Una visión panorámica

Juan Carlos Aquino Chávez

Banco Central de Reserva del Perú

14 de enero de 2025

La presente nota está basada en una traducción libre de Stokey y Lucas (1989, capítulo 2, sección 2.1), la cual extiendo y complemento con gráficos con fines didácticos. Cabe anotar que excluyo intencionalmente las secciones 2.2 y 2.3 referidas al Modelo Estocástico de Crecimiento Óptimo y el Crecimiento en Equilibrio Competitivo, respectivamente. La principal razón es que nos enfocaremos en motivar el estudio de la programación dinámica determinística y usaremos otras referencias para abordar los demás temas. Además, añado comentarios aclaratorios (con diferente coloración) a lo largo de la exposición.

En este capítulo hacemos una vista previa de los métodos recursivos de análisis a ser desarrollados en detalle en el resto del libro. Este material cae en tres amplias partes, y el resto del libro está estructurado de manera consecuente. La Parte II se encarga de métodos para resolver problemas de optimización determinísticos, la Parte III con la extensión de estos métodos a problemas que incluyen choques estocásticos, y la Parte IV con las maneras de usar las soluciones de cualquier tipo dentro de un marco de equilibrio competitivo.

Para hacer esta vista previa tan concreta como sea posible, examinamos estos tres conjuntos de problemas mirando un ejemplo específico, un modelo de crecimiento económico con un sector. Nuestra meta no es proveer un tratamiento sustantivo de la teoría del crecimiento sino ilustrar los tipos de argumentos y resultados que son desarrollados en capítulos posteriores del libro -argumentos que pueden ser aplicados a una amplia variedad de problemas. Algunos de estos problemas fueron mencionados en el Capítulo 1, y muchos más serán discutidos en detalle en los Capítulos 5, 10, 13, 16, 17, y 18, los cuales están todos dedicados exclusívamente a aplicaciones sustantivas. Dicho esto, en este capítulo nos enfocamos exclusivamente en el ejemplo de crecimiento económico.

En las siguientes tres secciones consideramos la asignación de recursos en una economía compuesta por muchos hogares idénticos que viven infinitamente. En cada período t existe un único bien, y_t, que es producido usando dos insumos: capital, k_t, en su lugar al inicio del período, y trabajo, n_t. Una función de producción relaciona el producto a los insumos, $y_t = F(k_t, n_t)$. En cada período el producto actual debe ser dividido entre consumo actual, c_t, e inversión bruta, i_t,

$$c_t + i_t \leq y_t = F(k_t, n_t). \tag{1}$$

Esta decisión entre consumo y ahorro es la única decisión de asignación que la economía debe tomar. Se asume que el capital se deprecia a una tasa constante $0 < \delta < 1$, de manera que el capital esta relacionado a la inversión bruta mediante

$$k_{t+1} = (1 - \delta) k_t + i_t. \tag{2}$$

Se toma el trabajo como ofrecido inelásticamente, de manera que $n_t = 1$, para todo t. Finalmente, se toman preferencias sobre consumo, comunes a todos los hogares, de la forma

$$u(c_0, c_1, c_2, \ldots) = \underbrace{U(c_0) + \beta U(c_1) + \beta^2 U(c_2) + \ldots}_{\text{aditivamente separable}} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t) \tag{3}$$

donde $0 < \beta < 1$ es un factor de descuento.

El parámetro $\beta \in (0, 1)$ se interpreta como "paciencia"

- Si $\beta \to 1$, la utilidad futura tiende a ser tan importante como la utilidad en el presente.
- Si $\beta \to 0$, solo importa la utilidad en el periodo $t = 0$.

En las Secciones 1 y 2.2 estudiamos el problema de crecimiento óptimo. Específicamente, en la Sección 1 examinamos el problema de maximizar (3) sujeto a (1) y (2), dado un saldo de capital inicial

k_0. En la Sección 2.2 modificamos este problema de planeamiento para incluir choques aleatorios exógenos a la tecnología en (1), tomando en este caso las preferencias de los hogares sobre sucesiones de consumos aleatorios como el valor esperado de la función en (3). En la Sección 2.3 regresamos al modelo determinístico. Empezamos por caracterizar las sendas de consumo y acumulación de capital que podrían surgir en una economía de mercado competitiva compuesta por muchos hogares, cada uno con preferencias en (3), y muchas firmas, cada una con la tecnología en (1) y (2). Entonces consideramos la relación entre la asignación de equilibrio competitivo y la solución al problema de planeamiento encontrada anteriormente. Concluimos en la Sección 2.4 con una visión panorámica más detallada del resto del libro, discutiendo brevemente el contenido de cada uno de los siguientes capítulos.

1. Un Modelo Determinístico de Crecimiento Óptimo

En esta sección estudiamos el problema de crecimiento óptimo cuando no existe incertidumbre. Asúmase que la función de producción es $y_t = F(k_t, n_t)$, donde $F : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$ es contínuamente diferenciable, estríctamente creciente, homogénea de grado uno, y estríctamente cuasi-cóncava, con

$$\begin{aligned} F(0,n) &= 0,\ F_k(k,n) > 0,\ F_n(k,n) > 0, \text{ para todo } k,n > 0; \\ \lim_{k \searrow 0} F_k(k,1) &= +\infty,\ \lim_{k \to \infty} F_k(k,1) = 0. \end{aligned}$$

Asúmase que el tamaño de la población es constante a lo largo del tiempo y normalícese el tamaño de la fuerza laboral disponible a ser igual a la unidad. Entonces la oferta laboral debe satisfacer

$$0 \leq n_t \leq 1, \text{ para todo } t. \tag{4}$$

Asúmase que el capital decae a la tasa fija $0 < \delta \leq 1$. Entonces el consumo, c_t, la inversión bruta, $i_t = k_{t+1} - (1-\delta) k_t$, y el producto, $y_t = F(k_t, n_t)$ deben satisfacer la restricción de factibilidad

$$c_t + k_{t+1} - (1-\delta) k_t \leq F(k_t, n_t), \text{ para todo } t. \tag{5}$$

Asúmase que todos los hogares en esta economía tienen preferencias idénticas sobre sucesiones de consumo intertemporal. Estas preferencias comunes toman la forma aditivamente separable

$$u(c_0, c_1, \ldots) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t), \tag{6}$$

donde el factor de descuento es $0 < \beta < 1$, y donde la función de utilidad del período actual $U : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ es acotada, contínuamente diferenciable, estríctamente creciente, y estríctamente cóncava, con $\lim_{c\to\infty} U'(c) = 0$. Los hogares no valoran el ocio.

Considérese ahora el problema afrontado por un planificador social benevolente, uno cuyo objetivo es maximizar (6) escogiendo las sucesiones $\{(c_t, k_{t+1}, n_t)\}_{t=0}^{\infty}$, sujeto a las restricciones de factibilidad en (4) y (5), dado $k_0 > 0$. Dos características de cualquier óptimo son aparentes. Primero, está claro que el producto no va a ser desperdiciado. Esto es, (5) se va a mantener con igualdad para todo t, y podemos usar esto para eliminar c_t de (6). Segundo, dado que el ocio no es valorado y que el producto marginal del trabajo es siempre positivo, está claro que un óptimo requiere $n_t = 1$. Por lo tanto, k_t y y_t representan tanto el capital y el producto por trabajador como el capital y el producto totales. Por lo tanto, es conveniente definir $f(k) = F(k, 1) + (1 - \delta) k$ como la oferta total de bienes disponible por trabajador, incluyendo el capital no depreciado, cuando el capital de inicio de período es k.

Ejercicio 1 *Muestre que los supuestos anteriores sobre F implican que $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ es contínuamente diferenciable, estríctamente creciente, y estríctamente cóncava, con*

$$f(0) = 0,\ f'(k) > 0,\ \lim_{k\to 0} f'(k) = \infty,\ \lim_{k\to\infty} f'(k) = 1 - \delta.$$

Después de despejar c_t en (5) con igualdad y haciendo $n_t = 1$, se obtiene $c_t = f(k_t) - k_{t+1}$. Por un lado, nótese que en ningún período el capital puede ser negativo. Es decir, $k_{t+1} \geq 0$, para todo t. Por otro lado, tampoco puede ocurrir en ningún momento que el consumo sea negativo. Es decir, $c_t \geq 0$ o, equivalentemente, $k_{t+1} \leq f(k_t)$.

El problema del planificador puede entonces ser escrito como

$$\max_{\{k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U\left[f(k_t) - k_{t+1}\right] \tag{7}$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 0 &\leq k_{t+1} \leq f(k_t),\ t = 0, \ldots; \qquad (8) \\ k_0 &> 0 \text{ dado.} \end{aligned}$$

Aunque en última instancia estamos interesados en el caso donde el horizonte de planificación es infinito, es instructivo empezar con el problema (¡mucho más fácil!) de un horizonte finito. Si el horizonte en (7) fuera un valor finito T en lugar de infinito, entonces (7)-(8) serían un problema de programación cóncava completamente estándar. Con un horizonte finito, el conjunto de sucesiones $\{k_t\}_{t=0}^{T}$ que satisfacen (8) es un subconjunto de $\mathbb{R}^{T+1}$ cerrado, acotado y convexo, y la función objetivo (7) es contínua y estríctamente cóncava. Por lo tanto, existe una única solución y está caracterizada por las condiciones de Kuhn-Tucker. Buscamos maximizar

$$
\begin{aligned}
&[U(f(k_0)-k_1)] + \beta\,[U(f(k_1)-k_2)] + \ldots \\
&\qquad \ldots + \beta^t\,[U(f(k_t)-k_{t+1})] + \ldots \\
&\qquad\qquad \ldots + \beta^{T-1}\,[U(f(k_{T-1})-k_T)] + \beta^T\,[U(f(k_T)-k_{T+1})]
\end{aligned}
$$

Primero, procedemos a construir el lagrangiano (de valor presente)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(k_1,\ldots,k_{T+1};\lambda_0,\ldots,\lambda_T) &= \sum_{t=0}^{T}\beta^t\left\{U(f(k_t)-k_{t+1})+\lambda_t\,[f(k_t)-k_{t+1}]\right\} \\
&= U(f(k_0)-k_1)+\lambda_0\,[f(k_0)-k_1] \\
&\quad +\beta\left\{U(f(k_1)-k_2)+\lambda_1\,[f(k_1)-k_2]\right\} \\
&\quad +\ldots \\
&\quad +\beta^t\left\{U(f(k_t)-k_{t+1})+\lambda_t\,[f(k_t)-k_{t+1}]\right\} \\
&\quad +\beta^{t+1}\left\{U(f(k_{t+1})-k_{t+2})+\lambda_{t+1}\,[f(k_{t+1})-k_{t+2}]\right\} \\
&\quad +\ldots \\
&\quad +\beta^T\left\{U(f(k_T)-k_{T+1})+\lambda_T\,[f(k_T)-k_{T+1}]\right\}
\end{aligned}
$$

con lo cual las seis condiciones de Kuhn-Tucker son resumidas por

$$
\begin{aligned}
k_{t+1} &\geq 0 \\
\underbrace{\beta^t\left[-U'(f(k_t)-k_{t+1})-\lambda_t\right]+\beta^{t+1}\left[U'(f(k_{t+1})-k_{t+2})f'(k_{t+1})+\lambda_{t+1}f'(k_{t+1})\right]}_{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial k_{t+1}}(k_1,\ldots,k_{T+1};\lambda_0,\ldots,\lambda_T)} &\leq 0 \\
k_{t+1}\times\underbrace{\left\{\beta^t\left[-U'(f(k_t)-k_{t+1})-\lambda_t\right]+\beta^{t+1}\left[U'(f(k_{t+1})-k_{t+2})f'(k_{t+1})+\lambda_{t+1}f'(k_{t+1})\right]\right\}}_{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial k_{t+1}}(k_1,\ldots,k_{T+1};\lambda_0,\ldots,\lambda_T)} &= 0 \\
\lambda_t &\geq 0 \\
\underbrace{\beta^t\left[f(k_t)-k_{t+1}\right]}_{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\lambda_t}(k_1,\ldots,k_{T+1};\lambda_0,\ldots,\lambda_T)} &\geq 0 \\
\lambda_t\times\underbrace{\beta^t\left[f(k_t)-k_{t+1}\right]}_{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\lambda_t}(k_1,\ldots,k_{T+1};\lambda_0,\ldots,\lambda_T)} &= 0
\end{aligned}
$$

para $t=0,\ldots,T$.

Para obtener estas condiciones nótese que ya que $f(0)=0$ y $U'(0)=\infty$, está claro que las restricciones de desigualdad en (8) no son vinculantes excepto para k_{T+1}, y también está claro que $k_{T+1}=0$. Por lo tanto, la solución satisface las condiciones de primer orden y de acotación

$$
\beta f'(k_t)\,U'\left[f(k_t)-k_{t+1}\right] = U'\left[f(k_{t-1})-k_t\right],\ t=1,2,\ldots,T; \tag{9}
$$

$$
k_{T+1} = 0,\ k_0>0 \text{ dado.} \tag{10}
$$

La ecuación (9) es una ecuación en diferencias de segundo orden en k_t; por lo tanto posee una familia de soluciones representada por dos parámetros. El único óptimo para el problema de maximización de interés es la única solución en esta familia que adicionalmente satisface las dos condiciones de acotación en (10). El siguiente ejercicio ilustra cómo (9)-(10) pueden ser usadas para resolver el óptimo en un ejemplo particular.

Ejercicio 2 *Sea $f(k)=k^\alpha$, $0<\alpha<1$, y sea $U(c)=ln(c)$. (No, esto no se ajusta a todos los supuestos que hemos puesto sobre f y U anteriormente, pero prosiga de todas formas.)*

a. *Escriba (9) para este caso y use el cambio de variable $z_t=k_t/k_{t-1}^\alpha$ para convertir el resultado en una ecuación en diferencias de primer orden en z_t. Grafique z_{t+1} contra z_t y grafique la línea de 45 grados sobre el mismo diagrama.*

b. *La condición de acotación (10) implica que* $z_{t+1} = 0$. *Usando esta condición, muestre que la única solución es*

$$z_t = \alpha\beta \frac{1-(\alpha\beta)^{T-t+1}}{1-(\alpha\beta)^{T-t+2}},\ t = 1, 2, \ldots, T+1.$$

c. *Chequee que la senda para el capital*

$$k_{t+1} = \alpha\beta \frac{1-(\alpha\beta)^{T-t}}{1-(\alpha\beta)^{T-t+1}} k_t^{\alpha},\ t = 0, 1, \ldots, T, \tag{11}$$

dado k_0, *satisface (9)-(10).*

Ahora considérese la versión de horizonte infinito del problema del planificador en el Ejercicio 2. Nótese que si T es grande, entonces el coeficiente de k_t^{α} en (11) es esencialmente constante e igual a $\alpha\beta$ para un tiempo muy grande. Para la solución al problema de horizonte infinito, ¿no podemos simplemente tomar el límite de las soluciones en (11) a medida que T tiende a infinito? ¡Después de todo, estamos discutiendo sobre hogares que descuentan el futuro a una tasa geométrica! Tomando el límite en (11), encontramos que

$$k_{t+1} = \alpha\beta k_t^{\alpha},\ t = 0, 1, \ldots. \tag{12}$$

De hecho, esta conjetura es correcta: el límite de las soluciones para el problema de horizonte finito es la única solución al problema de horizonte infinito. Esto es verdad tanto para nuestro ejemplo paramétrico como para el problema planteado de manera general. Pero demostrarlo involucra establecer la legitimidad de intercambiar los operadores "máx" y "$\text{lím}_{T\to\infty}$"; y hacer esto es más desafiante de lo que uno podría adivinar.

En cambio buscaremos un enfoque diferente. La ecuación (12) sugiere otra conjetura: que para el problema de horizonte infinito en (7)-(8), para cualquier U y f, la solución toma la forma

$$k_{t+1} = g(k_t),\ t = 0, 1, \ldots, \tag{13}$$

donde $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ es una función de ahorro fija. Nuestra intuición sugiere que esto debe ser así: ya que el problema de planeamiento toma la misma forma cada período, con solo el saldo de capital de inicio de período cambiando de un período al siguiente, ¿qué más si no k_t podría influenciar la elección de k_{t+1} y c_t? Desafortunadamente, el Ejercicio 2 no ofrece ayuda alguna en buscar esta conjetura. El cambio de variable explotado ahí es obviamente específico a las formas funcionales particulares asumidas, y una mirada a (9) confirma que ningún método similar es generalmente aplicable.

La estrategia que *usaremos* para seguir esta idea involucra ignorar (9) y (10) totalmente y empezar de nuevo. Aunque establecimos este problema como uno de elegir sucesiones infinitas $\{(c_t, k_{t+1})\}_{t=0}^{\infty}$ para el consumo y el capital, el problema que de hecho afronta el planificador en el período $t = 0$ es el de elegir el consumo de hoy, c_0, y el capital al inicio del período de mañana, k_1, y nada más. El resto puede esperar hasta mañana. Si supiéramos las preferencias del planificador sobre estos dos bienes, podríamos simplemente maximizar la función apropiada de (c_0, k_1) sobre el conjunto de oportunidades definido por (5), dado k_0. ¿Pero cuáles son las preferencias del planificador sobre el consumo actual y el capital del siguiente período?

Supóngase que (7)-(8) han sido ya resueltas para todos los posibles valores de k_0. Entonces podemos definir una función $v : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ al tomar $v(k_0)$ como el valor de la función objetivo maximizada (7), para cada $k_0 \geq 0$. Una función de este tipo es llamada una *función valor*. Con v así definida, $v(k_1)$ podría dar el valor de la utilidad desde el período 1 en adelante que podría ser obtenida con un saldo de capital de inicio de período k_1, y $\beta v(k_1)$ sería el valor de esta utilidad descontada hacia el período 0. Entonces en términos de esta función valor v, el problema del planificador en el período 0 sería

$$\max_{c_0, k_1} [U(c_0) + \beta v(k_1)] \tag{14}$$

sujeto a

$$\begin{aligned} c_0 + k_1 &\leq f(k_0), \\ c_0,\, k_1 &\geq 0,\, k_0 > 0 \text{ dado.} \end{aligned}$$

Si la función v fuera conocida, podríamos usar (14) para definir una función $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ como sigue: para cada $k_0 \geq 0$, sean $k_1 = g(k_0)$ y $c_0 = f(k_0) - g(k_0)$ los valores que alcanzan el máximo en (14). Con g así definida, (13) podría describir completamente la dinámica de la acumulación de capital desde cualquier saldo inicial de capital k_0.

Hasta este punto no "conocemos" υ pero la hemos definido como la función objetivo maximizada para el problema en (7)-(8). Así, si resolver (14) provee la solución para dicho problema, entonces $\upsilon(k_0)$ debe ser la función objetivo maximizada para (14) también. Es decir, υ debe satisfacer

$$\upsilon(k_0) = \max_{0 \leq k_1 \leq f(k_0)} \left\{ U[f(k_0) - k_1] + \beta \upsilon(k_1) \right\},$$

donde, como antes, hemos usado el hecho de que los bienes no serán desperdiciados.

Nótese que cuando el problema es visto en esta forma recursiva, los subíndices temporales se convierten en una molestia: no nos importa qué período es. Podemos reescribir el problema que encara el planificador con saldo de capital actual k como

$$\upsilon(k) = \max_{0 \leq y \leq f(k)} \left\{ U[f(k) - y] + \beta \upsilon(y) \right\}. \tag{15}$$

Esta ecuación en la función incógnita υ es llamada una *ecuación funcional*, y veremos después que es un objeto matemático muy tratable. El estudio de problemas de optimización dinámica a través del análisis de dichas ecuaciones funcionales es llamado *programación dinámica*.

Si supiéramos que la función υ es diferenciable y que el valor maximizador de y -llamémosle $g(k)$- fuera interior, entonces las condiciones de primer orden y de la envolvente para (15) serían

$$U'[f(k) - g(k)] = \beta \upsilon'[g(k)], \text{ y}$$

$$\upsilon'(k) = f'(k) U'[f(k) - g(k)],$$

respectivamente. La primera de estas condiciones iguala la utilidad marginal de consumir el producto actual a la utilidad marginal de asignarlo al capital y disfrutar un consumo aumentado en el siguiente período. La segunda condición establece que el valor marginal del capital actual, en términos de la utilidad descontada total, está dada por la utilidad marginal de usar el capital en la producción actual y asignar su retorno al consumo actual.

Ejercicio 3 *Hemos conjeturado que la senda para el capital dada por (12) era óptima para el problema de planeamiento de horizonte infinito, para las formas funcionales del Ejercicio 2.*

a. *Use esta conjetura para calcular v al evaluar (6) junto con la senda de consumo asociada con la senda para el capital dada por (12).*

b. *Verifique que esta función satisface (15).*

Supóngase que hemos establecido la existencia de una política de ahorro óptima g, ya sea analizando las condiciones (9)-(10) o analizando la ecuación funcional (15). ¿Qué podemos hacer con esta información? Para el ejemplo paramétrico particular en los Ejercicios 2 y 3, podemos resolver para g con métodos de lápiz y papel. Podemos entonces usar la ecuación en diferencias resultante (12) para computar la sucesión óptima de saldos de capital $\{k_t\}$. Este ejemplo es una excepción cuidadosamente elegida: para muchos otros ejemplos paramétricos, no es posible obtener una solución explícita analítica para la función ahorro g. En dichos casos un enfoque numérico puede ser usado para computar soluciones explícitas. Cuando todos los parámetros están especificados numéricamente, es posible usar un algoritmo basado en (15) para obtener una aproximación de g. Entonces $\{k_t\}$ puede ser computada usando (13), dado cualquier valor inicial k_0.

Adicionalmente, frecuentemente hay características cualitativas de la función ahorro g, y por lo tanto de las sendas de capital generadas por (13), que se mantienen bajo un rango muy amplio de supuestos sobre f y U. Específicamente, podemos usar ya sea (9)-(10) o las condiciones de primer orden y de la envolvente para (15), junto con los supuestos sobre U y f, para caracterizar la función de ahorro óptima g. Podemos, a su vez, usar las propiedades de g ya establecidas para caracterizar las soluciones $\{k_t\}$ de (13). El siguiente ejercicio ilustra el segundo de estos pasos.

Ejercicio 4 a. *Sea f como está especificado en el Ejercicio 1, y supóngase que la función de ahorros óptima g está caracterizada por una tasa constante, $g(k) = sf(k)$, para todo k, donde $s > 0$. Grafique g, y sobre el mismo diagrama grafique la línea de 45 grados. Los puntos en los cuales*

$g(k) = k$ son llamados soluciones estacionarias, estados estacionarios, puntos de reposo, o puntos fijos de g. Pruebe que hay exáctamente un punto estacionario positivo k^*.

b. Use el diagrama para mostrar que si $k_0 > 0$, entonces la sucesión $\{k_t\}$ dada por (13) converge a k^* a medida que $t \to \infty$. Pruebe que $\lim_{t\to\infty} k_t = k^*$ para cualquier $k_0 > 0$. Muestre que esta convergencia es monotónica. ¿Puede esta convergencia ocurrir en un número finito de períodos?

Este ejercicio contiene mucha de la información que puede ser establecida sobre el comportamiento cualitativo de una sucesión generada por un modelo dinámico determinístico. Los puntos estacionarios han sido localizados y caracterizados, sus propiedades de estabilidad establecidas, y el movimiento del sistema ha sido descrito cualitativamente para todas las posiciones iniciales posibles. Tomamos este ejemplo como un tipo de imagen de lo que uno podría esperar establecer para modelos más complicados, o como una fuente de conjeturas razonables. (Información acerca de la tasa de convergencia al estado estacionario k^*, para k_t cercano a k^*, puede ser obtenida al tomar una aproximación lineal de g en una vecindad de k^*. Alternativamente, se pueden usar simulaciones numéricas para estudiar la tasa de convergencia sobre cualquier rango de interés.)

De la discusión anterior, concluimos que una manera fructífera de analizar un problema de optimización estacionario y de horizonte infinito como aquel en (7)-(8) es examinar la ecuación funcional asociada (15) para este ejemplo -y la ecuación en diferencias (13) que involucra la función de política asociada. Varios pasos están involucrados al llevar a cabo este análisis.

Primero necesitamos estar seguros de que la (las) solución (soluciones) a un problema planteado en términos de sucesiones infinitas también es (son) la (las) solución (soluciones) a la ecuación funcional relacionada. Es decir, necesitamos mostrar que al usar la ecuación funcional no hemos cambiado el problema. Entonces debemos desarrollar herramientas para estudiar ecuaciones como (15). Debemos establecer la existencia y unicidad de la función valor v que satisface la ecuación funcional y, donde sea posible, desarrollar propiedades cualitativas de v. También necesitamos establecer propiedades de la función de política g asociada. Finalmente debemos mostrar cómo las propiedades cualitativas de g

son traducidas a propiedades de las sucesiones generadas por g.

Ya que una amplia variedad de problemas de áreas sustantivas muy diferentes en economía tienen todos la misma estructura matemática, queremos desarrollar estos resultados en una forma que es ampliamente aplicable. Hacer esto es la tarea de la Parte II.

En dicho punto estaremos en posición de dar un esbozo del resto del libro.

Referencias

Stokey, N. L. y Lucas, Jr., R. E. (1989). *Recursive Methods in Economic Dynamics*. Harvard University Press. Con E. C. Prescott.

Apéndice A Derivaciones

[Disponible]

