Solucionario del Parcial 2

Alvaro Chirino Gutierrez

Diciembre, 2020

Problema 1.

En un examen con 10 preguntas de Falso y verdadero, donde un estudiante responde todas al azar. ¿Cuál es la probabilidad que un estudiante responda más de 5 preguntas de manera correcta?

Solución,

Sea X la va, que denota el número de respuestas correctas en el examen de 10 preguntas. $Rx = \{0, 1, 2 \ldots, 10\}$. $X \sim Binomial(n = 10, p = 0.5)$

$$P(X = x) = \binom{10}{x} 0.5^x 0.5^{10-x}$$

$$P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - F(5) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + \ldots + P(X = 5)] = 0.3769$$

```
1-(dbinom(0,10,0.5)+dbinom(1,10,0.5)+dbinom(2,10,0.5)+dbinom(3,10,0.5)+
     dbinom(4,10,0.5)+dbinom(5,10,0.5))
```

```
## [1] 0.3769531
```

```
# (1-F(5))
1-pbinom(5,10,0.5)
```

```
## [1] 0.3769531
```

Problema 2.

Una moneda correcta es lanzada sucesivamente hasta que aparezca cara por decima vez. Sea X la v.a. que denota el número de sellos que ocurren. La función de probabilidad de X es:

Solución. $X \sim BinomialNegativa(r = 10, p = 0.5)$

Problema 3.

El promedio de llamadas telefónicas a la secretaria de la carrera de informática en una hora es 9. ¿Cuál es la probabilidad de recibir 7 o más llamadas en 90 minutos?.

Solución, sea X_{90} la va que denota la cantidad de llamadas en la secretaría de informática en 90 minutos. Para una hora $X_{60} \sim Poisson(\lambda = 9)$, ya que $E[X_{60}] = \lambda = 9$, entonces, $X_{90} \sim Poisson(\lambda = 13.5)$.

$$P(X_{90} \geq 7) = 1 - P(X_{90} \leq 6) = 1 - F(6) =$$

```
1-ppois(6,13.5)
```

```
## [1] 0.9807464
```

Problema 4.

El número de minutos requeridos por un estudiante para terminar un examen se distribuye como una exponencial, con un promedio de 70 minutos. Suponga que el examen inicia a las 8:00 am. ¿Cuál es la probabilidad que termine antes de las 8:45 am?

Solución, sea X la va, esta denota el tiempo que un estudiante tarda en responder un examen. Como $70 = E[X] = 1/\lambda$, $X \sim exp(\lambda = 1/70)$.

$$f(x) = \frac{1}{70}e^{-\frac{x}{70}}$$
$$P(X \leq 45) = F(45) = 1 - e^{-\frac{45}{70}} = 0.474$$

```
pexp(45,1/70)
```

```
## [1] 0.474212
```

Problema 5.

Sea $X \sim gamma(\alpha = 2, \beta = 6)$, encontrar el valor de $E[X^2]$

Solución, recordar que:

$$V(X) = E[X^2] - E[X]^2$$
$$E[X^2] = V(X) + E[X]^2 = \frac{2}{6^2} + \frac{2^2}{6^2} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} = 0.16667$$

Problema 6.

La duración de vida (en horas) de dos equipos de distintas marcas X e Y tienen distribución Normal de la forma $X \sim N(\mu = 35, \sigma^2 = 16)$, $Y \sim N(\mu = 35, \sigma^2 = 25)$. Si los equipos tuvieran que ser usados por un periodo de 42 horas. ¿Cuál debe ser preferido?

Solución, se debe calcular y comparar $P(X > 42)$, $P(Y > 42)$ y elegir la marca que tenga una mayor probabilidad.

$$P(X > 42) = 1 - P(X \leq 42) = 1 - P(Z_X \leq \frac{42-35}{4}) = 1 - \phi(1.75) = 0.040$$
$$P(Y > 42) = 1 - P(Y \leq 42) = 1 - P(Z_Y \leq 1.4) = 1 - \phi(1.4) = 0.081$$

```
1-pnorm(1.75)# 1-P(Z<1.75)
```

```
## [1] 0.04005916
```

```
1-pnorm(1.4)#  1-P(Z<1.4)
```

```
## [1] 0.08075666
```

```
1-pnorm(42,35,4)#  1-P(X<42)
```

```
## [1] 0.04005916
```

```
1-pnorm(42,35,5)#  1-P(Y<42)
```

```
## [1] 0.08075666
```

```
pnorm(42,35,4,lower.tail = F) # P(X>42)
```

```
## [1] 0.04005916
```

```
pnorm(42,35,5,lower.tail = F) # P(X>42)
```

```
## [1] 0.08075666
```

Se debe elegir la marca Y.

Problema 7.

Un dado perfecto es lanzado independientemente 1200 veces. Encontrar aproximadamente la probabilidad de que el número de unos (X) es tal que $190 \leq X \leq 200$.

Solución, sea X la va, representa la cantidad de 1 en el lanzamiento de un dado 1200 veces (de forma independiente). Así $X \sim Binomial(n = 1200, p = 1/6)$. Se pide:

$$P(190 \leq X \leq 200) = P(X = 190) + P(X = 191) + \ldots + P(X = 200) = \sum_{i=190}^{200} P(X = i)$$

Para R.

$$P(190 \leq X \leq 200) = F(200) - F(190)$$

```
pbinom(200,1200,1/6)-pbinom(190,1200,1/6)
```

```
## [1] 0.286761
```

Aproximando con la distribución normal $X \sim N(\mu = E[X] = 200, \sigma^2 = V(X) = 166.7)$. $X \sim N(\mu = 200, \sigma^2 = 166.7)$

$$P(190 \leq X \leq 200) = P(-0.77 \leq Z \leq 0) = \phi(0) - \phi(-0.77) = 0.5 - 0.22 = 0.28$$