

Cuaderno de problemas
Fundamentos de algorítmia.

Cálculo de la complejidad de algoritmos recursivos

Prof. Isabel Pita

19 de noviembre de 2020

Índice

1. Coste de una implementación recursiva.	3
1.1. Una llamada recursiva.	3
1.1.1. Disminución del tamaño del problema por sustracción y coste constante de las funciones sucesor y de combinación.	3
1.1.2. Disminución del tamaño del problema por sustracción y coste lineal de las funciones sucesor o de combinación.	3
1.1.3. Disminución del tamaño del problema por división y coste constante de las funciones sucesor y de combinación.	4
1.1.4. Disminución del tamaño del problema por división y coste lineal de las funciones sucesor y de combinación.	5
1.2. Dos llamadas recursivas.	6
1.2.1. Disminución del tamaño del problema por sustracción y coste constante de las funciones sucesor o de combinación.	6
1.2.2. Disminución del tamaño del problema por división y coste constante de las funciones sucesor y de combinación.	6
1.2.3. Disminución del tamaño del problema por división y coste lineal de las funciones sucesor y de combinación.	7

1. Coste de una implementación recursiva.

Para analizar la complejidad de un algoritmo recursivo debemos analizar la complejidad de lo que se hace en cada llamada recursiva y estimar el número de llamadas recursivas que se realizan.

Para calcular el coste de una función recursiva se debe definir la ecuación de recurrencia del algoritmo:

1.1. Una llamada recursiva.

1.1.1. Disminución del tamaño del problema por sustracción y coste constante de las funciones sucesor y de combinación.

- Ejemplo. Función factorial.

```
using lli = long long int;
lli factorial ( int n ){
    if (n == 0) return 1;
    else return n * factorial(n-1); // (n > 0)
}
```

- Ecuación de recurrencia, donde n representa el valor de entrada a la función n :

$$T(n) = \begin{cases} c_0 & \text{si } n = 0 \\ T(n-1) + c_1 & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Donde:

- c_0 es una constante que representa el coste del caso base ($n == 0$).
 - c_1 es una constante que representa el coste de las instrucciones que acompañan a la llamada recursiva (un producto) y el coste de calcular los argumentos de la llamada recursiva (una resta).
 - $T(n-1)$ representa el coste de hacer la llamada recursiva con un argumento una unidad menor.
- Para obtener el orden de complejidad debemos *desplegar* la recurrencia. Para ello:

1. Sustituimos el coste de $T(n-i)$ por su valor para algunos valores de i ($i = 0, 1, 2, 3$).

$$T(n) = T(n-1) + c_1 = T(n-2) + c_1 + c_1 = T(n-3) + c_1 + c_1 + c_1 = \dots$$

2. Obtenemos un término general cuando hemos desplegado k veces:

$$T(n-k) + k * c_1$$

3. Calculamos cuando el despliegue llega a su término, es decir cuando llegamos a $T(0)$. Para obtener $T(0)$ en el término general debemos tener $n-k=0$ y por lo tanto $k=n$

4. El término general cuando terminamos de desplegar la recurrencia, es:

$$T(0) + n * c_1$$

5. El desplegado completo es:

$$T(n) = T(n-1) + c_1 = T(n-2) + c_1 + c_1 = T(n-3) + c_1 + c_1 + c_1 = \dots = T(n-k) + k * c_1 = \dots = T(0) + n * c_1 \in \mathcal{O}(n)$$

6. Por lo tanto el coste está en el orden $\mathcal{O}(n)$, siendo n el valor de entrada al algoritmo.

1.1.2. Disminución del tamaño del problema por sustracción y coste lineal de las funciones sucesor o de combinación.

- Ejemplo:

```
int f ( int n ){
    if (n == 0) return 1;
    else { // (n > 0)
        int x = f(n-1);
        g(n,x);
        return ....
    }
}
```

donde $g(n)$ representa una llamada a función, o un conjunto de instrucciones, cuyo coste de ejecución está en $\mathcal{O}(n)$, siendo n el tamaño del problema.

- El caso base consiste en una comparación, su coste es constante.
- Las instrucciones que acompañan a la llamada recursiva tienen coste $\mathcal{O}(n)$.
- La llamada recursiva se hace con un valor una unidad menor que el valor de entrada a la función.

- Ecuación de recurrencia, donde n representa el valor de entrada n :

$$T(n) = \begin{cases} c_0 & \text{si } n = 0 \\ T(n-1) + n & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

- Despliegue:

$$\begin{aligned} T(n) &= T(n-1) + n \\ &= T(n-2) + (n-1) + n \\ &= T(n-3) + (n-2) + (n-1) + n = \\ &= \dots \\ &= T(n-k) + (n-k+1) + (n-k+2) + \dots + (n-1) + n \\ &= T(n-k) + \sum_{j=0}^{k-1} (n-j) \\ &= T(n-k) + \sum_{j=0}^{k-1} n - \sum_{j=0}^{k-1} j \\ &= T(n-k) + n * k - \frac{k*(k-1)}{2} \\ &= \dots \\ &= T(0) + n * n - \frac{n*(n-1)}{2} \in \mathcal{O}(n^2). \end{aligned}$$

1.1.3. Disminución del tamaño del problema por división y coste constante de las funciones sucesor y de combinación.

- Ejemplo. Búsqueda binaria

```
bool search ( std::vector<int> const& v, int ini, int fin, int x ){
    if (ini == fin) return false; // Vector vacio
    else { // Vector con uno o mas elementos
        int m = (ini + fin - 1) / 2;
        if (v[m] == x) return true;
        else if (x < v[m]) return search(v, ini, m);
        else return search(v, m+1, fin);
    }
}
```

- Los dos casos base tienen coste constante, ya que consisten en comparaciones y operaciones aritméticas.
- Las instrucciones que acompañan a la llamada recursiva son comparaciones y operaciones aritméticas, tienen coste constante.
- La llamada recursiva se hace con la mitad de los elementos del vector de entrada.

- Ecuación de recurrencia, donde n es el número de elementos considerados en el vector: $fin - ini$.

$$T(n) = \begin{cases} c_0 & \text{si } n = 1 \\ T(\frac{n}{2}) + c_1 & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

- Despliegue:

$$\begin{aligned} T(n) &= T(\frac{n}{2}) + c_1 \\ &= T(\frac{n}{2^2}) + c_1 + c_1 \\ &= T(\frac{n}{2^3}) + c_1 + c_1 + c_1 = \\ &= \dots \\ &= T(\frac{n}{2^k}) + k * c_1 \\ &= \dots \\ &= T(1) + \log(n) * c_1 \in \mathcal{O}(\log(n)). \end{aligned}$$

Cálculo del número de veces que se despliega la recurrencia:

$$\begin{aligned} \frac{n}{2^k} &= 1 && \Leftrightarrow \text{Despejando el valor de } n \\ n &= 2^k && \Leftrightarrow \text{Tomando logaritmos en ambos terminos de la igualdad} \\ \log_2(n) &= \log_2(2^k) && \Leftrightarrow \text{Aplicando } \log_2(2^k) = k \log_2(2) \text{ y } \log_2(2) = 1 \\ \log_2(n) &= k \end{aligned}$$

1.1.4. Disminución del tamaño del problema por división y coste lineal de las funciones sucesor y de combinación.

■ Ejemplo.

```
int f ( std::vector<int> & v, int ini, int fin){
    if (ini == fin) return 0; // Vector vacio
    else {
        int m = (ini + fin - 1) / 2;
        if (m ...) {
            int x1 = f(v, ini, m+1);
            // Instrucciones que tratan el resultado de la llamada recursiva
            //con coste lineal en el numero de elementos del vector
        }
        else {
            int x2 = f(v, m+1, fin);
            // Instrucciones que tratan el resultado de la llamada recursiva
            //con coste lineal en el numero de elementos del vector
        }
    }
}
```

- El caso base tienen coste constante, ya que es una instrucción de comparación.
- Las instrucciones que acompañan a la llamada recursiva son comparaciones, operaciones aritméticas con coste constante y una serie de instrucciones cuyo coste es lineal en el número de elementos del vector. El coste es el máximo de todos ellos y por lo tanto lineal en el número de elementos del vector de entrada.
- Las llamadas recursivas se hacen cada una con la mitad de los elementos del vector de entrada.

■ Ecuación de recurrencia, donde n es el número de elementos considerados en el vector: $\text{fin} - \text{ini}$.

$$T(n) = \begin{cases} c_0 & \text{si } n = 1 \\ T(\frac{n}{2}) + n & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

■ Despliegue:

$$\begin{aligned} T(n) &= T\left(\frac{n}{2}\right) + n \\ &= T\left(\frac{n}{2^2}\right) + \frac{n}{2} + n \\ &= T\left(\frac{n}{2^3}\right) + \frac{n}{2^2} + \frac{n}{2} + n = \\ &= \dots \\ &= T\left(\frac{n}{2^k}\right) + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{n}{2^j} \\ &\approx_{(1)} T\left(\frac{n}{2^k}\right) + 2n \\ &= \dots \\ &= T(1) + 2n \in \mathcal{O}(n). \end{aligned}$$

donde (1) se desarrolla como:

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{k-1} \frac{n}{2^j} \\ &= n \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{2^j} \rightarrow \text{Sacando factor común } n \\ &= n \left(\frac{1 - \frac{1}{2^k}}{1 - \frac{1}{2}} \right) \rightarrow \text{Aplicando la suma de la progresión geométrica} \\ &= n \left(2 \left(1 - \frac{1}{2^k} \right) \right) \rightarrow \text{Simplificando} \\ &= \frac{2^k - 1}{2^{k-1}} \rightarrow \text{Simplificando} \\ &\approx_{(1)} 2n \end{aligned}$$

1.2. Dos llamadas recursivas.

1.2.1. Disminución del tamaño del problema por sustracción y coste constante de las funciones sucesor o de combinación.

- Ejemplo: Torres de Hanoi.

```
void hanoi ( int n, int ini, int aux, int fin ){
    if (n > 0) {
        hanoi(n-1, ini, fin, aux);
        std::cout << "mover de " << ini << " a " << fin << '\n';
        hanoi(n-1, aux, ini, fin);
    }
}
```

- Los casos base es vacío, su coste es constante.
 - Las instrucciones que acompañan a las llamadas recursiva, dos restas para calcular los parámetros y una instrucción de escritura tienen coste constante.
 - Las llamadas recursivas se hace con un valor una unidad menor que el valor de entrada a la función.
- Ecuación de recurrencia, donde n representa el valor de entrada n :

$$T(n) = \begin{cases} c_0 & \text{si } n = 0 \vee n == 1 \\ 2T(n-1) + c_1 & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

- Despliegue:

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(n-1) + c_1 \\ &= 2(2T(n-2) + c_1) + c_1 \\ &= 2^2T(n-2) + 2c_1 + c_1 \\ &= 2^2(2T(n-3) + c_1) + 2c_1 + c_1 \\ &= 2^3T(n-3) + 2^2c_1 + 2c_1 + c_1 \\ &= \dots \\ &= 2^kT(n-k) + 2^{k-1}c_1 + 2^{k-2}c_1 + \dots 2c_1 + c_1 \\ &= 2^kT(n-k) + \sum_{j=0}^{k-1} (2^j c_1) \\ &= 2^kT(n-k) + c_1 \sum_{j=0}^{k-1} 2^j \\ &= 2^kT(n-k) + c_1 \frac{2^{k-1}2 - 2^0}{2-1} \\ &= 2^kT(n-k) + c_1 2^k \\ &= \dots \\ &= 2^nT(0) + c_1 2^n \in \mathcal{O}(2^n). \end{aligned}$$

1.2.2. Disminución del tamaño del problema por división y coste constante de las funciones sucesor y de combinación.

- Ejemplo. Esta recurrencia aparece en varios problemas de la asignatura.

```
int f ( std::vector<int> const& v, int ini, int fin){
    if (ini == fin) return 0; // vector vacio
    else {
        int m = (ini + fin - 1) / 2;
        int n1 = f(v, ini, m+1);
        int n2 = f(v, m+1, fin);
        // Instrucciones que combinan el resultado n1 y n2
        // con coste constante
    }
}
```

- El caso base tienen coste constante, ya que es vacío.

- Las instrucciones que acompañan a la llamada recursiva son comparaciones, operaciones aritméticas y las instrucciones que combinan los resultados de las llamadas recursivas, todas ellas con coste constante.
- Las dos llamadas recursivas se hacen cada una con la mitad de los elementos del vector de entrada.

- Ecuación de recurrencia, donde n es el número de elementos considerados en el vector: **fin - ini**.

$$T(n) = \begin{cases} c_0 & \text{si } n = 1 \\ 2T(\frac{n}{2}) + c_1 & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

- Despliegue:

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(\frac{n}{2}) + c_1 \\ &= 2(2T(\frac{n}{2^2}) + c_1) + c_1 \\ &= 2^2T(\frac{n}{2^2}) + c_1 + c_1 \\ &= 2^2(2T(\frac{n}{2^3}) + c_1) + c_1 + c_1 = \\ &= 2^3T(\frac{n}{2^3}) + c_1 + c_1 + c_1 = \\ &= \dots \\ &= 2^kT(\frac{n}{2^k}) + kc_1 \\ &= \dots \\ &= 2^{\log(n)}T(1) + \log(n) * c_1 \in \mathcal{O}(n). \end{aligned}$$

Cálculo del número de veces que se despliega la recurrencia:

$$\begin{aligned} \frac{n}{2^k} &= 1 && \Leftrightarrow \text{Despejando el valor de } n \\ n &= 2^k && \Leftrightarrow \text{Tomando logaritmos en ambos terminos de la igualdad} \\ \log_2(n) &= \log_2(2^k) && \Leftrightarrow \text{Aplicando } \log_2(2^k) = k \log_2(2) \text{ y } \log_2(2) = 1 \\ \log_2(n) &= k \end{aligned}$$

1.2.3. Disminución del tamaño del problema por división y coste lineal de las funciones sucesor y de combinación.

- Ejemplo. Mergesort

```
void mergesort ( std::vector<int> & v, int ini, int fin){
    if (ini + 1 < fin) { // Vector con dos o mas elementos
        int m = (ini + fin - 1) / 2;
        mergesort(v, ini, m+1);
        mergesort(v, m+1, fin);
        mezcla(v, ini, m, fin);
    }
}
```

- El caso base tienen coste constante, ya que es vacío.
- Las instrucciones que acompañan a la llamada recursiva son comparaciones, operaciones aritméticas con coste constante y una llamada a la función **mezcla** cuyo coste es lineal en el número de elementos del vector. El coste es el máximo de todos ellos y por lo tanto lineal en el número de elementos del vector de entrada.
- Las dos llamadas recursivas se hacen cada una con la mitad de los elementos del vector de entrada.

- Ecuación de recurrencia, donde n es el número de elementos considerados en el vector: **fin - ini**.

$$T(n) = \begin{cases} c_0 & \text{si } n = 1 \\ 2T(\frac{n}{2}) + n & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

■ Despliegue:

$$\begin{aligned}
 T(n) &= 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n \\
 &= 2\left(2T\left(\frac{n}{2^2}\right) + \frac{n}{2}\right) + n \\
 &= 2^2T\left(\frac{n}{2^2}\right) + n + n \\
 &= 2^2\left(2T\left(\frac{n}{2^3}\right) + \frac{n}{2^2}\right) + n + n = \\
 &= 2^3T\left(\frac{n}{2^3}\right) + n + n + n = \\
 &= \dots \\
 &= 2^kT\left(\frac{n}{2^k}\right) + kn \\
 &= \dots \\
 &= 2^{\log(n)}T(1) + \log(n) * n \in \mathcal{O}(n \log(n)).
 \end{aligned}$$

Cálculo del número de veces que se despliega la recurrencia:

$$\begin{array}{ll}
 \frac{n}{2^k} = 1 & \Leftrightarrow \text{Despejando el valor de } n \\
 n = 2^k & \Leftrightarrow \text{Tomando logaritmos en ambos terminos de la igualdad} \\
 \log_2(n) = \log_2(2^k) & \Leftrightarrow \text{Aplicando } \log_2(2^k) = k \log_2(2) \text{ y } \log_2(2) = 1 \\
 \log_2(n) = k &
 \end{array}$$