Capítulo 4

Crecimiento óptimo con trabajo fijo: el modelo de crecimiento neoclásico

4.1. Formulación del problema del planificador social

El planificador social desea hallar las sendas de consumo, inversión, producto y capital $\{c_t, y_t, i_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ para maximizar la función de bienestar social dada por

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t)$$

sujeto a

$$\begin{aligned}
c_t + i_t &\leq y_t, \text{ para todo } t = 0, 1, \ldots, \\
y_t &= F(k_t, 1), \text{ para todo } t = 0, 1, \ldots, \\
k_{t+1} &= i_t + (1-\delta) k_t, \text{ para todo } t = 0, 1, \ldots, \\
c_t, k_{t+1} &\geq 0, \text{ para todo } t = 0, 1, \ldots \text{ y} \\
k_0 &> 0 \text{ dado.}
\end{aligned}$$

4.2. Problema secuencial

Hallar $\{k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ para maximizar

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \underbrace{U(\overbrace{F(k_t, 1)}^{y_t} - \overbrace{(k_{t+1} - (1-\delta) k_t)}^{i_t})}_{\mathcal{F}(k_t, k_{t+1})}$$

sujeto a

$$\begin{aligned}
k_{t+1} &\in \underbrace{[0, \overbrace{F(k_t, 1) + (1-\delta) k_t}^{=f(k_t) \leftarrow \text{recursos disponibles}}]}_{\Gamma(k_t) \leftarrow \text{conjunto factible}}, \text{ para todo } t = 0, 1, \ldots \text{ y} \\
k_0 &> 0 \text{ dado.}
\end{aligned}$$

4.3. Caracterización vía cálculo de variaciones

A continuación, lo que vamos a hacer es emplear las ecuaciones de Euler y la condición de transversalidad para caracterizar el comportamiento de la senda óptima de capital. Para esto, previamente definimos las siguientes derivadas parciales

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial k_t}\mathcal{F}\left(k_t,k_{t+1}\right) &=: \mathcal{F}_1\left(k_t,k_{t+1}\right)=U'\left(f\left(k_t\right)-k_{t+1}\right)\times f'\left(k_t\right) \text{ y}\\ \frac{\partial}{\partial k_{t+1}}\mathcal{F}\left(k_t,k_{t+1}\right) &=: \mathcal{F}_2\left(k_t,k_{t+1}\right)=U'\left(f\left(k_t\right)-k_{t+1}\right)\times(-1).\end{aligned}$$

Ahora, recordemos que las ecuaciones de Euler vienen dadas por

$$\mathcal{F}_2\left(k_t,k_{t+1}\right)+\beta\mathcal{F}_1\left(k_{t+1},k_{t+2}\right)=0, \text{ para todo } t=0,1,\ldots.$$

Lo que vamos a hacer ahora es reemplazar las derivadas parciales previamente calculadas, con lo cual llegamos a

$$-U'\left(f\left(k_t\right)-k_{t+1}\right)+\beta U'\left(f\left(k_{t+1}\right)-k_{t+2}\right)\times f'\left(k_{t+1}\right)=0, \text{ para todo } t=0,1,\ldots.$$

Si tomamos en cuenta que $c_t=f\left(k_t\right)-k_{t+1}$ (i.e., el consumo es la diferencia entre los recursos disponibles y el capital que se lleva al día de mañana) y el efecto de una unidad adicional de capital sobre los recursos disponibles viene dado por $f'\left(k_t\right)=F_1\left(k_t,1\right)+(1-\delta)$, las ecuaciones de Euler pueden ser reescritas como

$$-U'\left(c_t\right)+\beta U'\left(c_{t+1}\right)\left[F_1\left(k_{t+1},1\right)+(1-\delta)\right]=0, \text{ para todo } t=0,1,\ldots.$$

Las ecuaciones de Euler anteriormente obtenidas en cada período también pueden ser obtenidas de manera intuitiva. Primero, considérese que nos encontramos al inicio de un período t arbitrario. Esto quiere decir que nuestra restricción de recursos es $c_t+k_{t+1}=F\left(k_t,1\right)+(1-\delta)k_t$, en donde el lado derecho está fijo. Por lo tanto, la decisión de llevar una unidad más de capital al siguiente período implica un menor consumo en el período presente o, equivalentemente,

$$\downarrow c_t+\uparrow k_{t+1}=F\left(k_t,1\right)+(1-\delta)k_t.$$

Dicho de otra manera, el costo de incrementar marginalmente k_{t+1} conlleva un menor consumo que a su vez implica una pérdida de utilidad instantánea dada por $U'\left(c_t\right)$ (i.e., este es el costo). Segundo, cuando llegue el inicio del período $t+1$ la nueva restricción de recursos será

$$c_{t+1}+k_{t+2}=F\left(k_{t+1},1\right)+(1-\delta)k_{t+1}$$

con lo cual un monto de capital futuro k_{t+1} marginalmente superior incrementará los recursos disponibles en $F_1\left(k_{t+1},1\right)+(1-\delta)$. Dado k_{t+2}, este incremento lleva a un incremente del consumo futuro c_{t+1} en la misma cuantía o, equivalentemente,

$$\uparrow c_{t+1}+k_{t+2}=\uparrow\left[F\left(k_{t+1},1\right)+(1-\delta)k_{t+1}\right].$$

Dicho incremento en el consumo implica una mayor utilidad instantánea en $t+1$, dada por $U'\left(c_{t+1}\right)$. Finalmente el beneficio del incremento en k_{t+1} implica una mayor utilidad cuantificada por $F_1\left(k_{t+1},1\right)+(1-\delta)$ (incremento en recursos) multiplicado por el incremento en utilidad $U'\left(c_{t+1}\right)$, y todo en unidades útiles del período $t+1$. Téngase en cuenta que para hacer comparables las utilidades de los períodos t y $t+1$ debemos aplicar el factor de descuento β, con lo cual el beneficio viene dado por $\beta \times U'(c_{t+1}) \times [F_1(k_{t+1}, 1) + (1-\delta)]$.

En resumen, el análisis costo-beneficio de alejarse de la decisión óptima es igual a cero o, equivalentemente,

$$k_{t+1} : -\underbrace{U'(c_t)}_{\text{costo}} + \underbrace{\beta U'(c_{t+1})[F_1(k_{t+1}, 1) + (1-\delta)]}_{\text{beneficio}} = 0, \text{ para todo } t = 0, 1, \ldots.$$

Ahora, debemos escribir la condición de transversalidad. Para llevar a cabo esto, situémonos en un período arbitrario T. La condición de transversalidad establece que "en el largo plazo" o "en el límite" la valoración del capital acumulado es nula (i.e., no se valora el capital). Es decir,

$$\lim_{T \to \infty} (\text{valor del capital acumulado en } T) = 0$$

porque el capital *per se* no proporciona utilidad. Además, recuérdese que

$$\text{valor} = \text{“precio”} \times \text{cantidad}.$$

Sabemos que en el período T la cantidad de capital es k_T. Por su parte, el precio representa la valoración de una unidad adicional de capital, y el capital es valorado en la medida que permite la producción de bienes que van a ser consumidos. Al inicio del período T, la restricción de recursos vienen dada por

$$c_T + k_{T+1} = F(k_T, 1) + (1-\delta) k_T$$

y ya sabemos que los recursos en el lado derecho se encuentran dados. Nos preguntamos cuánta utilidad adicional hubiéramos podido obtener si hubiéramos tenido un monto ligeramente superior a k_T. Recordemos que en dicho caso hubiéramos tenido $F_1(k_T, 1) + (1-\delta)$ recursos adicionales, los cuales son consumidos en su totalidad e implican una utilidad adicional de $U'(c_T)$ en el período T. Como la decisión se toma en $t = 0$, debemos medir las consecuencias de las decisiones en unidades de utilidad del período $t = 0$, por lo cual aplicamos el factor de descuento β^T.

De esta manera, la condición de transversalidad se escribe como

$$\lim_{T \to \infty} \beta^T \times \underbrace{\overbrace{U'(c_T)[F_1(k_T, 1) + (1-\delta)]}^{\mathcal{F}_1(k_T, k_{T+1})}}_{\text{valoración de una unidad adicional de capital en } T} \times \underbrace{\overbrace{k_T}^{\geq 0}}_{\text{capital en } T} = 0.$$

En resumen, las condiciones de optimalidad necesarias y suficientes son

$$\begin{aligned}
U'(c_t) &= \beta U'(c_{t+1})[F_1(k_{t+1}, 1) + (1-\delta)], \text{ para todo } t = 0, 1, \ldots, \\
c_t + k_{t+1} &= F(k_t, 1) + (1-\delta) k_t, \text{ para todo } t = 0, 1, \ldots. \\
0 &= \lim_{T \to \infty} \beta^T U'(c_T)[F_1(k_T, 1) + (1-\delta)] k_T \text{ y} \\
k_0 &> 0 \text{ dado.}
\end{aligned}$$

Desde luego, las condiciones previas requieren $k_{t+1} \in \text{int}(\Gamma(k_t))$ o, equivalentemente, $0 < k_{t+1} < F(k_t, 1) + (1-\delta) k_t =: f(k_t)$ para todo $t = 0, 1, \ldots$. Por un lado, si ocurriera que $k_{t+1} \to 0$ se obtendría que $f'(k_{t+1}) \to +\infty$ por una de las condiciones de Inada. Por otro lado, si $k_{t+1} \to f(k_t)$ se obtendría que $c_t \to 0$ con lo cual $U'(c_t) \to +\infty$ por la otra condición de Inada. Por tanto, la solución es interior.

4.3.1. Estado estacionario

Denotamos el estado estacionario como el $\left(\bar{k},\bar{c}\right)$ tales que

$$\begin{aligned} U'\left(\bar{c}\right) &= \beta U'\left(\bar{c}\right)\left[F_1\left(\bar{k},1\right)+\left(1-\delta\right)\right] \text{ y} \\ \bar{c}+\bar{k} &= F\left(\bar{k},1\right)+\left(1-\delta\right)\bar{k}. \end{aligned}$$

Primero, notamos que la primera expresión equivale a

$$F_1\left(\bar{k},1\right)=\frac{1}{\beta}-\left(1-\delta\right).$$

Nos preguntamos si existe dicho $\bar{k}$. Se puede apreciar del gráfico que las condiciones Inada garantizan que existe un único $\bar{k}>0$.

Figura 4.1: Existencia del capital de estado estacionario

Ahora, dado que hemos garantizado la existencia de un único capital de estado estacionario nos ocupamos del consumo de estado estacionario $\bar{c}$. Primero, en estado estacionario la restricción de recursos viene dada por

$$\bar{c}=F\left(\bar{k},1\right)-\delta\bar{k},$$

la cual sirve para determinar el consumo de estado estacionario. Sin embargo surge la pregunta ¿podemos garantizar que $\bar{c}$ es positivo? Para responder esta pregunta vamos a usar las propiedades de la función de producción F.

Empezamos maximizando $F\left(k,1\right)-\delta k$ con respecto a k y denotemos k^* como el nivel de capital que maximiza dicha expresión. Entonces, la condición necesaria de primer orden viene dada por

$$\frac{d}{dk}\left[F\left(k,1\right)-\delta k\right]\bigg|_{k=k^*}=F_1\left(k^*,1\right)-\delta=0.$$

Además, sabemos que el capital de estado estacionario satisface

$$F_1\left(\bar{k},1\right)-\delta=\frac{1}{\beta}-1>0$$

con lo cual podemos afirmar que

$$F_1\left(\bar{k},1\right)-\delta>0=F_1\left(k^*,1\right)-\delta$$

que equivale $F_1\left(\bar{k},1\right)>F_1\left(k^*,1\right)$ si y solo si $\bar{k}<k^*$. Por otro lado, sabemos que $F\left(0,1\right)-\delta\times 0=0$ y que

$$\lim_{k\downarrow 0}\left[F_1\left(k,1\right)-\delta\right]=+\infty.$$

Graficamos todo lo anterior para ver sus implicancias

Ahora analicemos la dinámica fuera del estado estacionario.

Recuérdese que la restricción de recursos en el óptimo es $c_t+k_{t+1}=F\left(k_t,1\right)+\left(1-\delta\right)k_t$ o, equivalentemente,

$$\Delta k:=k_{t+1}-k_t=F\left(k_t,1\right)-\delta k_t-c_t.$$

Consideramos tres casos:

Figura 4.2: Consumo en estado estacionario y regla de oro

1. si $c_t = F(k_t, 1) - \delta k_t \Rightarrow k_{t+1} - k_t = 0 \Rightarrow k_{t+1} = k_t \Rightarrow \Delta k = 0$,
2. si $c_t < F(k_t, 1) - \delta k_t \Rightarrow k_{t+1} - k_t > 0 \Rightarrow k_{t+1} > k_t \Rightarrow \Delta k > 0$ y
3. si $c_t > F(k_t, 1) - \delta k_t \Rightarrow k_{t+1} - k_t < 0 \Rightarrow k_{t+1} < k_t \Rightarrow \Delta k < 0$.

Figura 4.3: Dinámica del capital

A continuación, estudiamos la dinámica del consumo a partir de las ecuaciones de Euler

$$\frac{U'(c_t)}{U'(c_{t+1})} = \beta\left[F_1(k_{t+1}, 1) + (1-\delta)\right]$$

con lo cual

1. Si $\beta\left[F_1(k_{t+1}, 1) + (1-\delta)\right] = 1$:
$$\frac{U'(c_t)}{U'(c_{t+1})} = 1 \Longrightarrow U'(c_t) = U'(c_{t+1}) \Longrightarrow c_t = c_{t+1} \Longrightarrow \Delta c := c_{t+1} - c_t = 0.$$
2. Si $\beta\left[F_1(k_{t+1}, 1) + (1-\delta)\right] < 1$:
$$\frac{U'(c_t)}{U'(c_{t+1})} < 1 \Longrightarrow U'(c_t) < U'(c_{t+1}) \Longrightarrow c_t > c_{t+1} \Longrightarrow \Delta c := c_{t+1} - c_t < 0.$$
3. Si $\beta\left[F_1(k_{t+1}, 1) + (1-\delta)\right] > 1$:
$$\frac{U'(c_t)}{U'(c_{t+1})} > 1 \Longrightarrow U'(c_t) > U'(c_{t+1}) \Longrightarrow c_t < c_{t+1} \Longrightarrow \Delta c := c_{t+1} - c_t > 0.$$

Para poder hacer un análisis gráfico-cualitativo en el plano (k_t, c_t) debemos primero usar la restricción de recursos que equivale a $k_{t+1} = F(k_t, 1) + (1-\delta) k_t - c_t$.

1. $\beta\left[F_1(k_{t+1}, 1) + (1-\delta)\right] = 1$ ocurre si y solo si $F_1(k_{t+1}, 1) = \frac{1}{\beta} - (1-\delta) = F_1\left(\bar{k}, 1\right)$ que a su vez ocurre si y solo si $k_{t+1} = \bar{k}$.
2. $\beta\left[F_1(k_{t+1}, 1) + (1-\delta)\right] < 1$ ocurre si y solo si $F_1(k_{t+1}, 1) < \frac{1}{\beta} - (1-\delta) = F_1\left(\bar{k}, 1\right)$ que a su vez ocurre si y solo si $k_{t+1} > \bar{k}$.
3. $\beta\left[F_1(k_{t+1}, 1) + (1-\delta)\right] > 1$ ocurre si y solo si $F_1(k_{t+1}, 1) > \frac{1}{\beta} - (1-\delta) = F_1\left(\bar{k}, 1\right)$ que a su vez ocurre si y solo si $k_{t+1} < \bar{k}$.

Reemplazamos el k_{t+1} de la restricción de recursos para afirmar que

1. $\Delta c := c_{t+1} - c_t = 0 \iff \beta\left[F_1(k_{t+1}, 1) + (1-\delta)\right] = 1 \iff F(k_t, 1) + (1-\delta) k_t - c_t = \bar{k}$.
2. $\Delta c := c_{t+1} - c_t < 0 \iff \beta\left[F_1(k_{t+1}, 1) + (1-\delta)\right] < 1 \iff F(k_t, 1) + (1-\delta) k_t - c_t > \bar{k}$.
3. $\Delta c := c_{t+1} - c_t > 0 \iff \beta\left[F_1(k_{t+1}, 1) + (1-\delta)\right] > 1 \iff F(k_t, 1) + (1-\delta) k_t - c_t < \bar{k}$.

Figura 4.4: Dinámica del consumo

Figura 4.5: Diagrama de fase

4.4. Solución de la ecuación funcional vía coeficientes indeterminados para el modelo Brock-Mirman

Para el caso en que $U(c) = \ln c$, $\delta = 1$ y $f(k) = k^{\alpha}$ $(0 < \alpha < 1)$, la ecuación funcional es de la forma

$$\upsilon(k) = \max_{k' \in [0, k^{\alpha}]} \{\ln(k^{\alpha} - k') + \beta\upsilon(k')\}.$$

Previamente hemos empleado el método de aproximaciones sucesivas para resolver la ecuación anterior. En cada iteración, pudimos observar que la función resultante es lineal en el logaritmo natural de k. Por lo tanto, podemos conjeturar que función valor es log-lineal con respecto a k:

$$\upsilon(k) = E + F\ln(k).$$

Luego de aplicar el método de coeficientes indeterminados, podemos verificar que

$$\upsilon(k) = \underbrace{\frac{1}{1-\beta}\left[\ln(1-\alpha\beta) + \frac{\alpha\beta}{1-\alpha\beta}\ln(\alpha\beta)\right]}_{E} + \underbrace{\frac{\alpha}{1-\alpha\beta}}_{F}\ln(k)$$

la cual coincide con el límite del método de aproximaciones sucesivas. Por su parte, la regla de política viene dada por

$$\begin{aligned} k' &= g(k) = \alpha\beta k^{\alpha} \text{ y} \\ c_t &= (1-\alpha\beta)\, k_t^{\alpha}. \end{aligned}$$

Dado lo anterior

$$\begin{aligned} y_0 &= k_0^{\alpha}, \quad c_0^* = (1-\alpha\beta)\, k_0^{\alpha},\, k_1^* = \alpha\beta k_0^{\alpha},\, i_0^* = k_1^* - (1-\delta)\, k_0 \\ y_1^* &= (k_1^*)^{\alpha},\, c_1^* = (1-\alpha\beta)\, k_1^{\alpha},\, k_2^* = \alpha\beta k_1^{\alpha},\, i_1^* = k_2^* - (1-\delta)\, k_1^* \\ y_2^* &= (k_2^*)^{\alpha},\, c_2^* = (1-\alpha\beta)\, k_2^{\alpha},\, k_3^* = \alpha\beta k_2^{\alpha},\, i_2^* = k_3^* - (1-\delta)\, k_2^* \\ &\vdots \end{aligned}$$