



Demostración del teorema de Cauchy-Peano

Universidad de Córdoba

Autores: Á. Fuentes, L. Lobato, J. Martín, I. Pérez
19 de diciembre de 2025

Resumen

El teorema de Cauchy-Peano es un resultado clásico en el desarrollo de la teoría de ecuaciones diferenciales buscamos dar una demostración completa de este resultado con este trabajo. Durante los preliminares se dan varias definiciones y dos teoremas fundamentales, el de Arzelá-Ascoli y el del punto fijo de Banach, en el estudio de las ecuaciones diferenciales.

Usaremos el método de las poligonales de Euler para demostrar el teorema de Cauchy-Peano y distinguiremos dos casos, uno local, y otro global donde extenderemos la solución.

En la última sección se presentan teoremas y resultados que nos garantizan que la solución que obtenemos es única comparando estos teoremas y sus implicaciones con el teorema de Cauchy-Peano

Palabras Clave: Ecuaciones Diferenciales. Teorema de existencia de solución. Problema de Cauchy

1 Introducción

Los avances en el desarrollo de la teoría de ecuaciones diferenciales hicieron que surgiera, al inicio del siglo XIX, el problema de existencia de soluciones. Cauchy se encargó de definir el problema de valores iniciales y de asegurar que quedara completamente determinado, como él mismo escribió, surgiendo así los conocidos como problemas de Cauchy. Lo cual supuso un cambio en el estudio de esta disciplina ya que durante el siglo XVIII se asumía directamente la existencia de una solución general.

Nuestro objeto de estudio, entonces, son los dichos problemas de Cauchy, ecuaciones diferenciales que se restringen para que cumplan ciertas condiciones dadas.

Entonces resulta fundamental definir qué es una solución para un problema de Cauchy.

Definición 1.1. Consideremos el problema de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

donde $f : D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función dada, $t_0 \in \mathbb{R}$ y $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Se dice que una función $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida en un intervalo abierto I que contiene a t_0 , es una **solución del problema de Cauchy** si cumple simultáneamente la condición inicial y es solución de la ecuación diferencial.

Centraremos este trabajo en demostrar teoremas que nos permiten establecer la existencia de solución.

2 Preliminares

En esta sección introduciremos algunas definiciones y resultados clave que nos serán de utilidad más adelante. Antes de comenzar, conviene aclarar que varios de los resultados que buscamos probar se verifican para cualquier norma definida sobre \mathbb{R}^n debido a que todas ellas son equivalentes, no profundizaremos mucho en este concepto, pero, sí resulta interesante dar las siguientes definiciones antes de comenzar el desarrollo del teorema.

Definición 2.1 (Distancias equivalentes en un conjunto E). Se dice que dos distancias en un conjunto E son equivalentes, cuando generan la misma topología, es decir, los conjuntos abiertos para ambas distancias son los mismos.

Definición 2.2 (Normas equivalentes). Decimos que dos normas en un mismo espacio vectorial X son equivalentes cuando lo son las distancias asociadas, esto es, cuando las topologías de ambas normas coinciden.

Por ello en nuestro desarrollo podremos usar cualquier norma.

2.1 Algunos conceptos básicos

Pasemos ahora a introducir algunos conceptos básicos de topología.

Definición 2.3 (Acotación Uniforme). Sea $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones donde $f_k : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. Se dice que $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ está uniformemente acotada en E si existe un $M > 0$ tal que para todo $x \in E$ y para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $|f_k(x)| \leq M$.

Ejemplo 2.1. Veamos un par de ejemplos de acotación uniforme:

- i) La sucesión de funciones $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ donde $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $f_k(x) = \cos(kx)$ es uniformemente acotada, ya que $|f_k(x)| = |\cos(kx)| \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$.
- ii) La sucesión de funciones $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ donde $f_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ y $f_k(x) = x/k$ es uniformemente acotada en $[0, 1]$, ya que $|f_k(x)| = |x/k| \leq 1, \forall x \in [0, 1]$.

Para nuestro desarrollo, resulta de gran importancia el concepto de equicontinuidad uniforme, pero antes vamos a recordar los conceptos de continuidad y continuidad uniforme en un conjunto.

Definición 2.4 (Continuidad). La función $f : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ se dice continua puntualmente en $x_1 \in E$ si para todo $\epsilon > 0$ existe δ tal que si $x_1, x_2 \in E$ y $|x_1 - x_2| < \delta$ entonces $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$. Se dice que f es continua en el conjunto E si es continua en todo punto $x_1 \in E$

Definición 2.5 (Continuidad uniforme). La función $f : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ es uniformemente continua en E si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x_1, x_2 \in E$ y $|x_1 - x_2| < \delta$, entonces $|f(x_1, x_2)|$.

La continuidad uniforme supone una condición más fuerte que la continuidad. Ambas son equivalentes si E es un compacto.

Ahora, si estamos en condiciones de definir equicontinuidad uniforme, cabe aclarar que esta será la equicontinuidad a la que nos referiremos cuando hablemos de sucesión equicontinua.

Definición 2.6 (Equicontinuidad uniforme). Sea $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones donde $(f_k) : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. Se dice que $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es uniformemente equicontinua en E si para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todos $x_1, x_2 \in E$ con $|x_1 - x_2| < \delta$ y para todo $k \in \mathbb{N}$ se cumple que $|f_k(x_1) - f_k(x_2)| < \epsilon$.

2.2 Teorema de Arzelà-Ascoli

En esta sección enunciaremos este teorema, en [1] se detalla su estudio y demostración, aportando ejemplos útiles para el desarrollo de este trabajo.

Teorema 2.1 (Teorema de Arzelà-Ascoli). Sea $(f(k))_{k \in \mathbb{N}}$ una familia de funciones equicontinua y uniformemente acotada donde $(f_k) : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ con E acotado. Entonces, existe una subsucesión de funciones $(f(k))_{k \in \mathbb{N}}$ uniformemente convergente en E .

Más adelante usaremos este teorema en la demostración del Teorema de Cauchy-Peano, que es el objetivo principal de este trabajo.

2.3 Teoremas de Punto Fijo

En esta sección de nuestro trabajo, haremos un repaso a la definición de aplicaciones contractivas, que utilizaremos para encontrar puntos fijos, a través de los teoremas de punto fijo. La referencia [2] amplía y da base a lo que se propone en esta sección.

Por lo tanto comenzemos dando una definición para el concepto de aplicación contractiva.

Definición 2.7 (Aplicación Contractiva). Sea $T : E \rightarrow E$ una aplicación donde E es un espacio métrico con la métrica d . Se dice que la aplicación es contractiva si existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $0 < k < 1$ y de manera que para todo $x_1, x_2 \in E$ se verifica que

$$d(T(x_1), T(x_2)) \leq d(x_1 - x_2).$$

Observamos que se tiene por definición que toda aplicación contractiva es continua, en la referencia [1] se da una demostración de como toda aplicación contractiva es uniformemente continua.

Vamos a introducir ahora el teorema del punto fijo de Banach nos garantiza tanto la existencia como la unicidad del punto fijo bajo la hipótesis de que E sea completo.

Teorema 2.2 (Teorema del punto fijo de Banach). *Sea $T : E \rightarrow E$ una aplicación contractiva donde E es un espacio métrico completo. Entonces, existe un único punto fijo para T , es decir existe un único $x \in E$ tal que $T(x) = x$.*

Demostración. Comencemos probando la existencia de punto fijo. Sea $x_0 \in E$ fijo. Definimos la sucesión dada por $x_1 = T(x_0)$ y

$$x_k = T(x_{k-1}), \quad \forall k > 1.$$

Veamos, en primer lugar, que la sucesión $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy. Como T es una aplicación contractiva, existe α tal que $0 \leq \alpha \leq 1$ y

$$d(x_{k+1}, x_k) = d(T(x_k), T(x_{k-1})) \leq \alpha d(x_k, x_{k-1}).$$

Repitiendo el proceso sucesivamente, obtenemos que

$$d(x_{k+1}, x_k) \leq \alpha d(x_k, x_{k-1}) \leq \alpha^2 d(x_{k-1}, x_{k-2}) \leq \dots \leq \alpha^k d(x_1, x_0).$$

Ahora, dado $\varepsilon > 0$ y cualquier $p \in \mathbb{N}$, aplicando la desigualdad triangular, resulta que

$$\begin{aligned} d(x_{k+p}, x_k) &\leq d(x_{k+p}, x_{k+p-1}) + d(x_{k+p-1}, x_{k+p-2}) + \dots + d(x_{k+1}, x_k) \\ &\leq (\alpha^{k+p-1} + \alpha^{k+p-2} + \dots + \alpha^k) d(x_1, x_0) = \left(\sum_{i=k}^{k+p-1} \alpha^i \right) d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

A continuación, como $0 < \alpha < 1$, podemos escribir el primer factor del último término como la diferencia de dos sumas geométricas, es decir,

$$\sum_{i=k}^{k+p-1} \alpha^i = \sum_{i=0}^{k+p-1} \alpha^i - \sum_{i=0}^{k-1} \alpha^i = \frac{1 - \alpha^{k+p}}{1 - \alpha} - \frac{1 - \alpha^k}{1 - \alpha}.$$

Por lo tanto, resulta que

$$d(x_{k+p}, x_k) = \frac{\alpha^k - \alpha^{k+p}}{1 - \alpha} d(x_1, x_0) \leq \frac{\alpha^k}{1 - \alpha} d(x_1, x_0) < \varepsilon,$$

para k suficientemente grande, dado que $0 < \alpha < 1$. Así, tenemos que efectivamente la sucesión $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy. Como el espacio métrico E es completo, sabemos que existe el límite de $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$, al que llamamos x , y como T es uniformemente continua, tenemos que

$$T(x) = T\left(\lim_{k \rightarrow \infty} x_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} T(x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{k+1} = x,$$

por lo que x es un punto fijo de E .

Por último, veamos que este punto fijo es único. Supongamos por reducción al absurdo que existe otro punto fijo $y \in E$, $y \neq x$. Entonces, teniendo en cuenta que T es contractiva, si calculamos la distancia entre ambos puntos fijos obtenemos

$$d(x, y) = d(T(x), T(y)) \leq \alpha d(x, y) < d(x, y),$$

lo cual es absurdo. Por lo tanto, x es el único punto fijo de E . \square

3 Teorema de Cauchy-Peano

Las soluciones de un problema de Cauchy, en caso de existir, pueden ser locales o globales, en función de donde estén definidas.

La principal diferencia está en el conjunto en el que definimos la función f , dado que si tomamos un pequeño entorno de (x_0, y_0) solo podremos garantizar que la solución encontrada esté definida en un cierto intervalo, que dependerá de la condición inicial.

Por otro lado, si tomamos como dominio de definición la banda dada por $[a, b] \times \mathbb{R}^n$ con $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $x_0 \in [a, b]$, cabe esperar que la solución sea global, es decir, que esté definida en todo $[a, b]$, sin depender de x_0 .

Estas diferencias resultan clave, y es por ello que presentamos dos versiones distintas del Teorema de Cauchy-Peano, una garantiza la existencia de solución local y la otra afirma que existe al menos una solución global.

Antes de enunciar el teorema vamos a probar un proposición que nos sera útil para demostrar la existencia y unicidad de solución para un problema de Cauchy.

Proposición 3.1. *Sea (PC) un problema de Cauchy donde $f : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continua. Buscar una solución $y(x)$ de (PC) es equivalente a buscar una función $y : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua en I que cumpla la siguiente igualdad:*

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds \quad \forall x \in I \quad (1)$$

Demostración. Demostraremos la equivalencia anterior probando ambas implicaciones:

\implies) Sea $y(x)$ una solución del problema de Cauchy dado. Entonces, se cumple que $y'(x) = f(x, y(x))$ para todo $x \in I$ y obtenemos, integrando, que

$$\int_{x_0}^x y'(s) ds = \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds \quad \forall x \in I$$

y, por la regla de Barrow,

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds \quad \forall x \in I.$$

\impliedby) Sea $y(x)$ continua en I tal que verifique (1). Derivando esta igualdad, cosa que podemos hacer por el Teorema Fundamental del Cálculo, obtenemos que

$$y'(x) = 0 + f(x, y(x))$$

para todo $x \in I$. Además, vemos claramente que y es una función de clase C^1 , dado que su derivada $f(x, y(x))$ es continua. Asimismo, sustituyendo $x = x_0$ en (1), tenemos que

$$y(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} f(s, y(s)) ds = y_0 + 0 = y_0.$$

Por lo tanto, $y(x)$ es solución del problema de Cauchy (PC). □

3.1 Existencia de solución local

A lo largo de este punto trataremos el primer teorema de existencia de solución del problema de Cauchy, donde nos basaremos en la forma integral del problema de Cauchy (Proposición 3.1), en las conocidas como poligonales de Euler y en el Teorema de Arzelà-Ascoli (Teorema 2.1), para probar la existencia de solución local definida en un cierto intervalo.

Teorema 3.1 (Teorema local de Cauchy-Peano). *Sea el problema de Cauchy (PC) donde $f : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continua y D es un entorno de $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ fijado. Entonces, existe al menos una solución local de (PC) y está definida en el intervalo $I = [x_0 - h, x_0 + h]$, con $h = \min\{a, b/M\}$, siendo $R := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\} \subset D$ y $M = \max_R |f(x, y)|$.*

Demostración. Para probar este resultado vamos a utilizar las denominadas poligonales de Euler, que definiremos a continuación.

Fijado $k \in \mathbb{N}$, queremos dividir el intervalo $I = [x_0 - h, x_0 + h]$ donde $h = \min\{a, b/M\}$ en $2k$ subintervalos de igual longitud. Para ello, tomamos $h_k = h/k$. Así, los subintervalos tendrán sus correspondientes extremos en los puntos

$$x_{i,k} = x_0 + i h_k, \quad i = -k, -k+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, k-1, k.$$

De esta manera, para cada $k \in \mathbb{N}$, tenemos la siguiente cadena de desigualdades:

$$x_0 - h = x_{-k,k} < x_{-k+1,k} < \dots < x_{-1,k} < x_{0,k} = x_0 < x_{1,k} < \dots < x_{k-1,k} < x_{k,k} = x_0 + h.$$

Estos puntos que hemos encontrado nos servirán como la primera coordenada de los vértices de las poligonales de Euler que vamos a definir a continuación.

Para cada k , definimos, en primer lugar,

$$p_k(x_0, k) = p_k(x_0) = y_0.$$

Ahora, ya fijada la poligonal como el valor de la condición inicial $y(x_0) = y_0$, la extendemos a los subintervalos situados a la derecha de x_0 ; es decir, aquellos subintervalos contenidos en $[x_0, x_0 + h]$. Comenzamos en el intervalo $(x_0, x_{1,k}]$, donde la idea que vamos a seguir consiste en obtener un segmento contenido en la recta con pendiente la función f evaluada en (x_0, y_0) y ajustada para que pase por (x_0, y_0) . Es decir,

$$p_k(x) = p_k(x_0) + (x - x_0)f(0, p_k(x_0)), \quad x \in (x_0, x_{1,k}].$$

Extendiendo esta misma idea al caso general, suponiendo ya definida la poligonal en $x_{i,k}$ para $i \in \{0, \dots, k-1\}$, tendremos en $(x_{i,k}, x_{i+1,k})$ la ecuación de una recta que tendrá como pendiente la función f evaluada en el punto anterior, $f(x_{i,k}, p_k(x_{i,k}))$, y que pasa por $(x_{i,k}, p_k(x_{i,k}))$. Es decir,

$$p_k(x) = p_k(x_{i,k}) + (x - x_{i,k})f(x_{i,k}, p_k(x_{i,k})), \quad x \in (x_{i,k}, x_{i+1,k}].$$

Ahora, pasamos a definir de manera análoga la poligonal en los subintervalos situados a la izquierda de x_0 , contenidos en $[x_0 - h, x_0]$. En primer lugar, en $[x_{-1,k}, x_0]$ tomamos

$$p_k(x) = p_k(x_0) + (x - x_0)f(x_0, p_k(x_0)), \quad x \in [x_{-1,k}, x_0],$$

que está en la misma recta que el segmento definido para $x \in (x_0, x_{1,k}]$. Esto se debe a que ambos segmentos tienen como extremo común el vértice (x_0, y_0) y tienen la misma pendiente, pues en ambos casos partimos de x_0 al calcular $p_k(x)$, aunque en distintas direcciones.

En general, para $i \in \{0, \dots, k-1\}$, suponiendo ya definida la poligonal en $x_{-i,k}$, tomamos en $[x_{-i-1,k}, x_{-i,k})$ el segmento definido por

$$p_k(x) = p_k(x_{-i,k}) + (x - x_{-i,k})f(x_{-i,k}, p_k(x_{-i,k})), \quad x \in [x_{-i-1,k}, x_{-i,k}),$$

siguiendo la misma idea que antes.

A continuación, en la página 22/23 de [1] vemos la representación gráfica de una de estas poligonales que acabamos de definir. En este caso, para simplificar, representamos la poligonal en dos dimensiones, y tomamos $k=3$. Aquí, supongamos que $h = \min\{a, b/M\} = a$ y vemos que la poligonal está definida en $I = [x_0 - a, x_0 + a]$ y tiene $2k = 6$ segmentos definidos en los correspondientes subintervalos de I .

De esta manera, los valores de a y b nos ayudan a encontrar el intervalo I en el que definir las poligonales y, más adelante, la solución del problema de Cauchy. Notemos que al ser $M = \max_R |f(x, y)|$ las poligonales nunca se van a salir de las secciones en magenta delimitadas por las rectas $y = y_0 \pm M(x - x_0)$, dado que la pendiente de cada segmento nunca puede ser, en valor absoluto, mayor que M .

Viendo las figuras 2.1 y 2.1 de [1], parece razonable pensar en cómo serían las poligonales a medida que vamos aumentando el valor de k . Evidentemente el número de segmentos que forman cada poligonal aumentará con el incremento de k , pero, ¿qué pasa cuando $k \rightarrow \infty$? Podríamos pensar que estas poligonales quizás tiendan cuando $k \rightarrow \infty$ a una función que verifique la ecuación diferencial $y'(x) = f(x, y(x))$ y sea solución del problema de Cauchy (PC). Veremos que ocurre así para una subsucesión de dichas poligonales. Para ello, necesitamos aplicar el Teorema de Arzelà-Ascoli, Teorema 2.1, para lo cual hemos de verificar que se cumplen las siguientes hipótesis sobre la sucesión de poligonales $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$:

1) Bien definida: Hemos definido las poligonales a través de la función f , que está definida en el conjunto $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, evaluando esta función en ciertos puntos $(x, p_k(x))$, $x \in I$. Por ello, para probar que p_k está bien definida, tenemos que asegurarnos de que todos los puntos $(x, p_k(x))$ están en D .

Por hipótesis, sean $a, b > 0$ y sea $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\} \subset D$. Vamos a probar directamente que todos los puntos $(x, p_k(x))$ con $x \in I$ pertenecen a R , por lo que también estarán en D . Como el punto $(x_0, p_k(x_0)) \in R$, pues $p_k(x_0) = y_0$, definimos

$$\tilde{h} = \sup\{\rho \in [0, h] : \forall x \in [x_0 - \rho, x_0 + \rho], (x, p_k(x)) \in R\}.$$

Ahora, para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos la función $q_k : [x_0 - \tilde{h}, x_0 + \tilde{h}] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ de forma que

$$q_k(x) = \begin{cases} f(x_{-i,k}, p_k(x_{-i,k})) & \text{si } x \in [x_{-i-1}, x_{-i,k}), \\ f(x_0, y_0) & \text{si } x = x_0 \\ f(x_{-i,k}, p_k(x_{-i,k})) & \text{si } x \in (x_{i,k}, x_{i+1,k}]. \end{cases} \quad (2)$$

Como q_k toma los valores de $f(x, y)$ en puntos $(x, y) \in R$, podemos decir que $|q_k(x)| \leq M$ con $x \in [x_0 - \tilde{h}, x_0 + \tilde{h}]$, siendo $M = \max_R |f(x, y)|$. En realidad, $q_k(x)$ es la derivada a trozos de $p_k(x)$, por cómo la hemos definido. Notemos que la poligonal $q_k(x)$ es continua y que su derivada, $q_k(x)$, es continua a trozos en $[x_0 - \tilde{h}, x_0 + \tilde{h}]$. Por ello, si $x \in [x_0, x_0 + \tilde{h}] \subset I$ existe un i tal que $x \in (x_{i,k}, x_{i+1,k})$ y, así, si aplicamos sucesivamente la definición de la poligonal, tenemos que

$$\begin{aligned} p_k(x) &= p_k(x_{i,k}) + (x - x_{i,k})f(x_{i,k}, p_k(x_{i,k})) = p_k(x_{i,k}) + \underbrace{\int_{x_{i,k}}^x f(x_{i,k}, p_k(x_{i,k})) ds}_{q_k(s)} = \\ &= p_k(x_{i-1,k}) + \int_{x_{i-1,k}}^{x_{i,k}} q_k(s) ds + \int_{x_{i,k}}^x q_k(s) ds = \dots = y_0 + \int_{x_0}^x q_k(s) ds. \end{aligned} \quad (3)$$

De esta manera, si $x \in [x_0, x_0 + \tilde{h}]$, tendremos que

$$|p_k(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x q_k(s) ds \right| \leq \int_{x_0}^x |q_k(s)| ds \leq \max_{x \in [x_0 - \tilde{h}, x_0 + \tilde{h}]} |q_k(s)| |x - x_0| \leq M\tilde{h} \leq Mh \leq b, \quad (4)$$

aplicando que $\tilde{h} \leq h$ por definición de \tilde{h} , que M es no negativo y que es como mucho b/M por definición de h . De forma análoga se prueba para $x \in [x_0 - \tilde{h}, x_0]$.

Ya hemos mencionado que $\tilde{h} \leq h$, pero si suponemos que $\tilde{h} < h$ entonces tendríamos que $|p_k(x) - y_0| \leq b$ para todo $x \in [x_0 - \tilde{h}, x_0 + \tilde{h}]$ y $\tilde{h} < h \leq a$, pues h no puede ser mayor que a por definición. Sin embargo, esto entra en contradicción con nuestra definición de \hat{h} , dado que podríamos encontrar un valor mayor de \tilde{h} , \hat{h} , tal que para todo punto x en el intervalo $[x_0 - \hat{h}, x_0 + \hat{h}]$ se cumpla que $(x, p_k(x)) \in R$. Por ello, tiene que ser $\tilde{h} = h$, lo que implica que todas las poligonales $p_k(x)$ están contenidas en R y, por tanto, también en D .

2) **Equicontinuidad.** Para $x, x' \in [x_0 - h, x_0 + h]$ distintos, tenemos que:

$$|p_k(x) - p_k(x')| = \left| \int_x^x q_k(s) ds \right| \leq M|x - x'| \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

donde la igualdad se deduce de (3) y la desigualdad se tiene por ser M cota superior de q_k . Aplicando la definición 2.6 podemos concluir que la sucesión de poligonales $(p_k(x))_{k \in \mathbb{N}}$ es equicontinua.

3) **Uniformemente acotada.** Sumando cero a $p_k(x)$ y aplicando la desigualdad triangular, obtenemos que

$$|p_k(x)| = |p_k(x) - y_0 + y_0| \leq |p_k(x) - y_0| + |y_0| \quad (5)$$

Por (4), sabemos que $|p_k(x) - y_0| \leq b$ para $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$, y aplicando (5) obtenemos

$$|p_k(x)| \leq b + |y_0|,$$

por lo que $(p_k(x))_{k \in \mathbb{N}}$ es uniformemente acotada.

Además, necesitamos comprobar la condición de que $E \subset \mathbb{R}$ sea acotado. En nuestro caso, $E = I = [x_0 - h, x_0 + h]$, que es claramente un intervalo acotado. Ahora, aplicando el Teorema de Arzelà–Ascoli, Teorema 2.1, tenemos que existe una subsucesión de poligonales $(p_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ que converge uniformemente a una cierta función p , continua en I . Sin embargo, aún tenemos que probar que esta función p es solución del problema (PC). Para ello, veremos, en primer lugar, que $(q_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente en I a q , donde $q(x) = f(x, p(x))$, $x \in I$. Después, en segundo lugar, utilizaremos esta convergencia uniforme para probar que p verifica la ecuación integral correspondiente a nuestro problema de Cauchy, y aplicando la Proposición 3.1 obtendremos finalmente que p es solución de (PC).

1) Para probar que $(q_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a q en I , tenemos que comprobar que, para todo $\varepsilon > 0$ existe j_0 tal que si $j \geq j_0$, para todo $x \in I$ se cumple que

$$|q_{k_j}(x) - f(x, p(x))| < \varepsilon.$$

Sea $\varepsilon > 0$ fijo. Como f es continua en $R \subset \mathbb{R}^{n+1}$ compacto, también es uniformemente continua en él, por lo que existe δ_1 que cumple que si $(x, y), (x', y') \in R$ y $|x - x'| + |y - y'| < \delta_1$, entonces $|f(x, y) - f(x', y')| < \varepsilon/2$. Además, como p es continua en el intervalo compacto I , también es uniformemente continua en él, por lo que existe δ_2 con $\delta_2 < \delta_1/2$ y tal que si $x, x' \in I$ y $|x - x'| < \delta_2$, entonces $|p(x) - p(x')| < \delta_1/2$.

Ahora, como $(p_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a p , sabemos que existe j_0 tal que para $j \geq j_0$ se verifica $|p_{k_j}(x) - p(x)| < \delta_1$ para $x \in I$. Además, podemos tomar j_0 tal que $h/k_j < \delta_2$ para $j \geq j_0$. Por ello, si $x \in I$ entonces $x \in (x_{i,k_j}, x_{i+1,k_j}]$, para algún i , y se tiene

$$\begin{aligned} |q_{k_j}(x) - f(x, p(x))| &= |f(x_{i,k_j}, p_{k_j}(x_{i,k_j})) - f(x, p(x))| \leq \\ &\leq |f(x_{i,k_j}, p_{k_j}(x_{i,k_j})) - f(x_{i,k_j}, p(x_{i,k_j}))| + |f(x_{i,k_j}, p(x_{i,k_j})) - f(x, p(x))| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

para $j \geq j_0$, donde la primera desigualdad resulta de sumar cero y aplicar la desigualdad triangular, mientras que la segunda desigualdad resulta de aplicar la continuidad uniforme de f y p al segundo término y la convergencia uniforme de $(p_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ con la continuidad uniforme de f al primer término.

2) Veamos que $p(x)$ verifica la forma integral de (PC), es decir, la ecuación (1). Por (3), tenemos que

$$p_{k_j}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x q_{k_j}(s) ds.$$

Basta con tomar límites cuando $j \rightarrow \infty$ a ambos lados de la igualdad, aplicando el Teorema de la Convergencia Dominada, dado que $|q_{k_j}| \leq M$, y también que $(q_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a q con $q(x) = f(x, p(x))$. Por lo tanto,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x q_{k_j}(s) ds = \int_{x_0}^x \lim_{j \rightarrow \infty} q_{k_j}(s) ds = \int_{x_0}^x f(s, p(s)) ds.$$

Así, obtenemos finalmente que

$$p(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, p(s)) ds,$$

y, efectivamente, $p(x)$ verifica la ecuación integral del problema de Cauchy.

Por lo tanto, aplicando la Proposición 3.1 obtenemos que $p(x)$ es solución del problema de Cauchy y, así, queda probado el Teorema de existencia de Cauchy-Peano de forma local. \square

Observamos que, aunque hemos demostrado que existe una solución para (PC) obteniéndola mediante la convergencia de una sucesión de poligonales, no necesariamente toda solución del problema (PC) es límite de alguna sucesión de poligonales de Euler. Un contraejemplo es el siguiente, conocido como ejemplo de Peano.

Ejemplo 3.1 (Ejemplo de Peano). *Sea el problema de Cauchy*

$$\begin{cases} y'(x) = 3y^{2/3}(x) \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{6}$$

donde $x \in \mathbb{R}$.

Se puede comprobar que todas las poligonales de Euler coinciden directamente con la solución trivial $y \equiv 0$, debido a que $f(x, y) = 3y^{2/3}$ y $y_0 = 0$, y al calcular $p_k(x)$ obtenemos siempre cero, por lo que la solución $y(x) = x^3$ no puede ser límite de ninguna sucesión de poligonales. Notemos que ya hemos encontrado dos soluciones de (6), por lo que el Teorema local de Cauchy-Peano, Teorema 3.1, no es suficiente para conseguir la unicidad de solución, por lo que tendremos que exigir alguna hipótesis adicional. Un estudio en profundidad del resto de teoremas se da en [1].

3.2 Existencia de solución global

El teorema que hemos estudiado hasta ahora nos garantiza una solución local, podemos estudiar una versión global del mismo. Esta versión es ligeramente distinta al global, donde vamos a pedir que la función f esté definida en una banda $[a, b] \times \mathbb{R}^n$ y que además de continua esté acotada. Para su demostración definimos una sucesión de funciones distinta a las poligonales de Euler y que por el Teorema de Arzelà-Ascoli, Teorema 2.1, tiene una subsucesión que converge a una función que verifica la forma integral de Cauchy.

Teorema 3.2 (Teorema global de Cauchy-Peano). *Sea (PC) un problema de Cauchy donde $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continua y acotada, tal que $x_0 \in [a, b]$, con $a < b$. Entonces, existe al menos una solución de (PC) y está definida en el intervalo $[a, b]$*

Demostración. Teniendo en cuenta la forma integral de (PC), vamos a definir una nueva sucesión de funciones a partir de la cual podamos llegar a la solución buscada. Comenzaremos tomando esta sucesión $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ en el intervalo $[x_0, b]$, a la derecha de x_0 y, después, repetiremos el mismo proceso en $[a, x_0]$.

En primer lugar, en el intervalo $[x_0, b]$ tomamos $h_k := (b - x_0)/k$ para cada $k \in \mathbb{N}$ y definimos

$$\phi_k(x) := \begin{cases} y_0 & \text{si } x_0 \leq x \leq x_0 + h_k \\ y_0 + \int_{x_0}^{x-h_k} f(s, \phi_k(s)) ds & \text{si } x_0 + h_k < x \leq b \end{cases} \quad (7)$$

Esto es, para cada k , la función toma el valor inicial y_0 en todos los puntos hasta $x_0 + h_k$ y, a partir de ahí, vamos añadiendo la integral de la función f evaluada entre x_0 y x menos el paso h_k . Notemos que, a medida que aumenta el valor de k , el valor de $x - h_k$ se va aproximando más a x , con lo que nos acercamos más a la función que queremos encontrar como solución del problema.

Notemos que realmente ϕ_k está definida a trozos de tamaño h_k , de manera que primero la definimos en $[x_0, x_0 + h_k]$, luego extendemos la definición a $[x_0 + h_k, x_0 + 2h_k]$, después a $[x_0 + 2h_k, x_0 + 3h_k]$, y así sucesivamente, hasta $[x_0 + (k-1)h_k, b]$. De esta manera,

- Para $k = 1$, tenemos $h_1 = (b - x_0)/1$ y entonces $\phi_1(x) = y_0$ en todo $[x_0, b]$.
- Para $k = 2$, tenemos $h_2 = (b - x_0)/2$ y entonces $\phi_2(x) = y_0$ si $x_0 \leq x \leq x_0 + h_2$. Por otro lado, en el caso $(x_0 + h_2)/2 < x \leq b$, como $x \leq x - h_2$ entonces obtenemos que $x_0 < s \leq x_0 + h_2$, donde $\phi_2(s)$ ya está definida, tomando el valor de y_0 . Así, tenemos

$$\phi_2(x) = \begin{cases} y_0 & \text{si } x_0 \leq x \leq x_0 + h_2 \\ y_0 + \int_{x_0}^{x-h_2} f(s, y_0) ds & \text{si } x_0 + h_2 < x \leq b \end{cases}$$

- Para $k = 3$, tenemos $h_3 = (b - x_0)/3$ y entonces $\phi_3(x) = y_0$ si $x_0 \leq x \leq x_0 + h_3$.

En el caso $x_0 + h_3 < x \leq b$ realmente se divide en dos partes de tamaño h_3 . Distinguimos los intervalos $x_0 + h_3 < x \leq x_0 + 2h_3$ y $x_0 + 2h_3 < x \leq b$.

En primer lugar, si $x_0 + h_3 < x \leq x_0 + 2h_3$, como $x_0 \leq x - h_3$ entonces obtenemos que $x_0 \leq s \leq x_0 + h_3$, donde $\phi_3(s)$ ya está definida y toma el valor de y_0 .

Ahora, en $x_0 + 2h_3 < x \leq b$, como $x_0 \leq x - h_3$ entonces obtenemos que $x_0 \leq s \leq x_0 + 2h_3$, donde ya hemos definido $\phi_3(s)$ en los casos anteriores.

Finalmente, nos queda

$$\phi_3(x) = \begin{cases} y_0 & \text{si } x_0 \leq x \leq x_0 + h_3 \\ y_0 + \int_{x_0}^{x-h_3} f(s, y_0) ds & \text{si } x_0 + h_3 < x \leq x_0 + 2h_3 \\ y_0 + \int_{x_0}^{x-h_3} f(s, \phi_3(s)) ds & \text{si } x_0 + 2h_3 < x \leq b \end{cases}$$

Así, para cualquier $k \in \mathbb{N}$ se puede probar que todos los puntos $(s, \phi_k(s))$ en los que evaluamos f ya los tenemos definidos previamente, por lo que las funciones ϕ_k están bien definidas. Además, son funciones continuas, ya que, fijado $k \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow (x_0 + h_k)^+} \left(y_0 + \int_{x_0}^{x-h_k} f(s, \phi_k(s)) ds \right) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} f(s, \phi_k(s)) ds = y_0,$$

y esto también se cumple en cada subintervalo de $[x_0 + kh_k, b]$, por ser f continua.

Ahora que hemos definido estas funciones ϕ_k , veamos que la sucesión $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ verifica las condiciones necesarias para poder aplicar el Teorema de Arzela-Ascoli, Teorema 2.1.

Veamos, en primer lugar, que se trata de una sucesión equicontinua. Como sabemos que f es una función acotada, sabemos que existe $M > 0$ tal que $|f(x, y)| \leq M$ para todo $(x, y) \in [x_0, b] \times \mathbb{R}^n$. Entonces, por cómo hemos definido $\phi_k(x)$, tenemos que, para todo k y para todos $x, x' \in [x_0, b]$,

$$|\phi_k(x) - \phi_k(x')| \leq M|x - x'|.$$

Esto lo podemos comprobar por casos, suponiendo que $x > x'$:

- Si $x, x' \in [x_0, h_k]$ entonces $\phi_k(x) - \phi_k(x') = y_0 - y_0$, por lo que $|\phi_k(x) - \phi_k(x')| = 0$.
- Si $x' \in [x_0, x_0 + h_k]$ y pero $x \in (x_0 + h_k, b]$, tenemos que

$$\begin{aligned} |\phi_k(x) - \phi_k(x')| &= \left| y_0 + \int_{x_0}^{x-h_k} f(s, \phi_k(s)) ds - y_0 \right| = \left| \int_{x_0}^{x-h_k} f(s, \phi_k(s)) ds \right| \leq \\ &\leq \int_{x_0}^{x-h_k} M ds \leq M|x - x'| \end{aligned}$$

- Si $x, x' \in (x_0 + h_k, b]$, entonces resulta que

$$\begin{aligned} |\phi_k(x) - \phi_k(x')| &= \left| y_0 + \int_{x_0}^{x-h_k} f(s, \phi_k(s)) ds - y_0 - \int_{x_0}^{x'-h_k} f(s, \phi_k(s)) ds \right| = \left| \int_{x'-h_k}^{x-h_k} f(s, \phi_k(s)) ds \right| \leq \\ &\leq \int_{x'-h_k}^{x-h_k} M ds \leq M|x - x'|. \end{aligned}$$

Esto implica que $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es equicontinua.

Por otro lado, también se cumple que

$$|\phi_k(x)| \leq |y_0| + M(b - x_0),$$

lo que podemos comprobar tomando x_0 , aplicando la desigualdad triangular y teniendo en cuenta que $|x - x_0| \leq b - x_0$:

$$|\phi_k(x)| \leq |\phi_k(x) - y_0| + |y_0| \leq \left| \int_{x_0}^{x-h_k} f(s, \phi_k(s)) ds \right| + |y_0| \leq M|x - x_0| + |y_0| \leq M(b - x_0) + |y_0|.$$

Así, $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ también es uniformemente acotada.

Por tanto, tomando $E = [x_0, b]$ acotado, tenemos las condiciones necesarias para poder aplicar el Teorema de Arzela-Ascoli, Teorema 2.1, y obtenemos que existe una subsucesión que llamamos $(\phi_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset (\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ y que converge uniformemente en $[x_0, b]$ a una cierta función $\phi : [x_0, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, que queremos que sea solución de (PC).

Ahora, para $(\phi_m)_{m \in \mathbb{N}}$, deducimos directamente de la definición (7) que

$$\phi_m(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \phi_m(s)) ds - \int_{x-h_m}^x f(s, \phi_m(s)) ds.$$

Aplicando el Teorema de la Convergencia Dominada, lo que podemos hacer por ser $|f(x, y)| \leq M$ en $[x_0, b] \times \mathbb{R}^n$, y teniendo en cuenta posteriormente que f es continua y que $(\phi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a la función ϕ , tenemos que para todo $x \in [x_0, b]$,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f(s, \phi_m(s)) ds = \int_{x_0}^x \lim_{m \rightarrow \infty} f(s, \phi_m(s)) ds = \int_{x_0}^x f(s, \phi(s)) ds.$$

Además, como $|f(x, \phi)| \leq M$, tenemos que

$$0 \leq \left| \int_{x-h_m}^x f(s, \phi_m(s)) ds \right| \leq \int_{x-h_m}^x M ds \leq M h_m,$$

y, aplicando límites cuando m tiende a infinito, se tiene que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{x-h_m}^x f(s, \phi_m(s)) ds = 0.$$

Por último, basta con aplicar límites cuando m tiende a infinito en la expresión para $\phi_m(x)$, teniendo en cuenta la convergencia de $(\phi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ a la función ϕ , junto con las deducciones anteriores:

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \phi_m(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \phi_m(s)) ds - \int_{x-h_m}^x f(s, \phi_m(s)) ds \right) = \\ &= y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \phi(s)) ds - 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para todo $x \in [x_0, b]$, se cumple

$$\phi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \phi(s)) ds,$$

con lo que, por la Proposición 3.1, $\phi(x)$ ha de ser solución de (PC) para $x \in [x_0, b]$.

Análogamente, en el intervalo $[a, x_0]$ obtenemos una nueva sucesión $(\bar{\phi}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ donde el paso es $h_k = (x_0 - a)/k$. Definimos, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\bar{\phi}_k(x) := \begin{cases} y_0 & \text{si } x_0 - h_k \leq x \leq x_0 \\ y_0 - \int_{x+h_k}^{x_0} f(s, \bar{\phi}_k(s)) ds & \text{si } a \leq x < x_0 - h_k. \end{cases}$$

Así, repitiendo el mismo proceso, encontramos una solución $\bar{\phi}$ de (PC) definida en $[a, x_0]$.

Notemos que $h_k = \bar{h}_k$ en el caso en el que $[a, b]$ sea simétrico respecto de x_0 . \square

3.3 Ejemplos y aplicaciones

Tomemos un ejemplo de como las poligonales de Euler convergen a la solución usando un problema de valores iniciales como el siguiente

$$\begin{cases} y' = -2y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Veamos como a medida que aumentamos el número de poligonales de Euler nos acercamos cada vez más a la solución real.

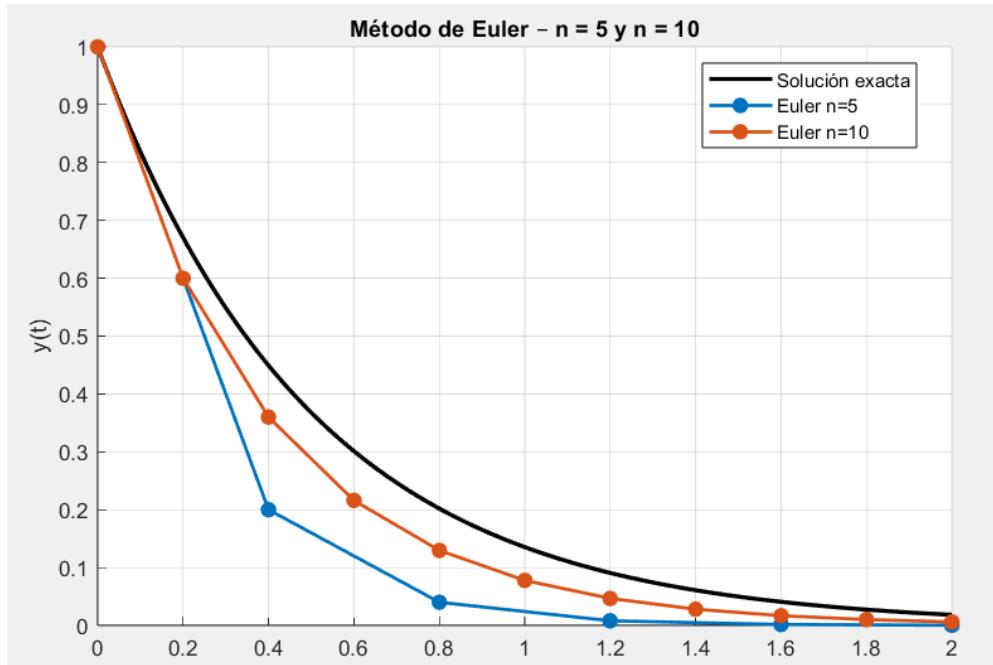


Figura 1: Poligonales de Euler para $n = 5$ en color azul y $n = 10$ en color naranja

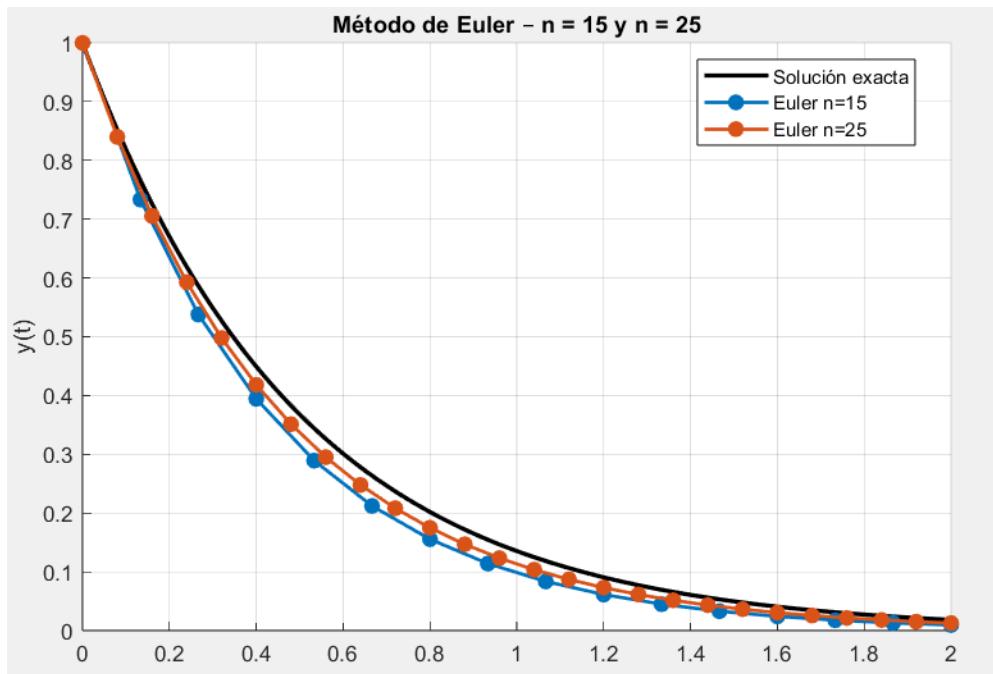


Figura 2: Poligonales de Euler para $n = 15$ en azul, y $n = 20$ en naranja

En el anexo 1 se puede consultar el código de MatLab con el que se ha resuelto este PVI.

4 Comparaciones con otros teoremas de existencia y unicidad

Hemos visto algunos teoremas que nos garantizan la existencia de soluciones de un problema de Cauchy. Ahora vamos a ampliar estos resultados para probar también la unicidad de solución, añadiendo la condición de que f sea lipschitziana. De nuevo, veremos tanto la versión local como la global, junto con algunos ejemplos y aplicaciones. En las referencias [3], [4], [5] y [6], se tratan estos conceptos con mayor profundidad.

4.1 Unicidad de solución

En esta sección nos enfocaremos en establecer las definiciones de función lipschitziana y función localmente lipschitziana con respecto a una variable dentro de un conjunto. Profundizaremos en estos conceptos mediante ejemplos y observaciones, ya que son fundamentales para entender las secciones siguientes. Además, revisaremos la desigualdad de Gronwall, que será crucial para demostrar el último resultado de esta sección, el cual nos permitirá confirmar la unicidad de la solución de un problema bajo una condición específica. Un estudio más completo se puede consultar en [2], [3], [4] y [5].

Primero vamos a ver qué implica que una función posea la propiedad de ser lipschitziana o localmente lipschitziana en relación con una de sus variables.

Definición 4.1 (Función lipschitziana). *Sea $f(x,y)$ una función tal que $f : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. Se dice que f es lipschitziana o globalmente lipschitziana respecto de y en E si existe una constante $L > 0$ tal que para todo $(x, y_1), (x, y_2) \in E$ se cumple que*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad (8)$$

Definición 4.2 (Función localmente lipschitziana). *Sea $f(x,y)$ una función tal que $f : E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. Se dice que f es localmente lipschitziana respecto de y en E si para todo $(x, y) \in E$ existe un entorno $D \subset E$ de (x, y) de manera que f es lipschitziana en D .*

Además, esta constante que nos permite determinar si una función es lipschitziana recibe el nombre de constante de Lipschitz, como vemos en la siguiente definición.

Definición 4.3 (constante de Lipschitz). *Llamamos constante de Lipschitz al valor de L que verifica la condición (8)*

Notamos que la constante de Lipschitz correspondiente a una función $f(x,y)$ lipschitziana respecto de y no es única, ya que si $(x, y_1), (x, y_2) \in E$ entonces

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \leq (L + s)|y_1 - y_2| \quad (9)$$

para cualquier $s \in \mathbb{N}$.

Como es lógico, toda función globalmente lipschitziana respecto a y es también localmente lipschitziana, aunque el recíproco no se cumple. Esto se debe a que, si bien una función localmente lipschitziana tiene una constante que la acota en el entorno de cada punto, no siempre es posible acotar todas esas constantes simultáneamente a nivel global.

Ejemplo 4.1.

1. La función $f : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = y^2$ es lipschitziana con constante de Lipschitz 2 en $\mathbb{R} \times [0, 1]$ tanto local como globalmente, puesto que

$$|y_1^2 - y_2^2| = |y_1 + y_2||y_1 - y_2| \leq 2|y_1 - y_2|,$$

para todos $y_1, y_2 \in [0, 1]$

2. La función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = y^n$ donde $n \in \mathbb{N}$ y $n \geq 2$ es localmente lipschitziana en \mathbb{R}^2 pero no lo es globalmente. Dados $y_1, y_2 \in A$ compacto de \mathbb{R} ,

$$|y_1^n - y_2^n| \leq |y_1 - y_2|(|y_1|^{n-2} + |y_1|^{n-2}|y_2| + \dots + |y_1||y_2|^{n-2} + |y_2|^{n-1}) \leq L_A|y_1 - y_2|,$$

pues el segundo factor está acotado en A por una constante que depende del conjunto A , a la que llamamos L_A . Es por ello que f es localmente lipschitziana respecto de y .

Sin embargo, no podemos acotar este valor de L_A de manera que la condición de Lipschitz se verifique en todo \mathbb{R} . Si hacemos que la norma de y_1 tienda a infinito, resulta que

$$|y_1|^{n-1} \rightarrow \infty,$$

para $n \geq 2$, con lo que f no es globalmente lipschitziana respecto de y en \mathbb{R}^2 .

3. La función $f : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = \sqrt{y} + x$ no es localmente lipschitziana en $\mathbb{R} \times [0, 1]$. Supongamos por reducción al absurdo que sí lo es, entonces, existe $L \in \mathbb{R}$ tal que para todo $y_1, y_2 \in [0, 1]$ y para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene

$$|\sqrt{y_1} + x - \sqrt{y_2} - x| = |\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2}| \leq L|y_1 - y_2|.$$

Sin embargo, si tomamos $y_2 = 0$, tenemos que

$$|\sqrt{y_1}| \leq L|y_1| \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{y_1}} \leq L,$$

pero resulta que, si hacemos que $y_1 \in (0, 1)$ tienda a cero, obtenemos

$$\frac{1}{\sqrt{y_1}} \rightarrow \infty,$$

lo cual es absurdo. Por tanto, f no es localmente lipschitziana respecto de y en $\mathbb{R} \times [0, 1]$ y tampoco lo es globalmente.

Aunque una función $f(x, y)$ sea lipschitziana respecto de y en el conjunto E , no podemos asumir automáticamente que sea continua en E . Esto se debe a que la condición de Lipschitz solo restringe el comportamiento de la función al variar y (manteniendo x constante), sin imponer ninguna restricción sobre cómo cambia la función cuando solo varían los puntos en la variable x , es decir, entre puntos de la forma (x_1, y) y (x_2, y) .

Esta misma limitación aplica si la función es solo localmente lipschitziana. Un contraejemplo que ilustra este punto lo podemos encontrar en [1] como ejemplo 3.1.5 en la página 36.

Para establecer formalmente la condición que garantiza la unicidad de la solución, es necesario introducir una herramienta fundamental en el análisis de las ecuaciones diferenciales ordinarias, la Desigualdad de Gronwall.

Lema 4.1. [Desigualdad de Gronwall] Sean $u, \phi, k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tres funciones continuas, con $k(x) > 0$ para todo $x \in [a, b]$. Si se verifica que

$$0 \leq u(x) \leq \phi(x) + \int_a^x k(s)u(s)ds \quad \forall x \in [a, b],$$

entonces

$$0 \leq u(x) \leq \phi(x) + \int_a^x k(s)\phi(s)e^{\int_s^x k(z)dz}ds \quad \forall x \in [a, b].$$

Esta desigualdad es clave, pues se utiliza para demostrar que la condición de Lipschitz es suficiente para asegurar la unicidad de la solución del problema de Cauchy.

Teorema 4.1. *Sea el problema de Cauchy (PC) donde $f : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función lipschitziana respecto de y en D , con $(x_0, y_0) \in D$. Si $y_1, y_2 : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ son dos soluciones de (PC) con $x_0 \in I$ e I un intervalo, entonces $y_1(x) = y_2(x)$ para todo $x \in I$.*

Demostración. Sea $v : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ la función dada por $v(x) = y_1(x) - y_2(x)$. Como y_1 e y_2 son soluciones de (PC), sabemos que $v(x_0) = y_1(x_0) - y_2(x_0) = y_0 - y_0 = 0$. Además, si derivamos la función v obtenemos que

$$v'(x) = y'_1(x) - y'_2(x) = f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x)),$$

con $x \in I$. Ahora, aplicando normas y teniendo en cuenta que f es lipschitziana respecto de y en D , resulta que para todo $x \in I$ se tiene

$$|v'(x)| = |f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x))| \leq L|y_1(x) - y_2(x)| = L|v(x)|. \quad (10)$$

Por tanto, si $x \geq x_0$ entonces

$$|v(x)| = |v(x) - v(x_0)| = \left| \int_{x_0}^x v'(s)ds \right| \leq \int_{x_0}^x |v'(s)|ds \leq \int_{x_0}^x L|v(s)|ds,$$

con lo que nos basta con aplicar la Desigualdad de Gronwall, Lema 4.1, de manera que $u(x) = |v(x)|$, $\phi(x) = 0$ y $k(x) = L > 0$. Así, obtenemos que

$$0 \leq |v(x)| \leq \int_{x_0}^x 0 ds = 0,$$

y entonces ha de ser $v(x) = 0$ para todo $x \in I$ con $x \geq x_0$, lo que implica que $y_1(x) = y_2(x)$.

Análogamente, para $x < x_0$ y teniendo en cuenta la desigualdad (10), resulta

$$|v(x)| = |v(x_0) - v(x)| = \left| \int_x^{x_0} v'(s)ds \right| \leq \int_x^{x_0} |v'(s)|ds \leq \int_x^{x_0} L|v(s)|ds,$$

y por el Lema 4.1, tomando las mismas funciones $u(x)$, $\phi(x)$ y $k(x)$ que en el caso $x \geq x_0$, obtenemos que $v(x) = 0$ para $x < x_0$.

Así, tenemos que $y_1(x) = y_2(x)$ para todo $x \in I$ y, por lo tanto, queda probado que ambas soluciones han de ser la misma, por lo que el problema de Cauchy (PC) tiene una **única solución**. \square

Con esto queda demostrada la unicidad de la solución. Esta propiedad es clave, pues podemos relacionar el resultado con el Ejemplo 3.1, donde la función $f(x, y) = 3y^{2/3}$ no era lipschitziana y el problema de Cauchy resultante tenía múltiples soluciones.

Ahora, al añadir la condición de que la función f sea lipschitziana a los Teoremas de Cauchy-Peano (Teoremas 3.1 y 3.2), obtenemos de inmediato la existencia y la unicidad de la solución.

En la siguiente sección, abordaremos el Teorema de Picard-Lindelöf, que integra la existencia y la unicidad en un solo enunciado, y nos presenta un método de aproximación distinto al de las poligonales de Euler, permitiendo una comparación directa de las condiciones necesarias y la velocidad de convergencia.

4.2 Existencia y unicidad de solución local

En esta sección nos vamos a centrar en probar el Teorema local de Picard-Lindelöf, que nos va a garantizar la existencia de una única solución local del problema de Cauchy (PC). Obtendremos el mismo resultado que cuando aplicamos el Teorema local de Cauchy-Peano (Teorema 3.1) con el Teorema 4.1. Sin embargo, utilizaremos funciones distintas para aproximar la solución, los conocidos como iterantes de Picard.

Antes de comenzar con el primer teorema de existencia y unicidad, vamos a probar el conocido como Criterio de Weierstrass o Prueba M de Weierstrass. Este nos permite garantizar la convergencia uniforme de una serie de funciones.

Proposición 4.1 (Criterio de Weierstrass). *Sea $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones donde $f_k : E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $|f_k(x)| \leq M_k$ para cada k y para todo $x \in E$. Si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ es convergente, entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ converge uniforme y absolutamente en E .*

Demostración. Sea $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $|f_k(x)| \leq M_k$ para todo k y todo $x \in E$. Como $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ converge, entonces, por el criterio de comparación, tenemos que $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|$ también converge, luego $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ converge absolutamente para todo $x \in E$. Nos queda por comprobar que esta convergencia es uniforme.

Como $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ es convergente, entonces para todo $\epsilon > 0$ existe un k_0 tal que para todo $m, p \geq k_0$ con $p > m$ se tiene que $\sum_{k=m+1}^p M_k < \epsilon$. Entonces, para $x \in E$ cualquiera y tomando las sumas parciales, $S_p(x) = \sum_{k=1}^p f_k(x)$, tenemos que

$$|S_p(x) - S_m(x)| = \left| \sum_{k=1}^p f_k(x) - \sum_{k=1}^m f_k(x) \right| = \left| \sum_{k=m+1}^p f_k(x) \right| \leq \sum_{k=m+1}^p |f_k(x)| \leq \sum_{k=m+1}^p M_k < \epsilon,$$

luego las sumas parciales forman una sucesión uniformemente de Cauchy en E . □

A continuación, vamos a enunciar y demostrar el Teorema local de Picard-Lindelöf, que afirma la existencia y unicidad de una solución local del problema de Cauchy (PC). Para ello, necesitaremos que la función f sea continua y lipschitziana. Definiremos los conocidos como iterantes de Picard, que nos servirán para aproximar la solución buscada, haciendo uso del Criterio de Weierstrass, Proposición 4.1, y de la forma integral de (PC), aplicando la Proposición 3.1.

Teorema 4.2 (Teorema local de Picard-Lindelöf). *Sea el problema de Cauchy (PC) donde $f : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continua y lipschitziana respecto de y en D , con D entorno de (x_0, y_0) . Entonces, existe una única solución local de (PC) y está definida en el intervalo $I = [x_0 - h, x_0 + h]$, con $h = \min\{a, b/M\}$, siendo $R := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\} \subset D$ y $M = \max_R |f(x, y)|$.*

Demostración. Sea el intervalo $I = [x_0 - h, x_0 + h]$. Tomamos una función $g_0(x)$ continua definida en I y con $g_0(x_0) = y_0$. Por inducción, definimos cada g_{k+1} con $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ de manera que

$$g_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, g_k(s)) ds \quad \forall x \in I. \tag{11}$$

Estas funciones son precisamente las conocidas como iterantes de Picard, con las que queremos aproximar la solución.

Primero, para probar que las funciones están bien definidas, basta comprobar que $(x, g_k(x)) \in R$ para todo $x \in I$. Si tomamos $x \in I = [x_0 - h, x_0 + h]$ y suponemos que se cumple para g_k con

$k \in \mathbb{N}$, entonces

$$|g_{k+1}(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(s, g_k(s)) ds \right| \leq M|x - x_0| \leq Mh \leq b,$$

donde la primera desigualdad se tiene por ser $M = \max_R |f(x, y)|$, la segunda por estar $x \in I$, y la tercera por definición de h . Por tanto, g_k están bien definidas y son continuas en I .

Ahora comprobamos que estas funciones convergen uniformemente a una función continua en I . Sea

$$N = \max_{x \in I} |g_1(x) - g_0(x)|$$

y sea L la constante de Lipschitz de f . Notemos que $N \leq Mh$. Entonces, se tiene la siguiente propiedad:

$$|g_{k+1}(x) - g_k(x)| \leq NL^k \frac{|x - x_0|^k}{k!} \quad (12)$$

Vamos a comprobarlo por inducción sobre k . Para $k = 0$ se cumple por definición de N . Supongamos que la desigualdad (12) se verifica para $k - 1$ y vamos a probarla para k . Supongamos que $x \geq x_0$, entonces

$$\begin{aligned} |g_{k+1}(x) - g_k(x)| &\leq \left| \int_{x_0}^x (f(s, g_k(s)) - f(s, g_{k-1}(s))) ds \right| \leq \int_{x_0}^x L|g_k(s) - g_{k-1}(s)| ds \leq \\ &\leq \int_{x_0}^x LNL^{k-1} \frac{|s - x_0|^{k-1}}{(k-1)!} ds \leq NL^k \int_{x_0}^x \frac{(s - x_0)^{k-1}}{(k-1)!} ds \leq NL^k \frac{(x - x_0)^k}{k!} = NL^k \frac{|x - x_0|^k}{k!}, \end{aligned}$$

donde la primera desigualdad se tiene por definición de g_{k+1} y g_k , la segunda por ser f lipschitziana, y la tercera desigualdad por la hipótesis inductiva. Por otro lado, si $x < x_0$, basta cambiar los límites de integración, es decir,

$$\begin{aligned} |g_{k+1}(x) - g_k(x)| &\leq \left| \int_x^{x_0} (f(s, g_k(s)) - f(s, g_{k-1}(s))) ds \right| \leq \int_x^{x_0} L|g_k(s) - g_{k-1}(s)| ds \leq \\ &\leq \int_x^{x_0} LNL^{k-1} \frac{|s - x_0|^{k-1}}{(k-1)!} ds \leq NL^k \int_x^{x_0} \frac{(x_0 - s)^{k-1}}{(k-1)!} ds \leq NL^k \frac{(x_0 - x)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Notemos que, si tomamos $|g_p(x) - g_k(x)|$ donde $p, k \in \mathbb{N}$ no necesariamente consecutivos, se puede obtener una cota sobre $|y(x) - g_k(x)|$, es decir, sobre el error cometido al aproximar la solución.

Ahora, dado que $x \in I = [x_0 - h, x_0 + h]$,

$$NL^k \frac{|x - x_0|^k}{k!} \leq NL^k \frac{h^k}{k!} \quad \text{y} \quad \sum_{k=0}^{\infty} N \frac{(Lh)^k}{k!} = Ne^{Lh},$$

resulta, aplicando el Criterio de Weierstrass 4.1 a $(g_{k+1} - g_k)_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$, que la siguiente serie

$$g_0(x) + \sum_{k=0}^{\infty} (g_{k+1}(x) - g_k(x))$$

converge uniformemente en I a una función que denominamos y definida en I y que además es continua. Notemos que las sumas parciales de $\sum_{k=0}^{\infty} (g_{k+1}(x) - g_k(x))$ son precisamente las funciones $g_k(x)$. Por tanto, tenemos que la sucesión $(g_k)_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ converge uniformemente a y en I .

Nos queda ver que esta función y que hemos obtenido verifica la forma integral del problema de Cauchy (3.1). En primer lugar, como $(g_k)_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ converge uniformemente a y en el intervalo

I , tenemos que para todo $\varepsilon > 0$ existe un k_0 tal que para todo $k \geq k_0$ y para todo $s \in I$ se verifica que

$$|g_k(s) - y(s)| < \varepsilon.$$

Además, como f es lipschitziana, tomando $k \geq k_0$ y $s \in I$ se tiene que

$$|f(s, g_k(s)) - f(s, y(s))| \leq L|g_k(s) - y(s)| < L\varepsilon.$$

Así, obtenemos que, si llamamos $F_k(x) = f(x, g_k(x))$ y $F(x) = f(x, y(x))$, entonces $(F_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a F en I . Por ello, como $|f(s, g_k(s))| \leq M$ podemos aplicar el Teorema de la Convergencia Dominada, y resulta

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f(s, g_k(s)) ds = \int_{x_0}^x \lim_{k \rightarrow \infty} f(s, g_k(s)) ds = \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds.$$

Por último, teníamos por definición de g_k la igualdad (11), a la que podemos aplicar límites cuando k tiende a infinito, obteniendo

$$y(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} g_{k+1}(x) = y_0 + \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f(s, g_k(s)) ds = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds,$$

que es la forma integral del problema de Cauchy (3.1), por lo que efectivamente la función y es solución local del problema en el intervalo I , quedando así probada la existencia de solución.

Por último, nos queda comprobar que esta solución es también única, pero esto lo deducimos aplicando el Teorema 4.1. Por lo tanto, ya hemos demostrado la existencia y unicidad de solución de (PC). \square

El Teorema local de Picard-Lindelöf (Teorema 4.2) es fundamental porque unifica en un solo enunciado las condiciones para garantizar tanto la existencia como la unicidad de la solución local. Observamos que sus requisitos de continuidad y de ser una función lipschitziana respecto a y son la combinación directa del Teorema local de Cauchy-Peano (Teorema 3.1) y el Teorema de Unicidad (Teorema 4.1).

Por lo tanto, se tienen dos vías para asegurar la existencia y unicidad de la solución local:

1. Aplicar los Teoremas 3.1 y 4.1 de forma separada.
2. Aplicar directamente el Teorema 4.2.

No obstante, la comparación más relevante se da a nivel de los métodos de aproximación de la solución. Aunque ambos teoremas generan sucesiones convergentes, las poligonales de Euler son significativamente más sencillas de construir. En contraste, el cálculo de los iterantes de Picard se vuelve rápidamente complejo tras unas pocas iteraciones, debido a la naturaleza repetitiva de las integrales.

Para ilustrar esta diferencia en la complejidad del cálculo y la velocidad de convergencia, a continuación se aplicará el Teorema 4.2 a los mismos ejemplos ya analizados con las poligonales de Euler (Ejemplo 2.2.3 y Ejemplo 2.2.4 de [1])

Ejemplo 4.2. *Sea el problema de Cauchy*

$$\begin{cases} y'(x) = x + y(x) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Demostración del teorema de Cauchy-Peano

donde la función $f(x, y) = x + y$ está definida en \mathbb{R}^2 , entorno de $(0, 0)$. Viendo en el Ejemplo 2.2.3 de [1], que la solución del problema está definida en todo \mathbb{R} y viene dada por

$$y(x) = e^x - 1 - x.$$

Antes de aplicar el Teorema local de Picard-Lindelöf, Teorema 4.2, tenemos que comprobar que f es lipschitziana respecto de y en \mathbb{R}^2 para así obtener la existencia y unicidad de solución, pero esto es trivial, dado que si $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ entonces

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |x + y_1 - x - y_2| = |y_1 - y_2|$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Además, f es continua en \mathbb{R}^2 , luego podemos aplicar dicho teorema y, efectivamente, existe una única solución local del problema.

Ahora, si tomamos $a, b = 1$ de manera que $R = [-1, 1] \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^2$, $M = 2$ y $h = b/M = 1/2$, entonces, la solución buscada está definida en $I = [-1/2, 1/2]$. Sin embargo, fijándonos del Ejemplo 2.2.3 de [1] que, aplicando este teorema, solo podemos garantizar que la solución esté definida en $[-h, h] \subset [-1, 1]$ con $h < 1$. Calculemos ahora los iterantes de Picard g_k para algunos valores de k .

- En primer lugar, $g_0 = y_0 = 0$ para todo $x \in I$.
- Para $k = 0$, obtenemos

$$g_1(x) = 0 + \int_0^x f(s, 0) ds = \int_0^x s ds = \frac{x^2}{2} \quad \forall x \in I.$$

- Para $k = 1$, tenemos

$$g_2(x) = 0 + \int_0^x f\left(s, \frac{s^2}{2}\right) ds = \int_0^x \left(s + \frac{s^2}{2}\right) ds = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \quad \forall x \in I.$$

- Para $k = 2$, tenemos

$$g_3(x) = 0 + \int_0^x f\left(s, \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{6}\right) ds = \int_0^x \left(s + \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{6}\right) ds = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \quad \forall x \in I.$$

- Para $k = 3$, tenemos

$$g_4(x) = 0 + \int_0^x f\left(s, \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{6} + \frac{s^4}{24}\right) ds = \int_0^x \left(s + \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{6} + \frac{s^4}{24}\right) ds = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}$$

para todo $x \in I$.

Observamos que, en este caso, podemos escribir cada iteración como

$$g_{k+1}(x) = \sum_{i=2}^{k+2} \frac{x^i}{i!} \quad \forall x \in I,$$

y si escribimos el desarrollo de Taylor de la solución del problema nos damos cuenta de que

$$y(x) = e^x - 1 - x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} - 1 - x = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \quad \forall x \in I,$$

y vemos claramente que $\lim_{k \rightarrow \infty} g_{k+1}(x) = y(x)$.

Realmente la solución está definida en \mathbb{R} . De hecho, como veremos posteriormente en la Sección 4.3, estas aproximaciones también son válidas en intervalos mayores, gracias al Teorema global de Picard-Lindelöf, Teorema 4.3. Por ello, si representamos los iterantes de Picard en un intervalo mayor, por ejemplo $I = [-3, 3]$, se podría distinguir mejor el comportamiento de las curvas. (Ver figura 3.1 de [1]).

Al analizar dicha representación, se observa que efectivamente los iterantes se van aproximando cada vez más a la solución, con lo que podemos deducir visualmente la convergencia de esta sucesión a la solución en el intervalo dado.

Si comparamos los iterantes de Picard con las poligonales de Euler vistas anteriormente, vemos claramente que la velocidad de convergencia de los iterantes es mucho mayor, pues solo necesitamos unos pocos valores de k para que la función solución no se distinga de sus aproximaciones.

Ejemplo 4.3. Sea el problema de Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = x^2 + y^2(x) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

donde la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ está definida en \mathbb{R}^2 , y concretamente en $D = (-2, 2) \times (-2, 2)$, entorno de $(0, 0)$. Recordemos que la solución del problema no es conocida.

Veamos ahora si podemos aplicar el Teorema 4.2, es decir, si f es continua, que claramente lo es, y si es lipschitziana respecto de y en D . Esto también se cumple, ya que

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |y_1^2 - y_2^2| = |y_1 + y_2||y_1 - y_2| \leq 4|y_1 - y_2|,$$

para todos $y_1, y_2 \in (-2, 2)$ y para todo $x \in (-2, 2)$, por lo que existe una única solución del problema, definida en el intervalo I .

Tomamos, por ejemplo, $a, b = 1$ de manera que $R = [-1, 1] \times [-1, 1] \subset D$, $M = 2$ y $h = b/M = 1/2$, por lo que $I = [-1/2, 1/2]$. Al igual que en el ejemplo anterior, vamos a calcular algunas de los primeros iterantes de Picard, para analizar cómo evolucionan:

- Claramente, $g_0 = y_0 = 0$ para todo $x \in I$.

- Para $k = 0$, tenemos

$$g_1(x) = 0 + \int_0^x f(s, 0) ds = \int_0^x s^2 ds = \frac{x^3}{3} \quad \forall x \in I.$$

- Para $k = 1$, tenemos

$$g_2(x) = 0 + \int_0^x f\left(s, \frac{s^3}{3}\right) ds = \int_0^x \left(s^2 + \frac{s^6}{9}\right) ds = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} \quad \forall x \in I.$$

- Para $k = 2$, tenemos

$$\begin{aligned} g_3(x) &= 0 + \int_0^x f\left(s, \frac{s^3}{3} + \frac{s^7}{63}\right) ds = \int_0^x \left(s^2 + \frac{s^6}{9} + \frac{s^{14}}{63^2} + \frac{2s^{10}}{3 \cdot 63}\right) ds = \\ &= \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{33 \cdot 63} + \frac{x^{15}}{63^2 \cdot 15} \quad \forall x \in I. \end{aligned}$$

Observamos que, pese a ser f una función polinomial, el número de integrales a calcular por cada iteración aumenta notablemente, y ya no resulta tan obvio escribir su expresión general. Además, cabe resaltar que, como no podemos expresar la solución del problema, tampoco podemos comprobar visualmente la convergencia de las iteraciones a dicha solución.

Si representamos gráficamente los iterantes de Picard que acabamos de calcular, definidos en $I = [-h, h] \subset [-1, 1]$, notaríamos que en dicho intervalo todas las curvas excepto g_0 se aproximan bastante entre sí, resultando difícil diferenciarlas. (Ver figura 3.2 de [1]). Sin embargo, es importante tener en cuenta que, en este caso y a diferencia del ejemplo anterior, no podemos utilizar el Teorema 4.3 para ampliar el intervalo de definición de las aproximaciones, dado que $f(x, y) = x^2 + y^2$ no es lipschitziana respecto de y en ninguna banda de la forma $[a, b] \times \mathbb{R}$, $a < b$ con $a, b \in \mathbb{R}$.

La dificultad para diferenciar los iterantes g_1, g_2 y g_3 gráficamente es prueba de lo poco que tardan en aproximarse a la solución, especialmente si los comparamos con las poligonales de Euler analizadas en el capítulo anterior.

En ambos ejemplos hemos visto que la velocidad de convergencia de los iterantes de Picard es mucho mayor que la de las poligonales de Euler. Sin embargo, la dificultad del cálculo de los iterantes puede suponer una gran desventaja, junto con el hecho de que se trate de una sucesión iterativa, puesto que para llegar a un cierto g_{k_0} con $k_0 \in \mathbb{N}$ hemos de calcular primero los g_k para todos los valores de $k \in \mathbb{N}$ con $k < k_0$ cosa que no ocurría con las poligonales.

4.3 Existencia y unicidad de solución global

Tras analizar la versión local del Teorema de Picard-Lindelöf, se presenta ahora su versión global, que nos permite garantizar la existencia de una única solución definida en un intervalo fijo $[a, b]$, sin depender de la restricción local basada en la condición inicial.

La diferencia fundamental del Teorema global de Picard-Lindelöf (Teorema 4.3 respecto al Teorema global de Cauchy-Peano (Teorema 3.2) radica en sus hipótesis, ya que Cauchy-Peano Global exige que la función f sea continua y acotada en el dominio $[a, b] \times \mathbb{R}^n$, mientras que Picard-Lindelöf Global exige que f sea continua y lipschitziana en todo el dominio $[a, b] \times \mathbb{R}^n$.

Es importante destacar que la demostración de este resultado no utiliza ni las poligonales de Euler ni los iterantes de Picard. En su lugar, se recurre a herramientas del Análisis Funcional, específicamente el Teorema del punto fijo de Banach, Teorema 2.2. Esto se logra definiendo un espacio vectorial de funciones continuas ($\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}^n)$) con una norma especial que permite demostrar que la aplicación asociada al problema de Cauchy es una contracción, garantizando así la existencia y unicidad del punto fijo (la solución).

Teorema 4.3 (Teorema global de Picard-Lindelöf). *Sea el problema de Cauchy (PC) donde $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continua y lipschitziana respecto de y en su dominio de definición, con $x_0 \in [a, b]$. Entonces, existe una única solución de (PC) y está definida en el intervalo $[a, b]$.*

Demostración. Sea $V = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}^n)$ el espacio vectorial de las funciones continuas definidas en $[a, b]$ y con espacio de llegada \mathbb{R}^n . Definimos en V la siguiente norma: sea $y \in V$ una función cualquiera, entonces

$$|y|_V = \sup\{e^{-K|x-x_0|} |y(x)| : x \in [a, b]\},$$

donde K es una constante tal que $K > L$, siendo L la constante de Lipschitz de f . Se tiene que $(V, |\cdot|_V)$ es un espacio de Banach, es decir, un espacio vectorial normado completo. En efecto, comprobemos en primer lugar que $|\cdot|_V$ es una norma. Dado $y \in V$ cualquiera, resulta obvio que $|y|_V \geq 0$ y que $|y|_V = 0$ si y solo si $y = 0$, por definición. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |\alpha y|_V &= \sup\{e^{-K|x-x_0|} |\alpha y(x)| : x \in [a, b]\} = \\ &= \sup\{|\alpha| e^{-K|x-x_0|} |y(x)| : x \in [a, b]\} = |\alpha| |y|_V, \end{aligned}$$

con lo que solo nos queda comprobar que verifica la desigualdad triangular. Sean $y_1, y_2 \in V$ dos funciones, teniendo en cuenta la desigualdad triangular para la norma euclídea, resulta que

$$\begin{aligned} |y_1 + y_2|_V &= \sup\{e^{-K|x-x_0|}|y_1(x) + y_2(x)| : x \in [a, b]\} \leq \\ &\leq \sup\{e^{-K|x-x_0|}(|y_1(x)| + |y_2(x)|) : x \in [a, b]\} \leq \\ &\leq \sup\{e^{-K|x-x_0|}|y_1(x)| : x \in [a, b]\} + \sup\{e^{-K|x-x_0|}|y_2(x)| : x \in [a, b]\} = |y_1|_V + |y_2|_V. \end{aligned}$$

Veamos que las normas $|\cdot|_V$ y $|\cdot|_\infty$ son equivalentes, donde $|\cdot|_\infty$ viene dada por $|y|_\infty = \sup\{|y(x)| : x \in [a, b]\}$ para cualquier función $y \in V$. Nos basta con tomar

$$\alpha = \min\{e^{-K(b-x_0)}, e^{-K(x_0-a)}\}$$

para que se verifique

$$\alpha|\cdot|_\infty \leq |\cdot|_V \leq |\cdot|_\infty,$$

con lo que efectivamente ambas normas son equivalentes. Por ello y por ser $(V, |\cdot|_\infty)$ completo, resulta que $(V, |\cdot|_V)$ también ha de serlo.

A continuación, definimos la aplicación $T : V \rightarrow V$ tal que para $y \in V$ se tiene

$$Ty(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s))ds, \quad x \in [a, b].$$

Como f es continua en $[a, b] \times \mathbb{R}^n$, claramente Ty es una función continua en $[a, b]$ para todo $y \in V$ y T está bien definida. Veamos ahora que T es una aplicación contractiva, con lo que podremos aplicar el Teorema 2.2 y obtener que existe un único punto fijo, que es la solución de (PC), en virtud de la Proposición 3.1.

Tomando dos funciones $y_1, y_2 \in V$ cualesquiera, tenemos para $x_0 \leq x \leq b$ que

$$\begin{aligned} e^{-K|x-x_0|}|Ty_1(x) - Ty_2(x)| &= e^{-K(x-x_0)} \left| \int_{x_0}^x (f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s)))ds \right| \leq \\ &\leq \int_{x_0}^x e^{-K(x-s)}|f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))|ds = \int_{x_0}^x e^{-K(x-s)}e^{-K(s-x_0)}|f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))|ds \end{aligned}$$

por definición de T . Ahora, vamos a acotar la integral, teniendo en cuenta que f es lipschitziana respecto de y en $[a, b] \times \mathbb{R}^n$ y la definición de $|\cdot|_V$. Así, el término anterior es menor o igual que

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x e^{-K(x-s)}e^{-K(s-x_0)}L|y_1(s) - y_2(s)|ds &\leq L \int_{x_0}^x e^{-K(x-s)}|y_1 - y_2|_V ds = \\ &= L|y_1 - y_2|_V e^{-Kx} \int_{x_0}^x e^{Ks}ds = \frac{L}{K}|y_1 - y_2|_V(1 - e^{-K(x-x_0)}) \leq \frac{L}{K}|y_1 - y_2|_V. \end{aligned}$$

Análogamente, para $a \leq x < x_0$ obtenemos que

$$e^{-K(x_0-x)}|Ty_1(x) - Ty_2(x)| \leq \frac{L}{K}|y_1 - y_2|_V.$$

Por lo tanto, utilizando de nuevo la definición de $|\cdot|_V$, resulta que

$$|Ty_1 - Ty_2|_V \leq \frac{L}{K}|y_1 - y_2|_V.$$

Dado que hemos tomado $K > L$ y entonces $L/K < 1$, tenemos que T es una aplicación contractiva, y por el Teorema del punto fijo de Banach, Teorema 2.2, obtenemos que existe un único

punto fijo en V , que es la solución del problema.

Sabemos que, en este caso, la sucesión construida en el Teorema 4.2 y que proporciona el punto fijo, y por tanto la solución de (PC), es precisamente la formada por los iterantes de Picard (ver (11), tomando como punto inicial el valor en la condición inicial del problema). \square

La idea de esta demostración también se puede trasladar al Teorema local de Picard-Lindelöf, Teorema 4.2, definiendo $\tilde{V} = \mathcal{C}([x_0 - h, x_0 + h], B)$ con $B = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - y_0| \leq b\}$ y tomando la aplicación $\tilde{T} : \tilde{V} \rightarrow \tilde{V}$ tal que

$$\tilde{T}y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s))ds$$

para todo $y \in \tilde{V}$. Así, deduciendo que \tilde{T} es contractiva y aplicando el Teorema 2.2, quedaría probada una nueva demostración de la existencia y unicidad de solución local de (PC), como se explica en la pagina 126 de [7].

Veamos ahora que el Teorema global de Picard-Lindelöf (Teorema 4.3) nos proporciona una vía eficiente para garantizar la existencia y unicidad de una solución definida en un intervalo fijo $[a, b]$.

Otra opción para alcanzar la misma conclusión sería aplicar el Teorema global de Cauchy-Peano (Teorema 3.2) para obtener la existencia, y luego el Teorema de Unicidad (Teorema 4.1), aunque para ello, aparte de comprobar que f es lipschitziana, también hemos de asegurarnos de que sea acotada. Por ello, vemos que el Teorema 4.3 es la opción menos exigente para obtener la existencia y unicidad de una solución definida en $[a, b]$.

Ejemplo 4.4. Sea el problema de Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \cos^2(y(x)) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

donde la función $f(x, y) = \cos^2(y)$ está definida y es continua en cualquier banda de la forma $[-n, n] \times \mathbb{R}$, con $n \in \mathbb{N}$. Además, f es lipschitziana respecto de y en $[-n, n] \times \mathbb{R}$, ya que si tomamos $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ cualesquiera y $x \in [-n, n]$, entonces,

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |\cos^2(y_1) - \cos^2(y_2)| = |\sin(y_1 + y_2) \sin(y_1 - y_2)| \leq |y_1 - y_2|,$$

dado que $|\sin(z)| \leq |z|$ y $|\sin(z)| \leq 1$ para todo $z \in \mathbb{R}$.

Por lo tanto, podemos aplicar el Teorema global de Picard-Lindelöf, Teorema 4.3, para cualquier dominio de la forma $[-n, n] \times \mathbb{R}$ con $n \in \mathbb{N}$ y obtener que existe una única solución, que está definida en $[-n, n]$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y por tanto en todo \mathbb{R} . Dicha solución viene dada por

$$\phi(x) = \arctan(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Además, podemos calcular los iterantes de Picard para algunos valores de $k \in \mathbb{N}$. Tomemos, por ejemplo, el intervalo $I = [-n, n]$ con $n \in \mathbb{N}$.

- En primer lugar, $g_0 = y_0 = 0$ para todo $x \in I$.
- Para $k = 0$, obtenemos

$$g_1(x) = 0 + \int_0^x f(s, g_0(s))ds = \int_0^x f(s, 0)ds = \int_0^x \cos^2(0)ds = \int_0^x 1ds = x \quad \forall x \in I.$$

- Para $k = 1$, tenemos

$$g_2(x) = 0 + \int_0^x f(s, g_1(s))ds = \int_0^x f(s, s)ds = \int_0^x \cos^2(s)ds = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{sen}(2x) \quad \forall x \in I.$$

En la Figura 3.3 de [1] podemos ver la representación de los iterantes que hemos calculado en los intervalos $[-1, 1]$ y $[-3, 3]$. Si la comparamos con la Figura 2.5 de [1] observamos que ambas sucesiones son muy distintas, obteniendo varias formas de aproximar la misma solución.

5 Aplicaciones o extensiones (Conclusiones)

El desarrollo de este trabajo culmina con la demostración rigurosa del Teorema de Cauchy-Peano en sus dos versiones: local y global. Este resultado fundamental establece la condición mínima de continuidad para garantizar la existencia de soluciones a los problemas de Cauchy (PC). A partir de esta base, podemos extraer conclusiones sólidas sobre la estructura del problema, los métodos de aproximación y las extensiones teóricas necesarias para asegurar la unicidad.

5.1 La Relación Existencia-Unicidad

El hallazgo central que emerge del Teorema de Cauchy-Peano es la distinción crucial de la existencia y unicidad de las soluciones.

- 1. Existencia con continuidad:** El Teorema de Cauchy-Peano nos garantiza la existencia de al menos una solución local y , bajo la condición adicional de que f sea acotada en una banda, una solución global. La continuidad de la función $f(x, y)$ es la única hipótesis necesaria para establecer este resultado.
- 2. El problema de la Unicidad:** La sola continuidad resulta ser insuficiente para asegurar que la solución hallada es única. El ejemplo de Peano ($y(x) = 3y^{\frac{2}{3}}(x)$ con $y(0) = 0$) es el contraejemplo clásico que muestra la existencia de múltiples soluciones, lo cual pone de manifiesto la necesidad de añadir una hipótesis más fuerte.
- 3. La Condición de Lipschitz como Garantía:** La solución a esta limitación se encuentra en la condición de que $f(x, y)$ sea lipschitziana respecto a la variable y (Definición 4.1). Al incorporar esta exigencia, el 4.1 demuestra categóricamente, mediante el uso de la Desigualdad de Gronwall (4.1), que si un (PC) admite dos soluciones, estas deben ser idénticas, garantizando así la unicidad de la solución.

5.2 Aplicaciones del Método de Euler

La demostración del Teorema de Cauchy-Peano (Sección 3.1) no es solo una prueba teórica, sino un proceso constructivo que nos permite establecer un método numérico para resolver PVI.

- Recapitulando, el método de las Poligonales de Euler construye una sucesión de funciones continuas $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ que cumplen las hipótesis de equicontinuidad uniforme y acotación uniforme. Estas condiciones son el requisito para aplicar el Teorema de Arzelà-Ascoli (Teorema 2.1) y asegurar que existe una subsucesión que converge uniformemente a la solución $p(x)$
- De forma numérica el método de Euler, ilustrado en [1] y en las (Figuras 1 y 2), es la base de la aproximación numérica más simple en el estudio de las EDOs. La convergencia observada en los ejemplos numéricos (donde al aumentar n , la poligonal se acerca a la solución exacta) supone una aplicación práctica del resultado teórico de existencia.

5.3 Extensiones al Teorema de Picard-Lindelöf y Sistemas Lineales

La teoría avanza combinando las hipótesis demostradas para obtener resultados más completos, formalizados en los Teoremas de Picard-Lindelöf (mencionados en la Sección 4).

1. Síntesis de Condiciones: Los Teoremas de Picard-Lindelöf, tanto en su versión local (análoga a la de Cauchy-Peano local, pero con unicidad) como global, requieren que f sea simultáneamente continua y lipschitziana.
2. Aplicación Contractiva: La prueba de existencia en el contexto de Picard-Lindelöf se basa en el Teorema del Punto Fijo de Banach, Teorema 2.2. Al definir el problema de Cauchy en su forma integral (3.1), se le asocia una aplicación contractiva cuya existencia de un punto fijo garantiza la existencia y unicidad de la solución al (PC).
3. Iterantes de Picard: Las soluciones se construyen a través de los Iterantes de Picard, que son la solución generada por el proceso iterativo del teorema del punto fijo.
4. Prolongabilidad: Las versiones globales (Teorema 3.2 y 4.3) extienden la solución a un intervalo fijo $[a, b]$. Cuando esto no es posible, la teoría se extiende al estudio de la prolongabilidad, un concepto que permite determinar el dominio máximo de la solución partiendo de los resultados locales.

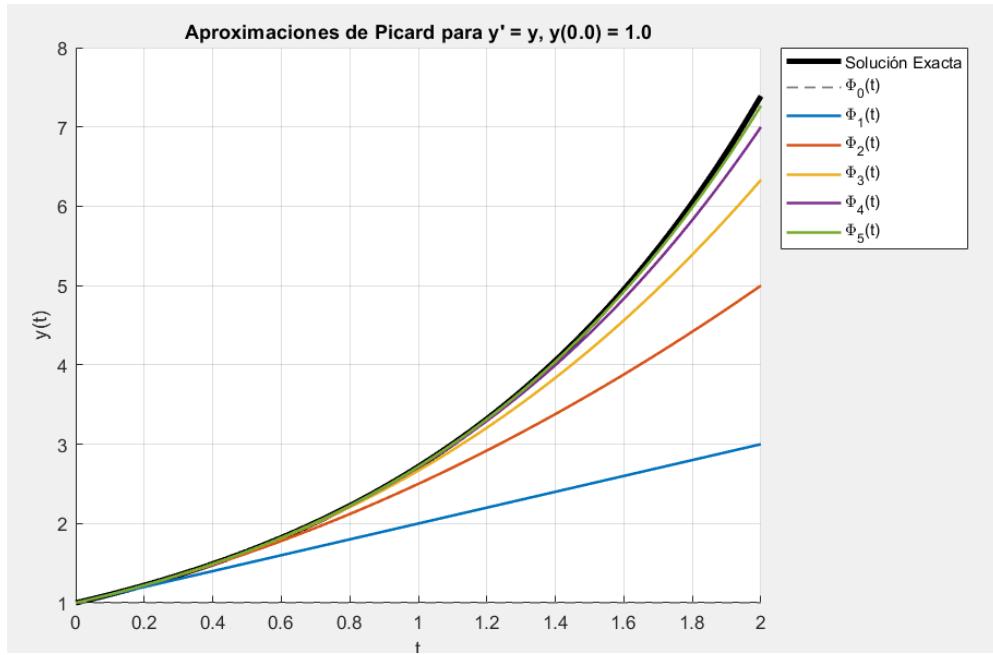


Figura 3: Observamos como a mayor numero de iteraciones nos acercamos más a la solución del PVI $y' = y$ con condición inicial $y(0) = 1$

En conclusión, el Teorema de Cauchy-Peano es la piedra angular que demuestra que la existencia de soluciones es un derecho fundamental de un sistema continuo. El resto de la teoría, que culmina en los Teoremas de Picard-Lindelöf, se dedica a demostrar que la solución es única al imponer condiciones de regularidad adecuadas.

Referencias

- [1] Bontempini Rey, J. (2024). *Existencia y unicidad de solución del problema de Cauchy* [Trabajo fin de grado, Universidad de Cantabria]. Repositorio Institucional UNICAN. Disponible en: repositorio.unican.es
- [2] F. Llorente. (2020). *Teoremas de punto fijo para aplicaciones contractivas y no expansivas* [en línea], Universidad de Sevilla. Disponible en idus.us.es.
- [3] M. de Guzmán. *Ecuaciones diferenciales ordinarias: teoría de estabilidad y control*, Alhambra, 1987.
- [4] S. Novo, R. Obaya, J. Rojo. (1995) *Ecuaciones y sistemas diferenciales*, McGraw-Hill.
- [5] I. Peral, M. Walias. (2002). *Ecuaciones diferenciales ordinarias*, Universidad Autónoma de Madrid.
- [6] Pedro Marín Rubio. (2006). *Una introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.*, Universidad de Sevilla, Departamento de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico. Disponible en: <https://personal.us.es/pmr/wp-content/uploads/2025/03/gm-apuntes-pedro-marin-rubio-edo.pdf>
- [7] M. de Guzmán, I. Peral, M. Walias. (1978). *Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias*, Alhambra.

Anexo 1: MATLAB para el Método de Euler

Este código implementa el **Método de Euler** para resolver numéricamente la Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO) de primer orden $y' = -2y$ con la condición inicial $y(0) = 1$, comparando la solución numérica con la solución exacta $y(t) = e^{-2t}$ para distintos tamaños de paso.

```

clc; clear; close all;
% EDO: Ecuación Diferencial Ordinaria
f = @(t,y) -2*y;    % y' = -2y
t0 = 0;              % Tiempo inicial
y0 = 1;              % Condición inicial y(t0)
tf = 2;              % Tiempo final
% Pares divididos en dos gráficas, cada par representa n, el número de pasos
pairs = {
    [5 10];          % Primera figura: n=5 y n=10
    [15 25]           % Segunda figura: n=15 y n=25
};
% Solución exacta
t_exact = linspace(t0, tf, 500);
y_exact = exp(-2 * t_exact);
for p = 1:2
    % Crear y configurar la figura
    figure('Position',[250 250 700 450]);
    hold on; grid on;
    % Graficar solución exacta
    plot(t_exact, y_exact, 'k', 'LineWidth', 2);
    pair = pairs{p};
    colors = lines(2);
    for i = 1:2
        n = pair(i);
        h = (tf - t0)/n; % Tamaño de paso
        t = t0:h:tf;      % Vector de tiempo discreto
        % Inicializar y aplicar el Método de Euler
        y = zeros(1, n+1);
        y(1) = y0;
        for k = 1:n
            % Fórmula del Método de Euler: y_{k+1} = y_k + h * f(t_k, y_k)
            y(k+1) = y(k) + h*f(t(k), y(k));
        end
        % Graficar aproximación
        plot(t, y, 'o-', ...
            'Color', colors(i,:), ...
            'LineWidth', 1.6, ...
            'MarkerFaceColor', colors(i,:));
    end
    title(sprintf('Método de Euler - n = %d y n = %d', pair(1), pair(2)));
    xlabel('t');
    ylabel('y(t)');
    legend('Solución exacta', ...
        sprintf('Euler n=%d', pair(1)), ...
        sprintf('Euler n=%d', pair(2)), ...

```

```
'Location','best');
end
```

Nota: Este código genera dos gráficos que ilustran cómo la solución numérica se acerca a la solución exacta a medida que aumenta el número de pasos (n).

Anexo 2: MATLAB para las iteradas de Picard

```
clc; clear; close all;

% --- 1. CONFIGURACIÓN DEL PVI ---
f_str = 'y';      % y' = y
t0 = 0;           % Tiempo inicial
y0 = 1;           % Condición inicial y(t0)
tf = 2.0;          % Límite superior del intervalo de tiempo [t0, tf]

% Número de iteraciones de Picard a calcular y graficar
n_iteraciones = 5;

% Solución exacta (para comparación)
% y_exacta = exp(t) para y' = y, y(0) = 1
syms t;
y_exacta_sym = exp(t);
y_exacta_fun = matlabFunction(y_exacta_sym); % Convertir a función anónima para graficar

% Vector de tiempo para la gráfica (continuo)
t_plot = linspace(t0, tf, 200);
y_exacta_vals = y_exacta_fun(t_plot);

% --- 2. CÁLCULO DE LAS APROXIMACIONES DE PICARD ---
syms s y;
f_expr = str2sym(f_str);

% Inicialización
phi_n_minus_1 = sym(y0);
aproximaciones = {phi_n_minus_1}; % Almacena las expresiones simbólicas

% Mensaje de inicio
disp(' ');
disp('--- Iteraciones de Picard ---');
fprintf('PVI: y''(t) = %s, y(%2f) = %.2f\n', char(f_expr), t0, y0);
fprintf('Calculando Phi_0(t) hasta Phi_%d(t)\n', n_iteraciones);
disp('-----');

% Bucle de Iteraciones
for n = 1:n_iteraciones
    % a. f(s, phi_{n-1}(s))
    integrando = subs(f_expr, y, phi_n_minus_1);
    integrando = subs(integrando, t, s);
```

```
% b. Integrar desde t0 hasta t
integral_resultado = int(integrando, s, t0, t);

% c. Calcular phi_n(t)
phi_n = y0 + integral_resultado;
phi_n = simplify(phi_n);

aproximaciones{end+1} = phi_n;
phi_n_minus_1 = phi_n;

fprintf('Phi_%d(t) = %s\n', n, char(phi_n));
end

% --- 3. GRÁFICOS DE CONVERGENCIA ---
figure('Position',[250 250 800 500]);
hold on; grid on;

% Definir colores para las líneas (evitamos el negro que es para la exacta)
colors = lines(n_iteraciones);

% Graficar Solución Exacta
plot(t_plot, y_exacta_vals, 'k', 'LineWidth', 3, 'DisplayName', 'Solución Exacta');

% Graficar las Aproximaciones de Picard
for n = 0:n_iteraciones
    phi_n_sym = aproximaciones{n+1};

    % Convertir la expresión simbólica a función anónima para evaluación
    phi_n_fun = matlabFunction(phi_n_sym);

    % Evaluar la aproximación en el vector de tiempo t_plot
    % Se incluye manejo de errores por si hay divisiones por cero en ciertos PVI
    try
        y_approx_vals = phi_n_fun(t_plot);
    catch
        % Si phi_n es una constante (como phi_0), se maneja el error de 't'
        y_approx_vals = ones(size(t_plot)) * double(phi_n_sym);
    end

    % Elegir color (Phi_0 será el primer color, Phi_1 el segundo, etc.)
    if n == 0
        line_color = [0.5 0.5 0.5]; % Gris para Phi_0
        line_style = '--';
        line_width = 1.0;
    else
        line_color = colors(n, :);
        line_style = '-';
        line_width = 1.5;
    end

    plot(t_plot, y_approx_vals, ...

```

```
'LineStyle', line_style, ...
'Color', line_color, ...
'LineWidth', line_width, ...
'DisplayName', sprintf('\Phi_{%d}(t)', n));
end

title(sprintf('Aproximaciones de Picard para y'' = %s, y(%.1f) = %.1f', f_str, t0, y0));
xlabel('t');
ylabel('y(t)');
legend('Location','bestoutside');
hold off;
```