El problema del consumidor

Juan Carlos Aquino Chávez

Banco Central de Reserva del Perú

13 de enero de 2025

1. Introducción

Una referencia clásica y rigurosa para este tema se encuentra en Mas-Colell *et al.* (1995, capítulos 1-3). No obstante, nuestra exposición va a estar basada en Simon y Blume (1994, sección 22.1) e inspirada en Adda y Cooper (2003, sección 2.2).

Para poner los temas en perspectiva, vamos a estudiar el concepto de equilibrio general en macroeconomía. ¿Qué se entiende por equilibrio general? A grandes rasgos, un equilibrio general es un sistema de precios y cantidades tales que

- dados los precios, todos los agentes toman sus mejores decisiones, y
- todos los mercados se limpian (es decir, oferta = demanda).

De esta manera, nuestro objetivo central es entender los conceptos de

1. Equilibrio General Dinámico Estocástico (EGDE) y
2. Equilibrio Competitivo Recursivo (ECR),

entre otros. Es por esta razón que luego estudiaremos de manera introductoria la programación dinámica.

2. Formulación del problema

Sea $\mathbf{X} = \mathbb{R}_{+}^{2} \equiv \mathbb{R}_{+} \times \mathbb{R}_{+}$ el espacio de bienes (*commodity space*) y sea $\succsim \subset \mathbf{X} \times \mathbf{X}$ una relación de preferencias racional (i.e., completa y transitiva) y continua. Se desprende de lo anterior que existe una función continua $u : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ tal que

$$(x, y) \in \succsim \text{ (equivalentemente, } x \succsim y) \text{ si y solo si } u(x) \geq u(y), \text{ para todo } x, y \in \mathbf{X}.$$

Llamaremos a u una función de utilidad (la cual representa a la relación de preferencias $\succsim$). Por otro lado, denote $p_1 > 0$ ($p_2 > 0$) el precio unitario del primer (segundo) bien, en unidades monetarias. Finalmente, denote $m > 0$ el nivel de ingreso del cual se dispone, también expresado en unidades monetarias.

Dados ambos precios y el ingreso en $(p_1, p_2, m) \in \mathbb{R}_{++}^{3}$, el problema del consumidor consiste en hallar la canasta de bienes (x_1^*, x_2^*) que maximice

$$u(x_1, x_2)$$

sujeto a

$$\begin{aligned} p_1 x_1 + p_2 x_2 &\leq m, \\ x_1 &\geq 0 \text{ y} \\ x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

3. Solución

3.1. Existencia

Para responder a la pregunta de si existe solución para el problema del consumidor, defínase primero el conjunto presupuestario (*budget set*) mediante

$$\mathcal{B}(p_1, p_2, m) \equiv \{(x_1, x_2) \in \mathbf{X} : p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq m\} \neq \emptyset.$$

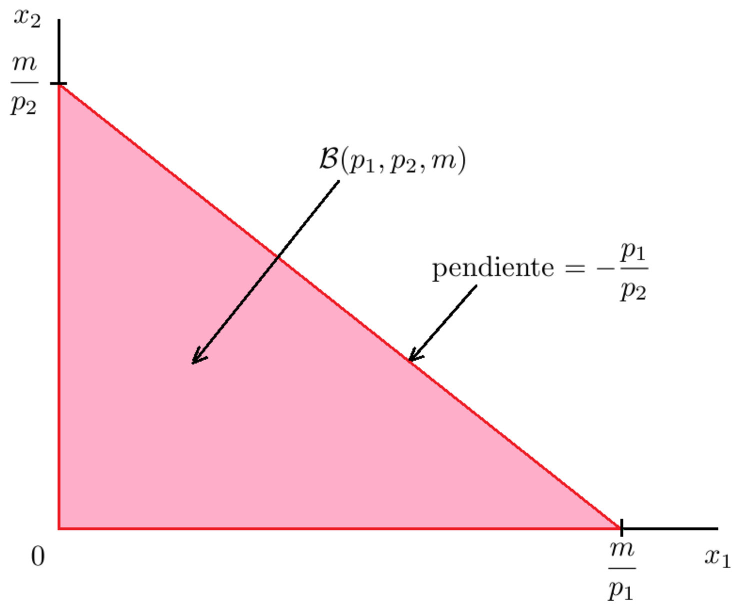

Figura 1: Conjunto presupuestario y recta presupuestaria.

Como se puede apreciar en la Figura 1, el conjunto presupuestario $\mathcal{B}(p_1, p_2, m)$ representa todas las restricciones del problema del consumidor y es compacto (i.e., cerrado y acotado). Nótese además que el concepto de conjunto presupuestario no debe ser confundido con el de recta presupuestaria (con pendiente igual a $-p_1/p_2$). Dado que la función de utilidad u es continua y el conjunto presupuestario $\mathcal{B}(p_1, p_2, m)$ es compacto, el teorema de Weierstrass garantiza que existe un maximizador $(x_1^*, x_2^*) \in \mathcal{B}(p_1, p_2, m)$ tal que

$$u(x_1^*, x_2^*) \geq u(x_1, x_2), \text{ para todo } (x_1, x_2) \in \mathcal{B}(p_1, p_2, m).$$

3.2. Unicidad

Si bien el teorema de Weierstrass garantiza la existencia de por lo menos un maximizador $(x_1^*, x_2^*) \in \mathcal{B}(p_1, p_2, m)$, nada precluye la existencia de múltiples maximizadores.

En lo restante asumiremos además que la relación de preferencias $\succsim$ es localmente no saturada y estrictamente convexa (que implica que la función de utilidad u que representa a $\succsim$ es estrictamente cuasicóncava), lo cual garantiza la unicidad del maximizador $(x_1^*, x_2^*) \in \mathcal{B}(p_1, p_2, m)$.

3.2.1. Concavidad y cuasiconcavidad

Definición 1 *(Concavidad y concavidad estricta) Una función* $F : S \to \mathbb{R}$ *definida sobre un subconjunto* S *de un espacio vectorial real es cóncava si para todo* $x, y \in S$ *y* $\theta \in [0,1]$ *tenemos que*

$$F(\theta x + (1-\theta) y) \geq \theta F(x) + (1-\theta) F(y).$$

Si además

$$F(\theta x + (1-\theta) y) > \theta F(x) + (1-\theta) F(y)$$

para todo $x \neq y$ *y* $\theta \in (0,1)$*, entonces* F *es estríctamente cóncava.*

La Figura 2 ilustra ejemplos de una función cóncava (izquierda) y de una función estrictamente cóncava (derecha), ambas definidas sobre un subconjunto de $\mathbb{R}$.

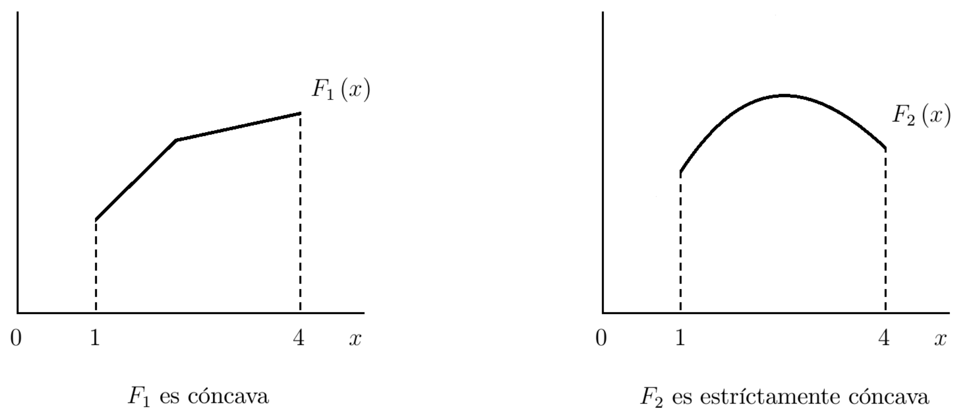

Figura 2: Función cóncava y estrictamente cóncava.

Definición 2 *(Cuasiconcavidad y cuasiconcavidad estricta) Una función* $G : S \to \mathbb{R}$ *definida sobre un subconjunto* S *de un espacio vectorial real es cuasicóncava si para todo* $x, y \in S$ *y* $\theta \in [0,1]$ *tenemos que*

$$G(\theta x + (1-\theta) y) \geq \text{máx}\{G(x), G(y)\}.$$

Si además

$$G(\theta x + (1-\theta) y) > \text{máx}\{G(x), G(y)\}$$

para todo $x \neq y$ *y* $\theta \in (0,1)$*, entonces* G *es estrictamente cuasicóncava.*

La Figura 3 ilustra ejemplos de una función cuasicóncava (izquierda) y de una función estrictamente cuasicóncava (derecha), ambas definidas sobre un subconjunto de $\mathbb{R}$.

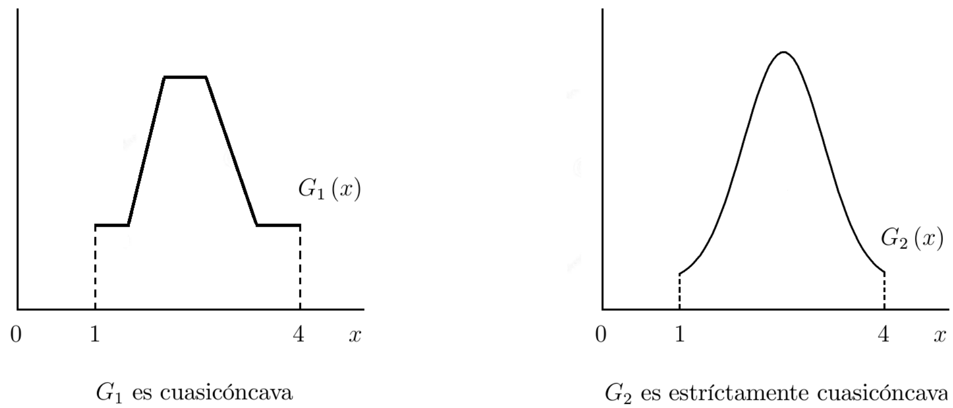

Figura 3: Función cuasicóncava y estrictamente cuasicóncava.

3.3. Optimización bajo una restricción de no negatividad

Antes de proceder con la caracterización de la solución del problema del consumidor, resulta importante entender de dónde provienen las llamadas condiciones de Kuhn-Tucker. Esto se debe a que, como se verá, la maximización restringida requerirá construir un punto de silla (i.e., un punto que es máximo con respecto a unas variables y mínimo con respecto a otras variables).

3.3.1. Maximización

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función dos veces continuamente diferenciable y estrictamente cóncava. Consideremos ahora el problema de

$$\max f(x)$$

sujeto a

$$x \geq 0.$$

La Figura 4 muestra tres posibles situaciones que dependen de la forma específica de f y sus implicancias tanto para el maximizador x^* como para $\frac{df}{dx}(x^*)$:

- en el Caso a es fácil apreciar que la maximización ocurre en el unico $x^* > 0$ que satisface $\frac{df}{dx}(x^*) = 0$ y que la restricción de no negatividad se cumple con desigualdad estricta,
- en el Caso b es fácil apreciar que la maximización ocurre en $x^* = 0$ que satisface $\frac{df}{dx}(x^*) = 0$ y que la restricción de no negatividad se cumple con igualdad, y
- en el Caso c es fácil apreciar que la maximización ocurre en $x^* = 0$ que satisface $\frac{df}{dx}(x^*) < 0$ y que la restricción de no negatividad se cumple con igualdad.

Como se resume en el Cuadro 1:

- en ninguno de los casos $\frac{df}{dx}(x^*)$ es positivo y
- en todos los casos el producto de x^* y $\frac{df}{dx}(x^*)$ es igual a cero.

Por lo tanto, si juntamos estas dos propiedades con la condicion de no negatividad, obtenemos las condiciones de Kuhn-Tucker

$$
\begin{aligned}
x^* &\geq 0, \\
\frac{df}{dx}(x^*) &\leq 0, \text{ y} \\
x^* \times \frac{df}{dx}(x^*) &= 0.
\end{aligned}
$$

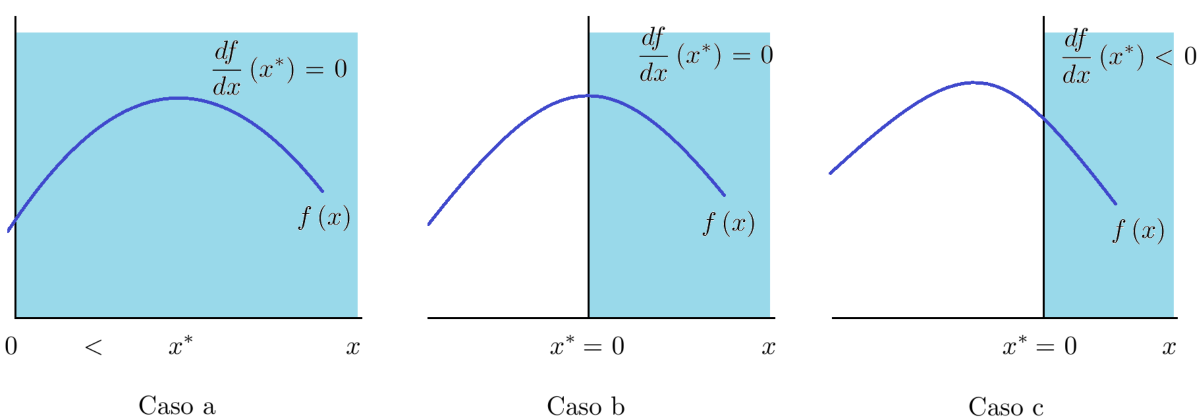

Figura 4: Maximización sujeta a una restricción de no negatividad.

Caso a:	Caso b:	Caso c:
$x^* > 0$	$x^* = 0$	$x^* = 0$
$\frac{df}{dx}(x^*) = 0$	$\frac{df}{dx}(x^*) = 0$	$\frac{df}{dx}(x^*) < 0$
$\Rightarrow x^* \times \frac{df}{dx}(x^*) = 0$	$\Rightarrow x^* \times \frac{df}{dx}(x^*) = 0$	$\Rightarrow x^* \times \frac{df}{dx}(x^*) = 0$

Cuadro 1: Maximización sujeta a una restricción de no negatividad.

3.3.2. Minimización

Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función dos veces continuamente diferenciable y estrictamente convexa. Consideremos ahora el problema de

$$\min g(x)$$

sujeto a

$$x \geq 0.$$

La Figura 5 muestra tres posibles situaciones que dependen de la forma específica de g y sus implicancias tanto para el minimizador x^* como para $\frac{dg}{dx}(x^*)$:

- en el Caso a es fácil apreciar que la minimización ocurre en el unico $x^* > 0$ que satisface $\frac{dg}{dx}(x^*) = 0$ y que la restricción de no negatividad se cumple con desigualdad estricta,
- en el Caso b es fácil apreciar que la minimización ocurre en $x^* = 0$ que satisface $\frac{dg}{dx}(x^*) = 0$ y que la restricción de no negatividad se cumple con igualdad, y
- en el Caso c es fácil apreciar que la minimización ocurre en $x^* = 0$ que satisface $\frac{dg}{dx}(x^*) > 0$ y que la restricción de no negatividad se cumple con igualdad.

Como se resume en el Cuadro 2:

- en ninguno de los casos $\frac{dg}{dx}(x^*)$ es negativo y
- en todos los casos el producto de x^* y $\frac{dg}{dx}(x^*)$ es igual a cero.

Por lo tanto, si juntamos estas dos propiedades con la condicion de no negatividad, obtenemos las condiciones de Kuhn-Tucker

$$
\begin{aligned}
x^* &\geq 0, \\
\frac{dg}{dx}(x^*) &\geq 0, \text{ y} \\
x^* \times \frac{dg}{dx}(x^*) &= 0.
\end{aligned}
$$

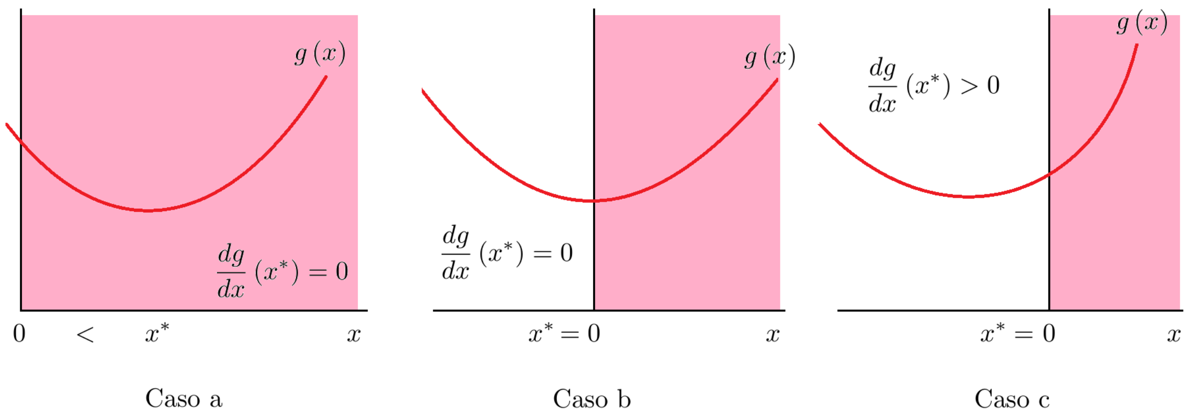

Figura 5: Minimización sujeta a una restricción de no negatividad.

Caso a:	Caso b:	Caso c:
$x^* > 0$	$x^* = 0$	$x^* = 0$
$\frac{dg}{dx}(x^*) = 0$	$\frac{dg}{dx}(x^*) = 0$	$\frac{dg}{dx}(x^*) > 0$
$\Rightarrow x^* \times \frac{dg}{dx}(x^*) = 0$	$\Rightarrow x^* \times \frac{dg}{dx}(x^*) = 0$	$\Rightarrow x^* \times \frac{dg}{dx}(x^*) = 0$

Cuadro 2: Minimización sujeta a una restricción de no negatividad.

3.3.3. Resumen

El Cuadro 3 resume los resultados obtenidos en las dos subsubsecciones anteriores.

3.4. Caracterización

Ahora que tenemos garantizada la existencia y la unicidad de la solución del problema del consumidor, asumiremos adicionalmente que la función de utilidad u es continuamente diferenciable en el

Problema de maximización	**Problema de minimización**
$\max_x f(x)$	$\min_x g(x)$
s.a: $x \geq 0$	s.a: $x \geq 0$
CPO (Kuhn-Tucker):	CPO (Kuhn-Tucker):
$x^* \geq 0$	$x^* \geq 0$
$\frac{df}{dx}(x^*) \leq 0$	$\frac{dg}{dx}(x^*) \geq 0$
$x^* \times \frac{df}{dx}(x^*) = 0$	$x^* \times \frac{dg}{dx}(x^*) = 0$
Forma compacta:	Forma compacta:
$\underbrace{x^*}_{\geq 0} \times \underbrace{\frac{df}{dx}(x^*)}_{\leq 0} = 0$	$\underbrace{x^*}_{\geq 0} \times \underbrace{\frac{dg}{dx}(x^*)}_{\geq 0} = 0$

Cuadro 3: Optimización sujeta a una restricción de no negatividad.

interior de $\mathbf{X}$. De esta manera empezaremos a realizar el análisis económico de la solución del problema del consumidor.

Se sigue del teorema de Lagrange que si $(x_1^*, x_2^*) \in \mathbf{X} \subset \mathbb{R}^2$ resuelve el problema del consumidor entonces existe un $\lambda^* \in \mathbb{R}$ tal que, luego de definir la función lagrangiana $\mathcal{L} : \mathbf{X} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mediante

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = \underbrace{u(x_1, x_2)}_{\text{objetivo}} + \underbrace{\lambda \times [m - p_1 x_1 - p_2 x_2]}_{\text{penalidad}},$$

la terna $(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)$ satisface las nueve condiciones de Kuhn-Tucker:

$$x_1^* \geq 0, \tag{KT1}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*, \lambda^*) \leq 0, \tag{KT2}$$

$$x_1^* \times \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*, \lambda^*) = 0, \tag{KT3}$$

$$x_2^* \geq 0, \tag{KT4}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*, \lambda^*) \leq 0, \tag{KT5}$$

$$x_2^* \times \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*, \lambda^*) = 0, \tag{KT6}$$

$$\lambda^* \geq 0, \tag{KT7}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x_1^*, x_2^*, \lambda^*) \geq 0 \text{ y} \tag{KT8}$$

$$\lambda^* \times \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x_1^*, x_2^*, \lambda^*) = 0. \tag{KT9}$$

Las condiciones (KT1)-(KT3) reflejan que *ceteris paribus* x_1^* maximiza $\mathcal{L}(x_1, x_2^*, \lambda^*)$ con respecto a x_1, las condiciones (KT4)-(KT6) reflejan que *ceteris paribus* x_2^* maximiza $\mathcal{L}(x_1^*, x_2, \lambda^*)$ con respecto a x_2, y las condiciones (KT7)-(KT9) reflejan que *ceteris paribus* λ^* minimiza $\mathcal{L}(x_1^*, x_2^*, \lambda)$ con respecto a λ. Por lo tanto, buscamos construir un punto silla de la función lagrangiana.

Luego de reemplazar la definición de $\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda)$ en las condiciones de Kuhn-Tucker y reexpresar las mismas de una manera abreviada obtenemos

$$\begin{aligned}
\underbrace{x_1^*}_{\geq 0\text{ (KT1)}} \times \underbrace{\left[\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*) - \lambda^* p_1\right]}_{\leq 0\text{ (KT2)}} &= 0 \text{ (KT3)}, \\
\underbrace{x_2^*}_{\geq 0\text{ (KT4)}} \times \underbrace{\left[\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*) - \lambda^* p_2\right]}_{\leq 0\text{ (KT5)}} &= 0 \text{ (KT6) y} \\
\underbrace{\lambda^*}_{\geq 0\text{ (KT7)}} \times \underbrace{\left[m - p_1 x_1^* - p_2 x_2^*\right]}_{\geq 0\text{ (KT8)}} &= 0 \text{ (KT9)}.
\end{aligned}$$

En lo restante, asumiremos que la función de utilidad u es estríctamente creciente con respecto a cada uno de sus argumentos y satisface las condiciones de Inada (1963) (véase Figura 6):

$$\begin{aligned}
\lim_{x_1 \to 0} \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, x_2) &= +\infty \text{ para todo } x_2 > 0, & \text{(CI1)} \\
\lim_{x_1 \to +\infty} \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, x_2) &= 0 \text{ para todo } x_2 > 0, & \text{(CI2)} \\
\lim_{x_2 \to 0} \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, x_2) &= +\infty \text{ para todo } x_1 > 0 \text{ y} & \text{(CI3)} \\
\lim_{x_2 \to +\infty} \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, x_2) &= 0 \text{ para todo } x_1 > 0. & \text{(CI4)}
\end{aligned}$$

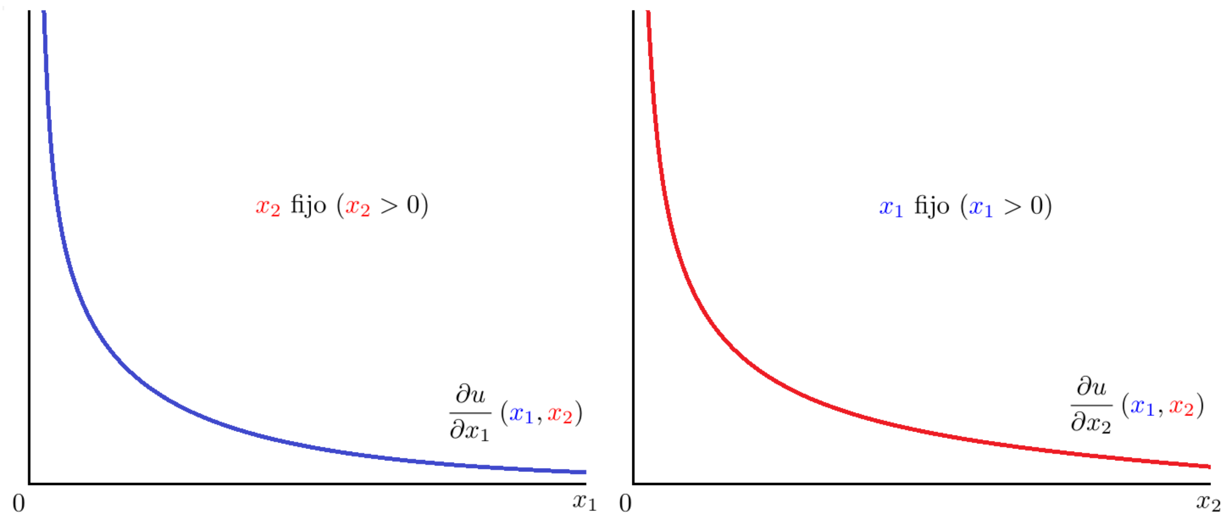

Figura 6: Condiciones de Inada.

Por las condiciones de Inada ni x_1^* ni x_2^* pueden ser iguales a 0, con lo cual x_1^* y x_2^* son positivos. Entonces:

- (KT1) se cumple con desigualdad estrícta ($x_1^* > 0$). Para que (KT3) se cumpla, la única posibilidad es que (KT2) se cumpla con igualdad (i.e., $\lambda^* = \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*)/p_1 > 0$).
- (KT4) se cumple con desigualdad estrícta ($x_2^* > 0$). Para que (KT6) se cumpla, la única posibilidad es que (KT5) se cumpla con igualdad (i.e., $\lambda^* = \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*)/p_2 > 0$).
- Dado que acabamos de mostrar que $\lambda^* > 0$, (KT7) se cumple con desigualdad estrícta. Para que (KT9) se cumpla, la única posibilidad es que (KT8) se cumpla con igualdad[1].

[1] Esto último equivale a afirmar que la restricción presupuestaria es vinculante (*binding*).

4. Análisis económico de la solución

Luego de combinar (KT2) y (KT5) con igualdad y eliminar λ^* obtenemos

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}\left(x_1^*, x_2^*\right)}{p_1} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x_2}\left(x_1^*, x_2^*\right)}{p_2}, \tag{1}$$

condición que establece que en el margen (i.e., en el óptimo) la utilidad marginal de la última unidad monetaria destinada al primer bien iguala a la utilidad marginal de la última unidad monetaria destinada al segundo bien.

- Si $(x_1, x_2) \in \mathcal{B}(p_1, p_2, m)$ es tal que $\frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1^*,x_2^*)}{p_1} > \frac{\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1^*,x_2^*)}{p_2}$, la utilidad marginal de la última unidad monetaria destinada al primer bien es mayor y conviene por tanto incrementar el consumo del primer bien (es decir, (x_1, x_2) no es óptimo).
- Si $(x_1, x_2) \in \mathcal{B}(p_1, p_2, m)$ es tal que $\frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1^*,x_2^*)}{p_1} < \frac{\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1^*,x_2^*)}{p_2}$, la utilidad marginal de la última unidad monetaria destinada al segundo bien es mayor y conviene por tanto incrementar el consumo del segundo bien (es decir, (x_1, x_2) no es óptimo).

Una alternativa equivalente de interpretación está expresada en términos de:

- la *tasa marginal de sustitución* o TMS (entendida como el número de unidades del bien 2 a las que el consumidor está dispuesto a renunciar por una unidad adicional del bien 1), y
- el precio relativo del bien 1 en términos del bien 2 (entendido como el número de unidades del bien 2 a las que el mercado exige renunciar por una unidad adicional del bien 1).

Podemos reescribir la condición de optimalidad (1) para obtener

$$TMS\left(x_1^*, x_2^*\right) \equiv -\frac{\dfrac{\partial u}{\partial x_1}\left(x_1^*, x_2^*\right)}{\dfrac{\partial u}{\partial x_2}\left(x_1^*, x_2^*\right)} = -\frac{p_1}{p_2}$$

que establece que la *tasa marginal de sustitución* entre los bienes 1 y 2 debe ser igual al precio relativo del bien 1 en terminos del bien 2 (como se puede apreciar en el punto A de la Figura 7).

- Si $(x_1, x_2) \in \mathcal{B}(p_1, p_2, m)$ es tal que $-\frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1,x_2)}{\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1,x_2)} < -\dfrac{p_1}{p_2}$, el mercado exige renunciar a un número de unidades del bien 2 por unidad del bien 1 menor al número que el consumidor está dispuesto

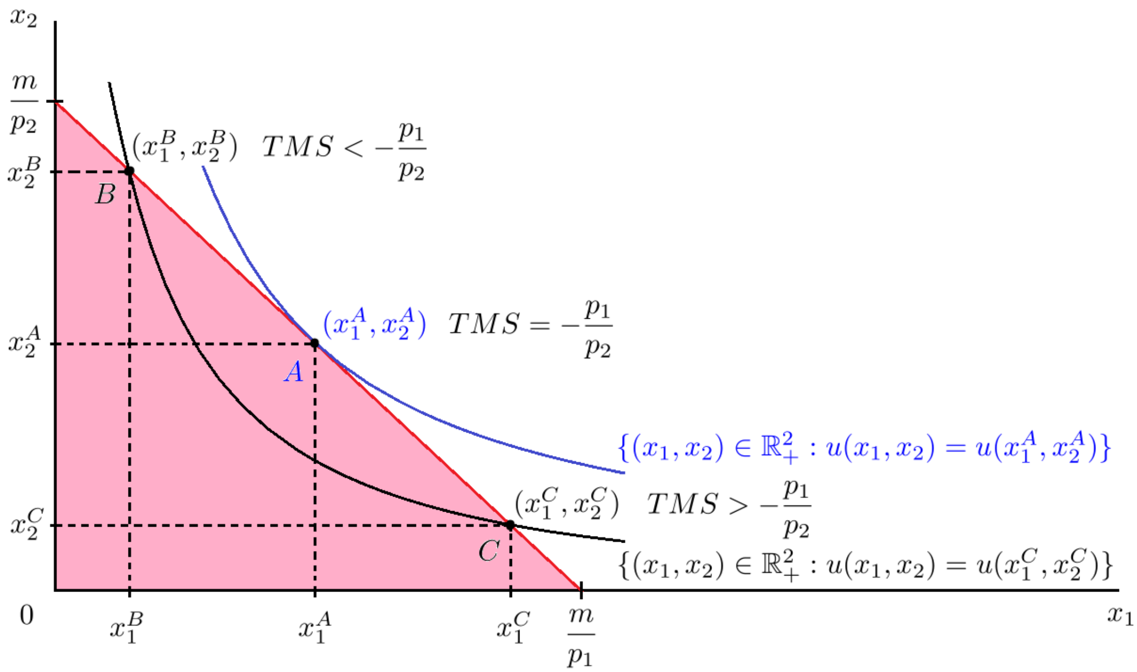

Figura 7: Conjunto presupuestario, canasta óptima y canastas alternativas.

a renunciar. Por lo tanto, conviene incrementar el consumo del primer bien (es decir, (x_1, x_2) no es óptimo). Esto se puede apreciar en el punto B de la Figura 7.

- Si $(x_1, x_2) \in \mathcal{B}(p_1, p_2, m)$ es tal que $-\frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1,x_2)}{\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1,x_2)} > -\frac{p_1}{p_2}$, el mercado exige renunciar a un número de unidades del bien 1 por unidad del bien 2 menor al número que el consumidor está dispuesto a renunciar. Por lo tanto, conviene incrementar el consumo del segundo bien (es decir, (x_1, x_2) no es óptimo). Esto se puede apreciar en el punto C de la Figura 7.

Finalmente, dado que u es estríctamente creciente en cada uno de sus dos argumentos (siempre se prefiere tener más a tener menos), se concluye fácilmente que en el óptimo la restricción debe cumplirse con igualdad:

$$p_1 x_1^* + p_2 x_2^* = m. \tag{2}$$

5. Demanda walrasiana y utilidad indirecta

Para cada terna $(p_1, p_2, m) \in \mathbb{R}_{++}^3$ de precios e ingreso (todos positivos), las condiciones de optimalidad anteriores permiten hallar la única canasta óptima $(x_1^*, x_2^*) \in \mathbb{R}_{++}^2$. En este sentido, definamos ahora la demanda walrasiana como la función $x^w : \mathbb{R}^3_{++} \to \mathbb{R}^2_{++}$ mediante

$$\begin{aligned}\left(x_1^w\left(p_1,p_2,m\right),x_2^w\left(p_1,p_2,m\right)\right) &\equiv \underset{(x_1,x_2)\in\mathcal{B}(p_1,p_2,m)}{\arg\max}\; u\left(x_1,x_2\right)\\ &= \left(x_1^*,x_2^*\right).\end{aligned}$$

Es de recalcar que la demanda walrasiana es uno de los componentes primordiales del concepto de equilibrio general competitivo que trabajaremos más adelante.

Nótese que además podemos calcular la utilidad maximizada que depende indirectamente (a través de (x_1^*, x_2^*)) de los precios e ingreso en (p_1, p_2, m). En este sentido, definamos ahora la utilidad indirecta como la función $\upsilon : \mathbb{R}^3_{++} \to \mathbb{R}$ mediante

$$\begin{aligned}\upsilon\left(p_1,p_2,m\right) &\equiv \max_{(x_1,x_2)\in\mathcal{B}(p_1,p_2,m)} u\left(x_1,x_2\right)\\ &= u\left(x_1^*,x_2^*\right)\\ &= u\left(x_1^w\left(p_1,p_2,m\right),x_2^w\left(p_1,p_2,m\right)\right).\end{aligned}$$

6. Ejemplo: función de utilidad Cobb-Douglas

Ilustremos lo anterior con la siguiente forma funcional paramétrica

$$u\left(x_1,x_2\right) = x_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha},$$

donde el parámetro α satisface $0 < \alpha < 1$. Es fácil verificar que en el margen se cumplen

$$\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{x_2^*}{x_1^*} = \frac{p_1}{p_2}$$

y (2) que es la restricción presupuestaria con igualdad. La solución a ambas ecuaciones viene dada por

$$\begin{aligned}x_1^* &= \alpha\frac{m}{p_1} \text{ y}\\ x_2^* &= \left(1-\alpha\right)\frac{m}{p_2}.\end{aligned}$$

Nótese que, a pesar de que hemos sido capaces de computar una solución analítica (es decir, explícita o en forma cerrada), importa también la información de carácter económico que se puede extraer de la misma. En particular, reescribimos el resultado anterior de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} p_1 x_1^* &= \alpha m \text{ y} \\ p_2 x_2^* &= (1-\alpha)\, m, \end{aligned}$$

el cual establece que la canasta óptima es tal que el gasto destinado al primer bien es una fracción constante (α) del ingreso y el gasto destinado al segundo bien es la fracción restante $(1-\alpha)$ del ingreso, como se puede apreciar la Figura 8. Es por esto que el parámetro α recibe el nombre de "participación del primer bien en el gasto" ya que

$$\frac{p_1 x_1^*}{m} = \alpha.$$

Finalmente, es fácil verificar que el multiplicador de Lagrange correspondiente es

$$\begin{aligned} \lambda^* &= \frac{(x_1^*)^{\alpha}(1-\alpha)(x_2^*)^{-\alpha}}{p_2} \\ &= \frac{1-\alpha}{p_2}\left(\frac{x_1^*}{x_2^*}\right)^{\alpha} \\ &= \frac{1-\alpha}{p_2}\left(\frac{\alpha\frac{m}{p_1}}{(1-\alpha)\frac{m}{p_2}}\right)^{\alpha} \\ &= \frac{\alpha^{\alpha}(1-\alpha)^{1-\alpha}}{p_1^{\alpha}p_2^{1-\alpha}} > 0. \end{aligned}$$

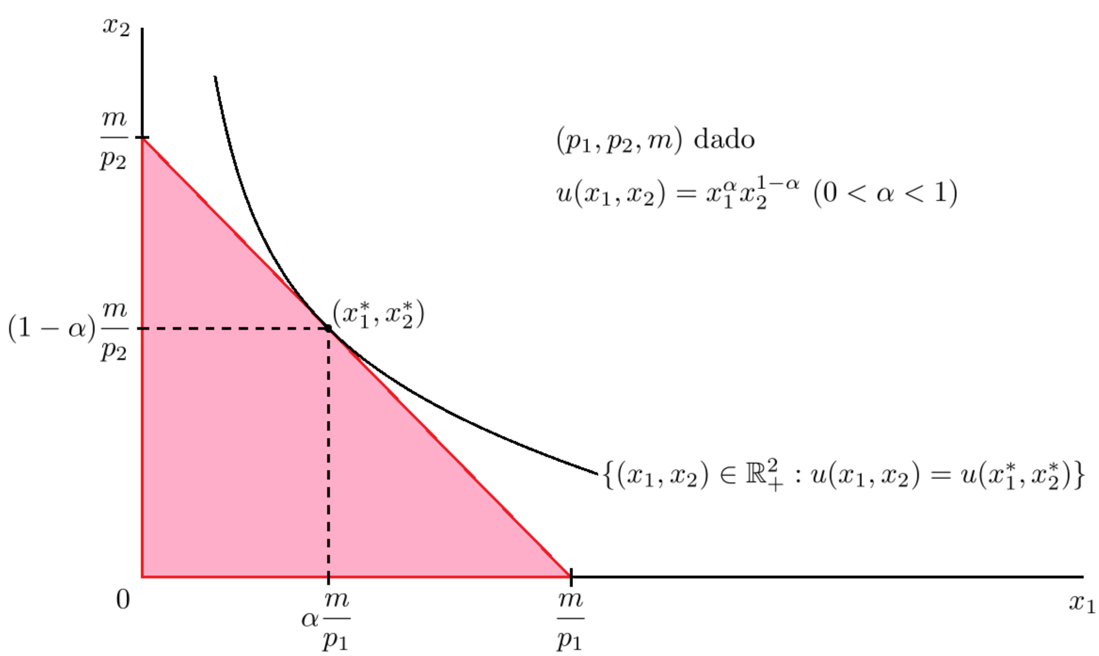

Figura 8: Elección óptima bajo función de utilidad Cobb-Douglas.

Finalmente, podemos computar la utilidad indirecta mediante

$$\begin{aligned} v\left(p_1, p_2, m\right) &= \left(x_1^*\right)^{\alpha}\left(x_2^*\right)^{1-\alpha} \\ &= \left(\alpha\frac{m}{p_1}\right)^{\alpha}\left(\left(1-\alpha\right)\frac{m}{p_2}\right)^{1-\alpha} \\ &= \frac{\alpha^{\alpha}\left(1-\alpha\right)^{1-\alpha}}{p_1^{\alpha}p_2^{1-\alpha}}m. \end{aligned}$$

7. Estática comparativa de la utilidad indirecta

El ejemplo anteriormente descrito nos permite analizar la relación entre la utilidad indirecta y las tres variables exógenas en (p_1, p_2, m). En particular, se extraen dos proposiciones intuitivas:

1. Existe una relación positiva (i.e., directa) entre la utilidad indirecta y el nivel de ingreso: un mayor nivel de ingreso ($m \uparrow$) implica una mayor utilidad indirecta ($v \uparrow$) y viceversa.

2. Existe una relación negativa (i.e., inversa) entre la utilidad indirecta y cualquiera de los precios. Por ejemplo, un mayor precio unitario del primer bien ($p_1 \uparrow$) implica una menor utilidad indirecta ($v \downarrow$) y viceversa.

Resulta válido preguntarse si dichas conclusiones son consecuencia de la forma funcional específica (i.e., función de utilidad Cobb-Douglas) o se pueden mantener en un ámbito más general. Por supuesto, dicha pregunta es susceptible de ser respondida tomando la derivada parcial de la utilidad indirecta con respecto a la variable de interés. Podemos proceder de dos maneras.

7.1. Vía fuerza bruta

Partimos de la definición de utilidad indirecta y calculamos la correspondiente derivada parcial con ayuda de la regla de la cadena. Obtenemos[2]

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial p_1}(p_1,p_2,m) &= \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1^*,x_2^*)}_{=\lambda^* p_1}\frac{\partial x_1^*}{\partial p_1}(p_1,p_2,m)+\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1^*,x_2^*)}_{=\lambda^* p_2}\frac{\partial x_2^*}{\partial p_1}(p_1,p_2,m)\\
&= \lambda^* p_1\frac{\partial x_1^*}{\partial p_1}(p_1,p_2,m)+\lambda^* p_2\frac{\partial x_2^*}{\partial p_1}(p_1,p_2,m)\\
&= \lambda^*\underbrace{\left(p_1\frac{\partial x_1^*}{\partial p_1}(p_1,p_2,m)+p_2\frac{\partial x_2^*}{\partial p_1}(p_1,p_2,m)\right)}_{=-x_1^* \text{ (ver Apéndice A.1)}}\\
&= -\lambda^* x_1^*<0,\\
\frac{\partial v}{\partial p_2}(p_1,p_2,m) &= \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1^*,x_2^*)}_{=\lambda^* p_1}\frac{\partial x_1^*}{\partial p_2}(p_1,p_2,m)+\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1^*,x_2^*)}_{=\lambda^* p_2}\frac{\partial x_2^*}{\partial p_2}(p_1,p_2,m)\\
&= \lambda^* p_1\frac{\partial x_1^*}{\partial p_2}(p_1,p_2,m)+\lambda^* p_2\frac{\partial x_2^*}{\partial p_2}(p_1,p_2,m)\\
&= \lambda^*\underbrace{\left(p_1\frac{\partial x_1^*}{\partial p_2}(p_1,p_2,m)+p_2\frac{\partial x_2^*}{\partial p_2}(p_1,p_2,m)\right)}_{=-x_2^* \text{ (ver Apéndice A.2)}}\\
&= -\lambda^* x_2^*<0, \text{ y}\\
\frac{\partial v}{\partial m}(p_1,p_2,m) &= \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1^*,x_2^*)}_{=\lambda^* p_1}\frac{\partial x_1^*}{\partial m}(p_1,p_2,m)+\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1^*,x_2^*)}_{=\lambda^* p_2}\frac{\partial x_2^*}{\partial m}(p_1,p_2,m)\\
&= \lambda^* p_1\frac{\partial x_1^*}{\partial m}(p_1,p_2,m)+\lambda^* p_2\frac{\partial x_2^*}{\partial m}(p_1,p_2,m)\\
&= \lambda^*\underbrace{\left(p_1\frac{\partial x_1^*}{\partial m}(p_1,p_2,m)+p_2\frac{\partial x_2^*}{\partial m}(p_1,p_2,m)\right)}_{=1 \text{ (ver Apéndice A.3)}}\\
&= \lambda^*>0.
\end{aligned}
$$

En la derivación de cada resultado, la segunda igualdad reemplaza cada utilidad marginal con su equivalente en el margen (i.e., según la condición de optimalidad), la tercera igualdad factoriza el multiplicador de Lagrange y la última igualdad reemplaza el resultado de derivar ambos lados de la restricción presupuestaria (con igualdad) con respecto a la variable exógena de interés. Por lo tanto, hemos (de)mostrado que las propiedades anteriores se mantienen en un ámbito más general.

[2]Es fácil verificar que se cumplen las condiciones para que se pueda aplicar el teorema de la función implícita y así garantizar que las derivadas parciales de x_1^* y x_2^* con respecto a p_1, p_2 y m que se usan a continuación están todas bien definidas.

7.2. Vía el teorema de la envolvente

Una manera más directa de obtener los resultados anteriores consiste en emplear el teorema de la envolvente, el cual en nuestro contexto establece que “el efecto marginal de una variable exógena sobre la utilidad indirecta equivale al efecto marginal directo de dicha variable exógena sobre la función lagrangiana”. Formalmente, esto equivale a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial p_1}(p_1,p_2,m) &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_1}(x_1^*,x_2^*,\lambda^*)\\
&= \frac{\partial\left[u(x_1,x_2)+\lambda(m-p_1x_1-p_2x_2)\right]}{\partial p_1}(x_1^*,x_2^*,\lambda^*)\\
&= -\lambda^* x_1^* < 0,\\
\frac{\partial v}{\partial p_2}(p_1,p_2,m) &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_2}(x_1^*,x_2^*,\lambda^*)\\
&= \frac{\partial\left[u(x_1,x_2)+\lambda(m-p_1x_1-p_2x_2)\right]}{\partial p_2}(x_1^*,x_2^*,\lambda^*)\\
&= -\lambda^* x_2^* < 0, \text{ y}\\
\frac{\partial v}{\partial m}(p_1,p_2,m) &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial m}(x_1^*,x_2^*,\lambda^*)\\
&= \frac{\partial\left[u(x_1,x_2)+\lambda(m-p_1x_1-p_2x_2)\right]}{\partial m}(x_1^*,x_2^*,\lambda^*)\\
&= \lambda^* > 0.
\end{aligned}$$

8. De la utilidad indirecta a la demanda walrasiana: la identidad de Roy

En base a los resultados de la sección anterior, la caracterización del multiplicador de Lagrange $\lambda^* > 0$ como “utilidad (indirecta) marginal o precio sombra de una unidad adicional de ingreso” (es decir, $\lambda^*(p_1,p_2,m) = \frac{\partial v}{\partial m}(p_1,p_2,m)$) nos permite (de)mostrar que

$$x_1^w(p_1,p_2,m) = -\frac{\dfrac{\partial v}{\partial p_1}(p_1,p_2,m)}{\lambda^*} = -\frac{\dfrac{\partial v}{\partial p_1}(p_1,p_2,m)}{\dfrac{\partial v}{\partial m}(p_1,p_2,m)} > 0$$

y

$$x_2^w(p_1,p_2,m) = -\frac{\dfrac{\partial v}{\partial p_2}(p_1,p_2,m)}{\lambda^*} = -\frac{\dfrac{\partial v}{\partial p_2}(p_1,p_2,m)}{\dfrac{\partial v}{\partial m}(p_1,p_2,m)} > 0.$$

9. Comentarios finales

En base a todo lo expuesto, disponemos de dos enfoques para vincular las demandas walrasianas con la utilidad indirecta.

1. Luego de hallar las demandas walrasianas

$$x_1^w(p_1, p_2, m) = x_1^*$$

y

$$x_2^w(p_1, p_2, m) = x_2^*,$$

podemos calcular la utilidad indirecta mediante $v(p_1, p_2, m) = u(x_1^*, x_2^*)$.

2. Si disponemos de la utilidad indirecta $v(p_1, p_2, m)$, podemos emplear la identidad de Roy (provistos de que las derivadas parciales involucradas existen) para obtener las demandas walrasianas mediante

$$x_1^w(p_1, p_2, m) = -\frac{\frac{\partial v}{\partial p_1}(p_1, p_2, m)}{\frac{\partial v}{\partial m}(p_1, p_2, m)} > 0$$

y

$$x_2^w(p_1, p_2, m) = -\frac{\frac{\partial v}{\partial p_2}(p_1, p_2, m)}{\frac{\partial v}{\partial m}(p_1, p_2, m)} > 0.$$

Para finalizar, es importante señalar que el estudio de lo que llamaremos el Problema Secuencial o PS está más relacionado al primer enfoque que consiste en computar las decisiones óptimas, luego de lo cual se puede computar la utilidad indirecta. Por otro lado, el estudio de lo que llamaremos la Ecuación Funcional o EF está más relacionado al segundo enfoque que consisten en hallar primero la función de utilidad indirecta y luego recuperar las decisiones óptimas.

Referencias

Adda, J. y Cooper, R. W. (2003). *Dynamic Economics: Quantitative Methods and Applications.* The MIT Press.

Inada, K.-I. (1963). On a Two-Sector Model of Economic Growth: Comments and a Generalization. *The Review of Economic Studies*, 30(2):119–127.

Mas-Colell, A., Whinston, M. D., y Green, J. R. (1995). *Microeconomic Theory.* Oxford University Press.

Simon, C. P. y Blume, L. E. (1994). *Mathematics for Economists.* W. W. Norton & Company, Inc.

Apéndice A Derivaciones

A.1 Derivación de $p_1 \frac{\partial x_1^*}{\partial p_1}(p_1, p_2, m) + p_2 \frac{\partial x_2^*}{\partial p_1}(p_1, p_2, m) = -x_1^*$

Partimos de que la restricción presupuestaria $p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq m$ se cumple con igualdad en el óptimo. Por lo tanto

$$p_1 x_1^* + p_2 x_2^* = m,$$

la cual es una identidad para todo $(p_1, p_2, m) \in \mathbb{R}$. Derivamos ambos lados de la identidad con respecto a p_1:

$$x_1^* + p_1 \frac{\partial x_1^*}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial x_2^*}{\partial p_1} = 0,$$

lo cual implica el resultado que se buscaba demostrar.

A.2 Derivación de $p_1 \frac{\partial x_1^*}{\partial p_2}(p_1, p_2, m) + p_2 \frac{\partial x_2^*}{\partial p_2}(p_1, p_2, m) = -x_2^*$

Partimos de que la restricción presupuestaria $p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq m$ se cumple con igualdad en el óptimo. Por lo tanto

$$p_1 x_1^* + p_2 x_2^* = m,$$

la cual es una identidad para todo $(p_1, p_2, m) \in \mathbb{R}$. Derivamos ambos lados de la identidad con respecto a p_2:

$$p_1 \frac{\partial x_1^*}{\partial p_2} + x_2^* + p_2 \frac{\partial x_2^*}{\partial p_2} = 0,$$

lo cual implica el resultado que se buscaba demostrar.

A.3 Derivación de $p_1 \frac{\partial x_1^*}{\partial m} + p_2 \frac{\partial x_2^*}{\partial m} = 1$

Partimos de que la restricción presupuestaria $p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq m$ se cumple con igualdad en el óptimo. Por lo tanto

$$p_1 x_1^* + p_2 x_2^* = m,$$

la cual es una identidad para todo $(p_1, p_2, m) \in \mathbb{R}$. Derivamos ambos lados de la identidad con respecto a m:

$$p_1 \frac{\partial x_1^*}{\partial m} + p_2 \frac{\partial x_2^*}{\partial m} = 1,$$

que equivale al resultado que se buscaba demostrar.

Apéndice C Ejercicios

Ejercicio 1 *(Racionamiento bajo utilidad Cobb-Douglas) Considere el problema estándar del consumidor bajo preferencias representadas por una función de utilidad Cobb-Douglas pero donde ahora se restringe que el consumo del primer bien no puede superar la cuota de racionamiento* $\bar{x}_1 > 0$. *Es decir, se pide hallar* (x_1^*, x_2^*) *para maximizar*

$$u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha},\ 0 < \alpha < 1,$$

sujeto a

$$\begin{aligned} p_1 x_1 + p_2 x_2 &\leq m, \\ x_1 &\leq \bar{x}_1, \\ x_1 &\geq 0 \text{ y} \\ x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

1. *Grafique el conjunto presupuestario* $B(p_1, p_2, m, \bar{x}_1)$. *¿Es cerrado? ¿Es acotado?*

2. *Escriba la función lagrangiana para este problema. ¿De cuántas variables depende?*

3. *Escriba las condiciones de Kuhn-Tucker. ¿Cuántas son?*

4. *Asuma que* $\alpha \dfrac{m}{p_1} < \bar{x}_1$. *Halle la canasta maximizadora* (x_1^*, x_2^*) *y los multiplicadores que la soportan. ¿Cómo se relacionan sus resultados con respecto a aquellos obtenidos cuando la restricción de racionamiento no existía? Interprete sus resultados.*

5. *Asuma ahora que* $\bar{x}_1 < \alpha \dfrac{m}{p_1}$. *Halle la canasta maximizadora* (x_1^*, x_2^*) *y los multiplicadores que la soportan. ¿Cómo se relacionan sus resultados con respecto a aquellos obtenidos en el análisis anterior? Interprete sus resultados.*

6. *En base al inciso anterior ¿qué ocurre con la canasta maximizadora y los multiplicadores que la soportan a medida que* $\bar{x}_1$ *tiende a* $\alpha \dfrac{m}{p_1}$*?*

Apéndice D Solución de ejercicios

D.1 Solución del ejercicio 1

1. Graficar.

2. El lagrangiano depende de cuatro variables:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda, \mu) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha} + \lambda [m - p_1 x_1 - p_2 x_2] + \mu [\bar{x}_1 - x_1].$$

3. Las condiciones de Kuhn-Tucker son:

$$x_1^* \geq 0, \tag{e1-KT1}$$

$$\underbrace{\alpha (x_1^*)^{\alpha-1} (x_2^*)^{1-\alpha} - \lambda^* p_1 - \mu^*}_{=\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*, \lambda^*, \mu^*)} \leq 0, \tag{e1-KT2}$$

$$x_1^* \times \underbrace{\left[\alpha (x_1^*)^{\alpha-1} (x_2^*)^{1-\alpha} - \lambda^* p_1 - \mu^*\right]}_{=\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*, \lambda^*, \mu^*)} = 0, \tag{e1-KT3}$$

$$x_2^* \geq 0, \tag{e1-KT4}$$

$$\underbrace{(x_1^*)^{\alpha} (1-\alpha) (x_2^*)^{-\alpha} - \lambda^* p_2}_{=\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*, \lambda^*, \mu^*)} \leq 0, \tag{e1-KT5}$$

$$x_1^* \times \underbrace{\left[(x_1^*)^{\alpha} (1-\alpha) (x_2^*)^{-\alpha} - \lambda^* p_2\right]}_{=\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*, \lambda^*, \mu^*)} = 0, \tag{e1-KT6}$$

$$\lambda^* \geq 0, \tag{e1-KT7}$$

$$\underbrace{m - p_1 x_1^* - p_2 x_2^*}_{=\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x_1^*, x_2^*, \lambda^*, \mu^*)} \geq 0, \tag{e1-KT8}$$

$$\lambda^* \times \underbrace{[m - p_1 x_1^* - p_2 x_2^*]}_{=\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x_1^*, x_2^*, \lambda^*, \mu^*)} = 0, \tag{e1-KT9}$$

$$\mu^* \geq 0, \tag{e1-KT10}$$

$$\underbrace{\bar{x}_1 - x_1^*}_{=\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu}(x_1^*, x_2^*, \lambda^*, \mu^*)} \geq 0 \text{ y} \tag{e1-KT11}$$

$$\mu^* \times \underbrace{[\bar{x}_1 - x_1^*]}_{=\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu}(x_1^*, x_2^*, \lambda^*, \mu^*)} = 0. \tag{e1-KT12}$$