2. Esperanza matemática

2.1. Variable aleatoria discreta con número finito de resultados

Sea X una variable aleatoria con n posibles resultados x_1, x_2, $\ldots$ y x_n y con probabilidades p_1, p_2, $\ldots$ y p_n, respectivamente ($p_1 + p_2 + \ldots p_n = \sum_{k=1}^{n} p_k = 1$). En este caso la esperanza matemática de X se define mediante

$$\begin{aligned} E\left[X\right] &= x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots x_n p_n \\ &= \sum_{k=1}^{n} x_k p_k. \end{aligned}$$

2.2. Variable aleatoria discreta con número infinito contable de resultados

Sea X una variable aleatoria con infinitos (contables) posibles resultados x_1, x_2, x_3, $\ldots$ y con probabilidades p_1, p_2, p_3, $\ldots$, respectivamente ($p_1 + p_2 + p_3 + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$). En este caso la esperanza matemática de X se define mediante

$$\begin{aligned} E\left[X\right] &= x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \ldots \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k. \end{aligned}$$

2.3. Variable aleatoria continua con número infinito incontable de resultados

Sea X una variable aleatoria continua con infinitos e incontables posibles resultados en el conjunto de los números reales y con función de densidad f ($\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x\right) dx = 1$). En este caso la esperanza matemática de X se define mediante

$$E\left[X\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x f\left(x\right) dx.$$

Lo que hay que notar aquí es que, como es bien sabido, la función de densidad no mide la probabilidad de un valor específico. En este sentido, la función de densidad no puede ser usada para interpretarse como una probabilidad.

Lo que efectivamente sabemos que mide la probabilidad de un evento de una variable aleatoria continua es la función de distribución. Si asumimos que la función de distribución es diferenciable, entonces

$$dF(x) = \underbrace{F'(x)}_{\equiv f(x)} dx = f(x)\, dx$$

con lo cual podemos escribir la penúltima expresión como

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x \underbrace{f(x)\, dx}_{=dF(x)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x F(dx) \end{aligned}$$

y ahora nuevamente estamos en posición de interpretar la esperanza matemática como la "suma ponderada de cada posible realización por su respectiva probabilidad".

3. Modelo de McCall

La siguiente exposición se basa en el capítulo 6 de Ljungqvist y Sargent (2018). En particular, vamos a ver el modelo de McCall (1970).

El tiempo es discreto ($t = 0, 1, \ldots$) y una persona ingresa desempleada al mercado laboral (no hay posibilidad de retirarse de dicho mercado) y en cada periodo recibe una oferta labora el términos de un salario que se distribuye aleatoriamente en el intervalo $[0, B]$ donde $B > 0$ es "arbitrariamente alto". Ante cada oferta, esta persona tiene la posibilidad de:

- aceptar la oferta laboral y quedarse para siempre en dicho puesto (no hay posibilidad de despido), o
- rechazar dicha oferta, en cuyo caso recibe una compensación por desempleo durante dicho periodo y permanece desempleada hasta el siguiente periodo en que recibe una nueva oferta laboral.

Las preferencias de esta personal son respresentadas por la siguiente función de utilidad

$$E\left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t y_t\right].$$

Cabe señalar que, dadas las preferencias anteriores, se busca maximizar los ingresos y esta persona es indiferente (i.e. neutral) al riesgo. Además $\beta = 1/(1+r)$ donde $r > 0$ es la tasa neta de interés (de mercado).

Si yo deposito 100 soles y al cabo de un año retiro 125 soles, entonces:

- La tasa bruta de interés es

$$\frac{125}{100} = 1{,}25$$

- La tasa neta de interés es

$$\frac{125-100}{100} = \frac{25}{100} = 0{,}25 = 25\,\%$$

En cada $t = 0, 1, \ldots$ cada oferta salarial w_t (*wage*) posee una función de distribución F invariante en el tiempo. Es decir, las ofertas salariales en cada periodo son independientes e identicamente distribuidas.

Vamos a escribir el problema en términos de una función valor: usaremos υ para denotar la utilidad de una persona desempleada cuando se le ofrece un salario w. Por lo tanto, la ecuación de Bellman es de la forma

$$\upsilon(w) = \max \left\{ \underbrace{w + \beta w + \beta^2 w + \ldots}_{\text{aceptar}}, \underbrace{c + \beta \overbrace{\left[\int_0^B \upsilon(w')\, dF(w')\right]}^{\text{esperado de seguir desempleado}}}_{\text{rechazar}} \right\}$$

o, equivalentemente,

$$\begin{aligned}
\upsilon(w) &= \max \left\{ w + \beta w + \beta^2 w + \ldots, c + \beta \int_0^B \upsilon(w')\, dF(w') \right\} \\
&\Rightarrow \upsilon(w) = \max \left\{ w\underbrace{\left(1 + \beta + \beta^2 + \ldots\right)}_{1/(1-\beta)}, c + \beta \int_0^B \upsilon(w')\, dF(w') \right\} \\
&\Rightarrow \boxed{\upsilon(w) = \max \left\{ \underbrace{\frac{w}{1-\beta}}_{\text{depende de } w}, \underbrace{c + \beta \int_0^B \upsilon(w')\, dF(w')}_{\text{no depende de } w} \right\}}
\end{aligned}$$

Se desprende del análisis del gráfico anterior de la función valor que existe un $\hat{w}$ $(0 < \hat{w} < B)$ tal que

$$\upsilon(\hat{w}) = \max \left\{ \frac{\hat{w}}{1-\beta}, c + \beta \int_0^B \upsilon(w')\, dF(w') \right\}$$

Figura 1: Función valor.

en donde

$$\frac{\hat{w}}{1-\beta} = c + \beta \underbrace{\int_0^B \upsilon\left(w'\right) dF\left(w'\right)}_{E[\upsilon(w')]}.$$

Sin embargo, la expresión anterior no es muy útil porque depende de $E\left[\upsilon\left(w'\right)\right]$ que aún es desconocida para nosotros.

No obstante, podemos aprovechar la definición de $E\left[\upsilon\left(w'\right)\right]$:

$$\begin{aligned}
E\left[\upsilon\left(w'\right)\right] &= \int_0^B \upsilon\left(w'\right) dF\left(w'\right) \text{ [por definición]} \\
&= \int_0^{\hat{w}} \underbrace{\upsilon\left(w'\right)}_{\hat{w}/(1-\beta)} dF\left(w'\right) + \int_{\hat{w}}^B \underbrace{\upsilon\left(w'\right)}_{w'/(1-\beta)} dF\left(w'\right) \text{ [rango consta de dos tramos]} \\
&= \int_0^{\hat{w}} \frac{\hat{w}}{1-\beta} dF\left(w'\right) + \int_{\hat{w}}^B \frac{w'}{1-\beta} dF\left(w'\right) \\
&= \int_0^{\hat{w}} \frac{\hat{w}}{1-\beta} dF\left(w\right) + \int_{\hat{w}}^B \frac{w}{1-\beta} dF\left(w\right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos dos expresiones

$$\frac{\hat{w}}{1-\beta} = c + \beta E\left[\upsilon\left(w'\right)\right] \qquad \text{(I)}$$

$$E\left[\upsilon\left(w'\right)\right] = \int_0^{\hat{w}} \frac{\hat{w}}{1-\beta} dF\left(w\right) + \int_{\hat{w}}^B \frac{w}{1-\beta} dF\left(w\right) \qquad \text{(II)}$$

con dos incógnitas: $\hat{w}$ y $E[v(w')]$. Empezamos trabajando con la ecuación (II):

$$\begin{aligned}
E\left[v\left(w'\right)\right] &= \int_0^{\hat{w}} \frac{\hat{w}}{1-\beta} dF(w) + \int_{\hat{w}}^{B} \frac{w}{1-\beta} dF(w) \\
&= \int_0^{\hat{w}} \frac{\hat{w}}{1-\beta} dF(w) + \int_{\hat{w}}^{B} \frac{\hat{w}}{1-\beta} dF(w) - \int_{\hat{w}}^{B} \frac{\hat{w}}{1-\beta} dF(w) + \int_{\hat{w}}^{B} \frac{w}{1-\beta} dF(w) \\
&= \int_0^{B} \frac{\hat{w}}{1-\beta} dF(w) + \int_{\hat{w}}^{B} \left(-\frac{\hat{w}}{1-\beta}\right) dF(w) + \int_{\hat{w}}^{B} \frac{w}{1-\beta} dF(w) \\
&= \int_0^{B} \frac{\hat{w}}{1-\beta} dF(w) + \int_{\hat{w}}^{B} \frac{w-\hat{w}}{1-\beta} dF(w) \\
&= \frac{\hat{w}}{1-\beta} \underbrace{\int_0^{B} dF(w)}_{=1} + \int_{\hat{w}}^{B} \frac{w-\hat{w}}{1-\beta} dF(w) \\
&= \frac{\hat{w}}{1-\beta} + \int_{\hat{w}}^{B} \frac{w-\hat{w}}{1-\beta} dF(w)
\end{aligned}$$

multiplicamos ambos lados por β:

$$\begin{aligned}
\beta E\left[v\left(w'\right)\right] &= \beta \frac{\hat{w}}{1-\beta} + \beta \int_{\hat{w}}^{B} \frac{w-\hat{w}}{1-\beta} dF(w) \\
&= \frac{\beta}{1-\beta} \hat{w} + \frac{\beta}{1-\beta} \int_{\hat{w}}^{B} (w-\hat{w})\, dF(w)
\end{aligned}$$

Reemplazamos este último resultado en (I):

$$\begin{aligned}
\frac{\hat{w}}{1-\beta} &= c + \left[\frac{\beta}{1-\beta}\hat{w} + \frac{\beta}{1-\beta} \int_{\hat{w}}^{B} (w-\hat{w})\, dF(w)\right] \\
&\Rightarrow \underbrace{\left[\frac{1}{1-\beta} - \frac{\beta}{1-\beta}\right]}_{=1} \hat{w} = c + \frac{\beta}{1-\beta} \int_{\hat{w}}^{B} (w-\hat{w})\, dF(w) \\
&\Rightarrow \boxed{\hat{w} - c = \underbrace{\frac{\beta}{1-\beta} \int_{\hat{w}}^{B} (w-\hat{w})\, dF(w)}_{h(\hat{w})}}
\end{aligned}$$

Podemos reescribir la caracterización del salario de reserva como sigue:

$$\begin{aligned}
\overbrace{\hat{w} - c}^{\text{costo}} &= \beta \left[\frac{1}{1-\beta} \int_{\hat{w}}^{B} (w-\hat{w})\, dF(w)\right] \\
&= \beta \underbrace{\left[\int_{\hat{w}}^{B} (w-\hat{w})\, dF(w) + \beta \int_{\hat{w}}^{B} (w-\hat{w})\, dF(w) + \beta^2 \int_{\hat{w}}^{B} (w-\hat{w})\, dF(w) + \ldots\right]}_{\text{beneficio (esperado)}}
\end{aligned}$$

con lo cual

- $\hat{w} - c$: es el costo de oportunidad de rechazar una oferta laboral cuando se tiene $\hat{w}$ a la mano.
- término entre corchetes: beneficio esperado de rechazar una oferta salarial de $\hat{w}$.