Solucionario: Recuperatorio, Estadística I.

Alvaro Chirino Gutierrez

Diciembre, 2020

Contents

Parcial 1

Pregunta 1

Una urna contiene 15 bolas, otra urna contiene 14 bolas. Una bola es seleccionada de cada urna. ¿Cuál es la probabilidad que las bolas sean del mismo color?. La estructura de las urnas es:

- (Urna 1) Blancas: 6, Negras: 7, Rojas: 2.
- (Urna 2) Blancas: 2, Negras: 2, Rojas: 10

Solución, sean los eventos B1=Bola Blanca seleccionada de la urna 1, N1=Bola Negra seleccionada de la urna 1 y R1=Bola Roja seleccionada de la urna 1, de manera análoga para la urna 2.

$$P(MismoColor) = P((B1 \cap B2) \cup (N1 \cap N2) \cup (R1 \cap R2))$$

Por ser eventos mutuamente excluyentes y por independencia entre las urnas.

$$= P(B1 \cap B2) + P(N1 \cap N2) + P(R1 \cap R2) = P(B1)P(B2) + P(N1)P(N2)P(R1)P(R2)$$

$$= \frac{6}{15}\frac{2}{14} + \frac{7}{15}\frac{2}{14} + \frac{2}{15}\frac{10}{14} = 0.2190$$

Pregunta 2

Un niño desayuna leche descremada o leche natural, con probabilidad 0.35 y 0.65 respectivamente. 20% de las veces que toma leche descremada le genera molestias estomacales, mientras que el 10% de las veces que toma leche natural le genera molestias estomacales. Si el niño tiene molestias estomacales un día en particular ¿Cuál es la probabilidad que haya tomado leche descremada?

Solución, sean los eventos $LD =$ leche descremanda y $LN =$ leche Natural y $M = Molestias$, entonces, $P(LD) = 0.35$ $P(LN) = 0.65$, $P(M/LD) = 0.2$ y $P(M/LN) = 0.1$

Por Bayes,

$$P(LD/M) = \frac{P(LD)P(M/LD)}{P(M)}$$

Por el teorema de la probabilidad total

$$P(M) = P(LD) * P(M/LD) + P(LN) * P(M/LN) = 0.35 * 0.2 + 0.65 * 0.1 = 0.135$$

Asi,

$$P(LD/M) = \frac{0.35 * 0.2}{0.135} = 0.5185$$

Pregunta 3

Dada la siguiente función de densidad, encontrar el valor de c y encontrar la función de distribución acumulada de X

$$f(x) = \frac{1}{6}x + c,\ \ 0 \leq x \leq 4$$

- $F(X) = \frac{1}{6} - \frac{1}{12}$
- $F(X) = \frac{x^2}{12} - \frac{x}{12}$
- $F(X) = x^2 + x - 12$
- $F(X) = \frac{x}{12} - \frac{x^2}{12}$
- $F(X) = \frac{x}{6} - \frac{x^2}{12}$

Solución,

$$\int_0^4 \left(\frac{1}{6}x + c\right) dx = \left(\frac{1}{6*2}x^2 + cx\right)_0^4 = \frac{16}{12} + 4c = 1$$

Así $C = -1/12$:

$$f(x) = \frac{1}{6}x - \frac{1}{12}$$

Finalmente:

$$F(t) = \int_0^t f(x)dx = \int_0^t \frac{1}{6}x - \frac{1}{12}dx = \left(\frac{x^2}{12} - \frac{x}{12}\right)_0^t = \frac{t^2}{12} - \frac{t}{12}$$
$$F(X) = \frac{x^2}{12} - \frac{x}{12}$$

Pregunta 4

Sea la función generatriz de momentos de una va X, Encontrar la varianza.

$$M_x(t) = \frac{25}{25 - t^2},\ \ -\infty < x < \infty$$

- 0
- 0.0800 (correcto)
- 0.0064
- 0.2828
- 0.3722

Solución,

$$E(X) = \frac{dM_x(t=0)}{dt} = \frac{-25*(-2t)}{(25-t^2)^2} = \left(\frac{50t}{(25-t^2)^2}\right)_{t=0} = 0$$

$$E[X^2] = \frac{d^2M_x(t=0)}{d^2t} = \left(\frac{-150t^2 - 1250}{t^6 - 75t^4 + 1875t^2 - 15625}\right)_{t=0} = \frac{1250}{15625} = 0.08$$

$$V(X) = E[X^2] - E[X]^2 = 0.08$$

Parcial 2

Pregunta 1

Si $X \sim Binomial(n, p)$, tal que $E[X] = 6$ y $V(X) = 2.4$, determinar: $P(X < 6)$

1. 0.37 (Correcto)
2. 0.20
3. 0.62
4. Ninguna
5. Falta información

Solución, $E[X] = np = 6$, $V(X) = np(1-p) = 2.4 = 6 * (1-p)$, así $p = 0.6$ y $n = 6/0.6 = 10$. Así $X \sim Binomial(n = 10, p = 0.6)$

$$P(X \leq 6) = P(X = 0) + P(X = 1) + \ldots + P(X = 5) = \sum_{x=0}^{5} \binom{10}{x} 0.6^x 0.4^{10-x} = 0.3669 = 0.37$$

Pregunta 2

Supongamos que hay 900 errores de impresión distribuidos aleatoriamente en un libro de 1100 páginas. Encuentre la varianza de los errores en 10 páginas dadas del libro.

1. 0.8181
2. 0.7881
3. 8.1818
4. 0.5050
5. Ninguna

Solución,

a) Sea la variable X =Errores en 10 páginas, así, $X \sim P(\lambda = (900/1100) * 10 = 8.1818)$, se pide $V(X)$.

Por propiedades de la Poisson $V(X) = \lambda = 8.1818$

Pregunta 3

El tiempo en minutos que tarda en atender una cajera en un banco tiene distribución exponencial con $E[X] = 16$. Un cliente con mucha prisa llega donde la cajera, ¿Cuál es la probabilidad de que la cajera tarde exactamente 8 minutos en atenderla?

1. 0

2. 0.4723
3. 0.3934
4. 0.6065
5. Ninguna

Solución, como $E[X] = 1/\lambda$, entonces, $X \sim exp(\lambda = 1/16)$. Se pide $P(X = 8)$ que para distribuciones continuas $P(X = c) = 0$ para cualquier constante c, ya que la probabilidad para lo continuo es el área debajo de la curva de densidad.

Pregunta 4

Los alturas de 1500 estudiantes están normalmente distribuidos con media 165 cm y desviación estándar de 17. Encuentre el número de alumnos que miden entre 157 cm y 169:

- 275
- 0.275
- 413
- 833
- 675

Solución, sea $X \sim N(\mu = 165, \sigma = 17)$. Para encontrar el número de estudiantes debemos aproximarnos por $P(157 < X < 169)$, Así:

$$P(157 < X < 169) = P(\frac{157-165}{17} < Z < \frac{169-165}{17}) = P(-0.4705 < Z < 0.2353) = \phi(0.24) - \phi(-0.47) =$$

$$= 0.5948 - 0.3192 = 0.2756$$

Para tener el número estimado de estudiantes $0.2756 * 1500 = 413.4 = 413$