Capítulo 2

Utilidad (instantánea) logarítmica

2.1. El problema de comer un pastel o *cake-eating problem*

El tiempo es discreto y el horizonte temporal es infinito ($t = 0, 1, \ldots$). Un individuo debe hallar la senda de consumo y peso (*weight*) $\{c_t, w_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ para maximizar

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t)$$

sujeto a

$$\begin{aligned} w_{t+1} &= w_t - c_t,\ t = 0, 1, \ldots, \\ c_t, w_{t+1} &\geq 0,\ t = 0, 1, \ldots, \text{ y} \\ w_0 &> 0 \text{ dado.} \end{aligned}$$

Además, la función de utilidad instantánea es contínuamente diferenciable, estríctamente creciente, estríctamente cóncava y satisface las condiciones de Inada.

2.1.1. Problema secuencial

Dado que sabemos que $w_{t+1} = w_t - c_t$, podemos despejar el consumo $c_t = w_t - w_{t+1}$ como la diferencia entre aquel monto con que se inicia el período y lo que se decide llevar al período siguiente. Por lo tanto, podemos reescribir el problema anterior como sigue

$$\max_{\{w_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \underbrace{U(w_t - w_{t+1})}_{\mathcal{F}(w_t, w_{t+1})}$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 0 &\leq w_{t+1} \leq w_t,\ t = 0, 1, \ldots, \text{ y} \\ w_0 &> 0 \text{ dado.} \end{aligned}$$

Nótese que la desigualdad $w_{t+1} \leq w_t$ es consecuencia de requerir que el consumo no sea negativo: $c_t = w_t - w_{t+1} \geq 0$.

2.1.2. Caracterización

Emplearemos el cálculo de variaciones para obtener la función supremo. Las condiciones de Euler y de transversalidad son

$$\begin{aligned}\underbrace{-U'\left(w_t-w_{t+1}\right)}_{\mathcal{F}_2(w_t,w_{t+1})}+\beta\underbrace{U'\left(w_{t+1}-w_{t+2}\right)}_{\mathcal{F}_1(w_{t+1},w_{t+2})} &= 0,\ t=0,1,\ldots,\text{ y}\\ \lim_{T\to\infty}\beta^T\underbrace{U'\left(w_T-w_{T+1}\right)}_{\mathcal{F}_1(w_T,w_{T+1})}w_T &= 0.\end{aligned}$$

Usando el hecho de que $c_t=w_t-w_{t+1}$, podemos reescribir las dos condiciones anteriores como

$$\begin{aligned}U'\left(c_t\right) &= \beta U'\left(c_{t+1}\right),\ t=0,1,\ldots,\text{ y}\\ \lim_{T\to\infty}\beta^T U'\left(c_T\right)w_T &= 0.\end{aligned}$$

2.1.3. El Caso de la utilidad logarítmica

Resolvamos para $U\left(c_t\right)=\ln c_t$. Las condiciones anteriores se convierten en

$$\begin{aligned}w_{t+1} &= w_t-c_t,\ t=0,1,\ldots,\\ \frac{1}{c_t} &= \beta\frac{1}{c_{t+1}},\ t=0,1,\ldots,\text{ y}\\ \lim_{T\to\infty}\beta^T\frac{1}{c_T}w_T &= 0.\end{aligned}$$

Combinando las restricciones de recursos y las ecuaciones de Euler obtenemos

$$\underbrace{w_{t+1}-w_{t+2}}_{c_{t+1}}=\beta\underbrace{\left(w_t-w_{t+1}\right)}_{c_t},\text{ para } t=0,1,\ldots$$

o, equivalentemente,

$$w_{t+2}-\left(1+\beta\right)w_{t+1}+\beta w_t=0,\text{ para } t=0,1,\ldots.$$

En este caso, conjeturamos que la regla de política toma la forma

$$w_{t+1}=g\left(w_t\right)=\phi w_t$$

con lo cual la ecuación anterior se convierte en

$$\left[\phi^2-\left(1+\beta\right)\phi+\beta\right]w_t=0.$$

Una condición suficiente para que la igualdad siempre se cumpla es

$$\phi^2-\left(1+\beta\right)\phi+\beta=0.$$

Si resolvemos la ecuación cuadrática con respecto a ϕ, obtenemos $\phi=\beta$ y $\phi=1$.

- Si usaramos $\phi=1$ obtendríamos $w_{t+1}=w_t$ y $c_t=0$ $(t=0,1,\ldots)$ pero en este caso la condición de transversalidad no podría cumplirse.

- Por el contrario, si usamos $\phi = \beta$ obtenemos $w_{t+1} = \beta w_t$ lo cual a su vez implica que $c_t = (1-\beta) w_t$ (es fácil verificar que se cumple la condición de transversalidad). Obtenemos $w_t = \beta w_{t-1} = \beta (\beta w_{t-2}) = \beta (\beta (\beta w_{t-3})) = \ldots = \beta^t w_0$ con lo cual

$$\begin{aligned} c_t &= (1-\beta) w_t \\ &= (1-\beta) \beta^t w_0 \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \ln c_t &= \ln \left[(1-\beta) \beta^t w_0 \right] \\ &= \ln (1-\beta) + t \ln \beta + \ln w_0 \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} v^* (w_0) &= \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln c_t \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln (1-\beta) + \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t t \ln \beta + \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln w_0 \\ &= \frac{1}{1-\beta} \ln (1-\beta) + \frac{\beta}{(1-\beta)^2} \ln \beta + \frac{1}{1-\beta} \ln w_0 \\ &= \frac{1}{1-\beta} \left[\ln (1-\beta) + \frac{\beta}{1-\beta} \ln \beta \right] + \frac{1}{1-\beta} \ln w_0 \end{aligned}$$

y es fácil verificar que la función es la misma que se obtiene al resolver la ecuación de Bellman mediante aproximaciones sucesivas o mediante coeficientes indeterminados.

