Ejercicio 2 *(Utilidad CES) Considere el problema estándar del consumidor bajo preferencias representadas por una función de utilidad con elasticidad de sustitución constante (CES por sus siglas en inglés). Es decir, se pide hallar* (x_1^*, x_2^*) *para maximizar*

$$u(x_1, x_2) = \left\{ \alpha^{\frac{1}{\varepsilon}} x_1^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + (1-\alpha)^{\frac{1}{\varepsilon}} x_2^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} \right\}^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}$$

sujeto a

$$\begin{aligned} p_1 x_1 + p_2 x_2 &\leq m, \\ x_1 &\geq 0 \text{ y} \\ x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

1. *Grafique el conjunto presupuestario* $\mathcal{B}(p_1, p_2, m)$*. ¿Es cerrado? ¿Es acotado?*
2. *Escriba la función lagrangiana para este problema. ¿De cuántas variables depende?*
3. *Escriba las condiciones de Kuhn-Tucker. ¿Cuántas son?*
4. *Halle la canasta maximizadora* (x_1^*, x_2^*) *y el(los) multiplicador(es) que la soporta(n).*
5. *¿Cómo se relacionan sus resultados con respecto a aquellos obtenidos cuando la función de utilidad era Cobb-Douglas? Interprete sus resultados.*

D.2 Solución del ejercicio 2

1. Graficar.

2. El lagrangiano depende de tres variables:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = \left\{\alpha^{\frac{1}{\varepsilon}} x_1^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + (1-\alpha)^{\frac{1}{\varepsilon}} x_2^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}\right\}^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} + \lambda\left[m - p_1 x_1 - p_2 x_2\right].$$

3. Las condiciones de Kuhn-Tucker son:

$$x_1^* \geq 0, \tag{e2-KT1}$$

$$\underbrace{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}\left\{\alpha^{\frac{1}{\varepsilon}}\left(x_1^*\right)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + (1-\alpha)^{\frac{1}{\varepsilon}}\left(x_2^*\right)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}\right\}^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}-1} \alpha^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\left(x_1^*\right)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}-1} - \lambda^* p_1}_{=\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1}\left(x_1^*, x_2^*, \lambda^*\right)} \leq 0, \tag{e2-KT2}$$

$$x_1^* \underbrace{\left[\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}\left\{\alpha^{\frac{1}{\varepsilon}}\left(x_1^*\right)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + (1-\alpha)^{\frac{1}{\varepsilon}}\left(x_2^*\right)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}\right\}^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}-1} \alpha^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\left(x_1^*\right)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}-1} - \lambda^* p_1\right]}_{=\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1}\left(x_1^*, x_2^*, \lambda^*\right)} = 0, \tag{e2-KT3}$$

$$x_2^* \geq 0, \tag{e2-KT4}$$

$$\underbrace{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}\left\{\alpha^{\frac{1}{\varepsilon}}\left(x_1^*\right)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + (1-\alpha)^{\frac{1}{\varepsilon}}\left(x_2^*\right)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}\right\}^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}-1} (1-\alpha)^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\left(x_2^*\right)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}-1} - \lambda^* p_2}_{=\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2}\left(x_1^*, x_2^*, \lambda^*\right)} \leq 0, \tag{e2-KT5}$$

$$x_2^* \underbrace{\left[\tfrac{\varepsilon}{\varepsilon-1}\left\{\alpha^{\frac{1}{\varepsilon}}\left(x_1^*\right)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + (1-\alpha)^{\frac{1}{\varepsilon}}\left(x_2^*\right)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}\right\}^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}-1} (1-\alpha)^{\frac{1}{\varepsilon}} \tfrac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\left(x_2^*\right)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}-1} - \lambda^* p_2\right]}_{=\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2}\left(x_1^*, x_2^*, \lambda^*\right)} = 0, \tag{e2-KT6}$$

$$\lambda^* \geq 0, \tag{e2-KT7}$$

$$\underbrace{m - p_1 x_1^* - p_2 x_2^*}_{=\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}\left(x_1^*, x_2^*, \lambda^*\right)} \geq 0, \tag{e2-KT8}$$

$$\lambda^* \underbrace{\left[m - p_1 x_1^* - p_2 x_2^*\right]}_{=\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}\left(x_1^*, x_2^*, \lambda^*\right)} = 0. \tag{e2-KT9}$$

4. A partir del gráfico, conjeturamos un $(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)$ tal que $x_1^* > 0$ y $x_2^* > 0$. La conjetura $x_1^* > 0$ implica que (e2-KT1) se cumple con desigualdad estrícta y el cumplimiento de (e2-KT3) implica que (e2-KT2) se cumple con igualdad. Además, $x_2^* > 0$ implica que (e2-KT4) se cumple con desigualdad estrícta y el cumplimiento de (e2-KT6) implica que (e2-KT5) se cumple con igualdad. Finalmente, nótese que (e2-KT5) con igualdad implica

$$\lambda^* = \frac{\left\{\alpha^{\frac{1}{\varepsilon}} (x_1^*)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + (1-\alpha)^{\frac{1}{\varepsilon}} (x_2^*)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}\right\}^{\frac{1}{\varepsilon-1}} \alpha^{\frac{1}{\varepsilon}} (x_1^*)^{-\frac{1}{\varepsilon}}}{p_1} > 0$$

que a su vez implica que (e2-KT7) se cumpla con desigualdad estrícta que a su vez, por el cumplimiento de (e2-KT9), implica que (e2-KT8) se cumpla con igualdad. En resumen, surgen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
\left\{\alpha^{\frac{1}{\varepsilon}} (x_1^*)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + (1-\alpha)^{\frac{1}{\varepsilon}} (x_2^*)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}\right\}^{\frac{1}{\varepsilon-1}} \alpha^{\frac{1}{\varepsilon}} (x_1^*)^{-\frac{1}{\varepsilon}} &= \lambda^* p_1, \\
\left\{\alpha^{\frac{1}{\varepsilon}} (x_1^*)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + (1-\alpha)^{\frac{1}{\varepsilon}} (x_2^*)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}\right\}^{\frac{1}{\varepsilon-1}} (1-\alpha)^{\frac{1}{\varepsilon}} (x_2^*)^{-\frac{1}{\varepsilon}} &= \lambda^* p_2 \text{ y} \\
p_1 x_1^* + p_2 x_2^* &= m,
\end{aligned}$$

cuya solución viene dada por

$$\begin{aligned}
x_1^* &= \frac{\alpha p_2^{\varepsilon}}{\alpha p_1 p_2^{\varepsilon} + (1-\alpha) p_1^{\varepsilon} p_2} m > 0 \text{ y} \\
x_2^* &= \frac{(1-\alpha) p_1^{\varepsilon}}{\alpha p_1 p_2^{\varepsilon} + (1-\alpha) p_1^{\varepsilon} p_2} m > 0,
\end{aligned}$$

canasta que es soportada por

$$\lambda^* = \frac{\left\{\alpha^{\frac{1}{\varepsilon}} (x_1^*)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + (1-\alpha)^{\frac{1}{\varepsilon}} (x_2^*)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}\right\}^{\frac{1}{\varepsilon-1}} \alpha^{\frac{1}{\varepsilon}} (x_1^*)^{-\frac{1}{\varepsilon}}}{p_1} > 0.$$

5. A medida que $\varepsilon \to 1$ tenemos que

$$\begin{aligned}
x_1^* &\to \alpha \frac{m}{p_1} > 0, \\
x_2^* &\to (1-\alpha) \frac{m}{p_2} > 0 \text{ y} \\
\lambda^* &\to \frac{\alpha}{p_1} \left(\frac{x_2^*}{x_1^*}\right)^{1-\alpha} > 0.
\end{aligned}$$

Es decir, a medida que la elasticidad de sustitución se acerque a uno, la canasta óptima y el precio sombra del ingreso se acercan a los correspondientes al caso de la utilidad Cobb-Douglas.

