1. **Problem**
   Debe responder de forma correcta todas las sentencias para que la pregunta sea considerada correcta. Determine la veracidad de las siguientes sentencias:

   (a) Si dos variables aleatorias X, Y son independientes, entonces $cov(x, y) = 0$
   (b) Para el caso continuo $\int_{Rx} f(x, y)dx = f(y)$
   (c) Para el caso discreto si la variable X toma 9 valores y la variable Y toma 5 valores, entonces su distribución conjunta tiene 46 combinaciones
   (d) Para el caso continuo $\int_{Rx} f(x, y)dx = f(x)$
   (e) $f(x, y) = f(x) * f(y)$ siempre

   Solution
   Las únicas opciones correctas son:

   - Para el caso continuo $\int_{Rx} f(x, y)dx = f(y)$
   - Si dos variables aleatorias X, Y son independientes, entonces $cov(x, y) = 0$

   Para el caso de las combinaciones

   - Las combinaciones son 45

2. **Problem**
   Sea (X, Y) va continuas definidas ambas para los reales positivos, con función de densidad:

   $$f(x, y) = \frac{1}{4}(x + y)xye^{-x-y}$$

   La marginal f(x) es:

   (a) Ninguna
   (b) $f_X(x) = \frac{x^2+x}{4}e^{-x}$
   (c) $f_X(x) = \frac{x^2+2x}{4}e^{-x}$
   (d) $f_X(x) = \frac{x^2+2x}{4}e^{x}$
   (e) Falta información

   Solution

   $$f_X(x) = \int_0^\infty \frac{1}{4}(x + y)xye^{-x-y}dy = \frac{1}{4}e^{-x}\left(x^2\int_0^\infty ye^{-y}dy + x\int_0^\infty y^2e^{-y}dy\right) =$$

   $$= \frac{x^2 + 2x}{4}e^{-x}$$

3. **Problem**
   Sean dos variables aleatorias X, Y independientes, con $E[X] = 10$, $E[Y] = 8$, $E[X, Y] = 85$, la covarianza es:

   (a) Falta información
   (b) 80
   (c) -5
   (d) 165
   (e) Ninguna o la información dada es incorrecta

Solution
Por definición si X e Y son independientes $E[X,Y] = E[X]E[Y]$ y $cov(X,Y) = 0$

4. **Problem**
Si:

$$f(x,y) = x + y \quad 0 < x < 1 \quad 0 < y < 1$$

Obtenga $E[X^2]$

(a) $\frac{5}{12}$
(b) $\frac{7}{12}$
(c) Ninguna o la información dada es incorrecta
(d) Falta información
(e) $\frac{2}{3}$

Solution

$$f(x) = x + \frac{1}{2} \quad 0 < x < 1$$

$$E[X^2] = \int_0^1 x^2 f(x)dx = \frac{5}{12}$$

5. **Problem**
Sean dos variables aleatorias X, Y, con $E[X] = 6$, $E[Y] = 9$, $E[X,Y] = 57$, la covarianza es:

(a) 54
(b) Falta información
(c) Ninguna o la información dada es incorrecta
(d) 3
(e) 111

Solution
Por definición $cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$, en R; sea $E[XY]$ exy, $E[X]$ ex y $E[Y]$ ey

```
exy-ex*ey
```

```
## [1] 3
```

6. **Problem**
Sea X una va tal que $X \sim U(a,b)$. Se toma una muestra aleatoria de tamaño n, encontrar la función de densidad conjunta de la muestra.

(a) $f(x) = \frac{1}{b-a}$
(b) $f(x_1,\ldots,x_n) = \frac{1}{b-a}$
(c) Ninguna
(d) $f(x_1,\ldots,x_n) = \frac{1}{(b-a)^n}$
(e) $f(x) = \frac{1}{a-b}$

Solution
La respuesta por el principio de independencia de muestras aleatorias es:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1) \ldots f(x_n) = \frac{1}{(b-a)^n}$$

7. **Problem**
Se toma una muestra aleatoria de tamaño 7 de una población finita de tamaño 65, Calcular para el estimador de la media muestral, su varianza. Los datos son: 46, 17, 98, 46, 26, 35, 44

   (a) Falta información
   (b) 44.5714286
   (c) 86.1653585
   (d) Ninguna
   (e) 675.952381

   Solution
   La respuesta correcta se obtiene calculando:

   $$V(\bar{X}) = (1 - \frac{n}{N})\frac{S_x^2}{n}$$

   Por lo tanto la respuesta es: 86.1653585

8. **Problem**
Sea X una va tal que $X \sim F(v_1 = 13, v_2 = 6)$. Calcular la probabilidad que X sea 1.31

   (a) 0.6113158
   (b) Falta información
   (c) 0.3886842
   (d) Ninguna
   (e) 0.6804357

   Solution
   Se esta pidiendo que $P(X = 1.31)$, dado que X es continua la probabilidad es cero

9. **Problem**
La cantidad de tiempo que le toma al cajero de un banco con servicio en el automóvil atender a un cliente es una variable aleatoria con una media $\mu = 11.46$ minutos y una desviación estándar $\sigma = 7.24$ minutos. Si se observa una muestra aleatoria de 50 clientes, calcule la probabilidad de que el tiempo medio que el cliente pasa en la ventanilla del cajero sea más de 7.49 minutos;

   (a) 1
   (b) 5.2796444 × 10-5
   (c) Ninguna
   (d) Información insuficiente
   (e) 0.9999472

   Solution
   $P(\bar{X} > b) = 1 - P(Z < \frac{b-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}) \approx 1 - \phi(\frac{b-\mu}{\sigma/\sqrt{n}})$

```
1-pnorm((b-mu)/(sigma/sqrt(n)))
```

```
## [1] 0.9999472
```

10. **Problem**
La distribución de alturas de cierta raza de perros terrier tiene una media de 65.03 centímetros y una desviación estándar de 11.49 centímetros; en tanto que la distribución de alturas de cierta raza de poodles tiene una media de 26.02 centímetros con una desviación estándar de 10.25 centímetros. Calcule la probabilidad de que la media muestral de una muestra aleatoria de alturas de 41 terriers exceda la media muestral para una muestra aleatoria de alturas de 54 poodles a lo sumo 37.41 centímetros.

    (a) 0.4814461
    (b) Ninguna
    (c) 0.2407231
    (d) Información insuficiente
    (e) 0.7592769

    Solution

$$P(\bar{X}_t < \bar{X}_p + b) = P(\bar{X}_t - \bar{X}_p < b) = p\left(Z < \frac{b-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}\right) =$$

$$\approx \phi\left(\frac{b-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}\right)$$

```
pnorm(z)
```

```
## [1] 0.2407231
```