



UNIDAD PROFESIONAL INTERDISCIPLINARIA EN
INGENIERÍA Y TECNOLOGÍAS AVANZADAS

CONVOLUCIÓN DE SEÑALES EN TIEMPO DISCRETO

Análisis de señales y sistemas

Autor:

Catalán Escobar Alvaro

Grupo: 2MV1

Profesor:

Dr. Rafael Martínez Martínez

8 de junio de 2021

Índice

1. Objetivos.	3
2. Introducción.	3
3. Desarrollo.	3
3.1. Deducción de la formula (11).	4
3.2. Deducción de la formula (12).	6
3.3. Gráficas para casos especificos en MATLAB.	7
4. Conclusiones.	9
5. Apéndices.	10

Índice de figuras

1.	Graficas de las señales $x(t)$ e $y(t)$	7
2.	Graficas de la convolución 1	8
3.	Graficas de las señales $x(t)$ e $y(t)$	8
4.	Graficas de la convolución 2	9

1. Objetivos.

Los objetivos de la práctica son:

- 1.- Aplicar la definición de convolución de señales en tiempo continuo a señales causales.
- 2.- Deducir a partir de la definición de convolución las formulas (11) y (12) de la tabla mostrada en la página del curso.
- 3.- Manejar herramientas de software como lo es MATLAB para la elaboración de gráficas de señales.
- 4.- Motivar e incentivar el uso de L^AT_EX.

2. Introducción.

En la presente práctica se mostrará el procedimiento para la deducción de las formulas (11) y (12) de Convolución. Al igual que se realizarán las gráficas de 2 señales de ejemplo propuestas a partir de asignar valores a las constantes libres.

Recordando la definición de convolución de dos señales en tiempo continuo:

$$g(t) = f(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)x(t - \tau)d\tau \quad (1)$$

De esta definición surgen las formulas de convolución mostradas en la tabla de notas en la página del curso.

En especifico, las formulas (11) y (12) extraídas de la tabla de convolución son:

$$f(t) * x(t) = \frac{-\cos(\theta - \phi)e^{\lambda t} + e^{-at}\cos(\beta t + \theta - \phi)}{\sqrt{(a + \lambda)^2 + \beta^2}}u(t) \quad (2)$$

$$f(t) * x(t) = \frac{1}{2}te^{-at}\sin(\omega t)u(t) \quad (3)$$

3. Desarrollo.

A continuación, se realizará el procedimiento para la deducción de las formulas (11) y (12) de las tablas de convolución:

3.1. Deducción de la formula (11).

Dadas las señales $x(t)$ e $y(t)$:

$$x(t) = e^{-at} \cos(\beta t + \theta) u(t) \text{ e } y(t) = e^{\lambda t} u(t)$$

Se observa que ambas señales son causales.

Partimos de la definición de convolución, la cual se muestra en la ecuación 1:

$$x(t) \Rightarrow x(\tau) = e^{\lambda \tau} u(\tau)$$

$$y(t) \Rightarrow y(t - \tau) = e^{-a(t-\tau)} \cos(\beta(t - \tau) + \theta) u(t - \tau)$$

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda \tau} u(\tau) e^{-a(t-\tau)} \cos(\beta(t - \tau) + \theta) u(t - \tau) d\tau$$

Utilizando la identidad de Euler del coseno:

$$\cos(\theta) = \frac{1}{2}(e^{j\theta} + e^{-j\theta})$$

$$g(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda \tau} e^{-a(t-\tau)} (e^{j(\beta t - \beta \tau + \theta)} + e^{-j(\beta t - \beta \tau + \theta)}) d\tau$$

Dado que ambas señales están multiplicadas por escalones unitarios se tiene que:

$$u(\tau) = 1 \Rightarrow \tau \geq 0$$

$$u(t - \tau) = 1 \Rightarrow t - \tau \geq 0$$

$$0 \leq \tau \leq t$$

Por lo tanto:

$$g(t) = \frac{1}{2} \int_0^t e^{\lambda \tau} e^{-a(t-\tau)} (e^{j(\beta t - \beta \tau + \theta)} + e^{-j(\beta t - \beta \tau + \theta)}) d\tau$$

Desarrollando las operaciones en el integrando:

$$g(t) = \frac{1}{2}e^{-at} \left[\int_0^t e^{(a+\lambda-\beta j)\tau} e^{(\beta t+\theta)j} d\tau + \int_0^t e^{(a+\lambda+\beta j)\tau} e^{-(\beta t+\theta)j} d\tau \right]$$

Reescribiendo los números complejos:

$$(a + \lambda) - \beta j = \sqrt{(a + \lambda)^2 + \beta^2} e^{\phi j}$$

$$(a + \lambda) + \beta j = \sqrt{(a + \lambda)^2 + \beta^2} e^{-\phi j}$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{-\beta}{a + \lambda}\right)$$

$$g(t) = \frac{1}{2}e^{-at} \left[\int_0^t e^{\sqrt{(a+\lambda)^2 + \beta^2} e^{\phi j}} e^{(\beta t+\theta)j} d\tau + \int_0^t e^{\sqrt{(a+\lambda)^2 + \beta^2} e^{-\phi j}} e^{-(\beta t+\theta)j} d\tau \right]$$

Resolviendo y evaluando la integral:

$$g(t) = \frac{e^{-at}}{2\sqrt{(a + \lambda)^2 + \beta^2}} \left[e^{(\beta t+\theta-\phi)j} e^{(a+\lambda-\beta j)t} - e^{(\beta t+\theta-\phi)j} + e^{-(\beta t+\theta-\phi)j} e^{(a+\lambda+\beta j)t} - e^{-(\beta t+\theta-\phi)j} \right]$$

$$g(t) = \frac{e^{-at}}{2\sqrt{(a + \lambda)^2 + \beta^2}} \left[e^{(\theta-\phi)j} e^{(a+\lambda)t} - e^{(\beta t+\theta-\phi)j} + e^{-(\theta-\phi)j} e^{(a+\lambda)t} - e^{-(\beta t+\theta-\phi)j} \right]$$

Simplificando términos llegamos a lo siguiente:

$$g(t) = \frac{e^{-at}}{2\sqrt{(a + \lambda)^2 + \beta^2}} \left[2e^{(a+\lambda)t} \cos(\theta - \phi) - 2\cos(\beta t + \theta - \phi) \right]$$

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{(a + \lambda)^2 + \beta^2}} \left[e^{\lambda t} \cos(\theta - \phi) - e^{-at} \cos(\beta t + \theta - \phi) \right]$$

Reescribiendo:

$$g(t) = \frac{-e^{\lambda t} \cos(\theta - \phi) + e^{-at} \cos(\beta t + \theta - \phi)}{\sqrt{(a + \lambda)^2 + \beta^2}} u(t)$$

■

3.2. Deducción de la formula (12).

Dadas las señales $x(t)$ e $y(t)$:

$$x(t) = e^{-at} \cos(\omega t) u(t) \text{ e } y(t) = e^{-at} \text{sen}(\omega t) u(t)$$

Se observa que ambas señales son causales.

Partimos de la definición de convolución, la cual se muestra en la ecuación 1:

$$x(t) \Rightarrow x(\tau) = e^{-a\tau} \cos(\omega\tau) u(\tau)$$

$$y(t) \Rightarrow y(t - \tau) = e^{-a(t-\tau)} \text{sen}(\omega(t - \tau)) u(t - \tau)$$

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\tau} \cos(\omega\tau) u(\tau) e^{-a(t-\tau)} \text{sen}(\omega(t - \tau)) u(t - \tau) d\tau$$

Dado que ambas señales están multiplicadas por escalones unitarios se tiene que:

$$u(\tau) = 1 \Rightarrow \tau \geq 0$$

$$u(t - \tau) = 1 \Rightarrow t - \tau \geq 0$$

$$0 \leq \tau \leq t$$

Utilizando la identidad de Euler del seno y coseno:

$$\cos(\theta) = \frac{1}{2}(e^{j\theta} + e^{-j\theta})$$

$$\text{sen}(\theta) = \frac{1}{2j}(e^{j\theta} - e^{-j\theta})$$

Reescribiendo la integral:

$$g(t) = \frac{1}{4j} \int_0^t e^{-at} (e^{j\omega\tau} + e^{-j\omega\tau}) (e^{j\omega(t-\tau)} - e^{-j\omega(t-\tau)}) d\tau$$

Desarrollando el integrando:

$$g(t) = \frac{e^{-at}}{4j} \left[\int_0^t (e^{j\omega\tau} - e^{-j\omega\tau} e^{2j\omega\tau} + e^{j\omega\tau} e^{-2j\omega\tau} - e^{-j\omega\tau}) d\tau \right]$$

Resolviendo y evaluando en los limites la integral, se tiene:

$$g(t) = \frac{e^{-at}}{4j} \left[te^{j\omega t} - \frac{1}{2j\omega} e^{j\omega t} + \frac{1}{2j\omega} e^{-j\omega t} - \frac{1}{2j\omega} e^{-j\omega t} + \frac{1}{2j\omega} e^{j\omega t} - te^{-j\omega t} \right]$$

$$g(t) = \frac{e^{-at}t}{2} \left[\frac{1}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) \right]$$

Utilizando nuevamente la identidad de Euler para el seno:

$$g(t) = \frac{e^{-at}t}{2} \text{sen}(\omega t)u(t)$$

$$g(t) = \frac{1}{2}te^{-at}\text{sen}(\omega t)u(t)$$

■

3.3. Gráficas para casos específicos en MATLAB.

Las gráficas de las señales para el caso específico ($a = \frac{1}{2}, \beta = \omega = 2, \theta = \frac{\pi}{4}, \lambda = -1$) utilizando la formula (11) son:

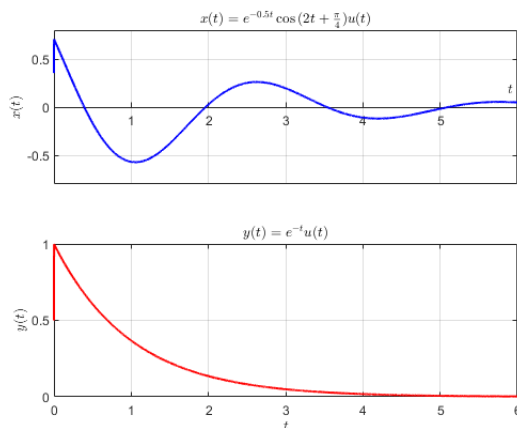


Figura 1: Gráficas de las señales $x(t)$ e $y(t)$

La gráfica de la convolución de ambas señales es:

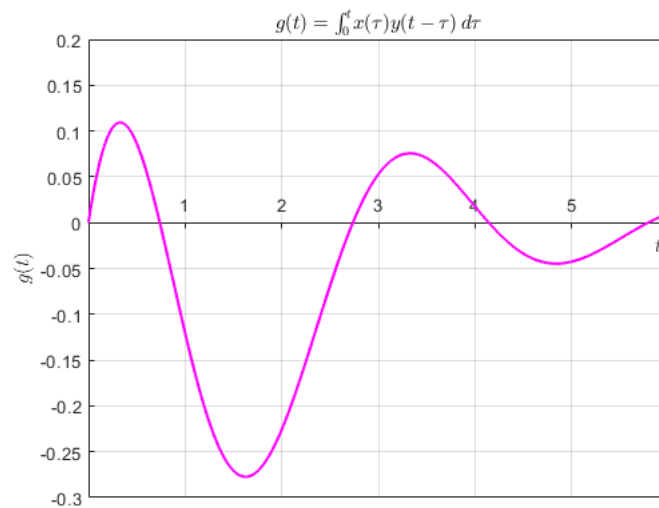


Figura 2: Graficas de la convolución 1

Las gráficas de las señales para el caso específico ($a = \frac{1}{2}, \beta = \omega = 2, \theta = \frac{\pi}{4}, \lambda = -1$) utilizando la formula (12) son:

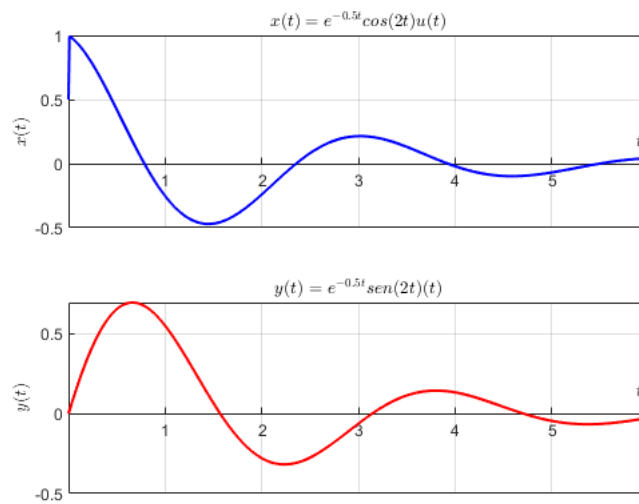


Figura 3: Graficas de las señales $x(t)$ e $y(t)$

La gráfica de la convolución de ambas señales es:

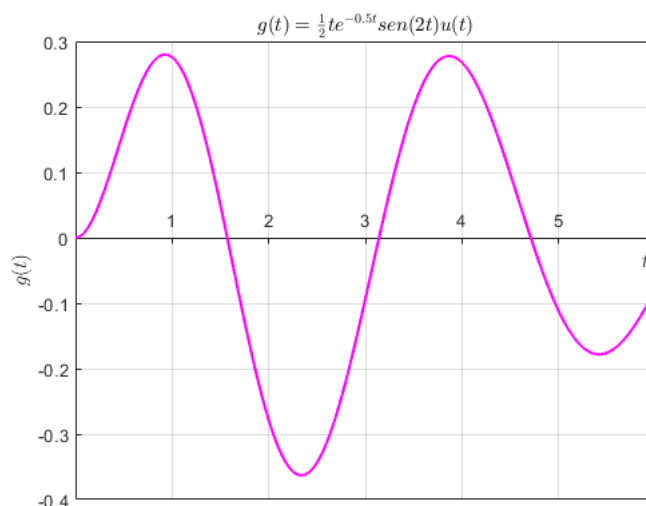


Figura 4: Graficas de la convolución 2

4. Conclusiones.

LaTeX es un sistema de composición de textos, orientado especialmente a la creación de libros, documentos científicos y técnicos que contengan fórmulas matemáticas.

LaTeX está formado por un gran conjunto de macros de TeX, escrito por Leslie Lamport en 1984, con la intención de facilitar el uso del lenguaje de composición tipográfica, TeX, creado por Donald Knuth. Es muy utilizado para la composición de artículos académicos, tesis y libros técnicos, dado que la calidad tipográfica de los documentos realizados con LaTeX es comparable a la de una editorial científica de primera línea.

La convolución es una operación matemática que combina dos señales para producir una tercera señal. En el campo de las señales digitales es muy importante, ya que permite obtener la señal de salida de un sistema a partir de la señal de entrada y la respuesta al impulso. Es la propiedad que se denomina invariante respecto la posición (position-invariant) y es condición necesaria en la definición de las integrales de convolución.

La convolución tiene múltiples aplicaciones en la mecatrónica, una de las más comunes es en la electrónica para el análisis de las señales de entrada y salida.

La ventaja que se presenta al hacer la convolución de dos señales causales y de longitud infinita, es que los límites de integración ya no van desde ∞ a $-\infty$ y se reducen de 0 a un tiempo determinado t , facilitando notablemente el proceso de evaluación al realizar la integral. La ventaja en que sean señales causales reside en el hecho de que la expresión analítica de las señales será la misma siempre para todo $t \geq 0$, evitándonos el trabajo de dividir las integrales por subintervalos debido a los cambios en la geometría de señales no causales.

5. Apéndices.

Los códigos elaborados en MATLAB para las graficas de las señales son:

Para el caso de la formula (11):

```

1  %A continuaci n se muestra el c digo requerido para mostrar las
   graficas de $x(t)$ e $y(t)$ respectivamente
2
3  t=[0:0.001:6];
4
5  x= @(t) exp(-0.5.*t).*cos(2.*t+pi/4).*heaviside(t);
6
7  y= @(t) exp(-t).*heaviside(t);
8
9  subplot(2,1,1)
10 plot(t,x(t),'b','linewidth',1.5)
11 plano = gca;
12 plano.XAxisLocation = origin;
13 plano.YAxisLocation = origin;
14 axis([0 6 -0.8 0.8])
15 grid on
16 xlabel('$\{t\}$','interpreter','latex')
17 ylabel('$x(t)$','interpreter','latex')
18 title('$x(t)=e^{\{-0.5t\}}\cos\{(2t+\frac{\{pi\}}{4})\}u(t)$','interpreter','
   latex')
19
20 subplot(2,1,2)
21 plot(t,y(t),'r','linewidth',1.5)
22 plano = gca;
23 plano.XAxisLocation = origin;
24 plano.YAxisLocation = origin;
25 axis([0 6 0 1])
26 grid on
27 xlabel('$\{t\}$','interpreter','latex')

```

```

28 ylabel('$y(t)$','interpreter','latex')
29 title('$y(t)=e^{-t}u(t)$','interpreter','latex')
30
31 %La convoluci n de las se ales $x(t)$ e $y(t)$ usando $(11)$ es:
32
33 t=[0:0.01:6];
34
35 phi= atan(-2/(-0.5));
36
37 g= @(t) (-cos(pi/4-phi).*exp(-t)+exp(-0.5.*t).*cos(2.*t+pi/4-phi))/(
      sqrt((-0.5)^2+2^2)).*heaviside(t);
38
39 figure
40 plot(t,g(t),'m','linewidth',1.5)
41 plano = gca;
42 plano.XAxisLocation = origin;
43 plano.YAxisLocation = origin;
44 axis([0 6 -0.3 0.2])
45 grid on
46 xlabel('${t}$','interpreter','latex')
47 ylabel('$g(t)$','interpreter','latex')
48 title('$g(t)=\int_{0}^{t}\!x(\tau)y(t-\tau)\,d\tau$','interpreter','
      latex')

```

Para el caso de la formula (12)

```

1 %Las graficas de ambas se ales respectivamente son
2
3 t=[0:0.01:6];
4
5 x1= @(t) exp(-0.5.*t).*cos(2.*t).*heaviside(t);
6
7 y1= @(t) exp(-0.5.*t).*sin(2.*t).*heaviside(t);
8
9 subplot(2,1,1)
10 plot(t,x1(t),'b','linewidth',1.5)
11 plano = gca;
12 plano.XAxisLocation = origin;
13 plano.YAxisLocation = origin;
14 grid on
15 xlabel('${t}$','interpreter','latex')
16 ylabel('$x(t)$','interpreter','latex')
17 title('$x(t)=e^{-0.5t}\cos\{(2t)\}u(t)$','interpreter','latex')

```

```

18
19 subplot(2,1,2)
20 plot(t,y1(t),'r','linewidth',1.5)
21 plano = gca;
22 plano.XAxisLocation = origin;
23 plano.YAxisLocation = origin;
24 grid on
25 xlabel('${t}$','interpreter','latex')
26 ylabel('${y(t)}$','interpreter','latex')
27 title('${y(t)}=e^{-0.5t}\text{sen}\{(2t)\}(t)$','interpreter','latex')
28
29 %La convoluci n de las se ales $x(t)$ e $y(t)$ usando $(12)$ es:
30
31 t=[0:0.01:6];
32
33 g1= @(t) (0.5).*t.*exp(-0.5.*t).*sin(2.*t).*heaviside(t);
34
35 figure
36 plot(t,g1(t),'m','linewidth',1.5)
37 plano = gca;
38 plano.XAxisLocation = origin;
39 plano.YAxisLocation = origin;
40 grid on
41 xlabel('${t}$','interpreter','latex')
42 ylabel('${g(t)}$','interpreter','latex')
43 title('${g(t)}=\frac{1}{2}te^{-0.5t}\text{sen}\{(2t)\}u(t)$','interpreter','latex')

```

Referencias

- [1] B.P.Lathi,Roger Green, *Linear Systems and Signals*,THIRD EDITION, Oxford Univ (Sd)., (2017), 1010.
- [2] Hwei.P.Hsu, *Signals and Systems 2nd (second) edition*, Schaums, 2011.