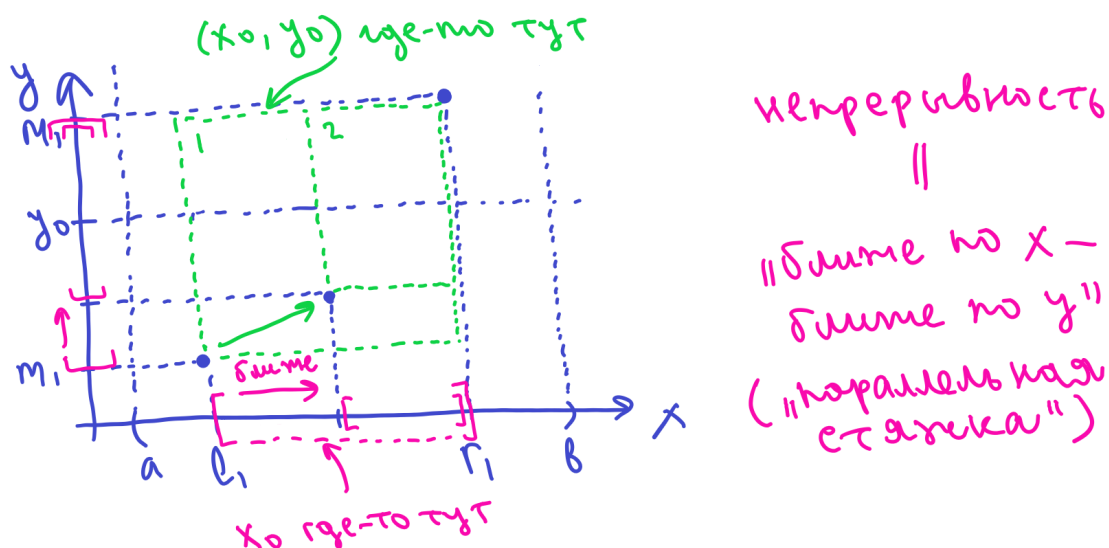


Рис. 1: Функция $f(x)$, определённая на интервале (a, b) , непрерывна... И это — всё, что про неё вообще по условию известно. Графика нет — только чистый лист. И пара граничных точек m_1 и M_1 — границы, между которыми заключено интересующее значение y_0 (произвольное между инфимумом $\inf_{(a,b)} f$ и супремумом $\sup_{(a,b)} f$ функции на интервале). Как тогда показать, что функция обязательно проходит через y_0 ? (“Обязательно” — в данном контексте это скорее как “математический троп”, подчёркивающий, что предстоит доказать “стрелку вправо” \Rightarrow , что из условий *следует* желаемое. Хотя, пожалуй, “обязательно” можно бы было и опустить...)

□

3.10. С1, §10, №97(2)

Построить взаимно однозначное отображение отрезка на интервал.

Решение. ТВА

□

3.11. Т4

Приведите пример разрывной функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, которая отображает любой отрезок в отрезок.

Решение. ТВА

□