4.5. Multiplicadores de Lagrange

Recuérdese que el planificador social desea hallar las sendas de consumo y capital $\{c_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ para maximizar la función de bienestar social dada por

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t)$$

sujeto a

$$c_t + k_{t+1} = F(k_t, 1) + (1-\delta) k_t,$$

para todo $t = 0, 1, \ldots$ y con $k_0 > 0$ dado. Primero, escribimos el lagrangiano asociado al problema anterior:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left(\{c_t, k_{t+1}, \lambda_t\}_{t=0}^{\infty}\right) &= \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left\{U(c_t) + \lambda_t \left[F(k_t, 1) + (1-\delta) k_t - c_t - k_{t+1}\right]\right\} \\
&= U(c_0) + \lambda_0 \left[F(k_0, 1) + (1-\delta) k_0 - c_0 - k_1\right] \\
&\quad + \beta \left\{U(c_1) + \lambda_1 \left[F(k_1, 1) + (1-\delta) k_1 - c_1 - k_2\right]\right\} \\
&\quad + \ldots \\
&\quad + \beta^t \left\{U(c_t) + \lambda_t \left[F(k_t, 1) + (1-\delta) k_t - c_t - k_{t+1}\right]\right\} \\
&\quad + \beta^{t+1} \left\{U(c_{t+1}) + \lambda_{t+1} \left[F(k_{t+1}, 1) + (1-\delta) k_{t+1} - c_{t+1} - k_{t+2}\right]\right\} \\
&\quad + \ldots,
\end{aligned}$$

y luego escribimos las condiciones de optimalidad. Dichas condiciones vienen dadas por las condiciones de primer orden

$$\begin{aligned}
c_t &: U'(c_t) = \lambda_t, \\
k_{t+1} &: \lambda_t = \beta \lambda_{t+1} \left[F_1(k_{t+1}, 1) + (1-\delta)\right], \\
\lambda_t &: c_t + k_{t+1} = F(k_t, 1) + (1-\delta) k_t,
\end{aligned}$$

para todo $t = 0, 1, \ldots$ y la condición de transversalidad

$$\lim_{T \to \infty} \beta^T \lambda_T \left[F_1(k_T, 1) + (1-\delta)\right] k_T = 0.$$

4.6. Linealización

Pensemos en una función genérica $h : \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}$ que es diferenciable en todo $x \in \mathbb{R}_{++}$. Ya que sabemos que se cumple la condición de diferenciabilidad:

$$\lim_{h\to 0} \frac{h(x+h) - h(x)}{h} = h'(x)$$

y esto equivale a

$$\lim_{y\to x} \frac{h(y) - h(x)}{y - x} = h'(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}_{++}$. Si se cumple para todo x, entonces se cumple para un $\bar{x}$ y en particular que para un x cercano a $\bar{x}$

$$h'(\bar{x}) \approx \frac{h(x) - h(\bar{x})}{x - \bar{x}}.$$

El teorema de Taylor implica que para un punto x lo suficientemente cercano a otro punto $\bar{x}$:

$$h(x) \approx h(\bar{x}) + h'(\bar{x})[x - \bar{x}].$$

4.7. Variaciones porcentuales y elasticidades

Ahora vamos a tomar la aproximación anterior y vamos a reescribir de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
h(x) &\approx h(\bar{x}) + h'(\bar{x})[x - \bar{x}] \\
&\Rightarrow h(x) \approx h(\bar{x}) + h(\bar{x}) \frac{h'(\bar{x})}{h(\bar{x})}[x - \bar{x}] \\
&\Rightarrow h(x) \approx h(\bar{x}) + h(\bar{x}) \underbrace{\left[\frac{h'(\bar{x})}{h(\bar{x})}\bar{x}\right]}_{\varepsilon(\bar{x})} \underbrace{\frac{x - \bar{x}}{\bar{x}}}_{\Delta\%x} \\
&\Rightarrow h(x) \approx h(\bar{x})[1 + \varepsilon(\bar{x})\Delta\%x] \\
&\Rightarrow \frac{h(x)}{h(\bar{x})} - 1 \approx \varepsilon(\bar{x})\Delta\%x \\
&\Rightarrow \frac{h(x) - h(\bar{x})}{h(\bar{x})} \approx \varepsilon(\bar{x})\Delta\%x \\
&\Rightarrow \Delta\%h \approx \varepsilon(\bar{x})\Delta\%x
\end{aligned}$$

4.8. Dinámica local en el modelo de crecimiento neoclásico

Recordemos que las condiciones de optimalidad son

$$\begin{aligned}
U'(c_t) &= \beta U'(c_{t+1})[F_1(k_{t+1}, 1) + (1 - \delta)] && \text{(Euler)} \\
c_t + k_{t+1} &= F(k_t, 1) + (1 - \delta)k_t && \text{(Recursos)} \\
0 &= \lim_{T\to\infty} \beta^T U'(c_T)[F_1(k_T, 1) + (1 - \delta)]k_T. && \text{(TVC)}
\end{aligned}$$

Ahora, lo que vamos a hacer es realizar una aproximación de Taylor de primer orden a las condiciones anteriores (Euler y recursos) alrededor del estado estacionario $\left(\bar{k}, \bar{c}\right)$. Empezamos con la condición de Euler

$$\begin{aligned} U'(\bar{c}) + U''(\bar{c})(c_t - \bar{c}) &= \beta U'(\bar{c})\left[F_1\left(\bar{k},1\right) + (1-\delta)\right] \\ &\quad + \beta U''(\bar{c})\left[F_1\left(\bar{k},1\right) + (1-\delta)\right](c_{t+1} - \bar{c}) \\ &\quad + \beta U'(\bar{c}) F_{11}\left(\bar{k},1\right)\left(k_{t+1} - \bar{k}\right) \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{U''(\bar{c})\bar{c}}{U''(\bar{c})\bar{c}}\left(\frac{c_t - \bar{c}}{\bar{c}}\right) &= \beta \frac{U''(\bar{c})\bar{c}}{U''(\bar{c})\bar{c}}\left[F_1\left(\bar{k},1\right) + (1-\delta)\right]\left(\frac{c_{t+1} - \bar{c}}{\bar{c}}\right) \\ &\quad + \beta \frac{U'(\bar{c})}{U''(\bar{c})\bar{c}} F_{11}\left(\bar{k},1\right)\bar{k}\left(\frac{k_{t+1} - \bar{k}}{\bar{k}}\right) \end{aligned}$$

entonces

$$\left(\frac{c_t - \bar{c}}{\bar{c}}\right) = \beta\left[F_1\left(\bar{k},1\right) + (1-\delta)\right]\left(\frac{c_{t+1} - \bar{c}}{\bar{c}}\right) - \beta\left[\frac{1}{-\frac{U''(\bar{c})\bar{c}}{U'(\bar{c})}}\right] F_{11}\left(\bar{k},1\right)\bar{k}\left(\frac{k_{t+1} - \bar{k}}{\bar{k}}\right)$$

entonces

$$\begin{aligned} \tilde{c}_t &= \underbrace{\beta\left[F_1\left(\bar{k},1\right) + (1-\delta)\right]}_{=1 \text{ (en steady state)}}\tilde{c}_{t+1} - \beta\left[\frac{1}{-\frac{U''(\bar{c})\bar{c}}{U'(\bar{c})}}\right] F_{11}\left(\bar{k},1\right)\bar{k}\tilde{k}_{t+1} \\ \tilde{c}_t &= \tilde{c}_{t+1} - \beta\frac{1}{\rho} F_{11}\left(\bar{k},1\right)\bar{k}\tilde{k}_{t+1}, \text{ donde } \rho := -\frac{U''(\bar{c})\bar{c}}{U'(\bar{c})} \\ &\boxed{-\rho\tilde{c}_t = -\rho\tilde{c}_{t+1} + \beta F_{11}\left(\bar{k},1\right)\bar{k}\tilde{k}_{t+1}} \end{aligned}$$

Y vamos a hacer lo mismo para la restricción de recursos:

$$\begin{aligned} c_t + k_{t+1} &= F(k_t, 1) + (1-\delta)k_t \\ \frac{\bar{c}}{\bar{k}}\frac{c_t - \bar{c}}{\bar{c}} + \frac{k_{t+1} - \bar{k}}{\bar{k}} &= F_1\left(\bar{k},1\right)\left(\frac{k_t - \bar{k}}{\bar{k}}\right) + (1-\delta)\left(\frac{k_t - \bar{k}}{\bar{k}}\right) \\ \frac{\bar{c}}{\bar{k}}\tilde{c}_t + \tilde{k}_{t+1} &= F_1\left(\bar{k},1\right)\tilde{k}_t + (1-\delta)\tilde{k}_t \\ \frac{\bar{c}}{\bar{k}}\tilde{c}_t + \tilde{k}_{t+1} &= \underbrace{\left[F_1\left(\bar{k},1\right) + (1-\delta)\right]}_{=1/\beta}\tilde{k}_t \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\bar{c}}{\bar{k}}\tilde{c}_t + \tilde{k}_{t+1} = \frac{1}{\beta}\tilde{k}_t}$$

4.9. Método de los coeficientes indeterminados

Sabemos que:

1. la ecuación de Euler $U(c_t) = \beta U'(c_{t+1})\left[F_1(k_{t+1}, 1) + (1-\delta)\right]$ es aproximada mediante

$$\tilde{c}_t = -\beta F_{11}\left(\bar{k},1\right)\bar{k}\underbrace{\left[-\frac{U'(\bar{c})}{U''(\bar{c})}\bar{c}\right]}_{=\frac{1}{\rho}} k_{t+1} + c_{t+1}, \text{ y}$$

2. la restricción de recursos $c_t + k_{t+1} = F(k_t, 1) + (1-\delta) k_t$ es aproximada mediante
$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{1}{\beta}\tilde{k}_t - \frac{\bar{c}}{\bar{k}}\tilde{c}_t.$$

En resumen, tenemos:
$$\begin{aligned}
\tilde{c}_t &= -\beta F_{11}\left(\bar{k},1\right)\bar{k}\frac{1}{\rho}\tilde{k}_{t+1} + \tilde{c}_{t+1} \text{ [Euler]} \\
\tilde{k}_{t+1} &= \frac{1}{\beta}\tilde{k}_t - \frac{\bar{c}}{\bar{k}}\tilde{c}_t \text{ [recursos]} \Rightarrow \frac{\bar{c}}{\bar{k}}\tilde{c}_t = \frac{1}{\beta}\tilde{k}_t - \tilde{k}_{t+1}.
\end{aligned}$$

Lo que vamos a hacer a continuación es sustituir $\tilde{c}_t$ en la restricción de recursos para poder hallar una expresión que represente la dinámica (óptima) del capital a lo largo del tiempo:
$$\begin{aligned}
\frac{\bar{c}}{\bar{k}}\tilde{c}_t &= -\frac{\bar{c}}{\bar{k}}\beta F_{11}\left(\bar{k},1\right)\bar{k}\frac{1}{\rho}\tilde{k}_{t+1} + \frac{\bar{c}}{\bar{k}}\tilde{c}_{t+1} \text{ [Euler} \times \frac{\bar{c}}{\bar{k}}\text{]} \\
\underbrace{\frac{1}{\beta}\tilde{k}_t - \tilde{k}_{t+1}}_{=\frac{\bar{c}}{\bar{k}}\tilde{c}_t} &= -\frac{\bar{c}}{\bar{k}}\beta F_{11}\left(\bar{k},1\right)\bar{k}\frac{1}{\rho}\tilde{k}_{t+1} + \underbrace{\frac{1}{\beta}\tilde{k}_{t+1} - \tilde{k}_{t+2}}_{=\frac{\bar{c}}{\bar{k}}\tilde{c}_{t+1}} \text{ [reemplazo } \frac{\bar{c}}{\bar{k}}\tilde{c}_t\text{]} \\
\tilde{k}_t - \beta\tilde{k}_{t+1} &= -\beta\frac{\bar{c}}{\bar{k}}\beta F_{11}\left(\bar{k},1\right)\bar{k}\frac{1}{\rho}\tilde{k}_{t+1} + \tilde{k}_{t+1} - \beta\tilde{k}_{t+2} \text{ [multiplico} \times \beta\text{]} \\
\tilde{k}_t &= -\beta\frac{\bar{c}}{\bar{k}}\beta F_{11}\left(\bar{k},1\right)\bar{k}\frac{1}{\rho}\tilde{k}_{t+1} + (1+\beta)\tilde{k}_{t+1} - \beta\tilde{k}_{t+2} \text{ [}\beta\tilde{k}_{t+1} \text{ al LD]} \\
0 &= -\tilde{k}_t - \beta\frac{\bar{c}}{\bar{k}}\beta F_{11}\left(\bar{k},1\right)\bar{k}\frac{1}{\rho}\tilde{k}_{t+1} + (1+\beta)\tilde{k}_{t+1} - \beta\tilde{k}_{t+2} \text{ [}\tilde{k}_t \text{ al LD]} \\
&\boxed{0 = \tilde{k}_t + \left[\tfrac{\beta^2}{\rho}F_{11}\left(\bar{k},1\right)\bar{c} - (1+\beta)\right]\tilde{k}_{t+1} + \beta\tilde{k}_{t+2}} \text{ [agrupamos términos]}
\end{aligned}$$

Formulamos una conjetura de la forma
$$\tilde{k}_{t+1} = \phi\tilde{k}_t$$
en términos de la única variable de estado que es $\tilde{k}_t$ y donde ϕ es un coeficiente aún indeterminado pero por determinarse.

La conjetura adoptada implica a su vez que que
$$\begin{aligned}
\tilde{k}_{t+2} &= \phi\tilde{k}_{t+1} \\
&= \phi\left(\phi\tilde{k}_t\right) \\
&= \phi^2\tilde{k}_t.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, dada nuestra conjetura, tenemos todos los elementos necesarios para poder hallar ϕ. Reemplazando la conjetura en la ecuación en diferencias, obtenemos que
$$\begin{aligned}
\beta\overbrace{\tilde{k}_{t+2}}^{\phi^2\tilde{k}_t} + \left[\frac{\beta^2}{\rho}F_{11}\left(\bar{k},1\right)\bar{c} - (1+\beta)\right]\overbrace{\tilde{k}_{t+1}}^{\phi\tilde{k}_t} + \tilde{k}_t &= 0 \\
\beta\phi^2\tilde{k}_t + \left[\frac{\beta^2}{\rho}F_{11}\left(\bar{k},1\right)\bar{c} - (1+\beta)\right]\phi\tilde{k}_t + \tilde{k}_t &= 0 \\
\left\{\beta\phi^2 + \left[\frac{\beta^2}{\rho}F_{11}\left(\bar{k},1\right)\bar{c} - (1+\beta)\right]\phi + 1\right\}\tilde{k}_t &= 0, \forall\tilde{k}_t \approx \bar{k}.
\end{aligned}$$

Nótese que la última expresión debe cumplirse para toda posible realización de $\tilde{k}_t$, sea esta igual a cero o no. La única posibilidad para que esto se cumpla es que

$$\underbrace{\beta\phi^2 + \left[\frac{\beta^2}{\rho}F_{11}\left(\bar{k},1\right)\bar{c} - (1+\beta)\right]\phi + 1}_{\mathcal{P}(\phi)} = 0$$

lo cual nos deja en frente de un polinomio de segundo grado en ϕ. Nuestro conocimiento de álgebra nos dice que dicha ecuación tiene dos soluciones. Si bien podemos usar la fórmula para hallar dichas soluciones, vamos a emplear aquí un enfoque gráfico para además extraer las propiedades de dichas soluciones.

Dado que hemos definido

$$\mathcal{P}(\phi) := \beta\phi^2 + \left[\frac{\beta^2}{\rho}F_{11}\left(\bar{k},1\right)\bar{c} - (1+\beta)\right]\phi + 1$$

podemos concluir que su primera derivada viene dada por

$$\mathcal{P}'(\phi) = 2\beta\phi + \left[\frac{\beta^2}{\rho}F_{11}\left(\bar{k},1\right)\bar{c} - (1+\beta)\right]$$

mientras que su segunda derivada viene dada por

$$\mathcal{P}''(\phi) = 2\beta > 0 \text{ (parábola que se abre hacia arriba).}$$

Adicionalmente, obtenemos las siguiente propiedades:

- $\mathcal{P}(0) = \beta \times 0^2 + \left[\frac{\beta^2}{\rho}F_{11}\left(\bar{k},1\right)\bar{c} - (1+\beta)\right] \times 0 + 1 = 1 > 0,$
- $\mathcal{P}'(0) = 2\beta \times 0 + \left[\frac{\beta^2}{\rho}F_{11}\left(\bar{k},1\right)\bar{c} - (1+\beta)\right] = \frac{\beta^2}{\rho}F_{11}\left(\bar{k},1\right)\bar{c} - (1+\beta) < 0,$
- $\mathcal{P}(1) = \beta \times 1^2 + \left[\frac{\beta^2}{\rho}F_{11}\left(\bar{k},1\right)\bar{c} - (1+\beta)\right] \times 1 + 1 = \frac{\beta^2}{\rho}F_{11}\left(\bar{k},1\right)\bar{c} < 0,$
- $\mathcal{P}'(1) = 2\beta \times 1 + \left[\frac{\beta^2}{\rho}F_{11}\left(\bar{k},1\right)\bar{c} - (1+\beta)\right] = \frac{\beta^2}{\rho}F_{11}\left(\bar{k},1\right)\bar{c} - (1-\beta) < 0.$

Luego de construir el gráfico de la función $\mathcal{P}(\phi)$, podemos apreciar que se cumple que una solución siempre va a ser menor a uno y la otra siempre va a ser mayor a uno. Formalmente:

$$0 < \phi_1 < 1$$

y

$$\phi_2 > 1.$$

Para sorpresa de nadie, tenemos dos soluciones: una estable donde $\tilde{k}_{t+1} = \phi_1\tilde{k}_t$ y otra inestable donde $\tilde{k}_{t+1} = \phi_2\tilde{k}_t$. De entre estas dos soluciones, nos quedamos con la solución estable. Por lo tanto, la evolución óptima del capital viene dada por

$$\begin{aligned}\tilde{k}_{t+1} &= \phi_1\tilde{k}_t \\ \frac{k_{t+1} - \bar{k}}{\bar{k}} &= \phi_1\frac{k_t - \bar{k}}{\bar{k}}\end{aligned}$$

donde

$$\phi_1 = \frac{-\left[\frac{\beta^2}{\rho}F_{11}\left(\bar{k},1\right)\bar{c}-(1+\beta)\right]-\sqrt{\left[\frac{\beta^2}{\rho}F_{11}\left(\bar{k},1\right)\bar{c}-(1+\beta)\right]^2-4\beta\times 1}}{2\times\beta} \in (0,1)\,.$$

Podemos "simular" la solución como sigue:

$$\begin{aligned}
\tilde{k}_1 &= \phi_1\tilde{k}_0 \\
\tilde{k}_2 &= \phi_1\tilde{k}_1 = (\phi_1)^2\,\tilde{k}_0 \\
\tilde{k}_3 &= \phi_1\tilde{k}_2 = (\phi_1)^3\,\tilde{k}_0 \\
\tilde{k}_4 &= \phi_1\tilde{k}_3 = (\phi_1)^4\,\tilde{k}_0 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

En general, la mecánica que aquí se usa es la habitual para resolver un modelo macroeconómico dinámico. Por esta razón, necesitamos estudiar ecuaciones en diferencias.