Relación masa-luminosidad

Á.Fuentes

Universidad de Córdoba

February 10, 2026

Índice

Ecuaciones diferenciales para el interior estelar

Del capitulo 5 de los apuntes, hemos obtenido las siguientes ecuaciones diferenciales para describir el interior estelar:

1. Ecuación de Equilibrio Hidrostatico

$$\frac{dP}{dr} = -\rho(r)\frac{GM_r}{r^2} \tag{1}$$

2. Ecuación de continuidad para la masa

$$\frac{dM_r}{dr} = \rho(r)4\pi r^2 \tag{2}$$

3. Para la luminosidad (ecuación para el balance de energía)

$$\frac{dL_r}{dr} = \varepsilon\rho(r)4\pi r^2 \tag{3}$$

Ecuaciones diferenciales para el interior estelar

4. Ecuación de transporte radiativo

$$\frac{dT^4}{dr} = -\rho(r)\frac{\frac{\kappa}{4\pi\sigma}L_r(r)}{r^2} \tag{4}$$

5. Ecuación de transporte convectivo

$$\frac{dT}{dr} = (1 - \frac{1}{\gamma})\frac{T}{P}\frac{dP}{dr} \tag{5}$$

6. Ecuación de estado

$$P(r) = \frac{k_B}{m}\rho(r)T(r) \tag{6}$$

Integración en un solo paso

Este método consiste en hacer los siguientes cambios para resolver las ecuaciones vistas anteriormente, para las variables que aparecen en ellas:

$$X = \frac{x(r=R) - x(r=0)}{2} \tag{7}$$

y los diferenciales se convierten en incrementos de forma que:

$$dX \approx \Delta X = X(r=R) - X(r=0) \tag{8}$$

Ejemplo (Ecuación de equilibrio hidrostático (1))

$$P(R) - P(0) = -G\frac{\frac{M(R)+M(0)}{2} \cdot \frac{\rho(R)+\rho(0)}{2}}{(\frac{R+0}{2})^2} \rightarrow P_0 = G\frac{M\rho_0}{R} \tag{9}$$

Soluciones

Aplicando este método llegamos a las siguientes expresiones (consideramos el ejemplo anterior para (1)):

- Para (2):

$$M = \frac{\pi}{2}\rho_0 R^3 \tag{10}$$

- Para (3):

$$L_r = \frac{R^3 \pi \varepsilon}{4}\rho_0 \tag{11}$$

Soluciones y expresión de la ecuación de estado

- De la ecuación (4)

$$\boxed{L_r = \frac{R^3 \pi \varepsilon}{4} \rho_0 \qquad (12)}$$

Usando estas expresiones podemos escribir la ecuación de estado como:

$$P_0 = \frac{2\rho_0}{m_p} k_B T_0 \qquad (13)$$

De la ecuación de la masa podemos despejar ρ_0, lo que nos permite sustituir en la expresión de P_0

$$\rho_0 = \frac{2M}{\pi R^3} \xrightarrow{(9)} P_0 = \frac{2GM}{\pi R^4} \qquad (14)$$

De la ecuación de estado y considerando la solución de (4). Tenemos

$$T_0 = \frac{GMm_p}{2Rk_b} \xrightarrow{(12)} L = \frac{\pi^2\sigma}{k}\left(\frac{Gm_p}{2k_B}\right)^4 M^3 \tag{15}$$

Lo que nos permite llegar por fin a la relación que buscamos

$$L \propto M^3 \tag{16}$$

Podemos usar esta relación con los valores del Sol, ya que son conocidos. de forma que:

$$\frac{L_*}{L_\odot} = \left(\frac{M_*}{M_\odot}\right)^3 \tag{17}$$

El resto de relaciones que estudiaremos a continuación son aproximadas:

Tiempo de vida nuclear

- Podemos considerar constante T_0, de forma que:

$$\frac{M}{R} = \frac{2T_0 k_B}{Gm_p} \approx \text{cte} \tag{18}$$

de forma que la relación radio-masa queda:

$$\boxed{R \propto M} \tag{19}$$

- La relación entre la densidad (central) y la masa vendrá dada por:

$$\rho_0 = \frac{2M}{\pi R^3} \rightarrow \rho_0 = M^{-2} \tag{20}$$

- La relación emisividad-masa vendrá dada por

$$\varepsilon_0 = \frac{4}{\pi}\frac{L}{\rho_0 R^3} \propto \frac{1}{M^{-2}}\frac{M^3}{M^3} \to \varepsilon_0 \propto M^2 \tag{21}$$

- Y para la relación entre la presión central con masa:

$$P_0 = \frac{2}{\pi}\frac{GM^2}{R^4} \to P_0 \propto \frac{M^2}{M^4} = M^{-2} \tag{22}$$

Llegados a este punto podemos encontrar una relación entre el tiempo de vida nuclear de una estrella y su masa:

$$t_{nuc} \propto \frac{\text{Cantidad de combustible nuclear}}{\text{Potencia con la que se gasta}} \propto \frac{M}{L} \propto \frac{M}{M^3} = \frac{1}{M^2} \tag{23}$$

entonces tenemos que

$$\boxed{t_{nuc} \propto M^{-2} \tag{24}}$$

Ecuación de estado

Las enanas blancas son un remanente estelar que se genera cuando una estrella de masa menor a $10M_\odot$ han agotado su combustible nuclear. Para el modelo relativista tenemos la siguiente ecuación de estado

$$P = K_1\rho^{5/3} \tag{25}$$

Aplicamos las relaciones obtenidas anteriormente como solución de (1) y (2) para sacar las siguientes conclusiones. De la ecuación de estado al iguala con (9):

$$\frac{\rho_0 GM}{R} = K_1\rho_0^{5/3} \tag{26}$$

despejando ρ_0 para despues despejar en la ecuación de continuidad de la masa

$$\rho_0 = \left(\frac{GM}{K_1}\right)^{3/2} R^{-3/2} \tag{27}$$

Relación radio masa

$$M = \frac{\pi}{2}\left(\frac{GM}{K_1}\right)^{3/2} R^{-3/2} R^3 \rightarrow M = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \left(\frac{K_1}{G}\right)^3 R^{-3} \tag{28}$$

de donde se obtiene la relación

$$M \propto R^{-3} \rightarrow R \propto M^{-1/3} \tag{29}$$

El radio de la estrella disminuye conforme aumenta su masa

Ecuación de estado

El razonamiento es similar al anterior, pero esta vez nuestra ecuación de estado será

$$P_0 = K_2 \rho_0^{4/3} \tag{30}$$

de forma que:

$$\frac{\rho_0 GM}{R} = K_2 \rho_0^{4/3} \rightarrow \rho_0 = \left(\frac{GM}{K_2 R}\right)^3 \tag{31}$$

y de la ecuación de continuidad de la masa

$$M = \frac{\pi}{2}\left(\frac{GM}{K_2 R}\right)^{3/2} R^3 \rightarrow M^2 \equiv \text{cte} \tag{32}$$

Hemos llegado al valor máximo para la masa de una enana blanca: el límite de Chandrasekhar. Con valor:

$$M_{CH} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\left(\frac{K_2}{G}\right)^{3/2} = 1,44 M_\odot \tag{33}$$