

Macro, Money and Finance: A Continuous-Time Approach

Problem Set



Código: 70402830
Profesor: Fernando Mendo

1. Consider an infinitely-lived household with logarithmic preferences over consumption $\{c_t\}_{t \geq 0}$,

$$U_0 = \mathbb{E} \left[\int_0^\infty e^{-\rho t} \log(c_t) dt \right] \quad (1)$$

The household has initial wealth $n_0 > 0$ and does not receive any endowment or labor income. Wealth can be invested into two assets:

- A risk-free bond with (instantaneous) return $r^b dt$.
- A risky stock with return $r^s dt + \sigma dZ_t$, where Z_t is a Brownian motion.

Here, r^b , r^s , and σ are constant parameters.

The household's net worth evolution is given by:

$$dn_t = -c_t dt + n_t [(1 - \theta_t^s) r^b dt + \theta_t^s (r^s dt + \sigma dZ_t)] \quad (2)$$

where θ_t^s denotes the fraction of wealth invested into the stock. The household chooses consumption $\{c_t\}_{t \geq 0}$ and portfolio shares $\{\theta_t^s\}_{t \geq 0}$ to maximize utility U_0 subject to the net worth evolution and a solvency constraint $n_t \geq 0$.

- (a) In this part, you will solve the consumption-portfolio choice problem using the Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) equation. The state space of this decision problem is one-dimensional with state variable n_t , so you can denote the household's value function by $V(n)$.

- i. Write down the (deterministic) HJB equation for the value function $V(n)$.

La ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) está dada por:

$$\rho V(n) = \max_c \left\{ \log(c) + \frac{\mathbb{E}[V(n)]}{dt} \right\}$$

Resolvemos primero la derivada temporal esperada:

$$\frac{E[V(n)]}{dt} = \frac{V_n dn + \frac{1}{2} V_{nn} (dn)^2}{dt}$$

$$V_n dn = V_n ((-c + n[(1 - \theta^s) r^b + r^s \theta^s]) dt + n \sigma \theta^s dZ)$$

Y el término cuadrático:

$$V_{nn} (dn)^2 = V_{nn} (n \sigma \theta^s)^2 dt$$

Combinando todo,

$$\frac{E[V(n)]}{dt} = \frac{V_n (-c + n[(1 - \theta^s) r^b + r^s \theta^s]) dt + \frac{1}{2} V_{nn} (n \sigma \theta^s)^2 dt}{dt}$$

Simplificando:

$$\frac{E[V(n)]}{dt} = V_n (-c + n[(1 - \theta^s) r^b + r^s \theta^s]) + \frac{1}{2} V_{nn} (n \sigma \theta^s)^2$$

Finalmente, resolviendo para $V(n)$:

$$\boxed{\rho V(n) = \log(c) + V_n (-c + n[(1 - \theta^s) r^b + r^s \theta^s]) + \frac{1}{2} V_{nn} (n \sigma \theta^s)^2}$$

- ii. Take first-order conditions with respect to all choice variables.

Me doy cuenta de que una parte de la ecuación contiene la variable c y otra parte contiene θ^s . Dado que en ninguna sección de la ecuación aparecen ambas simultáneamente, puedo reordenarla de la siguiente manera:

$$\rho V(n) = \max_c \{ \log(c) - V_n c \} + \max_{\theta^s} \left\{ V_n n ((1 - \theta^s) r^b + r^s \theta^s) + \frac{1}{2} V_{nn} (n \sigma \theta^s)^2 \right\}$$

Condición de Primer Orden del Consumo:

Para c , tenemos:

$$\frac{\partial \rho V(n)}{\partial c} = \frac{1}{c} - V_n = 0$$

De donde se obtiene:

$$\frac{1}{c} = V_n \Rightarrow c = \frac{1}{V_n}$$

Condición de Primer orden de θ^s

La ecuación de primer orden con respecto a θ^s es:

$$\frac{\partial \rho V(n)}{\partial \theta^s} = V_n(-nr^b + r^s n) + V_{nn}(n\sigma)^s \theta^s = 0$$

Despejando θ^s :

$$\theta^s = \frac{nr^b - r^s n^s}{(n\sigma)^2} \frac{V_n}{V_{nn}}$$

- iii. Assume optimal consumption is proportional to net worth, $c(n) = an$, with some constant $a > 0$ (to be determined below). Use the first-order condition for consumption derived in part (b) to turn this into a guess for the value function $V(n)$. *Hint: Don't forget to add an integration constant (call it b) when moving from $V'(n)$ to $V(n)$; $V(n)$ is the sum of two terms.*

De la CPO de c encontrada anteriormente tenemos que :

$$\frac{1}{c} = V_n$$

Despejando:

$$c = \frac{1}{V_n}$$

Para la función de valor $V(n)$, integramos V_n y asumimos el guess que nos pide $c = an$:

$$V = \int V_n dn = \int \frac{1}{an} dn$$

Resolviendo la integral:

$$V(n) = \frac{1}{a} \log(n) + b$$

donde b es una constante de integración.

- iv. Use your guess for $V(n)$ to simplify the first-order condition for θ_t^s and solve the resulting equation for θ_t^s .

De la ecuación de la CPO de θ^s tenemos que:

$$\theta^s = \frac{nr^b - r^s n^s}{(n\sigma)^2} \frac{V_n}{V_{nn}}$$

Usamos las derivadas de $V(n) = \frac{1}{a} \log(n) + b$:

$$V_n = \frac{1}{an}, \quad V_{nn} = \frac{-1}{an^2}$$

Sustituyendo en la ecuación de la CPO:

$$\theta^s = \frac{n(r^b - r^s)}{(n\sigma)^2} \left(\frac{V_n}{V_{nn}} \right)$$

Reemplazando V_n y V_{nn} :

$$\theta^s = \frac{n(r^b - r^s)}{(n\sigma)^2} \left(\frac{\frac{1}{an}}{\frac{-1}{an^2}} \right)$$

Simplificando:

$$\theta^s = \frac{(r^s - r^b)}{\sigma^2}$$

- v. Substitute the optimal choices and the guess for $V(n)$ into the HJB equation to eliminate $V(n)$, $V'(n)$, $V''(n)$, c , θ^s and the max operator.

Hago los reemplazos solicitados en $V(n)$, $V'(n)$, $V''(n)$ y c

$$\rho \left(\frac{1}{a} \log(n) + b \right) = \log(an) - \frac{an}{an} + \frac{1}{an} n [(1 - \theta^s)r^b + r^s\theta^s] - \frac{1}{2an^2} (n\sigma\theta^s)^2$$

Expandiendo términos:

$$\rho \left(\frac{1}{a} \log(n) + b \right) = \log(a) + \log(n) - 1 + \frac{1}{a} [(r^s - r^b)\theta^s] - \frac{1}{2an^2} (n\sigma\theta^s)^2 + \frac{r^b}{a}$$

Recordemos que:

$$\theta^s = \frac{(r^s - r^b)}{\sigma^2}$$

Sustituyendo θ^s :

$$\rho \left(\frac{1}{a} \log(n) + b \right) = \log(a) + \log(n) - 1 + \frac{1}{a} \left[(r^s - r^b) \frac{(r^s - r^b)}{\sigma^2} \right] - \frac{1}{2a} \left(\sigma \frac{(r^s - r^b)}{\sigma^2} \right)^2 + \frac{r^b}{a}$$

Finalmente, despejando ρb :

$$\rho b = \log a + \log n \left(n - \frac{\rho}{a} \right) - 1 + \frac{1}{2a} \frac{(r^b - r^s)^2}{\sigma^2} + \frac{r^b}{a}$$

- vi. The resulting equation in step (e) has to hold for all $n > 0$ (if it does not, the previous guess was incorrect). Show that this is indeed possible if we choose a and b appropriately. What are the required values for a and b ?

Para eliminar la dependencia en n , necesitamos que:

$$\log(n) \cdot \left(1 - \frac{\rho}{a} \right) = 0$$

De donde se sigue que:

$$1 - \frac{\rho}{a} = 0$$

Despejando a :

$$a = \rho$$

Ahora, Para hallar b hacemos el remplazo de $a = \rho$, tenemos la ecuación:

$$\rho b = \log(\rho) - 1 + \frac{1}{2\rho} \frac{(r^b - r^s)^2}{\sigma^2} + \frac{r^b}{\rho}$$

Despejamos b :

$$b = \frac{1}{\rho} \left(\log(\rho) - 1 + \frac{1}{2\rho} \frac{(r^b - r^s)^2}{\sigma^2} + \frac{r^b}{\rho} \right)$$

- (b) Now consider the same decision problem as before but approach it with the stochastic maximum principle instead of the HJB equation.

- i. Denote by ξ_t the costate for net worth n_t and by σ_t^ξ its (arithmetic) volatility loading (that is $d\xi_t = \mu_t^\xi dt + \sigma_t^\xi dZ_t$ with some drift μ_t^ξ). Write down the Hamiltonian of the problem.

Planteamos la forma del Hamiltoniano

$$H = e^{-\rho t} \ln u(c) + n\xi_t \mu^n + \text{tr}((\sigma_\xi)^T \sigma^n)$$

Recordar

$$dn = n \left(\frac{-c}{n} + [(1 - \theta^s)r^b + r^s\theta^s] \right) dt + n\sigma\theta^s dZ$$

Definiendo μ^n y σ^n :

$$\mu^n = \left(\frac{-c}{n} + [(1 - \theta^s)r^b + r^s\theta^s] \right)$$

$$\sigma^n = \sigma\theta^s$$

Entonces, la ecuación diferencial se puede reescribir como:

$$dn = n\mu^n dt + n\sigma^n dZ$$

En base a eso podemos definir la Hamiltoniana:

$$H = e^{-\rho t} \ln u(c) + n\xi_t \left(\frac{-c}{n} + [(1 - \theta^s)r^b + r^s\theta^s] \right) + \text{tr}((\sigma^\xi)^T \sigma\theta^s n)$$

- ii. The choice variables have to maximize the Hamiltonian at all times. Take the first-order conditions in this maximization problem.

Calculamos la CPO de c :

$$\frac{\partial H}{\partial c} = -\xi_t + \frac{e^{\rho t}}{c} = 0$$

De aquí, despejamos c :

$$c = \frac{e^{-\rho t}}{\xi_t}$$

Calculamos la CPO θ^s :

$$\frac{\partial H}{\partial \theta^s} = n\xi_t(-r^b + r^s) + ((\sigma^\xi)^T n\sigma) = 0$$

$$(r^s - r^b) = -\frac{((\sigma^\xi)\sigma)}{\xi_t}$$

- iii. Let's again make the guess $c_t = an_t$ with an unknown constant $a > 0$. Use the first-order condition for consumption derived in part (b) to turn this into a guess for the costate ξ_t . Also determine the implied costate volatility σ_t^ξ .

Partimos de la condición óptima para c^* :

$$c^* = \frac{e^{-\rho t}}{\xi_t}$$

Dado nuestro guess $c = an$, igualamos ambas expresiones:

$$an = \frac{e^{-\rho t}}{\xi_t}$$

Despejamos ξ_t :

$$\xi_t = \frac{e^{-\rho t}}{an}$$

Partimos de la ecuación diferencial para ξ_t :

$$d\xi_t = \mu^\xi dt + \sigma^\xi dZ$$

Sustituyendo $\xi_t = \frac{e^{-\rho t}}{an}$, obtenemos:

$$d\xi_t = -\frac{\rho e^{-\rho t}}{an} dt + \frac{e^{-\rho t}}{an^3} (dn)^2 - \frac{e^{-\rho t}}{an^2} dn$$

Recordando que:

$$dn = n \left(r^b(1 - \theta^s) + r^s \theta^s - \frac{c}{n} \right) dt + n\sigma\theta^s dZ$$

Al elevar al cuadrado dn :

$$(dn)^2 = n^2(\sigma\theta^s)^2 dZ^2$$

Dado que $dZ^2 = dt$, sustituimos:

$$(dn)^2 = n^2(\sigma\theta^s)^2 dt$$

Nos enfocamos en el termino estocástico de ξ , denotada como σ^ξ . Sabemos que el término estocástico proviene de la dinámica de dn :

$$dn^Z = n\sigma\theta^s dZ$$

Partimos de la ecuación diferencial de ξ_t :

$$d\xi_t = -\frac{\rho e^{-\rho t}}{an} dt + \frac{e^{-\rho t}}{an^3} (dn)^2 - \frac{e^{-\rho t}}{an^2} dn$$

Observamos que, por las reglas de multiplicación de procesos estocásticos, el único término que contribuye a la volatilidad es dn , ya que los demás términos son deterministas. Así, obtenemos que:

$$\sigma^\xi = -\frac{e^{-\rho t}}{an^2} dn^Z$$

Sustituyendo $dn^Z = n\sigma\theta^s dZ$, llegamos a:

$$\sigma^\xi = \frac{-e^{-\rho t}}{an} \sigma\theta^s$$

Finalmente, usando la definición de ξ_t , expresamos la volatilidad de ξ de manera compacta:

$$\boxed{\sigma^\xi = -\xi_t \sigma\theta^s}$$

- iv. Determine the optimal solution for θ_t^s .
Usando la CPO de θ^s

$$(r^s - r^b) = -\frac{((\sigma^\xi)\sigma)}{\xi_t}$$

$$(r^s - r^b) = \frac{((\xi_t \sigma\theta^s)\sigma)}{\xi_t}$$

Con esto encuentro la solución óptima para θ^s

$$\boxed{\frac{(r^s - r^b)}{\sigma^2} = \theta^s}$$

- v. Write down the costate equation for ξ_t and substitute in your guess for c_t , the implied guesses for ξ_t and σ_t^ξ , and the implied optimal solution for θ_t^s . Show that the costate equation is indeed satisfied (and hence the guess was correct) if you choose a suitably. Which value(s) for a work?

Ecuación de coestado:

$$d\xi_t = \mu^\xi dt + \sigma^\xi dZ$$

Sustituyendo su expresión:

$$d\xi_t = -\frac{\rho e^{-\rho t}}{an} dt + \frac{e^{-\rho t}}{an^3} (dn)^2 - \frac{e^{-\rho t}}{an^2} dn$$

Recordamos que:

$$dn = n \left(r^b(1 - \theta^s) + r^s \theta^s - \frac{c}{n} \right) dt + n \sigma \theta^s dZ$$

Elevando al cuadrado:

$$(dn)^2 = n^2 (\sigma \theta^s)^2 dt$$

Sustituyendo en la ecuación de $d\xi_t$:

$$d\xi_t = -\frac{\rho e^{-\rho t}}{an} dt + \frac{e^{-\rho t}}{an} (\sigma \theta^s)^2 dt - \frac{e^{-\rho t}}{an} \left(\left(r^b(1 - \theta^s) + r^s \theta^s - \frac{c}{n} \right) dt + \sigma \theta^s dZ \right)$$

Recordamos que:

$$\mu^\xi = \frac{e^{-\rho t}}{an} \left(\rho + ((\sigma \theta^s)^2 + r^b(1 - \theta^s) + r^s \theta^s - \frac{c}{n}) \right)$$

Y utilizando la solución óptima de c y θ^s :

$$c = an, \quad \theta^s = \frac{r^s - r^b}{\sigma^2}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación final de μ^ξ :

$$\mu^\xi = -\frac{e^{-\rho t}}{an} \left(\rho + \left(\frac{r^s - r^b}{\sigma} \right)^2 + r^b + \frac{(r^s - r^b)^2}{\sigma^2} - a \right)$$

Simplificamos:

$$\boxed{\mu^\xi = -\frac{e^{-\rho t}}{an} (\rho + r^b - a)}$$

Ahora para verificar que sea satisfecha debo encontrar que la relación esperada con la derivada del Hamiltoniano $\mu^\xi = -H_n^n$

Calculo de H_n^n

Dado que:

$$\xi_t = \frac{e^{-\rho t}}{an}$$

La función Hamiltoniana es:

$$H = e^{-\rho t} \ln u(c) + n \xi_t \left(\frac{-c}{n} + [(1 - \theta^s)r^b + r^s \theta^s] \right) + \text{tr}((\sigma^\xi)^T \sigma \theta^s n)$$

Calculamos H_n^n :

$$H_n^n = -r^b \theta^s \xi_t + r^b \xi_t + r^s \theta^s \xi_t + \sigma (-\xi_t \sigma \theta^s) \theta^s$$

Sustituyendo $\xi_t = \frac{e^{-\rho t}}{an}$ en **todas** las instancias:

$$H_n^n = -r^b \theta^s \frac{e^{-\rho t}}{an} + r^b \frac{e^{-\rho t}}{an} + r^s \theta^s \frac{e^{-\rho t}}{an} + \sigma \left(-\frac{e^{-\rho t}}{an} \sigma \theta^s \right) \theta^s$$

Factorizamos $\frac{e^{-\rho t}}{an}$:

$$H_n^n = \frac{e^{-\rho t}}{an} (-r^b \theta^s + r^b + r^s \theta^s - \sigma^2 \theta^s \theta^s)$$

Sustituyendo $\theta^s = \frac{r^s - r^b}{\sigma^2}$:

$$H_n^n = \frac{e^{-\rho t}}{an} \left(r^b + (r^s - r^b) \frac{r^s - r^b}{\sigma^2} - (r^s - r^b) \sigma^2 \left(\frac{r^s - r^b}{\sigma^2} \right)^2 \right)$$

$$H_n^n = \frac{e^{-\rho t}}{an} \left(r^b + \frac{(r^s - r^b)^2}{\sigma^2} - \frac{(r^s - r^b)^2}{\sigma^2} \right)$$

$$H_n^n = \frac{e^{-\rho t}}{an} r^b$$

Por lo tanto, la expresión final es:

$$\boxed{H_n^n = \frac{e^{-\rho t} r^b}{an}}$$

Comparativa $\mu^\xi = -H_n^n$

$$\mu^\xi = -H_n^n$$

Tengo

$$\mu^\xi = -\frac{e^{-\rho t}}{an} (\rho + r^b - a)$$

$$H_n^n = \frac{e^{-\rho t} r^b}{an}$$

Entonces

$$-\frac{e^{-\rho t}}{an} (\rho + r^b - a) = -\frac{e^{-\rho t} r^b}{an}$$

Para que esta relación se cumpla necesito

$$\boxed{\rho = a}$$

- vi. Verify that the optimal solution coincides with the one you obtained from the HJB approach. Also show that $\xi_t = e^{-\rho t} V'(n_t)$, where V is the value function determined previously.

Ambos problemas son equivalentes

En ambos problemas, tenemos que el equilibrio de c y θ^s está dado por:

$$c = n\rho \quad (\rho = a)$$

$$\theta^s = \frac{(r^s - r^b)}{\sigma^2}$$

Dado que estos resultados son idénticos, podemos asumir que ambos problemas llevan a la misma conclusión.

Demostración de que $\xi_t = e^{-\rho t} V'(n_t)$

Después de resolver el problema, encontramos que el coestado está dado por:

$$\xi_t = \frac{e^{-\rho t}}{an}$$

Recordemos que la derivada de la función valor $V(n_t)$, encontrada en el inciso (a), es:

$$V'(n_t) = \frac{1}{c}$$

En equilibrio, sabemos que $c = an$, por lo que:

$$V'(n_t) = \frac{1}{c} = \frac{1}{an}$$

De esta manera, se cumple la relación:

$$\xi_t = e^{-\rho t} V'(n_t) = \frac{e^{-\rho t}}{an}$$

2. In this exercise, you will solve BruSan (2014) numerically, under the assumption of log utility. Our goal is to construct functions $q(\eta)$, $\iota(\eta)$, $\kappa(\eta)$ and $\sigma^q(\eta)$ on the $[0, 1]$ grid. Slides 133-135 describe the set of equations and the algorithm. The parameter values are:

$$\rho_e = 0.06, \quad \rho_h = 0.05, \quad a_e = 0.11, \quad a_h = 0.03, \quad \delta = 0.05, \quad \phi = 10, \quad \alpha = 0.5, \quad \sigma = 0.1$$

where $\Phi(\iota) = (1/\phi) \log(1 + \phi\iota)$.

- (a) Solve the model at the boundaries: for $\eta = 0$ and $\eta = 1$.

Equaciones necesarias para resolver lo solicitado

Por las condiciones de equilibrio de mercado, se cumple que:

$$\underbrace{\eta x^{k,e}}_{\kappa^e} + \underbrace{(1-\eta)x^{k,h}}_{\kappa^h} = 1$$

Además, se tiene la siguiente ecuación:

$$(a^e - a^h)\kappa^e + a^h = \iota(q) + q[\eta\rho_e + (1-\eta)\rho_h]$$

Junto con las siguientes relaciones:

$$\Phi'(\iota) = \frac{1}{q}$$

$$1 + \phi\iota = q$$

$$\iota = \frac{1}{\phi}q - \frac{1}{\phi}$$

Caso: $\eta = 1$

En este caso, se tiene que:

$$k^e = 1, \quad k^h = 0$$

Lo que implica que:

$$a^e = \frac{1}{\phi}q - \frac{1}{\phi} + q\rho_e$$

Despejando q :

$$q = \frac{1 + a^e\phi}{1 + \rho_e\phi}$$

Caso: $\eta = 0$

En este caso:

$$k^e = 0, \quad k^h = 1$$

Lo que nos lleva a:

$$a^h = \frac{1}{\phi}q - \frac{1}{\phi} + q\rho_h$$

Despejando q :

$$q = \frac{1 + a^h\phi}{1 + \rho_h\phi}$$

- (b) Create a uniform grid for $\eta \in [0.0001, 0.9999]$.
Se realizó en el código de MATLAB `ejercicio2.m`.
- (c) Solve the ODE for $q(\eta)$ assuming $\kappa(0) = 0$ as boundary condition. Stop once you reach $\kappa \geq 1$.
From here on, set $\kappa = 1$, solve for q and σ^q .
Se emplearon las siguientes ecuaciones

$$\iota(q) = \frac{1}{\phi}q - \frac{1}{\phi} \quad (1)$$

$$\kappa^e(q) = \frac{\iota(q) + q(\eta\rho_e + (1-\eta)\rho_h) - a^h}{a^e - a^h} \quad (2)$$

$$0 = \left(\frac{a^e - a^h}{q} - \frac{\kappa^e(q) - \eta}{\eta(1-\eta)} \left(\frac{\sigma}{1 - \left(\frac{\kappa^e(q)}{\eta} - 1 \right) \left(\eta \frac{dq}{d\eta} \frac{1}{q} \right)} \right)^2 \right) \quad (3)$$

recordar que ι viene de

$$\Phi(\iota) = (1/\phi) \log(1 + \phi\iota)$$

$$\Phi'(\iota) = \frac{1}{1 + \phi\iota}.$$

$$\Phi'(\iota) = (q^K)^{-1}$$

$$1 + \phi\iota = (q^K)$$

$$\iota = \frac{1}{\phi}(q^K) - \frac{1}{\phi}$$

Con estas ecuaciones, realizo el código en MATLAB llamado `ejercicio2.m`, en el cual se calcula $q(\eta)$ siguiendo un procedimiento en dos partes.

Se emplea la ecuación (3) para aproximar la derivada de q con respecto a η , utilizando diferencias finitas:

$$q_\eta \approx \frac{q(i) - q(i-1)}{\eta(i) - \eta(i-1)}$$

La simulación comienza con un valor inicial $q(0)$, obtenido en el inciso (a). Además, $\eta(1)$ proviene de la grilla y se define $\eta(0) = 0$. Para continuar, es necesario encontrar un valor $q(1)$ que satisfaga la ecuación (3).

Este procedimiento se repite iterativamente:

- En cada paso, se emplea el valor previamente calculado $q(i-1)$.
- Se determina $q(i)$ de manera que se cumpla la ecuación (3).
- De esta forma, se obtiene la secuencia de valores $q(\eta)$ de manera progresiva.

Este enfoque permite construir $q(\eta)$ a lo largo de la grilla de valores de η .

El proceso continúa hasta que se alcanza la condición $\kappa^e \geq 1$. A partir de este punto, se emplea la ecuación (2) para calcular q , imponiendo la restricción $\kappa^e = 1$.

- (d) Verify your solution by plotting $q(\eta)$ and $\sigma^q(\eta)$. Also plot $\iota(\eta)$, $\kappa(\eta)$.

Se plotó usando las siguientes ecuaciones.

Los valores de q_η y κ^e provienen del problema.

Figure 1: Gráfico de q .

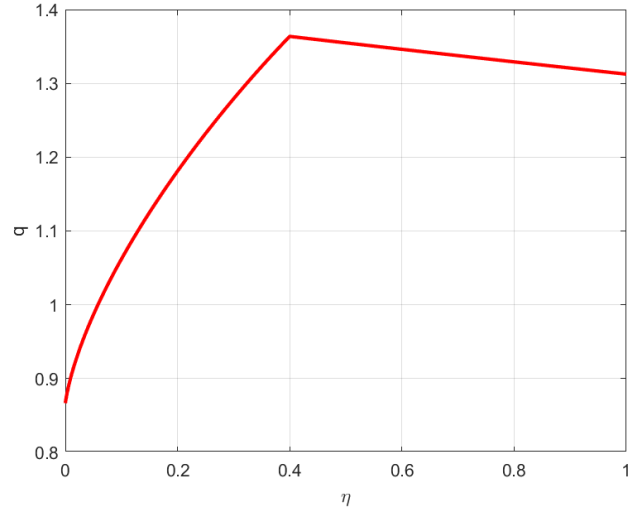
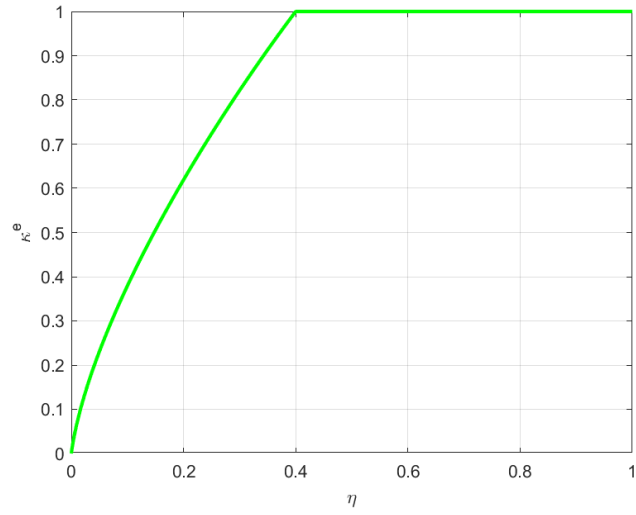


Figure 2: Gráfico de κ^e .



La función ι se define como:

$$\iota = \frac{1}{\phi} q^K - \frac{1}{\phi}$$

Además, se emplea la ecuación:

$$\sigma^q = \left(\frac{\sigma}{1 - \left(\frac{\kappa}{\eta} - 1 \right) \left(\eta \frac{dq}{d\eta} \frac{1}{q} \right)} \right) - \sigma$$

Figure 3: Gráfico de ι .

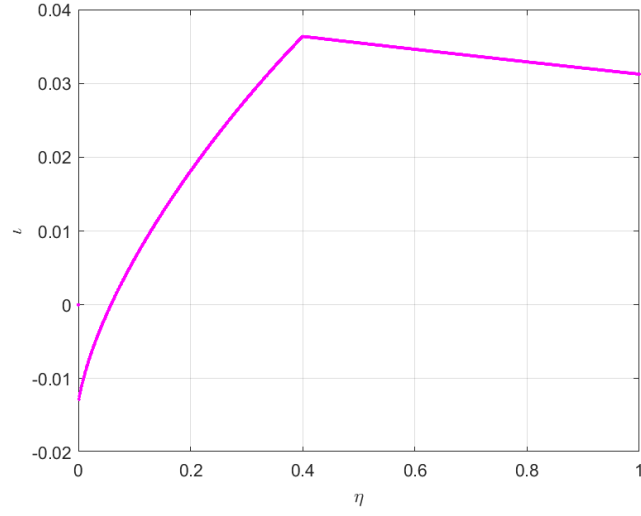
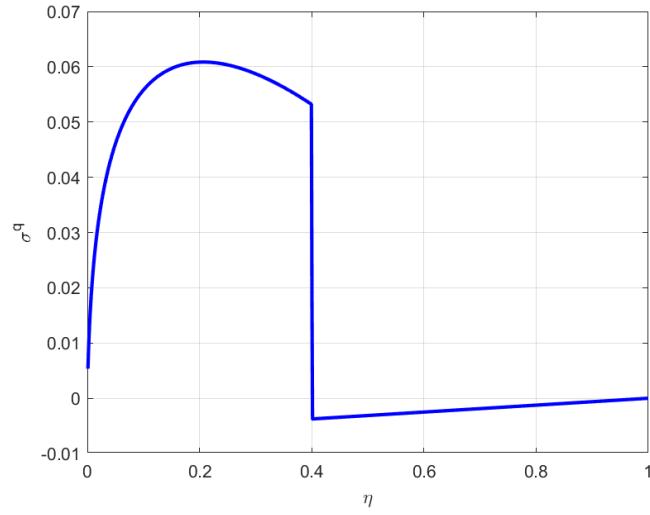


Figure 4: Gráfico de σ^q .



(e) An alternative derivation for the drift and volatility of η in the general case is given by:

$$\mu_t^\eta = (1-\eta_t) \left[(\varsigma_t^e - \sigma - \sigma_t^q)(\sigma_t^\eta + \sigma + \sigma_t^q) - (\varsigma_t^h - \sigma - \sigma_t^q) \left(\frac{-\eta_t}{1-\eta_t} \sigma_t^\eta + \sigma + \sigma_t^q \right) \right] - \left(\frac{C_t^e}{N_t^e} - \frac{C_t^h}{N_t^h} \right) \quad (3)$$

$$\sigma_t^\eta = \frac{\kappa_t - \eta_t}{\eta_t} (\sigma + \sigma_t^q) \quad (4)$$

where ς_e and ς_h are risk prices. Show these expressions are equivalent to the ones derived in the slides (you can assume logarithmic preferences).

Encontramos μ_t^η

Tenemos que de los slides:

$$\eta \mu^\eta = \eta(1-\eta) \left(\mu^{n,e} - \mu^{n,h} + \frac{c_h}{n_h} - \frac{c_e}{n_e} \right) - \eta \sigma_\eta (\eta \sigma^{n,e} + (1-\eta) \sigma^{n,h}) \quad (5)$$

$$\mu^\eta = (1 - \eta) \left(\mu^{n,e} - \mu^{n,h} + \frac{c_h}{n_h} - \frac{c_e}{n_e} \right) - \sigma_\eta (\eta \sigma^{n,e} + (1 - \eta) \sigma^{n,h}) \quad (1)$$

$$\mu^{n,e} = r + \zeta_e \sigma^{n,e} \quad (2)$$

$$\mu^{n,h} = r + \zeta_h \sigma^{n,h} \quad (3)$$

$$\sigma^{n,e} = x_{k,e}(\sigma + \sigma_q) = \frac{\kappa_e}{\eta}(\sigma + \sigma_q) \quad (4)$$

$$\sigma^{n,h} = x_{k,h}(\sigma + \sigma_q) = \frac{1 - \kappa_e}{1 - \eta}(\sigma + \sigma_q) \quad (5)$$

$$\eta \sigma^\eta = (\kappa^e - \eta)(\sigma + \sigma_q) \quad (6)$$

Con esto aplicamos los reemplazos de (3) y (2) en (1)

$$\mu^\eta = (1 - \eta) \left(\left(r + \zeta_e \sigma^{n,e} - r - \zeta_h \sigma^{n,h} + \frac{c_h}{n_h} - \frac{c_e}{n_e} \right) - \frac{\sigma_\eta}{(1 - \eta)} (\eta \sigma^{n,e} + (1 - \eta) \sigma^{n,h}) \right)$$

$$\mu^\eta = (1 - \eta) \left(\left(\zeta_e \sigma^{n,e} - \zeta_h \sigma^{n,h} + \frac{c_h}{n_h} - \frac{c_e}{n_e} \right) - \frac{\sigma_\eta}{(1 - \eta)} (\eta \sigma^{n,e} + (1 - \eta) \sigma^{n,h}) \right)$$

Reordenamos (6)

$$\begin{aligned} \frac{\eta \sigma^\eta}{\sigma + \sigma^q} + \eta &= \kappa^e \\ \frac{\eta \sigma^\eta + \eta(\sigma + \sigma^q)}{\sigma + \sigma^q} &= \kappa^e \end{aligned}$$

Reordenamos (5)

$$\begin{aligned} \sigma^{n,h} &= \frac{1 - \kappa_e}{1 - \eta}(\sigma + \sigma_q) \\ \sigma^{n,h} &= \frac{(\sigma + \sigma_q)}{1 - \eta} - \frac{\kappa_e}{1 - \eta}(\sigma + \sigma_q) \end{aligned}$$

Incorporamos (6) en (5) y (4)

$$\begin{aligned} \sigma^{n,e} &= \frac{1}{\eta}(\sigma + \sigma_q) * \frac{\eta \sigma^\eta + \eta(\sigma + \sigma^q)}{\sigma + \sigma^q} \\ \sigma^{n,h} &= \frac{(\sigma + \sigma_q)}{1 - \eta} - \frac{\eta \sigma^\eta + \eta(\sigma + \sigma^q)}{\sigma + \sigma^q} * \frac{1}{1 - \eta}(\sigma + \sigma_q) \end{aligned}$$

Tenemos para $\sigma^{n,e}$

$$\sigma^{n,e} = \sigma^\eta + (\sigma + \sigma^q)$$

Mientras que para $\sigma^{n,h}$

$$\sigma^{n,h} = \frac{(\sigma + \sigma_q)}{1 - \eta} - \frac{\eta \sigma^\eta + \eta(\sigma + \sigma^q)}{1 - \eta}$$

$$\sigma^{n,h} = \frac{(1-\eta) * (\sigma + \sigma_q) - \eta\sigma^\eta}{1-\eta}$$

$$\sigma^{n,h} = (\sigma + \sigma_q) - \frac{\eta\sigma^\eta}{1-\eta}$$

Utilizo lo desarrollado $\sigma^{n,e}$ y $\sigma^{n,h}$

$$\sigma^{n,h} - \sigma^{n,e} = (\sigma + \sigma_q) - \frac{\eta\sigma^\eta}{1-\eta} - \sigma^\eta - (\sigma + \sigma^q)$$

$$\sigma^{n,h} - \sigma^{n,e} = -\frac{\sigma^\eta}{1-\eta}$$

Reemplazo lo encontrado en μ^η

$$\mu^\eta = (1-\eta)((\zeta_e\sigma^{n,e} - \zeta_h\sigma^{n,h} + \frac{c_h}{n_h} - \frac{c_e}{n_e}) - \frac{\sigma^\eta}{(1-\eta)}(\eta\sigma^{n,e} + (1-\eta)\sigma^{n,h}))$$

$$\mu^\eta = (1-\eta)((\zeta_e\sigma^{n,e} - \zeta_h\sigma^{n,h} + \frac{c_h}{n_h} - \frac{c_e}{n_e}) + (\sigma^{n,h} - \sigma^{n,e})(\eta\sigma^{n,e} + (1-\eta)\sigma^{n,h}))$$

Reemplazo la expresión $(\eta\sigma^{n,e} + (1-\eta)\sigma^{n,h})$ en μ^η con los valores en 4 y 5

$$\mu^\eta = (1-\eta)((\zeta_e\sigma^{n,e} - \zeta_h\sigma^{n,h} + \frac{c_h}{n_h} - \frac{c_e}{n_e}) + (\sigma^{n,h} - \sigma^{n,e})\left(\eta\frac{\kappa_e}{\eta}(\sigma + \sigma_q) + (1-\eta)\frac{1-\kappa_e}{1-\eta}(\sigma + \sigma_q)\right))$$

$$\mu^\eta = (1-\eta)((\zeta_e\sigma^{n,e} - \zeta_h\sigma^{n,h} + \frac{c_h}{n_h} - \frac{c_e}{n_e}) + (\sigma^{n,h} - \sigma^{n,e})((\sigma + \sigma_q)))$$

Reordeno lo que encuentre anteriormente

$$\mu^\eta = (1-\eta)((\zeta_e\sigma^{n,e} - \zeta_h\sigma^{n,h} + \frac{c_h}{n_h} - \frac{c_e}{n_e}) + (\sigma^{n,h} - \sigma^{n,e})((\sigma + \sigma_q)))$$

$$\mu^\eta = (1-\eta)((\zeta_e - (\sigma + \sigma_q))\sigma^{n,e} - (\zeta_h - (\sigma + \sigma_q))\sigma^{n,h} + \frac{c_h}{n_h} - \frac{c_e}{n_e})$$

Reemplazo lo que defini de $\sigma^{n,e}$ y $\sigma^{n,h}$

$$\mu^\eta = (1-\eta)\left[((\zeta_e - (\sigma + \sigma_q))(\sigma^\eta + (\sigma + \sigma^q))) - \left((\zeta_h - (\sigma + \sigma_q))\left(\sigma + \sigma_q - \frac{\eta\sigma^\eta}{1-\eta}\right) - \left(\frac{c_e}{n_e} - \frac{c_h}{n_h}\right) \right) \right]$$

Obtuve la expresión equivalente a lo solicitado en la pregunta

Caso σ^η

Tengo de los slides:

$$\sigma_\eta = \left(\frac{\kappa^e}{\eta} - 1\right) \frac{\sigma}{1 - \left(\frac{\kappa^e}{\eta} - 1\right) \frac{\eta q_\eta}{q}} \quad (1)$$

$$\sigma + \sigma^q = \frac{\sigma}{1 - \left(\frac{\kappa^e}{\eta} - 1\right) \frac{\eta q_\eta}{q}} \quad (2)$$

Reemplazando (2) en (1):

$$\sigma_\eta = \left(\frac{\kappa^e}{\eta} - 1\right) (\sigma + \sigma^q) \quad (6)$$

Reordenando:

$$\sigma_\eta = \left(\frac{\kappa^e - 1}{\eta} \right) (\sigma + \sigma_q)$$

Obteniendo así una expresión equivalente a la solicitada en la pregunta.

(f) Plot $\eta\mu_\eta(\eta)$ and $\eta\sigma_\eta(\eta)$. Tenemos que

$$\eta\mu_\eta = \eta(1 - \eta)(\rho_h - \rho_e) + (k^e - 2\eta k^e + \eta^2) \frac{k^e - \eta}{\eta(1 - \eta)} (\sigma + \sigma_q)^2$$

$$\eta\sigma_\eta = (k^e - \eta)(\sigma + \sigma_q)$$

Figure 5: Gráfico de $\eta\mu_\eta$.

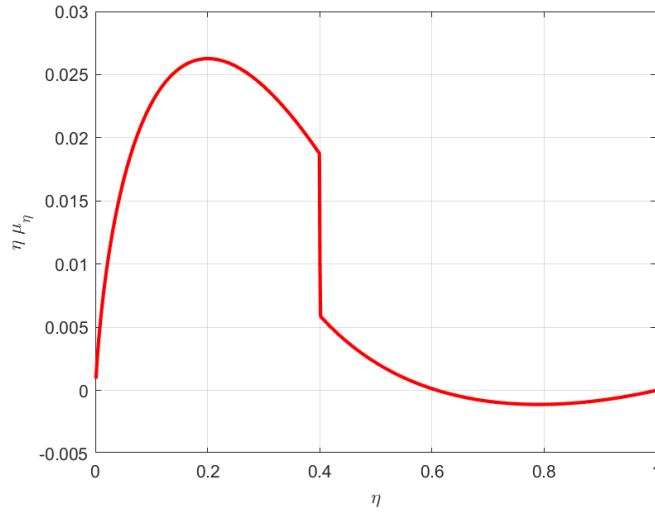
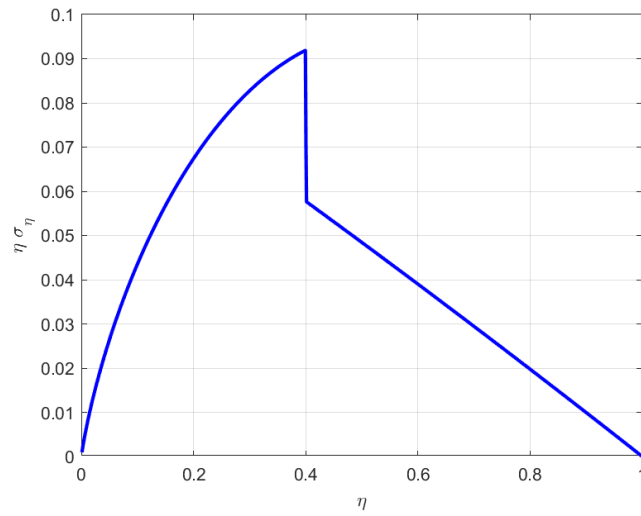


Figure 6: Gráfico de $\eta\sigma_\eta$.



(g) Plot $r(\eta)$. Note that you will need to approximate a second order derivative.

De los slides tengo que Condición del portafolio optimo

$$\mu_q + \Phi(\iota(q)) + \sigma\sigma_q + \frac{\kappa^e a_e + (1 - \kappa^e) a_h}{q} - r = \left(\frac{(\kappa^e)^2}{\eta} + \frac{(1 - \kappa^e)^2}{1 - \eta} \right) (\sigma + \sigma_q)^2$$

Además

$$q\mu^q = q_\eta\mu_\eta + \frac{1}{2}q_{\eta\eta}(\eta\sigma^\eta)^2$$

$$\mu^q = \frac{q_\eta}{q}\mu_\eta + \frac{1}{2q}q_{\eta\eta}(\eta\sigma^\eta)^2$$

Sustituyo

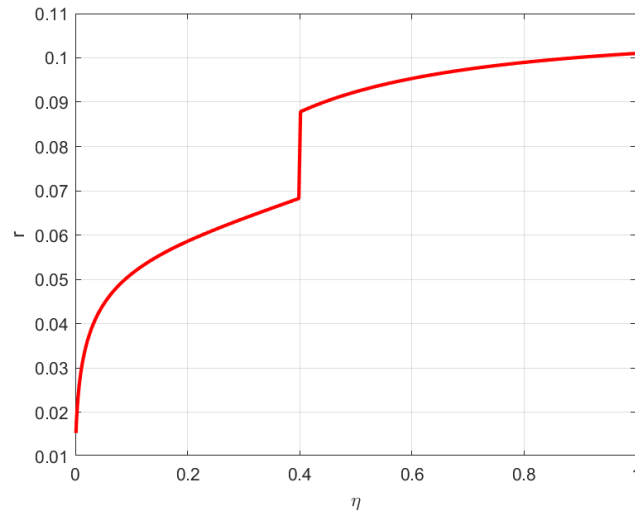
$$\frac{q_\eta}{q}\mu_\eta + \frac{1}{2q}q_{\eta\eta}(\eta\sigma^\eta)^2 + \Phi(\iota(q)) + \sigma\sigma_q + \frac{\kappa^e a_e + (1 - \kappa^e) a_h}{q} - r = \left(\frac{(\kappa^e)^2}{\eta} + \frac{(1 - \kappa^e)^2}{1 - \eta} \right) (\sigma + \sigma_q)^2$$

Reordeno

$$r = \frac{q_\eta}{q}\mu_\eta + \frac{1}{2q}q_{\eta\eta}(\eta\sigma^\eta)^2 + \Phi(\iota(q)) + \sigma\sigma_q + \frac{\kappa^e a_e + (1 - \kappa^e) a_h}{q} - \left(\frac{(\kappa^e)^2}{\eta} + \frac{(1 - \kappa^e)^2}{1 - \eta} \right) (\sigma + \sigma_q)^2$$

Con esta expresión programo y se encuentra en el codigo ejercicio2.m

Figure 7: Gráfico de r .



3. Consider the first monetary model studied in class with log utility and without government policy ($\mu_B = i = \sigma_B = G = \tau = 0$). There can still be a constant supply of bonds $B_t \neq 0$. In this problem, we add stochastic volatility to the model. Suppose idiosyncratic risk $\tilde{\sigma}$ evolves according to the exogenous stochastic process

$$d\tilde{\sigma}_t = b(\tilde{\sigma}_{ss} - \tilde{\sigma}_t)dt + \nu\sqrt{\tilde{\sigma}_t}dZ_t \quad (7)$$

where $\tilde{\sigma}_{ss}$, b , and ν are constants.

- (a) Use goods market clearing and optimal investment to express q_K , q_B , and ι in terms of

$$\vartheta := \frac{q_B}{q_B + q_K}.$$

A partir de lo encontrado en la 3b Tenemos condiciones de Primer Orden (CPO):

Para c :

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{\rho n} \Rightarrow c = \rho n$$

Para ι :

$$\Phi'(\iota) = (q^K)^{-1}$$

Además tengo las market clearing conditions

- **Bienes**

$$a - \iota = (q_t^B + q_t^K) \frac{c_t}{n_t}$$

- **Capital**

$$x^k = \frac{q_t^K}{q_t^K + q_t^B}$$

recordar que

$$\Phi(\iota) = (1/\phi) \log(1 + \phi\iota)$$

$$\Phi'(\iota) = \frac{1}{1 + \phi\iota}.$$

$$\Phi'(\iota) = (q^K)^{-1}$$

$$1 + \phi\iota = (q^K)$$

$$\iota = \frac{1}{\phi}(q^K) - \frac{1}{\phi}$$

Recordar que

$$c = \rho n$$

Reemplazar esto en el market clearing condition

$$a - \iota = (q_t^B + q_t^K) \rho$$

$$a - \frac{1}{\phi}(q^K) + \frac{1}{\phi} = (q_t^B + q_t^K) \rho$$

Hallar q^K

$$a - \frac{1}{\phi}q^K + \frac{1}{\phi} = (q_t^B + q_t^K) \rho \frac{q_t^K}{q_t^K},$$

$$a - \frac{1}{\phi}q^K + \frac{1}{\phi} = (q_t^B + q_t^K) \rho,$$

$$a\phi - q^K + 1 = \phi (q_t^B + q_t^K) \rho,$$

$$a\phi - q^K + 1 = \phi \left(\frac{1}{1 - \vartheta} \right) \rho q_t^K,$$

$$a\phi + 1 = (\phi \left(\frac{1}{1 - \vartheta} \right) \rho + 1) q_t^K.$$

Finalmente, despejamos q_t^K :

$$q_t^K = (1 - \vartheta) \frac{a\phi + 1}{\phi\rho + 1 - \vartheta}.$$

Hallar q_t^B

$$a - \frac{1}{\phi} q_t^K + \frac{1}{\phi} = (q_t^B + q_t^K) \rho,$$

$$q_t^B = \frac{1}{\rho} \left(a + \frac{1}{\phi} - \left(\frac{1}{\phi} + \rho \right) q_t^K \right),$$

$$q_t^B = \frac{1}{\rho} \left(a + \frac{1}{\phi} - \left(\frac{1}{\phi} + \rho \right) (1 - \vartheta) \frac{a\phi + 1}{\phi\rho + 1 - \vartheta} \right),$$

$$q_t^B = \frac{1}{\rho} \left(\frac{a\phi + 1}{\phi} - \frac{1}{\phi} (1 - \vartheta) \frac{(a\phi + 1)(1 + \phi\rho)}{\phi\rho + 1 - \vartheta} \right),$$

$$q_t^B = \frac{1}{\rho} \left(\frac{a\phi + 1}{\phi} \left[1 - \frac{(1 - \vartheta)(1 + \phi\rho)}{\phi\rho + 1 - \vartheta} \right] \right),$$

$$q_t^B = \frac{1}{\rho} \left(\frac{a\phi + 1}{\phi} \cdot \frac{\vartheta\phi\rho}{\phi\rho + 1 - \vartheta} \right).$$

Finalmente, simplificamos:

$$q_t^B = \frac{\vartheta(a\phi + 1)}{\phi\rho + 1 - \vartheta}.$$

Hallar ι

$$\iota = \frac{1}{\phi} q^K - \frac{1}{\phi},$$

$$\iota = \frac{1}{\phi} \left((1 - \vartheta) \frac{a\phi + 1}{\phi\rho + 1 - \vartheta} \right) - \frac{1}{\phi},$$

$$\iota = \frac{(1 - \vartheta)(a\phi + 1)}{\phi(\phi\rho + 1 - \vartheta)} - \frac{1}{\phi},$$

$$\iota = \frac{(1 - \vartheta)(a\phi + 1) - (\phi\rho + 1 - \vartheta)}{\phi(\phi\rho + 1 - \vartheta)},$$

$$\iota = \frac{a\phi(1 - \vartheta) + (1 - \vartheta) - \phi\rho - 1 + \vartheta}{\phi(\phi\rho + 1 - \vartheta)},$$

$$\iota = \frac{a(1 - \vartheta) - \rho}{(1 - \vartheta) + \rho}.$$

Finalmente, el valor de ι es:

$$\iota = \frac{a(1 - \vartheta) - \rho}{(1 - \vartheta) + \rho}.$$

- (b) Derive the “money valuation equation”, i.e., an expression of the form $\mu_{\vartheta t} = f(\vartheta_t, \tilde{\sigma}_t)$ (drift of ϑ) where f only depends on parameters of the model.

Feel free to use the following suggestion or an alternative procedure:

- (a) Postulate a Geometric Brownian motion for ϑ , q_B , and q_K .
- (b) Use the definition of ϑ to find the law of motion $d\vartheta_t$ using Itô's Lemma.
- (c) Use the martingale pricing condition to simplify the expression for $\mu_{\vartheta t}$:

$$\mathbb{E} \left[\frac{dr_t^{K,i}}{dt} \right] - \mathbb{E} \left[\frac{dr_t^B}{dt} \right] = \zeta_t \left(\sigma_t^{K,i} - \sigma_t^B \right) + \tilde{\zeta}_t \left(\tilde{\sigma}_t^{K,i} - \tilde{\sigma}_t^B \right) \quad (8)$$

where ζ is the price of risk.

- (d) Find the price of risk and replace it in the expression for $\mu_{\vartheta t}$.

Cálculo de ϑ

Partimos de la ecuación:

$$\vartheta = \frac{q_B}{q_B + q_K}$$

Las derivadas parciales son:

$$\vartheta_{q_B} = \frac{q_K}{(q_B + q_K)^2}$$

$$\vartheta_{q_K} = -\frac{q_B}{(q_B + q_K)^2}$$

Las segundas derivadas parciales son:

$$\vartheta_{q_B q_B} = -\frac{2q_K}{(q_B + q_K)^3}$$

$$\vartheta_{q_K q_K} = \frac{2q_B}{(q_B + q_K)^3}$$

$$\vartheta_{q_B q_K} = \frac{q_B - q_K}{(q_B + q_K)^3}$$

Dado un proceso estocástico q_t , aplicamos el Lema de Itô para calcular la diferencial de ϑ :

$$d\vartheta = \vartheta_{q_B} dq_B + \vartheta_{q_K} dq_K + \frac{1}{2} \left(\vartheta_{q_B q_B} (dq_B)^2 + 2\vartheta_{q_B q_K} dq_B dq_K + \vartheta_{q_K q_K} (dq_K)^2 \right)$$

Sabemos que:

$$dq_B = q_B \mu^{q_B} dt + q_B \sigma^{q_B} dZ$$

$$dq_K = q_K \mu^{q_K} dt + q_K \sigma^{q_K} dZ$$

Sustituyendo en la ecuación de $d\vartheta$:

$$\begin{aligned} d\vartheta &= \vartheta_{q_B} (q_B \mu^{q_B} dt + q_B \sigma^{q_B} dZ) + \vartheta_{q_K} (q_K \mu^{q_K} dt + q_K \sigma^{q_K} dZ) \\ &+ \frac{1}{2} \left(\vartheta_{q_B q_B} (q_B \sigma^{q_B} dZ)^2 + 2\vartheta_{q_B q_K} (q_B \sigma^{q_B} dZ)(q_K \sigma^{q_K} dZ) + \vartheta_{q_K q_K} (q_K \sigma^{q_K} dZ)^2 \right) \end{aligned}$$

Usando la propiedad de **diferenciales estocásticas**:

$$(dZ)^2 = dt$$

Se obtiene:

$$d\vartheta = \left[\vartheta_{q_B} q_B \mu^{q_B} + \vartheta_{q_K} q_K \mu^{q_K} + \frac{1}{2} \left(\vartheta_{q_B q_B} q_B^2 (\sigma^{q_B})^2 + 2\vartheta_{q_B q_K} q_B q_K \sigma^{q_B} \sigma^{q_K} + \vartheta_{q_K q_K} q_K^2 (\sigma^{q_K})^2 \right) \right] dt$$

$$+ [\vartheta_{q_B} q_B \sigma^{q_B} + \vartheta_{q_K} q_K \sigma^{q_K}] dZ$$

Sustituyendo las derivadas:

$$\vartheta_{q_B} = \frac{q_K}{(q_B + q_K)^2}, \quad \vartheta_{q_K} = -\frac{q_B}{(q_B + q_K)^2}$$

$$\vartheta_{q_B q_B} = -\frac{2q_K}{(q_B + q_K)^3}, \quad \vartheta_{q_K q_K} = \frac{2q_B}{(q_B + q_K)^3}, \quad \vartheta_{q_B q_K} = \frac{q_B - q_K}{(q_B + q_K)^3}$$

Sustituyendo en la ecuación de $d\vartheta$:

$$d\vartheta = \left[\frac{q_K}{(q_B + q_K)^2} q_B \mu^{q_B} - \frac{q_B}{(q_B + q_K)^2} q_K \mu^{q_K} \right] dt$$

$$+ \frac{1}{2} \left[\left(-\frac{2q_K}{(q_B + q_K)^3} \right) q_B^2 (\sigma^{q_B})^2 + 2 \left(\frac{q_B - q_K}{(q_B + q_K)^3} \right) q_B q_K \sigma^{q_B} \sigma^{q_K} + \left(\frac{2q_B}{(q_B + q_K)^3} \right) q_K^2 (\sigma^{q_K})^2 \right] dt$$

$$+ \left[\frac{q_K}{(q_B + q_K)^2} q_B \sigma^{q_B} - \frac{q_B}{(q_B + q_K)^2} q_K \sigma^{q_K} \right] dZ$$

Dado que:

$$\vartheta = \frac{q_B}{q_B + q_K}, \quad 1 - \vartheta = \frac{q_K}{q_B + q_K}$$

Sustituyéndolo en la ecuación diferencial de $d\vartheta$:

$$d\vartheta = [\vartheta(1 - \vartheta)(\mu^{q_B} - \mu^{q_K})] dt$$

$$+ \frac{1}{2} \left[-2\vartheta^2(1 - \vartheta)q_B(\sigma^{q_B})^2 + 2\vartheta(1 - \vartheta)(\vartheta - (1 - \vartheta))\sigma^{q_B}\sigma^{q_K} + 2\vartheta(1 - \vartheta)^2q_K(\sigma^{q_K})^2 \right] \frac{dt}{q_B + q_K}$$

$$+ [\vartheta(1 - \vartheta)(\sigma^{q_B} - \sigma^{q_K})] dZ$$

Simplifico

$$d\vartheta = \vartheta(1 - \vartheta)[(\mu^{q_B} - \mu^{q_K})] dt$$

$$[-\vartheta q_B(\sigma^{q_B})^2 + (\vartheta - (1 - \vartheta))\sigma^{q_B}\sigma^{q_K} + (1 - \vartheta)q_K(\sigma^{q_K})^2] dt$$

$$+ [(\sigma^{q_B} - \sigma^{q_K})] dZ$$

La ecuación diferencial de ϑ está dada por:

$$\boxed{d\vartheta = \vartheta(1 - \vartheta) \left[(\mu^{q_B} - \mu^{q_K})dt + (\sigma^{q_K} - \sigma^{q_B})((1 - \vartheta)\sigma^{q_K} + \vartheta\sigma^{q_B})dt + (\sigma^{q_B} - \sigma^{q_K})dZ \right]}.$$

Cálculo de $dr_t^{k,i}$

$$dr_t^{k,i} = \frac{d(q_t^K k_{i,t})}{q_t^K k_{i,t}} + \frac{(a - \iota)}{q_t^K} dt.$$

Recordemos que:

$$dk_{i,t} = k_{i,t} (\Phi(u_{i,t}) - \delta) dt + \tilde{\sigma} d\tilde{z}.$$

$$dK = \int (\Phi(u_{i,t}) - \delta) k_{i,t} dt.$$

También tenemos:

$$d(q_t^K k_t) = k_t dq_t^K + q_t^K dk_t.$$

Sustituyendo las expresiones diferenciales:

$$d(q_t^K k_t) = k_t q_t^K (\mu^{q_K} dt + \sigma^{q_K} dZ) + q_t^K k_t ((\Phi(\iota) - \delta) dt + \tilde{\sigma} d\tilde{z}).$$

Por lo tanto, la expresión final para dr_t^k queda:

$$dr_t^k = \left(\frac{a - \iota}{q_t^K} \right) dt + \mu^{q_K} dt + \sigma^{q_K} dZ + (\Phi(\iota) - \delta) dt + \tilde{\sigma} d\tilde{z}.$$

Cálculo de dr_t^B

La ecuación diferencial está dada por:

$$dr_t^B = \frac{d\left(\frac{q_t^B K_t}{B_t}\right)}{\frac{q_t^B K_t}{B_t}}.$$

Aplicando la regla de Itô, la diferencial de la fracción se obtiene como:

$$d\left(\frac{q_t^B K_t}{B_t}\right) = \frac{K_t}{B_t} dq_t^B + \frac{q_t^B}{B_t} dK_t.$$

Sustituyendo las ecuaciones diferenciales de q_t^B , K_t y B_t :

$$\begin{aligned} d\left(\frac{q_t^B K_t}{B_t}\right) &= \frac{K_t}{B_t} (q_t^B (\mu^{q_B} dt + \sigma^{q_B} dZ)) \\ &\quad + \frac{q_t^B}{B_t} K_t ((\Phi(\iota) - \delta) dt). \end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación final para dr_t^B queda:

$$dr_t^B = \mu^{q_B} dt + \sigma^{q_B} dZ + (\Phi(\iota) - \delta) dt.$$

Problema de maximización para construir la HJB

Con esta información puedo plantear el problema de maximización

$$\max \left(\int_0^\infty e^{\rho t} c_t dt \right)$$

Sujeto a la ecuación diferencial:

$$dn_t = -c_t dt + (n_t - q_t^K k_t) dr_t^B + q_t^K k_t dr_t^K$$

Reemplazando en dn_t :

$$dn_t = -c_t dt + (n_t - q_t^K k_t) \left[(\mu^{q_B} dt + \sigma^{q_B} dZ) + (\Phi(\iota) - \delta) dt \right] \\ + q_t^K k_t \left[\left(\frac{a - \iota}{q} \right) dt + \mu^{q_K} dt + \sigma^{q_K} dZ + (\Phi(\iota) - \delta) dt + \tilde{\sigma} d\tilde{z} \right].$$

$$\frac{dn}{n} = -\frac{c}{n} dt + \mu^n dt + \tilde{\sigma}^n d\tilde{Z} + \sigma^n dZ$$

$$\mu^n = (1 - x_t) \left(\mu^{q_B} dt + (\Phi(\iota) - \delta) dt \right) + x_t \left(\frac{a - \iota}{q} dt + \mu^{q_K} dt + (\Phi(\iota) - \delta) dt + \tilde{\sigma} d\tilde{z} \right)$$

$$\sigma^n = (1 - x_t) \sigma^{q_B} + x_t \sigma^{q_K}$$

$$\tilde{\sigma}^n = x_t \tilde{\sigma}$$

Donde

$$x_t = \frac{q_t^K k_t}{n}$$

Con esta información puedo plantear la HJB Tenemos que

$$u = \log(c_t)$$

Suponemos que la función valor tiene esta forma

$$V(\xi n) = \frac{1}{\rho} \log(\xi n)$$

Recordemos que la HJB

$$\rho \left(\frac{1}{\rho} \right) \log(\xi n) = \log(c_t) + \frac{E\left(\frac{1}{\rho} \log(\xi n)\right)}{dt} \\ \frac{E\left(\frac{1}{\rho} \log(\xi n)\right)}{dt} = \frac{1}{\rho dt} \left(\left(\frac{1}{\xi} d\xi + \frac{1}{n} \left(-\frac{c}{n} dt + \mu^n dt \right) - \frac{1}{\xi^2} (d\xi)^2 - \frac{1}{n^2} (dn)^2 \right) \right) \\ d\xi = \mu^\xi \xi dt + \sigma^\xi \xi dZ$$

$$\frac{E\left(\frac{1}{\rho} \log(\xi n)\right)}{dt} = \frac{1}{\rho} \left((\mu^\xi) + \left(-\frac{c}{n} + \mu^n \right) - (\sigma^\xi)^2 - (\tilde{\sigma}^n)^2 - (\sigma^n)^2 \right)$$

Planteamos la ecuación de HJB:

$$\log(\xi n) = \log(c_t) + \frac{1}{\rho} \left(\mu^\xi + \left(-\frac{c}{n} + \mu^n \right) - (\sigma^\xi)^2 - (\tilde{\sigma}^n)^2 - (\sigma^n)^2 \right)$$

El problema de maximización:

$$\log(\xi n) = \max_c \left\{ \log(c_t) - \frac{c}{\rho n} \right\} + \max_{x,i} \left\{ \frac{1}{\rho} \left(\mu^n - (\tilde{\sigma}^n)^2 - (\sigma^n)^2 \right) \right\} + \frac{1}{\rho} \left(\mu^\xi - (\sigma^\xi)^2 \right)$$

Condiciones de Primer Orden (CPO):

Para c :

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{\rho n} \Rightarrow c = \rho n$$

Para x :

$$\mu^{q_K} - \mu^{q_B} + \frac{a - \iota}{q^K} + x(\sigma^{q_K} - \sigma^{q_B})^2 + \sigma^{q_K} \sigma^{q_B} - (\sigma^{q_B})^2 + \tilde{\sigma}^2(x) = 0$$

Para ι :

$$\begin{aligned}\Phi'(\iota) &= (q^K)^{-1} \\ \iota &= \frac{1}{\phi}(q^K) - 1\end{aligned}$$

Para encontrar $d\vartheta$ usamos la CPO de x

$$\mu^{q_K} - \mu^{q_B} - \mu^B + \frac{a - \iota}{q^K} - x(\sigma^{q_K} - \sigma^{q_B})^2 - \sigma^{q_K} \sigma^{q_B} + (\sigma^{q_B})^2 - \tilde{\sigma}^2(x) = 0$$

$$\mu^{q_K} - \mu^{q_B} - \mu^B + \frac{a - \iota}{q^K} + (\sigma^{q_B} - \sigma^{q_K})(x\sigma^{q_K} + (1-x)\sigma^{q_B}) + \tilde{\sigma}^2(x) = 0$$

recordar que por clearing market condition

$$\begin{aligned}x &= \frac{q_t^K}{q_t^K + q_t^B} \\ x &= 1 - \vartheta\end{aligned}$$

Por el problema de optimización de x tenemos

$$\mu^{q_K} - \mu^{q_B} + \frac{a - \iota}{q^K} + (\sigma^{q_B} - \sigma^{q_K})((1 - \vartheta)\sigma^{q_K} + (\vartheta)\sigma^{q_B}) - \tilde{\sigma}^2(1 - \vartheta) = 0$$

$$\mu^{q_K} - \mu^{q_B} + \frac{a - \iota}{q^K} + (\sigma^{q_B} - \sigma^{q_K})((1 - \vartheta)\sigma^{q_K} + (\vartheta)\sigma^{q_B}) - \tilde{\sigma}^2(1 - \vartheta) = 0$$

$$\boxed{\frac{a - \iota}{q^K} - \tilde{\sigma}^2(1 - \vartheta) = -\mu^{q_K} + \mu^{q_B} - (\sigma^{q_B} - \sigma^{q_K})((1 - \vartheta)\sigma^{q_K} + \vartheta\sigma^{q_B})}$$

Usamos esta expresión para reemplazar en $d\vartheta$ que encontramos

$$d\vartheta = \vartheta(1 - \vartheta) \left[(\mu^{q_B} - \mu^{q_K})dt + (\sigma^{q_K} - \sigma^{q_B})[(1 - \vartheta)\sigma^{q_K} + \vartheta\sigma^{q_B}]dt + (\sigma^{q_B} - \sigma^{q_K})dZ \right]$$

Y dada esta estructura:

$$\mu_{\vartheta} = (1 - \vartheta) \left[(\mu^{q_B} - \mu^{q_K}) + (\sigma^{q_K} - \sigma^{q_B})[(1 - \vartheta)\sigma^{q_K} + \vartheta\sigma^{q_B}] \right]$$

Hacemos el reemplazo

$$\mu_{\vartheta} = (1 - \vartheta) \left[\frac{a - \iota}{q^K} - \tilde{\sigma}^2(1 - \vartheta) \right]$$

Uso el market clearing para reemplazar $a - \iota$

$$a - \iota = (q_t^B + q_t^K) \frac{c}{n}$$

$$\mu_{\vartheta} = (1 - \vartheta) \left[\frac{q_t^K + q_t^B}{q_t^K} \frac{c}{n} - \tilde{\sigma}^2(1 - \vartheta) \right]$$

$$\mu_{\vartheta} = (1 - \vartheta) \left[\frac{1}{1 - \vartheta} \frac{c}{n} - \tilde{\sigma}^2(1 - \vartheta) \right]$$

Recordar que $c = \rho n$

$$\mu_{\vartheta} = (1 - \vartheta) \left[\frac{1}{1 - \vartheta} \frac{\rho n}{n} - \tilde{\sigma}^2(1 - \vartheta) \right]$$

Con esto obtenemos la “money valuation equation”

$$\boxed{\mu_{\vartheta} = \rho - \tilde{\sigma}^2(1 - \vartheta)^2}$$

(c) Suppose that $\sigma_{\sigma,t} = 0$ and the economy is at the steady state with $\tilde{\sigma}_t = \tilde{\sigma}^{ss}$ for some $\tilde{\sigma}^{ss} > 0$.

(i) Derive expressions for q^B , q^K and ϑ in the monetary and non-monetary equilibria.

Equilibrio no monetario

Caso q^B

$$q^B = 0.$$

Caso q^K

$$a - \frac{1}{\phi}q^K + \frac{1}{\phi} = q^K\rho.$$

Despejando q^K :

$$q^K = \frac{a\phi + 1}{\rho\phi + 1}.$$

Por lo tanto:

$$\boxed{q^K = \frac{a\phi + 1}{\rho\phi + 1}.$$

Caso ι

$$\iota = \frac{1}{\phi}q^K - 1.$$

Sustituyendo q^K :

$$\iota = \frac{1}{\phi} \left(\frac{a\phi + 1}{\rho\phi + 1} \right) - \frac{1}{\phi}.$$

Factorizando:

$$\iota = \frac{1}{\phi} \left(\frac{a\phi + 1}{\rho\phi + 1} - 1 \right).$$

Simplificando:

$$\iota = \frac{a - \rho}{\rho\phi + 1}.$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\iota = \frac{a - \rho}{\rho\phi + 1}.$$

Equilibrio Monetario

Partimos de que la money valuation equation está dada por:

$$\mu_{\vartheta} = \rho - \tilde{\sigma}^2(1 - \vartheta)^2.$$

Dado que $\mu_{\vartheta} = 0$, obtenemos:

$$\frac{\rho}{\tilde{\sigma}^2} = (1 - \vartheta)^2.$$

Tomando raíz cuadrada:

$$\sqrt{\frac{\rho}{\tilde{\sigma}^2}} = 1 - \vartheta,$$

$$\frac{\sqrt{\rho}}{\tilde{\sigma}} = 1 - \vartheta.$$

Además,

$$\vartheta = 1 - \frac{\sqrt{\rho}}{\tilde{\sigma}}.$$

Usamos esto para reemplazar en las definiciones obtenidas en 3a:

$$(1 - \vartheta) \frac{a\phi + 1}{\phi\rho + 1 - \vartheta} = q^K.$$

$$q^B = \left(\frac{\vartheta(a\phi + 1)}{\phi\rho + 1 - \vartheta} \right).$$

$$\iota = \frac{a(1 - \vartheta) + \rho}{(1 - \vartheta) + \rho}.$$

Reemplazando para hallar el equilibrio monetario:

$$\left(\frac{\sqrt{\rho}}{\tilde{\sigma}} \right) \frac{a\phi + 1}{\phi\rho + \frac{\sqrt{\rho}}{\tilde{\sigma}}} = q^K.$$

$$q^K = \frac{\sqrt{\rho}(a\phi + 1)}{\tilde{\sigma}\phi\rho + \sqrt{\rho}}.$$

$$q^B = \frac{(1 - \frac{\sqrt{\rho}}{\tilde{\sigma}})(a\phi + 1)}{\phi\rho\tilde{\sigma} + \sqrt{\rho}\frac{\sqrt{\rho}}{\tilde{\sigma}}}.$$

$$q^B = \frac{(\tilde{\sigma} - \sqrt{\rho})(a\phi + 1)}{\phi\rho\tilde{\sigma} + \sqrt{\rho}}.$$

$$\iota = \frac{a(\frac{\sqrt{\rho}}{\tilde{\sigma}}) - \rho}{(\frac{\sqrt{\rho}}{\tilde{\sigma}}) + \rho}.$$

$$\iota = \frac{a\sqrt{\rho} - \tilde{\sigma}\rho}{\sqrt{\rho} + \tilde{\sigma}\rho}.$$

Recordemos que en el equilibrio $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}^{ss}$.

Equilibrio No Monetario

$$q^K = \frac{a\phi + 1}{\rho\phi + 1}.$$

$$q^B = 0.$$

$$\vartheta = 0.$$

Equilibrio Monetario

$$\vartheta = 1 - \frac{\sqrt{\rho}}{\tilde{\sigma}^{ss}}.$$

$$q^B = \frac{(\tilde{\sigma}^{ss} - \sqrt{\rho})(a\phi + 1)}{\phi\rho\tilde{\sigma}^{ss} + \sqrt{\rho}}.$$

$$q^K = \frac{\sqrt{\rho}(a\phi + 1)}{\tilde{\sigma}^{ss}\phi\rho + \sqrt{\rho}}.$$

- (iii) Suppose that $\tilde{\sigma}^{ss} > \tilde{\sigma}_{\min}^{ss}$, what happens to q^B , q^K and ϑ as $\tilde{\sigma}^{ss}$ rises?
En el equilibrio monetario, se tiene que:

$$\begin{aligned}\vartheta &= 1 - \frac{\sqrt{\rho}}{\tilde{\sigma}^{ss}} \\ q^B &= \frac{(\tilde{\sigma}^{ss} - \sqrt{\rho})(a\phi + 1)}{\phi\rho\tilde{\sigma}^{ss} + \sqrt{\rho}} \\ q^K &= \frac{\sqrt{\rho}(a\phi + 1)}{\tilde{\sigma}^{ss}\phi\rho + \sqrt{\rho}}\end{aligned}$$

Se puede observar que, a medida que $\tilde{\sigma}^{ss}$ aumenta, ocurre lo siguiente:

- ϑ crece hasta aproximarse a 1.
- q^K comienza a decrecer.
- Dado que ϑ aumenta y q^K disminuye en proporción a q^B , se tiene la relación:

$$\vartheta = \frac{q^B}{q^K + q^B}$$

- Como consecuencia, q^B comienza a crecer.

Esto puede interpretarse como que, en un contexto de mayor incertidumbre, los agentes se refugian en los bonos, ya que estos son activos seguros.

$$\boxed{\tilde{\sigma}^{ss} \uparrow \Rightarrow \vartheta \uparrow \Rightarrow q^K \downarrow, \quad q^B \uparrow}$$

- (iv) Suppose that $0 < \tilde{\sigma}^{ss} < \tilde{\sigma}_{\min}^{ss}$, what happens to q^B , q^K and ϑ as $\tilde{\sigma}^{ss}$ falls?
Mientras que si $0 < \tilde{\sigma}^{ss} < \tilde{\sigma}_{\min}^{ss}$, en este caso q^B sería igual a 0. Sin embargo, esto no es posible, ya que los precios no pueden ser negativos.
Por lo tanto, asumimos que $q^B = 0$. En este caso, se obtiene una relación idéntica al equilibrio no monetario:

$$q^K = \frac{a\phi + 1}{\rho\phi + 1}$$

Por lo cual, una caída en $\tilde{\sigma}^{ss}$ no afectan a q^K .

$$\boxed{0 < \tilde{\sigma}^{ss} < \tilde{\sigma}_{\min}^{ss} \Rightarrow q^B = 0 \Rightarrow q^K = \frac{a\phi + 1}{\rho\phi + 1}, \quad \tilde{\sigma}^{ss} \downarrow \text{ no afecta a } q^K}$$

4. Solving the previous model numerically

- (a) Set $a = 0.2$, $\phi = 1$, $\delta = 0.05$, $\rho = 0.01$, $\tilde{\sigma}^{ss} = 0.2$, $b = 0.05$, $\nu = 0.02$.
(b) Apply Itô's lemma to $\vartheta = \vartheta(\tilde{\sigma}_t)$, and equate the drift term with $\vartheta_t \mu_t^\vartheta$, where μ_t^ϑ is given by the Cox-Ingersol-Ross process above. This gives you an HJB-looking equation for $\vartheta(\tilde{\sigma})$.
Lema de Itô para ϑ

$$d\vartheta = \vartheta_{\tilde{\sigma}} d\tilde{\sigma} + \vartheta_{\tilde{\sigma}\tilde{\sigma}} (d\tilde{\sigma})^2$$

Recordar

$$d\tilde{\sigma}_t = b(\tilde{\sigma}_{ss} - \tilde{\sigma}_t)dt + \nu\sqrt{\tilde{\sigma}_t}dZ_t$$

Entonces

$$d\vartheta = \vartheta_{\tilde{\sigma}}(b(\tilde{\sigma}_{ss} - \tilde{\sigma}_t)dt + \nu\sqrt{\tilde{\sigma}_t}dZ_t) + \vartheta_{\tilde{\sigma}\tilde{\sigma}}(b(\tilde{\sigma}_{ss} - \tilde{\sigma}_t)dt + \nu\sqrt{\tilde{\sigma}_t}dZ_t)^2$$

Aplicamos el lema de Itô a $\vartheta(\tilde{\sigma}_t)$ dado el proceso estocástico para $\tilde{\sigma}_t$:

$$d\tilde{\sigma}_t = b(\tilde{\sigma}_{ss} - \tilde{\sigma}_t)dt + \nu\sqrt{\tilde{\sigma}_t}dZ_t.$$

La expansión del lema de Itô nos da:

$$d\vartheta = \vartheta_{\tilde{\sigma}} d\tilde{\sigma} + \frac{1}{2} \vartheta_{\tilde{\sigma}\tilde{\sigma}} (d\tilde{\sigma})^2.$$

Reemplazamos $d\tilde{\sigma}_t$

$$d\vartheta = \vartheta_{\tilde{\sigma}} \left[b(\tilde{\sigma}_{ss} - \tilde{\sigma}_t) dt + \nu \sqrt{\tilde{\sigma}_t} dZ_t \right] + \frac{1}{2} \vartheta_{\tilde{\sigma}\tilde{\sigma}} \left[b(\tilde{\sigma}_{ss} - \tilde{\sigma}_t) dt + \nu \sqrt{\tilde{\sigma}_t} dZ_t \right]^2.$$

Usamos las reglas de multiplicación:

Esto simplifica a:

$$d\vartheta = \vartheta_{\tilde{\sigma}} \left[b(\tilde{\sigma}_{ss} - \tilde{\sigma}_t) dt + \nu \sqrt{\tilde{\sigma}_t} dZ_t \right] + \frac{1}{2} \vartheta_{\tilde{\sigma}\tilde{\sigma}} \nu^2 \tilde{\sigma}_t dt.$$

Distribuyendo términos:

$$d\vartheta = b\vartheta_{\tilde{\sigma}} (\tilde{\sigma}_{ss} - \tilde{\sigma}_t) dt + \nu \vartheta_{\tilde{\sigma}} \sqrt{\tilde{\sigma}_t} dZ_t + \frac{1}{2} \nu^2 \vartheta_{\tilde{\sigma}\tilde{\sigma}} \tilde{\sigma}_t dt.$$

Finalmente tenemos

$$d\vartheta = \left[b\vartheta_{\tilde{\sigma}} (\tilde{\sigma}_{ss} - \tilde{\sigma}_t) + \frac{1}{2} \nu^2 \vartheta_{\tilde{\sigma}\tilde{\sigma}} \tilde{\sigma}_t \right] dt + \nu \vartheta_{\tilde{\sigma}} \sqrt{\tilde{\sigma}_t} dZ_t.$$

Recordamos que suponemos la siguiente ecuación diferencial estocástica para ϑ :

$$d\vartheta = \vartheta \mu_t^\vartheta dt + \vartheta \sigma^\vartheta dZ.$$

También, de la ecuación de valoración monetaria (*money valuation equation*), tenemos:

$$\mu_\vartheta = \rho - \tilde{\sigma}^2 (1 - \vartheta)^2.$$

A partir de esto, podemos escribir:

$$\vartheta \mu^\vartheta = b\vartheta_{\tilde{\sigma}} (\tilde{\sigma}_{ss} - \tilde{\sigma}_t) + \frac{1}{2} \nu^2 \vartheta_{\tilde{\sigma}\tilde{\sigma}} \tilde{\sigma}_t.$$

Por otro lado, también se tiene:

$$\vartheta \mu^\vartheta = \vartheta (\rho - \tilde{\sigma}^2 (1 - \vartheta)^2).$$

Igualando ambas expresiones:

$$\vartheta (\rho - \tilde{\sigma}^2 (1 - \vartheta)^2) = b\vartheta_{\tilde{\sigma}} (\tilde{\sigma}_{ss} - \tilde{\sigma}_t) + \frac{1}{2} \nu^2 \vartheta_{\tilde{\sigma}\tilde{\sigma}} \tilde{\sigma}_t.$$

Reorganizando la ecuación para que tenga una forma similar a una ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB):

$$\boxed{\vartheta \rho = \vartheta \tilde{\sigma}^2 (1 - \vartheta)^2 + b\vartheta_{\tilde{\sigma}} (\tilde{\sigma}_{ss} - \tilde{\sigma}_t) + \frac{1}{2} \nu^2 \vartheta_{\tilde{\sigma}\tilde{\sigma}} \tilde{\sigma}_t.}$$

(c) Solve the model using value function iteration:

(i) Suggest a grid for $\tilde{\sigma}$ and construct the M matrix using `buildM.m`.

Se realizó en el código ejercicio4.m

(ii) Rewrite the money valuation equation such that in the discretized form you get:

$$\rho \vartheta = u(\vartheta) + M\vartheta \tag{9}$$

de la 4b tengo que

$$\vartheta \rho = \vartheta \tilde{\sigma}^2 (1 - \vartheta)^2 + b\vartheta_{\tilde{\sigma}} (\tilde{\sigma}_{ss} - \tilde{\sigma}_t) + \frac{1}{2} \nu^2 \vartheta_{\tilde{\sigma}\tilde{\sigma}} \tilde{\sigma}_t.$$

Entonces puedo decir que

$$u(\vartheta) = \sigma^2 (1 - \theta)^2 \theta$$

El código se realizó en ejercicio4.m

- (iii) Write a loop that updates $\vartheta(\tilde{\sigma})$ with the implicit method:

$$\vartheta_{t-\Delta t} = ((1 + \rho\Delta t)I - \Delta t M)^{-1} (\Delta t u(\vartheta_t) + \vartheta_t) \quad (10)$$

Esto fue realizado en ejercicio4.m

- (iv) Iterate over $\vartheta(\tilde{\sigma})$ until convergence.

Esto fue realizado en ejercicio4.m

- (d) Plot ϑ , q^B , q^K , r^f , ς , $\tilde{\xi}$ as functions of $\tilde{\sigma}$. Explain the dependence of the variables on $\tilde{\sigma}$.

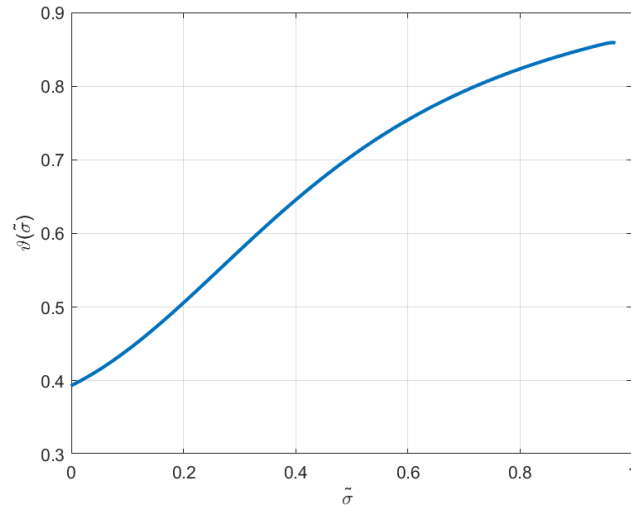
Tengo que de 3a

$$q^k = (1 - \vartheta) \frac{a\phi + 1}{\phi\rho + 1 - \vartheta}$$

$$q^B = \left(\frac{\vartheta(a\phi + 1)}{\phi\rho + 1 - \vartheta} \right)$$

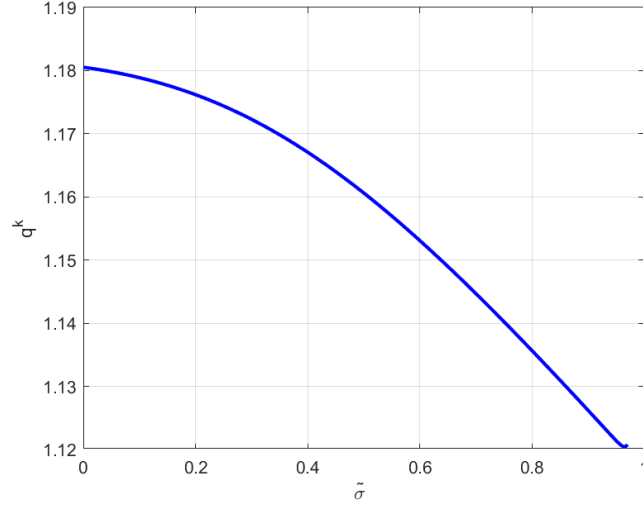
Con esta información gráfico lo que se encuentra en ejercicio4.m **Comentario sobre ϑ :** A

Figure 8: Gráfico de ϑ .



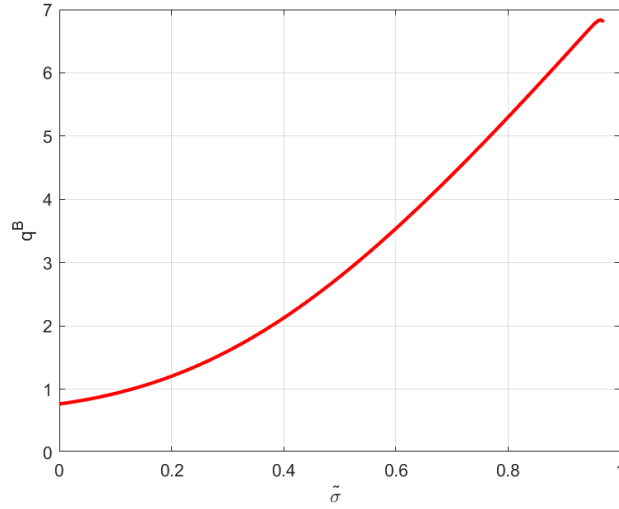
medida que aumenta el riesgo idiosincrático, los agentes buscan invertir más en activos seguros, como los bonos. Como resultado, ϑ , que representa la proporción de la riqueza depositada en bonos, también aumenta.

Figure 9: Gráfico de q^K .



Comentario sobre q^K : A medida que aumenta el riesgo idiosincrático, la demanda por K disminuye, ya que se vuelve un activo más riesgoso. Como consecuencia, su precio también se reduce.

Figure 10: Gráfico de q^B .



Comentario sobre q^B : A medida que aumenta el riesgo idiosincrático, la demanda por B también aumenta, dado que es un activo más seguro. Como resultado, su precio en unidades de q^K se incrementa.

Para el caso de $\tilde{\zeta}_t$, por la condición de martingala tenemos:

$$\mathbb{E} \left[\frac{dr_t^{K,i}}{dt} \right] - \mathbb{E} \left[\frac{dr_t^B}{dt} \right] = \zeta_t \left(\sigma_t^{K,i} - \sigma_t^B \right) + \tilde{\zeta}_t \left(\tilde{\sigma}_t^{K,i} - \tilde{\sigma}_t^B \right). \quad (11)$$

Defino en base a lo encontrado en 3b $\mathbb{E} \left[\frac{dr_t^{K,i}}{dt} \right]$ y $\mathbb{E} \left[\frac{dr_t^B}{dt} \right]$ Tenemos

$$dr_t^k = \left(\frac{a - \iota}{q} \right) dt + \mu^{qK} dt + \sigma^{qK} dZ + (\Phi(\iota) - \delta) dt + \tilde{\sigma} d\tilde{z}$$

$$dr_t^B = \mu^{qB} dt + \sigma^{qB} dZ + (\Phi(\iota) - \delta) dt$$

Entonces

$$\mathbb{E} \left[\frac{dr_t^{K,i}}{dt} \right] = \left(\frac{a - \iota}{q} \right) + \mu^{q_K} + (\Phi(\iota) - \delta)$$

$$\mathbb{E} \left[\frac{dr_t^B}{dt} \right] = \mu^{q_B} + (\Phi(\iota) - \delta)$$

Entonces tengo que

$$\mathbb{E} \left[\frac{dr_t^{K,i}}{dt} \right] - \mathbb{E} \left[\frac{dr_t^B}{dt} \right] = \frac{a - \iota}{q} + \mu^{q_K} - \mu^{q_B}.$$

Tengo lo encontrado con la HJB en la pregunta 3b

$$\frac{a - \iota}{q^K} - \tilde{\sigma}^2(1 - \vartheta) = -\mu^{q_K} + \mu^{q_B} - (\sigma^{q_B} - \sigma^{q_K})((1 - \vartheta)\sigma^{q_K} + \vartheta\sigma^{q_B})$$

Reordeno

$$\frac{a - \iota}{q^K} + \mu^{q_K} - \mu^{q_B} = -(\sigma^{q_B} - \sigma^{q_K})((1 - \vartheta)\sigma^{q_K} + \vartheta\sigma^{q_B}) + (1 - \vartheta)\tilde{\sigma}^2$$

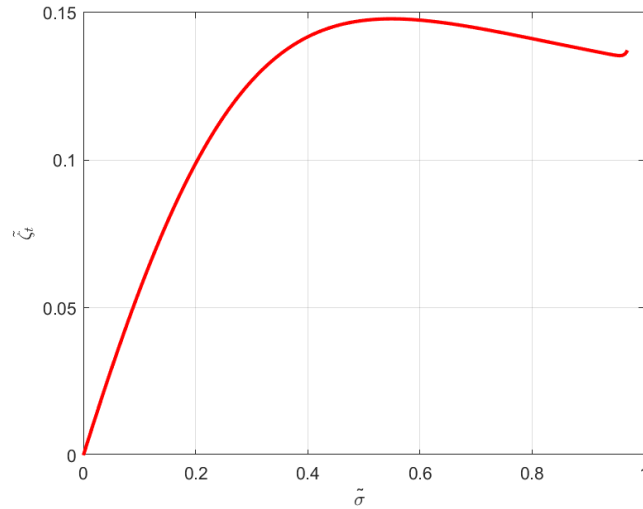
Comparo con el metodo de martingala

$$\mathbb{E} \left[\frac{dr_t^{K,i}}{dt} \right] - \mathbb{E} \left[\frac{dr_t^B}{dt} \right] = \zeta_t (\sigma_t^{K,i} - \sigma_t^B) + \tilde{\zeta}_t (\tilde{\sigma}_t^{K,i} - \tilde{\sigma}_t^B).$$

Entonces tengo dado a que puedo asumir que $\tilde{\sigma}_t^{K,i} = \tilde{\sigma}$

$$\boxed{\tilde{\zeta}_t = (1 - \vartheta)\tilde{\sigma}}$$

Figure 11: Gráfico de $\tilde{\zeta}$.



Comentario sobre $\tilde{\zeta}$: A medida que aumenta el riesgo idiosincrático, el precio del riesgo idiosincrático también aumenta, ya que los agentes estarán más dispuestos a pagar para protegerse del riesgo.

Ahora debemos hallar la tasa de interés libre de riesgo

Además, la tasa libre de riesgo se define como

$$r^f = \rho + \mu_t^\zeta - (\sigma^\zeta)^2$$

Además

$$\mu_t^\zeta = (\Phi(\iota) - \delta)$$

$$\sigma^\zeta = \zeta = (1 - \vartheta)\tilde{\sigma}$$

Tengo que

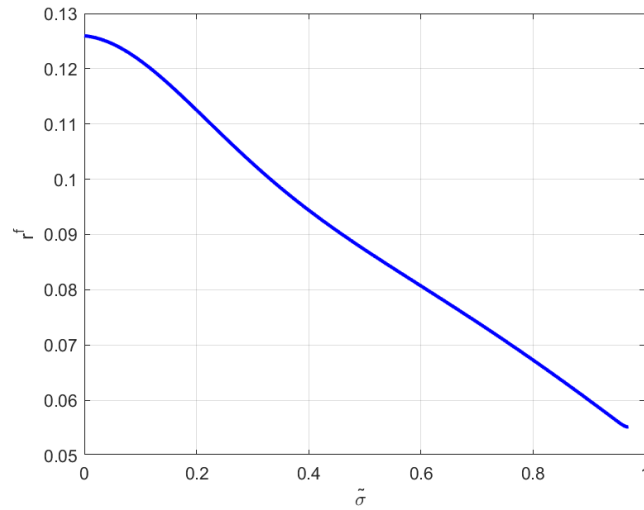
$$\iota = \frac{1}{\phi}(q^K) - \frac{1}{\phi}$$

$$\Phi(\iota) = (1/\phi) \log(1 + \phi\iota)$$

Entonces expreso la formula como

$$r^f = \rho + (1/\phi) \log(1 + \phi(\frac{1}{\phi}(q^K) - \frac{1}{\phi})) - ((1 - \vartheta)\tilde{\sigma})^2$$

Figure 12: Gráfico de r^f .



Comentario sobre r^f : Es de esperar que, a medida que aumenta el riesgo idiosincrático, la tasa libre de riesgo disminuya dado a que un precio mayor del Bono implica que su rendimiento disminuye.