Ejercicio 41

$$H = U_1^{(c)}(\beta = \pi, \phi = \pi)\, U_1^{(c)}(\beta = \pi/2, \phi = -\pi/2)$$

Tomando como base $\{|g,0\rangle, |e,0\rangle\}$ podemos expresar la matriz de carrier transition como una matriz 2x2

$$U^{(c)} = \begin{pmatrix} \cos(\beta/2) & -ie^{-i\phi}\sin(\beta/2) \\ -ie^{i\phi}\sin(\beta/2) & \cos(\beta/2) \end{pmatrix}$$

Con esta matriz vamos a calcular primeramente $U_1^{(c)}(\beta=\pi, \phi=\pi)$

$$U_1^{(c)}(\beta=\pi, \phi=\pi) = \begin{pmatrix} \cos(\pi/2) & -ie^{-i\pi}\sin(\pi/2) \\ -ie^{-i\pi}\sin(\pi/2) & \cos(\pi/2) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -ie^{i\pi} \\ -ie^{i\pi} & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Aplicamos Euler} = \begin{pmatrix} 0 & -i(-1) \\ -i(-1) & 0 \end{pmatrix} =$$

$$e^{i\phi} = \cos(\phi) + i\sin(\phi)$$

$$e^{-i\pi} = \cos(\pi) - i\sin(\pi)$$

$$e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\sin(\pi)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora vamos a calcular $U_1^{(c)}(\beta - \pi/2 \text{ y } \phi = -\pi/2)$

$$U_1^{(c)}(\beta=\pi/2, \phi=-\pi/2) = \begin{pmatrix} \cos(\pi/4) & -ie^{i\pi/2}\sin(\pi/4) \\ -ie^{i\pi/2}\sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -ie^{i\pi/2}\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -ie^{-i\pi/2}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix}\text{Aplicando Euler} \\ \text{y simplificando}\end{matrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Teniendo ambas matrices, podemos hacer la comprobación

$$H = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} -i & i \\ i & i \end{pmatrix} = \frac{i\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$ (No coincide con la Hadamard)

Vamos a probar con $\phi = \pi/2$ en la segunda matriz. Por tanto:

$$U_1^{(c)}(\beta = \pi/2, \phi = \pi/2) = \begin{pmatrix} \cos(\pi/2) & -ie^{-i\pi/2} \operatorname{sen}(\pi/4) \\ -ie^{i\pi/2} \operatorname{sen}(\pi/4) & \cos(\pi/2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -ie^{-i\pi/2} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -ie^{i\pi/2} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -ie^{-i\pi/2} \\ -e^{i\pi/2} & 1 \end{pmatrix} \to$$

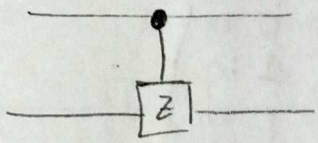
Aplicando Euler y simplificando $\to \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} i & i \\ i & -i \end{pmatrix} =$$

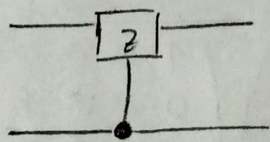
$$= \frac{i\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = i \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Demostramos que $U_1^{(c)}(\beta = \pi, \phi = \pi)\, U_1^{(c)}(\beta = \pi/2, \phi = \pi/2) = H$ con una fase global

49) Circuito 14. 3. 3. 1



=



$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

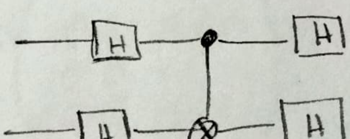
$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$U_1 \qquad U_2$$

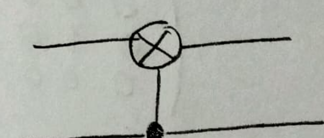
Podemos observar que ambas matrices son idénticas. Si dos operadores cuánticos son idénticos, esto implica que su producto es igual a la matriz identidad

$$U_1 \cdot U_2 = I \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Circuito 14. 3. 3. 2



=



$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vamos a calcular la matriz de operación del circuito:

$$H \otimes H \cdot CX \cdot H \otimes H$$

$$H \otimes H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

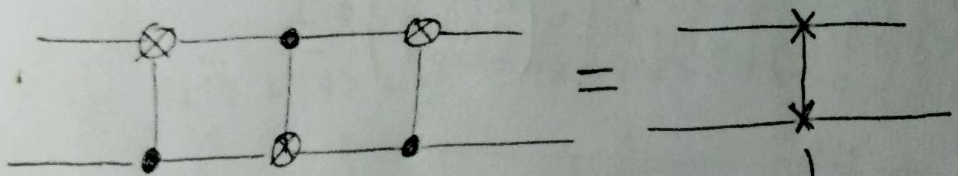
$$\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$U_1 \cdot U_2 = I \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

14.3.3 3



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow U_2$$

$$CNot_{0,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

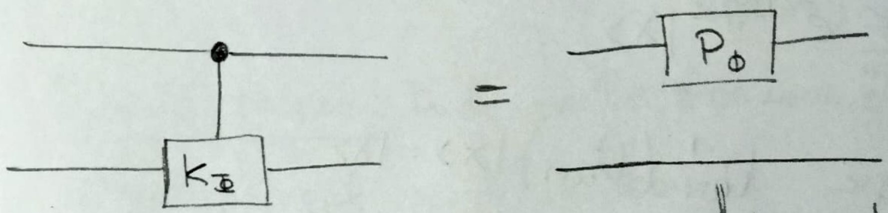
$$CNot_{1,0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overbrace{CX_{1,0} \circ CX_{01} \circ CX_{10}}^{U_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U_1 \cdot U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

14.3.3.4



La matriz operacion asociada al sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\Phi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\Phi} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\Phi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\Phi} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\Phi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\Phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\Phi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\Phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2i\Phi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2i\Phi} \end{pmatrix} \rightarrow$$

Aplicando Euler y la identidad trigonometrica

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 50

Para demostrar la equivalencia entre estos dos circuitos vamos a ver que le ocurre al tercer qubit con los diferentes posibles valores de entrada

Comenzamos con el circuito de puerta multicontrolada U

Entrada	Tercer qubit ($\|\psi\rangle$)
$\|00\rangle$	$\|\psi\rangle$
$\|01\rangle$	$\|\psi\rangle$
$\|10\rangle$	$\|\psi\rangle$
$\|11\rangle$	$U\|\psi\rangle$

Ahora para el segundo circuito

Entrada	Tercer qubit ($\|\psi\rangle$)
$\|00\rangle$	$\|\psi\rangle$
$\|01\rangle$	$V^{+}V\|\psi\rangle = I\|\psi\rangle$
$\|10\rangle$	$VV^{+}\|\psi\rangle = I\|\psi\rangle$
$\|11\rangle$	$VV\|\psi\rangle = V^2\|\psi\rangle$

Por tanto, si se verifica que $U = V^2$, entonces ambos circuitos son equivalentes.

Ejercicio 53

a) Quantum Volume: El quantum volume, es una métrica utilizada para evaluar la capacidad y los ratios de error de un computador cuántico. Esta métrica permite realizar comparaciones entre distintas máquinas cuánticas.

Esta medida expresa el tamaño máximo de un circuito cuántico cuadrado (circuito cuya profundidad es igual al número de cubits del circuito) que puede ser implementado satisfactoriamente.

El "Quantum Volume", se calcula como:

$QV = 2^d$, siendo d la máxima profundidad de un circuito cuadrado que haya podido ser ejecutado con una fidelidad mayor que un umbral.

Los 3 procesadores con mayor "Quantum Volume" a fecha de 23 de noviembre son:

Computador Cuántico	Quantum Volume
"Quantinuum System Model H2-1"	2^{21}
"Quantinuum System Model H1-1"	2^{20}
"Quantinuum System Model H2"	2^{16}

b) EPLG → Error-Per-Layered Gate, es una métrica que permite medir la calidad de un circuito en base al error producido en cada capa del circuito.

Una capa, es un conjunto de puertos que se ejecutan simultaneamente.

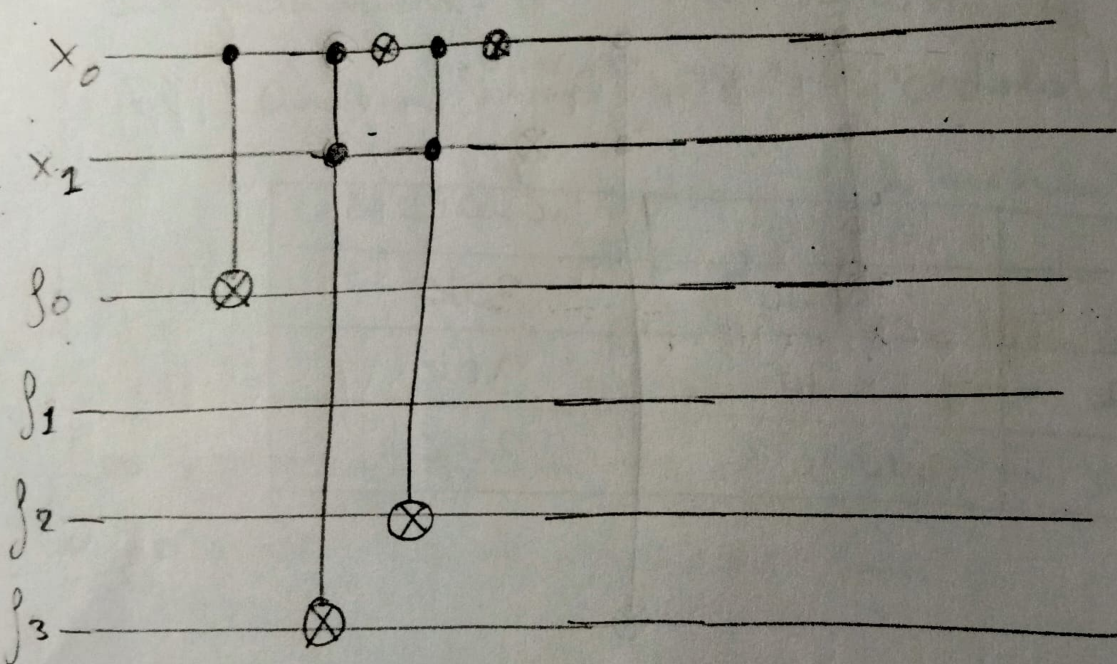
CLOPS → Circuit-Layer Operations Per Second, es una métrica para medir el rendimiento de una maquina cuantica de IBM. Esta métrica, mide el número de capas de circuitos cuánticos que el ordenador cuantico puede ejecutar por segundo.

Nombre	EPLG	CLOPS
ibm kyiv	$1.57 \cdot 10^{-2}$	30k
ibm-sherbrook	$1.74 \cdot 10^{-2}$	30k
ibm-brisbane	$2.16 \cdot 10^{-2}$	30K

57) $x \in \{0, 1, 2, 3\}$ $f(x) = x^2$

Tabla de verdad

x	$x_1 x_0$	$f(x)$	$f_3 f_2 f_1 f_0$
0	00	0	0000
1	01	1	0001
2	10	4	0100
3	11	9	1001



60) Siendo $U_{QFT}|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \sum_{y=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i x y}{N}} |x\rangle$

$$U_{QFT}^{-1}|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{y=0}^{N-1} e^{\frac{-2\pi i x y}{N}} |x\rangle$$

Vamos a probar que $U_{QFT}^{-1}(U_{QFT})|x\rangle = |x\rangle$

- Sustituimos

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{y=0}^{N-1} e^{\frac{-2\pi i x y}{N}} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{z=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i x z}{N}} |x\rangle =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{y=0}^{N-1} e^{\frac{-2\pi i x y}{N}} \sum_{z=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i x z}{N}} |x\rangle =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{y=0}^{N-1} \sum_{z=0}^{N-1} e^{\frac{-2\pi i x y}{N}} \cdot e^{\frac{2\pi i x z}{N}} |x\rangle = \frac{1}{N} \sum_{y=0}^{N-1} \sum_{z=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i x y}{N} - \frac{2\pi i x z}{N}} |x\rangle$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{y=0}^{N-1} \sum_{z=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i x (y-z)}{N}} |x\rangle = \sum_{y=0}^{N-1} \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{z=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i x (y-z)}{N}}}$$

Expresión de delta de Kronecker

$$\boxed{\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi i j k/N} = \delta_{j0 \bmod N}}$$

Que resulta 1 cuando

$\delta_{ij} = 1$ si $i = j$

$$\rightarrow \sum_{y=0}^{N-1} \delta_{yz} |x\rangle$$

Para que $U_{QFT}^{-1}(U_{QFT})|x\rangle = |x\rangle$

$$\sum_{y=0}^{N-1} \delta_{y,z} |x\rangle = |x\rangle$$

Por tanto $\sum_{y=0}^{N-1} \delta_{y,z} = 1$, por lo que $\boxed{y = z}$

61) Debemos demostrar que $\frac{1}{\sqrt{r}}\sum_{j=0}^{r-1}|u_j\rangle = |1\rangle$

Sabemos que $|u_j\rangle$ podemos expresarlo como:

1 $\quad \frac{1}{\sqrt{r}}\sum_{k=0}^{r-1} e^{-2\pi i k \frac{j}{r}}|a^k \bmod N\rangle$

Por tanto debemos demostrar que:

$$\frac{1}{\sqrt{r}}\sum_{j=0}^{r-1}\frac{1}{\sqrt{r}}\sum_{k=0}^{r-1} e^{-2\pi i k \frac{j}{r}}|a^k \bmod N = |1\rangle$$

Tal y como se indica $a=7$ y $N=15$. Por tanto vamos a calcular el periodo de la función. que será el menor r que cumple que $\boxed{|a^r \bmod N = 1|}$

$k=1 \rightarrow 7^1 \bmod 15 = 7$

$k=2 \rightarrow 7^2 \bmod 15 = 4$

$k=3 \rightarrow 7^3 \bmod 15 = 13$

$k=4 \rightarrow 7^4 \bmod 15 = 1 \rightarrow$ El periodo es 4

Tras obtener este valor sustituimos en nuestro sumatorio.

$$\frac{1}{\sqrt{4}}\sum_{j=0}^{3}\frac{1}{\sqrt{4}}\sum_{k=0}^{3} e^{-2\pi i k \frac{j}{4}}|7^k \bmod 15\rangle =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{3}\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{3} e^{-\pi i k \frac{j}{2}}|7^k \bmod 15\rangle = \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{3}\sum_{k=0}^{3} e^{-\pi i k \frac{j}{2}}|7^k \bmod 15\rangle$$

$$= \frac{1}{4}\Big(e^{-\pi i 0\cdot\frac{0}{2}}|1\rangle + e^{-\pi i 1\cdot\frac{0}{2}}|7\rangle + e^{-\pi i 2\cdot\frac{0}{2}}|4\rangle + e^{-\pi i 3\cdot\frac{0}{2}}|13 +$$

$$e^{-\pi i 0\cdot\frac{1}{2}}|1\rangle + e^{-\pi i 1\cdot\frac{1}{2}}|7 + e^{-\pi i 2\cdot\frac{1}{2}}|4\rangle + e^{-\pi i 3\frac{1}{2}}|13 +$$

$$e^{-\pi i 0\frac{2}{2}}|1\rangle + e^{-\pi i 1\cdot\frac{2}{2}}|7\rangle + e^{-\pi i 2\cdot\frac{2}{2}}|4\rangle + e^{-\pi i 3\cdot\frac{2}{2}}|13 +$$

$$e^{-\pi i 0\frac{3}{2}}|1\rangle + e^{-\pi i 1\cdot\frac{3}{2}}|7\rangle + e^{-\pi i 2\cdot\frac{3}{2}}|4\rangle + e^{-\pi i 3\cdot\frac{3}{2}}|13\Big)$$

61) Continuación

$$= \frac{1}{4}\Big(e^{0}|1\rangle + e^{0}|7\rangle + e^{0}|4\rangle + e^{0}|13\rangle + e^{0}|1\rangle +$$

$$e^{-\frac{\pi i}{2}}|7\rangle + e^{-\pi i}|4\rangle + e^{-\frac{3\pi i}{2}}|13\rangle + e^{0}|1\rangle + e^{-\pi i}|7\rangle +$$

$$e^{-2\pi i}|4\rangle + e^{-3\pi i}|13\rangle + e^{0}|1\rangle + e^{-\frac{3\pi i}{2}}|7\rangle + e^{-3\pi i}|4\rangle$$

$$+ e^{-\frac{9\pi i}{2}}|13\rangle\Big) = \frac{1}{4}\Big(4|1\rangle + |7\rangle + e^{-\frac{\pi i}{2}}|7\rangle + e^{-\pi i}|7\rangle +$$

$$e^{-\frac{3\pi i}{2}}|7\rangle + |4\rangle + e^{-\pi i}|4\rangle + e^{-2\pi i}|4\rangle + e^{-3\pi i}|4\rangle + |13\rangle +$$

$$e^{-\frac{3\pi i}{2}}|13\rangle + e^{-3\pi i}|13\rangle + e^{-\frac{3\pi i}{2}}|13\rangle\Big) =$$

$$= \frac{1}{4}\Big(4|1\rangle + |7\rangle + e^{-3\pi i}|7\rangle + |4\rangle + e^{-5\pi i}|4\rangle + |13\rangle + e^{-6\pi i}|13\rangle\Big)$$

$\downarrow$ Aplicando Euler

$e^{\phi i} = \cos\phi + i\,\mathrm{sen}\,\phi$

$$= \frac{1}{4}\Big(4|1\rangle + |7\rangle - |7\rangle + |4\rangle - |4\rangle + |13\rangle - |13\rangle\Big) =$$

$$= |1\rangle$$

Corroboramos que: $\boxed{\frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{s=0}^{r-1} |u_s\rangle = |1\rangle}$