3.3. Modelo de Brock y Mirman

Derivación de una cota superior

Recuérdese que la restricción de recursos para dicho problema es

$$c_t + k_{t+1} \leq k_t^{\alpha}.$$

Ya que la función de utilidad es estrictamente creciente (¡más es mejor!), se debe cumplir que $c_t + k_{t+1} = k_t^{\alpha}$. Sabemos además que la función de utilidad está definida solo para niveles positivos de consumo ($c_t > 0$). Las dos últimas aserveraciones implican que

$$c_t = k_t^{\alpha} - k_{t+1} > 0,\ t = 0, 1 \ldots$$

que a su vez implica que

$$k_{t+1} < k_t^{\alpha},\ t = 0, 1 \ldots .$$

Tenemos que

$$\begin{aligned}
\text{para } t &= 0\text{: } k_1 < k_0^{\alpha} \\
\text{para } t &= 1\text{: } k_2 < k_1^{\alpha} < (k_0^{\alpha})^{\alpha} = k_0^{\alpha^2} \\
\text{para } t &= 2\text{: } k_3 < k_2^{\alpha} < \left(k_0^{\alpha^2}\right)^{\alpha} = k_0^{\alpha^3} \\
&\vdots \\
\text{entonces } k_t &< k_0^{\alpha^t} \text{ para } t \geq 1, \\
\text{y entonces } k_t^{\alpha} &< \left(k_0^{\alpha^t}\right)^{\alpha} = k_0^{\alpha^{t+1}} \text{ para } t \geq 1, \\
\text{y entonces } \ln\left(k_t^{\alpha}\right) &< \alpha^{t+1} \ln k_0 \text{ para } t \geq 1.
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
k_{t+1} &\geq 0,\ \forall t \geq 0 \\
&\Rightarrow k_{t+1} \geq 0,\ \forall t \geq 1 \\
&\Rightarrow k_t^{\alpha} - k_{t+1} \leq k_t^{\alpha},\ \forall t \geq 1 \\
&\Rightarrow \ln\left(k_t^{\alpha} - k_{t+1}\right) \leq \ln\left(k_t^{\alpha}\right),\ \forall t \geq 1 \\
&\Rightarrow \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} \ln\left(k_t^{\alpha} - k_{t+1}\right) \leq \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} \ln\left(k_t^{\alpha}\right).
\end{aligned}$$

Nótese además que

$$\begin{aligned}
k_1 &\geq 0 \\
&\Rightarrow -k_1 \leq 0 \\
&\Rightarrow k_0^{\alpha} - k_1 \leq k_0^{\alpha} \\
&\Rightarrow \ln\left(k_0^{\alpha} - k_1\right) \leq \ln\left(k_0^{\alpha}\right).
\end{aligned}$$

Combinando los dos últimos resultados, tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} \ln\left(k_t^{\alpha} - k_{t+1}\right) &\leq \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} \ln\left(k_t^{\alpha}\right) \\
\text{entonces } \ln\left(k_0^{\alpha} - k_1\right) + \beta \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} \ln\left(k_t^{\alpha} - k_{t+1}\right) &\leq \ln\left(k_0^{\alpha}\right) + \beta \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} \underbrace{\ln\left(k_t^{\alpha}\right)}_{<\alpha^{t+1} \ln k_0}.
\end{aligned}$$

Todo lo anterior nos lleva a

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln \left(k_t^{\alpha} - k_{t+1}\right) < \alpha \ln k_0 + \beta \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} \left(\alpha^{t+1} \ln k_0\right)$$

