Capítulo 10

Problema de crecimiento óptimo estocástico con un sector y oferta laboral fija

De manera similar al caso determinístico, el problema consiste en hallar las sendas de consumo, inversión, producto y capital en $\{c_t, i_t, y_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ para maximizar la siguiente utilidad esperada en $t = 0$:

$$E_0 \left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t) \right]$$

sujeto a

$$\begin{aligned} c_t + i_t &\leq y_t, \\ y_t &= e^{z_t} F(k_t, 1), \\ k_{t+1} &= i_t + (1-\delta) k_t \text{ y} \\ c_t, k_{t+1} &\geq 0, \end{aligned}$$

para todo $t = 0, 1, \ldots$, con $k_0 > 0$ y z_0 dados. El nuevo elemento aquí es un choque tecnológico z_t exógeno, con función de distribución $\tilde{F}$ invariante en el tiempo (la notación de la función de distribución $\tilde{F}$ no tiene absolutamente nada que ver con la notación de la función de producción F).

Por otro lado, la función de utilidad instantánea U satisface los mismos supuestos que en el caso determinístico. En particular, es estríctamente creciente por lo cual $c_t + i_t = e^{z_t} F(k_t, 1)$ y por tanto

$$c_t = e^{z_t} F(k_t, 1) + (1-\delta) k_t - k_{t+1} = e^{z_t} F(k_t, 1) - [k_{t+1} - (1-\delta) k_t]$$

10.1. Problema secuencial

Hallar $\{k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ para maximizar la siguiente utilidad esperada en $t = 0$:

$$\max_{\{k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} E_0 \left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \underbrace{U\left(e^{z_t} F(k_t, 1) + (1-\delta) k_t - k_{t+1}\right)}_{=:\mathcal{F}(k_t, k_{t+1}, z_t)} \right]$$

sujeto a

$$0 \leq k_{t+1} \leq e^{z_t} F(k_t, 1) + (1-\delta) k_t,$$

para $t = 0, 1, \ldots$ con $k_0 > 0$ y z_0 dados.

10.2. Ecuación funcional

$$\upsilon(k,z)=\max_{0\leq k'\leq e^z F(k,1)+(1-\delta)k}\left\{\mathcal{F}(k,k',z)+\beta\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\upsilon(k',z')\,d\tilde{F}(z')}_{\text{esperado del valor de continuación}}\right\}.$$

Variable aleatoria

n posibles valores: x_1 con probabilidad p_1, x_2 con probabilidad p_2,... x_n con probabilidad p_n. Sabemos que $\sum_{i=1}^{n}p_i=p_1+p_2+\ldots+p_n=1$ por definición de probabilidad. Entonces la esperanza matemática es igual a

$$\sum_{i=1}^{n}x_ip_i=x_1p_1+x_2p_2+\ldots+x_np_n$$

En un caso más complicado

infinitos (contables) posibles valores: x_1 con probabilidad p_1, x_2 con probabilidad p_2,..., y así *ad infinitum*. Sabemos que $\sum_{i=1}^{\infty}p_i=p_1+p_2+\ldots=1$ por definición de probabilidad. Entonces la esperanza matemática es igual a

$$\sum_{i=1}^{\infty}x_ip_i=x_1p_1+x_2p_2+\ldots$$

Un caso aún más complicado

una variable aleatoria continua (infinitos posibles valores) con función de densidad f. Sabemos que $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx=1$ por definición de función de densidad. Entonces la esperanza matemática es igual a

$$\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\,dx$$

en realidad, el concepto que estamos manejando es el de función de distribución F. Cuando dicha función de distribución es diferenciable

$$f(x)=\frac{dF(x)}{dx}$$

con lo cual $dF(x)=f(x)\,dx$ con lo cual en realidad lo que se está midiendo con variaciones pequeñas de la probabilidad.

10.3. Solución de la ecuación funcional vía coeficientes indeterminados para el modelo Brock-Mirman

Para el caso en que $U(c)=\ln c$, $\delta=1$ y $F(k,1)=k^{\alpha}$ $(0<\alpha<1)$, la ecuación funcional es de la forma

$$\upsilon(k,z)=\max_{0\leq k'<e^zk^{\alpha}}\left\{\ln(e^zk^{\alpha}-k')+\beta\int_{z'\in\mathbb{R}}\upsilon(k',z')\,d\tilde{F}(z')\right\}.$$

Se conjetura que $\upsilon(k,z)=\hat{E}+\hat{F}\ln k+\hat{G}z$, con lo cual

$$\hat{E}+\hat{F}\ln k+\hat{G}z=\max_{0\leq k'<e^zk^{\alpha}}\left\{\ln(e^zk^{\alpha}-k')+\beta\int_{z'\in\mathbb{R}}\left(\hat{E}+\hat{F}\ln k'+\hat{G}z'\right)d\tilde{F}(z')\right\}. \tag{10.1}$$

En el lado derecho de la ecuación anterior, la condición de primer orden con respecto a k' es

$$\begin{aligned}
0 &= -\frac{1}{e^z k^\alpha - k'} + \beta \int_{z' \in \mathbb{R}} \left(\hat{F} \frac{1}{k'} \right) d\tilde{F}(z') \\
&= -\frac{1}{e^z k^\alpha - k'} + \beta \frac{\hat{F}}{k'} \underbrace{\int_{z' \in \mathbb{R}} d\tilde{F}(z')}_{=1} \\
&= -\frac{1}{e^z k^\alpha - k'} + \beta \frac{\hat{F}}{k'}
\end{aligned}$$

lo cual implica $k' = \frac{\beta \hat{F}}{1+\beta \hat{F}} e^z k^\alpha$ y $c = \frac{1}{1+\beta \hat{F}} e^z k^\alpha$. Reemplazando los resultados anteriores en (10.1) obtenemos

$$\begin{aligned}
\hat{E} + \hat{F} \ln k + \hat{G} z &= \ln \left(\frac{1}{1+\beta \hat{F}} e^z k^\alpha \right) + \beta \int_{z' \in \mathbb{R}} \left[\hat{E} + \hat{F} \ln \left(\frac{\beta \hat{F}}{1+\beta \hat{F}} e^z k^\alpha \right) + \hat{G} z' \right] d\tilde{F}(z') \\
&= \ln \left(\frac{1}{1+\beta \hat{F}} e^z k^\alpha \right) \\
&\quad + \beta \left[\hat{E} \underbrace{\int_{z' \in \mathbb{R}} d\tilde{F}(z')}_{=1} + \hat{F} \ln \left(\frac{\beta \hat{F}}{1+\beta \hat{F}} e^z k^\alpha \right) \underbrace{\int_{z' \in \mathbb{R}} d\tilde{F}(z')}_{=1} + \hat{G} \int_{z' \in \mathbb{R}} z' d\tilde{F}(z') \right] \\
&= \beta \hat{E} + \beta \hat{F} \ln \left(\frac{\beta \hat{F}}{1+\beta \hat{F}} \right) + \ln \left(\frac{1}{1+\beta \hat{F}} \right) + \beta \hat{G} \int_{z' \in \mathbb{R}} z' d\tilde{F}(z') \\
&\quad + \left(1 + \beta \hat{F} \right) \alpha \ln k + \left(1 + \beta \hat{F} \right) z.
\end{aligned}$$

Resolviendo para los coeficientes E, F y G se concluye que

$$\begin{aligned}
\hat{E} &= \frac{1}{1-\beta} \left\{ \ln(1-\alpha\beta) + \frac{\alpha\beta}{1-\alpha\beta} \ln(\alpha\beta) + \frac{\beta}{1-\alpha\beta} \int_{z' \in \mathbb{R}} z' d\tilde{F}(z') \right\}, \\
\hat{F} &= \frac{\alpha}{1-\alpha\beta} \text{ y} \\
\hat{G} &= \frac{1}{1-\alpha\beta},
\end{aligned}$$

con lo cual la función valor es

$$v(k,z) = \frac{1}{1-\beta} \left\{ \ln(1-\alpha\beta) + \frac{\alpha\beta}{1-\alpha\beta} \ln(\alpha\beta) + \frac{\beta}{1-\alpha\beta} \int_{z' \in \mathbb{R}} z' d\tilde{F}(z') \right\} + \frac{\alpha}{1-\alpha\beta} \ln k + \frac{1}{1-\alpha\beta} z$$

y la regla de política viene dada por $k' = \alpha\beta e^z k^\alpha$ y $c = (1-\alpha\beta) e^z k^\alpha$.