Preliminares matemáticos

Juan Carlos Aquino Chávez

Banco Central de Reserva del Perú

15 de enero de 2025

La presente nota contiene una traducción libre de Stokey y Lucas (1989, capítulo 3). Cabe anotar que excluyo intencionalmente mi versión de las demostraciones. La principal razón es que estas se realizan en clase. Por otro lado, modifico ligeramente el lenguaje formal para hacerlo similar al empleado en textos estándar de análisis real. Además, añado comentarios aclaratorios (con diferente coloración) a lo largo de la exposición. Finalmente, para evitar la confusión que podría surgir al revisar el texto original, hago uso de la siguiente notación:

- T denota el horizonte temporal (que puede ser finito o infinito),
- t:
- $\mathcal{T}$ (caligráfica) denota el operador de un conjunto de funciones a sí mismo,
- F denota la función de producción, y
- f:
- $\mathcal{F}$ (caligráfica) denota la función retorno.
- U:
- u:
- Γ:

En el Capítulo **??** se vió que el problema de crecimiento óptimo

$$\max_{\{c_t,k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t)$$

$$\begin{aligned} \text{s. a } c_t + k_{t+1} &\leq f(k_t), \\ c_t, k_{t+1} &\geq 0,\ t = 0, 1, \ldots, \\ & k_0 \text{ dado}, \end{aligned}$$

daba lugar a la ecuación funcional

$$v(k) = \max_{c,y} \left[U(c) + \beta v(y)\right] \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \text{s. a } c + y &\leq f(k), \\ c,\ y &\geq 0. \end{aligned}$$

El objetivo de este capítulo y el siguiente es mostrar exáctamente la relación entre estos dos problemas y otros como ellos y desarrollar los métodos matemáticos que han demostrado ser útiles en el estudio del último. En la Sección 1 argumentamos de manera informal que las soluciones a los dos problemas deben estar cercanamente conectadas, y este argumento será hecho rigurosamente después. En el resto de esta introducción consideramos métodos alternativos para encontrar soluciones a (1), bosquejar aquella a ser buscada y describir los problemas matemáticos que surgen. En las secciones restantes del capítulo lidiamos a su vez con estos problemas. Nos basamos en este material extensivamente en el Capítulo **??**, donde ecuaciones funcionales como (1) son analizadas.

En (1) las funciones U y f son dadas -toman formas específicas conocidas para nosotros- y la función valor v es desconocida. Nuestra tarea es demostrar la existencia y unicidad de una función v que satisfaga (1) y deducir sus propiedades, dadas las propiedades de U y f. El enfoque clásico (siglo XIX) para este problema era el *método de aproximaciones sucesivas*, y funciona de la siguiente manera (con mucho sentido común). Comiéncese por tomar una conjetura inicial de que una función específica, llamémosle v_0, satisface (1). Entonces defínase, v_1, mediante

$$v_1(k) = \max_{0 \leq y \leq f(k)} \left[U\left[f(k) - y\right] + \beta v_0(y)\right]. \tag{2}$$

Si ocurriera que $\upsilon_1(k) = \upsilon_0(k)$, para todo $k \geq 0$, entonces claramente υ_0 es una solución de (1). Tener suerte (compárese con el Ejercicio **??**) al conjeturar es una manera de establecer la existencia de una función que satisfaga (1), pero notoriamente no es confiable. El método de aproximaciones sucesivas procede de una manera más sistemática.

Supóngase, como es usualmente el caso, que $\upsilon_1 \neq \upsilon_0$. Entonces úsese υ_1 como la nueva conjetura y defínase la sucesión de funciones $\{\upsilon_n\}$ recursivamente mediante

$$\upsilon_{n+1}(k) = \max_{0 \leq y \leq f(k)} \left[U\left[f(k) - y \right] + \beta \upsilon_n(y) \right], \ n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{3}$$

La esperanza detrás de este proceso iterativo es que a medida que n se incrementa, las aproximaciones sucesivas υ_n se acercan una función υ que satisfaga (1). Esto es, la esperanza consiste en que el límite de la sucesión $\{\upsilon_n\}$ sea una solución υ. Además, si se puede mostrar que $\lim_{n\to\infty} \upsilon_n$ es el mismo para cualquier conjetura inicial υ_0, entonces se sigue que este límite es la única función que satisface (1). (Â¿Por qué?)

Â¿Existe alguna razón para esperar el éxito de esta estrategia analítica? Recuérdese que nuestra razón para tener interés en (1) es usarla para localizar la política de acumulación de capital óptima para una economía con un sector. Suponga que empezamos eligiendo cualquier política de acumulación de capital factible, esto es, cualquier función g_0 que satisfaga $0 \leq g_0(k) \leq f(k)$, para todo $k \geq 0$. [Un ejemplo es la política de ahorrar una fracción constante del ingreso: $g_0(k) = \theta f(k)$, donde $0 < \theta < 1$.] La utilidad de por vida rendida por esta política, como función del saldo de capital inicial k_0, es

$$w_0(k_0) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U\left[f(k_t) - g_0(k_t) \right],$$

donde

$$k_{t+1} = g_0(k_t), \ t = 0, 1, 2, \ldots.$$

El siguiente ejercicio desarrolla un resultado sobre (g_0, w_0) que es usado luego.

Ejercicio 1 *Muestre que*

$$w_0(k) = U[f(k) - g_0(k)] + \beta w_0[g_0(k)], \textit{ para todo } k \geq 0.$$

Si la utilidad de la política g_0 es usada como la conjetura inicial para la función valor -esto es, si $\upsilon_0 = w_0$- entonces (2) es el problema que enfrenta un planificador que puede elegir la acumulación de capital de manera óptima para un período pero debe seguir la política g_0 en todos los periodos subsiguientes. Por lo tanto $\upsilon_1(k)$ es el nivel de utilidad de por vida alcanzado, y el valor maximizador de y -llamémosle $g_1(k)$- es el nivel óptimo para el capital de final de período. Tanto υ_1 como g_1 son funciones del capital de inicio de período k.

Nótese que ya que $g_0(k)$ es una elección factible en el primer período, el planificador no puede hacer algo peor de lo pudiera haber hecho al seguir la política g_0 desde el comienzo, y en general será capaz de hacerlo mejor. Esto es, para cualquier política factible g_0 y función valor inicial asociada υ_0,

$$\begin{aligned} \upsilon_1(k) &= \max_{0\leq y\leq f(k)} \{U[f(k)-y] + \beta\upsilon_0(y)\} \\ &\geq \{U[f(k)-g_0(k)] + \beta\upsilon_0[g_0(k)]\} \\ &= \upsilon_0(k), \end{aligned} \tag{4}$$

donde la última línea se sigue del Ejercicio 1.

Ahora supóngase que el planificador tiene la opción de escoger de manera óptima la acumulación de capital por dos períodos pero debe seguir la política g_0 desde ahí en adelante. Si y es su elección para el capital de final de período en el primer período, entonces desde el segundo período en adelante lo mejor que puede hacer es escoger $g_1(y)$ para el capital de fin de período y disfrutar una utilidad total $\upsilon_1(y)$. Por lo tanto su problema en el primer período es $\max[U(c) + \beta\upsilon_1(y)]$, sujetos a las restricciones en (1). El valor maximizado de esta función objetivo fue definida, en (3), como $\upsilon_2(k)$. Por lo tanto se sigue de (4) que

$$\begin{aligned} \upsilon_2(k) &= \max_{0\leq y\leq f(k)} \{U[f(k)-y] + \beta\upsilon_1(y)\} \\ &\geq \max_{0\leq y\leq f(k)} \{U[f(k)-y] + \beta\upsilon_0(y)\} \\ &= \upsilon_1(k). \end{aligned}$$

Continuando de esta forma, se establece por inducción que $\upsilon_{n+1}(k) \geq \upsilon_n(k)$, para todo k, $n =$

$0, 1, 2, \ldots$. Las aproximaciones sucesivas definidas en (3) son mejoras, reflejando el hecho de que la flexibilidad en el planeamiento sobre horizontes finitos más y más largos ofrece nuevas opciones sin quitar otras opciones. Consecuentemente, parece razonable suponer que la sucesión de funciones $\{v_n\}$ definida en (3) podría converger a una solución v a (1). Esto es, el método de aproximaciones sucesivas parece una manera razonable de localizar y caracterizar soluciones.

Este método puede ser descrito en un lenguaje algo distinto y mucho más conveniente. Como se mostró en la discusión previa, para cualquier función $w : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, podemos definir una nueva función -llamémosla $\mathcal{T}w : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$- mediante

$$(\mathcal{T}w)(k) = \max_{0 \leq y \leq f(k)} \{U[f(k) - y] + \beta w(y)\}. \tag{5}$$

Cuando usemos esta notación, el método de aproximaciones sucesivas se reduce a escoger una función v_0 y estudiar la sucesión $\{v_n\}$ definida mediante $v_{n+1} = \mathcal{T}_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Entonces la meta es mostrar que esta sucesión converge y que la función límite v satisface (1). Alternativamente, podemos ver al operador $\mathcal{T}$ simplemente como una aplicación desde un conjunto de funciones C a sí mismo: $\mathcal{T} : C \to C$. En esta notación resolver (1) es equivalente a ubicar el *punto fijo* de la aplicación $\mathcal{T}$, esto es, una función $v \in C$ que satisface $v = \mathcal{T}v$, y el método de aproximaciones sucesivas es visto como una forma de construir este punto fijo.

Para estudiar operadores $\mathcal{T}$ como aquel definido en (5), necesitamos basarnos en varios resultados matemáticos básicos. Para mostrar que $\mathcal{T}$ mapea un espacio apropiado C hacia sí mismo, debemos decidir qué espacios de funciones se ajustan para llevar a cabo nuestro análisis. En general queremos limitar la atención a funciones continuas. Esta elección da lugar al problema de si es que, dada una función continua w, la función $\mathcal{T}w$ definida por (5) es también continua. Finalmente, necesitamos un teorema del punto fijo que aplique a operadores como $\mathcal{T}$ definidos sobre el espacio C que hemos seleccionado. El resto del capítulo se encarga de estos problemas.

En la sección 1 revisamos los hechos básicos sobre espacios métricos y espacios vectoriales normados y definimos el espacio C que será usado repetidamente luego. En la sección 2 demostramos el Teorema de la Aplicación Contractiva, un teorema de punto fijo de vasta utilidad. En la sección 3 revisamos los hechos principales que necesitamos acerca de funciones, como $\mathcal{T}w$ antes descrita, que son definidas por problemas de maximización.

1. Espacios Métricos y Espacios Vectoriales Normados

La sección precedente motiva el estudio de ciertas ecuaciones funcionales como un medio para encontrar soluciones a problemas expresados en términos de sucesiones infinitas. Para lograr el estudio de estos problemas, como lo haremos en el Capítulo **??**, necesitamos hablar sobre sucesiones infinitas $\{x_t\}_{t=0}^{\infty}$ de estados, sobre candidatos a la función valor v, y sobre la convergencia de sucesiones de varios tipos. Para hacer esto, encontraremos conveniente pensar en sucesiones infinitas y cierta clases de funciones como elementos de espacios vectoriales normados de dimensión infinita. Por consiguiente, comenzamos aquí con las definiciones de espacios vectoriales, espacios métricos, y espacios vectoriales normados. Entonces discutimos las nociones de convergencia y convergencia de Cauchy, definimos la noción de completitud para un espacio métrico. Entonces el Teorema 1 establece que el espacio de funciones de valor real acotadas y continuas, definidas sobre un conjunto $X \subseteq \mathbb{R}^l$ es completo.

Comenzamos con la definición de un espacio vectorial.

Definición 1 *Un* ***espacio vectorial (real)*** *es una terna $(X, +, \cdot)$ compuesta por un conjunto X de elementos (vectores) y dos operaciones, adición y multiplicación escalar. Para cualesquiera $x, y \in X$, la adición da lugar a un vector $x + y \in X$; y para cualquier vector $x \in X$ y cualquier número real $\alpha \in \mathbb{R}$, la multiplicación escalar da un vector $\alpha x \in X$. Estas operaciones obedecen las leyes algabraicas usuales; esto es, para todo $x, y, z \in X$, y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:*

a. $x + y = y + x$;

b. $(x + y) + z = x + (y + z)$;

c. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$;

d. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$; *y*

e. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$.

Además, existe un vector cero $\theta \in X$ que posee las siguientes propiedades:

f. $x + \theta = x$; *y*

g. $0x = \theta$.

Finalmente,

h. $1x = x$.

El adjetivo "real" simplemente indica que la multiplicación escalar está definida tomando los números reales, no los elementos del plano complejo o algún otro conjunto, como escalares. Todos los espacios vectoriales usados en este libro son reales, y el adjetivo no volverá a ser repetido. Son características importantes de un espacio vectorial el que tenga un elemento "cero" y que sea cerrado bajo adición y multiplicación escalar. Los espacios vectoriales serán llamados también *espacios lineales.*

Ejercicio 2 *Muestre que los siguientes son espacios vectoriales:*

a. cualquier espacio euclidiano de dimensión finita $\mathbb{R}^l$;

b. el conjunto $X = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : x = \alpha z, \text{ para algún } \alpha \in \mathbb{R}\right\}$, *donde* $z \in \mathbb{R}^2$;

c. el conjunto X que consiste de todas las sucesiones infinitas $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$, *donde* $x_i \in \mathbb{R}$, *para todo* i;

d. el conjunto de todas las funciones continuas sobre el intervalo $[a, b]$.

Muestre que los siguientes no son espacios vectoriales:

e. el círculo unitario en $\mathbb{R}$;

f. el conjunto de todos los enteros, $I = \{\ldots, -1, 0, +1, \ldots\}$;

g. el conjunto de todas las funciones no negativas sobre el intervalo $[a, b]$*.*

Para discutir convergencia en un espacio vectorial o en cualquier otro espacio, necesitamos tener una noción de distancia. Se generaliza la noción de distancia en un espacio Euclideano en la noción abstracta de una métrica, una función definida sobre dos elementos cualesquiera en un conjunto y cuyo valor tiene una interpretación como la distancia entre ellos.

Definición 2 *Un **espacio métrico** es una dupla* (S, ρ) *compuesta por un conjunto* S *y una métrica (función distancia)* $\rho : S \times S \to \mathbb{R}$ *tal que para todo* $x, y, z \in S$*:*

a. $\rho(x, y) \geq 0$*, con igualdad si y solo si* $x = y$*;*

b. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$*; y*

c. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$*.*

Entonces la definición de una métrica abstrae las cuatro propiedades básicas de la distancia Euclideana: la distancia entre dos puntos distintos es estríctamente positiva; la distancia de un punto hacia sí mismo es cero; la distancia es simétrica; y se mantiene la desigualdad triangular.

Ejercicio 3 *Muestre que los siguientes son espacios métricos:*

a. Sea S *el conjunto de los enteros, con* $\rho(x, y) = |x - y|$*.*

b. Sea S *el conjunto de los enteros, con* $\rho(x, y) = 0$ *si* $x = y$*,* 1 *si* $x \neq y$*.*

c. Sea S *el conjunto de todas las funciones continuas y estríctamente crecientes sobre* $[a, b]$*, con* $\rho(x, y) = \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)|$*.*

d. Sea S *el conjunto de todas las funciones continuas y estríctamente crecientes sobre* $[a, b]$*, con* $\rho(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)| dt$*.*

e. Sea S *el conjunto de todos los números racionales, con* $\rho(x, y) = |x - y|$*.*

f. Sea $S = \mathbb{R}$*, con* $\rho(x, y) = f(x - y)$*, donde* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *es contínua, estríctamente creciente, y estríctamente cóncava, con* $f(0) = 0$*.*

Sea un espacio vectorial $S = (X, +, \cdot)$. En la discusión posterior adoptaremos la convención de decir que "$x \in S$" para referirnos a que $x \in X$ y que X es el conjunto de vectores que forma parte de S.

Para espacios vectoriales, las métricas son usualmente definidas en una manera que la distancia entre dos puntos cualesquiera es igual a la distancia de su diferencia del punto cero. Esto es, ya que para cualesquiera puntos x y y en un espacio vectorial S, el punto $x - y$ está también en S, la métrica en un espacio vectorial es usualmente definida de tal manera que $\rho(x, y) = \rho(x - y, \theta)$. Para definir dicha métrica, necesitamos el concepto de norma.

Definición 3 *Un **espacio vectorial normado** es un espacio vectorial equipado con una norma. Es decir, es una dupla $(S, \|\cdot\|)$ conformada por un espacio vectorial $S = (X, +, \cdot)$ y una norma $\|\cdot\| : S \to \mathbb{R}$, tal que para todo $x, y \in S$ y $\alpha \in \mathbb{R}$:*

a. $\|x\| \geq 0$, *con igualdad si o solo si $x = \theta$;*

b. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$; *y*

c. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(la desigualdad triangular).*

Ejercicio 4 *Muestre que los siguientes son espacios vectoriales normados.*

a. Sea $S = \mathbb{R}^l$, con $\|x\| = [\sum_{i=1}^{l} x_i^2]^{1/2}$ (Espacio euclidiado).

b. Sea $S = \mathbb{R}^l$, con $\|x\| = \max_i |x_i|$.

c. Sea $S = \mathbb{R}^l$, con $\|x\| = \sum_{i=1}^{l} |x_i|$.

d. Sea S el conjunto de todas las sucesiones infinitas acotadas $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$, $x_k \in \mathbb{R}$, para todo k, con $\|x\| = \sup_k |x_k|$. (Este espacio es llamado l_∞).

e. Sea S el conjunto de todas las funciones continuas sobre $[a, b]$, con $\|x\| = \sup_{a \leq t \leq b} |x(t)|$. (Este espacio es llamado $C[a, b]$).

f. Sea S el conjunto de todas las funciones continuas sobre $[a, b]$, con $\|x\| = \int_a^b |x(t)| dt$.

Es estándar ver cualquier espacio vectorial normado $(S, \|\cdot\|)$ como un espacio métrico, donde se toma la métrica $\rho(x, y) = \|x - y\|$, para todo $x, y \in S$.

La noción de convergencia de una sucesión de números reales se lleva sin ningún cambio a un espacio métrico.

Definición 4 *Una sucesión* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ *en* S ***converge*** *a* $x \in S$*, si para todo* $\varepsilon > 0$ *existe un* N_ε *tal que*

$$n \geq N_\varepsilon \text{ implica } \rho(x_n, x) < \varepsilon. \tag{6}$$

Entonces una sucesión $\{x_n\}$ en un espacio métrico (S, ρ) converge a $x \in S$ si y solo si la sucesión de distancias $\{\rho(x_n, x)\}$, una sucesión en $\mathbb{R}_+$, converge a cero. En este caso escribimos $x_n \to x$.

Verificar directamente la convergencia involucra tener un "candidato" para el punto límite x de manera que la desigualdad (6) pueda ser chequeada. Cuando no hay un candidato inmediatamente disponible, el siguiente criterio alternativo es a menudo útil.

Definición 5 *Una sucesión* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ *en* S *es una* ***sucesión de Cauchy*** *(satisface el* ***criterio de Cauchy****) si para todo* $\varepsilon > 0$*, existe un* N_ε *tal que*

$$n, m \geq N_\varepsilon \text{ implica } \rho(x_n, x_m) < \varepsilon. \tag{7}$$

Entonces una sucesión es Cauchy si los puntos se sitúan cerca y más cerca los unos de los otros. El siguiente ejercicio ilustra algunos hechos básicos acerca de la convergencia y el criterio de Cauchy.

Ejercicio 5

a. *Muestre que si* $x_n \to x$ *y* $x_n \to y$*, entonces* $x = y$*. Esto es, si* $\{x_n\}$ *tiene un límite, entonces este límite es único.*

b. *Muestre que si una sucesión* $\{x_n\}$ *es convergente, entonces satisface el criterio de Cauchy.*

c. *Muestre que si una sucesión* $\{x_n\}$ *satisface el criterio de Cauchy, entonces es acotada.*

d. *Muestre que* $x_n \to x$ *si y solo si toda subsucesión de* $\{x_n\}$ *converge a* x*.*

La ventaja del criterio de Cauchy es que, en contraste a (6), (7) puede ser chequeada solo con el conocimiento de $\{x_n\}$. Sin embargo, para que el criterio de Cauchy sea útil debemos trabajar con espacios donde este implique la existencia de un punto límite.

Definición 6 *Un espacio métrico (S, ρ) es **completo** si toda sucesión de Cauchy en S converge a un elemento en S.*

Entonces, en espacios métricos completos verificar que una sucesión satisface el criterio de Cauchy es una manera de verificar la existencia de un punto límite en S.

Verificar la completitud de espacios particulares puede requerir algún trabajo. Tomamos como dado el siguiente

HECHO El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ con la métrica $\rho(x, y) = |x - y|$ es un espacio métrico completo.

Ejercicio 6 *a. Muestre que los espacios métricos en los Ejercicios 3a,b y 4a-e son completos y que aquellos en los ejercicios 3c-e y 4f no lo son. Muestre que el espacio en 3c es completo si "estríctamente creciente" es reemplazado por "no decreciente".*

b. Muestre que si (S, ρ) es un espacio métrico completo y S' es un subconjunto cerrado de S, entonces (S', ρ) es un espacio métrico completo.

Un espacio vectorial normado es llamado un **espacio de Banach**.

El siguiente ejemplo no es más difícil que algunos de aquellos en el Ejercicio 6, pero ya que es importante en lo que sigue e ilustra cada uno de los pasos involucrados en verificar la completitud, presentamos la demostración aquí.

Teorema 1 *Sea $X \subseteq \mathbb{R}^l$, y sea $C(X)$ el conjunto de todas las funciones continuas y acotadas $f : X \to \mathbb{R}$ con la norma del supremo, $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$. Entonces $((C(X), +, \cdot), \|\cdot\|)$ es un espacio* *vectorial normado completo. (Nótese que si X es compacto entonces toda función continua es acotada. De otra manera la restricción a funciones acotadas debe ser añadida.)*

Aunque hemos organizado estos argumentos componentes en un teorema sobre un espacio de funciones, cada uno debería ser familiar a los estudiantes de cálculo. La convergencia en la norma del supremo es simplemente convergencia uniforme. La demostración anterior es solo una amalgama de las pruebas estándar de que una sucesión de funciones que satisface el criterio de Cauchy converge uniformemente y que la convergencia uniforme "preserva la continuidad".

Ejercicio 7 *a. Sea $C^1[a,b]$ el conjunto de todas las funciones continuamente diferenciables sobre $[a,b] = X \subset \mathbb{R}$, con la norma $\|f\| = \sup_{x \in X} \{|f(x)| + |f'(x)|\}$. Muestre que $C^1[a,b]$ es un espacio de Banach. [Ayuda. Nótese que*

$$\sup_{x \in X} |f(x)| + \sup_{x \in X} |f'(x)| \geq \|f\| \geq \max \left\{ \sup_{x \in X} |f(x)|, \sup_{x \in X} |f'(x)| \right\}.]$$

b. Muestre que este conjunto de funciones con la norma $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$ no es completo. Esto es, proporcione un ejemplo de una sucesión de funciones que es Cauchy en la norma dada que no converge a una función en el conjunto. ¿Es esta sucesión de Cauchy en la norma de la parte (a)?

c. Sea $C^k[a,b]$ el conjunto de todas las funciones k veces continuamente diferenciables sobre $[a,b] = X \subset \mathbb{R}$, con la norma $\|f\| = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \max_{x \in X} |f^i(x)|$, donde $f^i = d^i f(x)/dx^i$. Muestre que este espacio es completo si y solo si $\alpha_i > 0$, $i = 0, 1, \ldots, k$.

2. El Teorema de la Aplicación Contractiva

En esta sección demostramos dos resultados principales. El primero es el Teorema de la Aplicación Contractiva, un teorema del punto fijo extremadamente simple y potente. El segundo es un conjunto de condiciones suficientes, atribuidas a Blackwell, para establecer que ciertos operadores son aplicaciones contractivas. El último es útil es una amplia variedad de aplicaciones económicas y será usado extensamente en el siguiente capítulo.

Comenzamos con la siguiente definición.

Definición 7 *Sea (S, ρ) un espacio métrico y sea $\mathcal{T} : S \to S$ una función de S a sí misma. $\mathcal{T}$ es una* ***aplicación contractiva*** *(con* ***módulo*** *β) si para algún $\beta \in (0, 1)$,*

$$\rho\left(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y\right) \leq \beta\rho\left(x, y\right), \text{ para todo } x, y \in S.$$

Quizás los ejemplos más familiares de aplicaciones contractivas son aquellos en un intervalo cerrado $S = [a, b]$, con $\rho\left(x, y\right) = |x - y|$. Entonces $\mathcal{T} : S \to S$ es una contracción si para algún $\beta \in (0, 1)$.

$$\frac{|\mathcal{T}x - \mathcal{T}y|}{|x - y|} \leq \beta < 1, \text{ para todo } x, y \in S \text{ con } x \neq y.$$

Esto es, $\mathcal{T}$ es una aplicación contractiva si es una función con pendiente uniformemente menor que uno en valor absoluto.

Ejercicio 8 *Muestre que si $\mathcal{T}$ es una contracción sobre S, entonces $\mathcal{T}$ es uniformemente continua sobre S.*

Los ***puntos fijos*** de $\mathcal{T}$, los elementos de S que satisfacen $\mathcal{T}x = x$, son las intersecciones de $\mathcal{T}x$ con la linea de 45 grados, como se muestra en la Figura 1. Por lo tanto está claro que cualquier contracción sobre este espacio tiene un único punto fijo. Esta conclusión es mucho más general.

Teorema 2 *(Teorema de la Aplicación Contractiva) Si (S, ρ) es un espacio métrico completo y $\mathcal{T} : S \to S$ es una aplicación contractiva con módulo β, entonces*

a. $\mathcal{T}$ tiene exactamente un punto fijo υ en S, y

b. para cualquier $\upsilon_0 \in S$, $\rho(\mathcal{T}^n\upsilon_0, \upsilon) \leq \beta^n\rho(\upsilon_0, \upsilon)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Figura 1: Aplicación contractiva y punto fijo

Recuérdese del Ejercicio 6b que si (S, ρ) es un espacio métrico completo y S' es un subconjunto cerrado de S, entonces (S', ρ) es también un espacio métrico completo. Ahora supóngase que $\mathcal{T} : S \to S$

es una aplicación contractiva, y supóngase además que $\mathcal{T}$ mapea S' hacia sí mismo, $\mathcal{T}(S') \subseteq S'$ (donde $\mathcal{T}(S')$ denota la imagen de S' bajo $\mathcal{T}$). Entonces $\mathcal{T}$ también es una aplicación contractiva sobre S'. Entonces el único punto fijo de $\mathcal{T}$ sobre S se encuentra en S'. Esta observación es muchas veces útil para establecer propiedades cualitativas de un punto fijo. Específicamente, en algunas situaciones queremos aplicar el Teorema de la Aplicación Contractiva dos veces: una vez sobre un espacio grande para establecer unicidad, y una vez más sobre un espacio más pequeño para caracterizar el punto fijo de manera más precisa.

El siguiente corolario formaliza este argumento.

Corolario 1 *Sea (S, p) un espacio métrico completo, y sea $\mathcal{T}: S \to S$ una aplicación contractiva con punto fijo $v \in S$. Si S' es un subconjunto cerrado de S y $\mathcal{T}(S') \subseteq S'$, entonces $v \in S'$. Si adicionalmente $\mathcal{T}(S') \subseteq S'' \subseteq S'$, entonces $v \in S''$.*

La parte (b) del Teorema de la Aplicación Contractiva acota la distancia $\rho(\mathcal{T}^n v_0, v)$ entre la n-ésima aproximación y el punto fijo en términos de la distancia $\rho(v_0, v)$ entre la aproximación inicial y el punto fijo. Sin embargo, si v es desconocido (como es el caso si se está computando v), entonces ninguna es la magnitud de la cota. El Ejercicio 9 da una desigualdad computacionalmente útil.

Ejercicio 9 *Sean (S, ρ), $\mathcal{T}$, y v dadas como se hizo anteriormente, sea β el módulo de $\mathcal{T}$, y sea $v_0 \in S$. Muestre que*

$$\rho(\mathcal{T}^n v_0, v) \leq \frac{1}{1-\beta} \rho(\mathcal{T}^n v_0, \mathcal{T}^{n+1} v_0). \tag{8}$$

El siguiente resultado es una generalización útil del Teorema de la Aplicación Contractiva.

Corolario 2 (Teorema de la ContracciÃ^{3}n de N etapas) *Sea (S, ρ) un espacio métrico completo, sea $\mathcal{T}: S \to S$ y supóngase que para algún número entero N, $\mathcal{T}^N: S \to S$ es una aplicación contractiva con módulo β. Entonces*

a. $\mathcal{T}$ tiene exactamente un punto fijo en S, y

b. para cualquier $v_0 \in S$, $\rho\left(\mathcal{T}^{kN} v_0, v\right) \leq \beta^k \rho(v_0, v)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

El siguiente ejercicio muestra cómo el Teorema de la Aplicación Contractiva es usado para demostrar la existencia y unicidad de una solución a una ecuación diferencial.

Ejercicio 10 *Considere la ecuación diferencial y condición de acotación* $dx(s)/ds = f[x(s)]$*, para todo* $s \geq 0$*, con* $x(0) = c \in \mathbb{R}$*. Asuma que* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es continua, y que para algún* $B > 0$ *satisface la condición de Lipschitz* $|f(a) - f(b)| \leq B|a - b|$*, para todo* $a, b \in \mathbb{R}$*. Para cualquier* $t > 0$*, considere* $C[0, t]$*, el espacio de las funciones continuas y acotadas sobre* $[0, t]$*, con la norma del supremo. Recuerde del Teorema 1 que este espacio es completo.*

a. *Muestre que el operador* $\mathcal{T}$ *definido mediante*

$$(\mathcal{T}\upsilon)(s) = c + \int_0^s f[\upsilon(z)]dz,\ 0 \leq s \leq t,$$

mapea $C[0, t]$ *hacia sí misma. Esto es, muestre que si* υ *es continua y acotada sobre* $[0, t]$*, entonces también lo es* $\mathcal{T}\upsilon$*.*

b. *Muestre que para algún* $\tau > 0$*,* $\mathcal{T}$ *es una contracción sobre* $C[0, \tau]$*.*

c. *Muestre que el único punto fijo de* $\mathcal{T}$ *sobre* $C[0, \tau]$ *es una función diferenciable, y por lo tanto que es la única solución sobre* $[0, \tau]$ *a la ecuación diferencial dada.*

Otra ruta útil para verificar que ciertos operadores son contracciones es atribuida a Blackwell.

Teorema 3 *(Condiciones suficientes de Blackwell para una contracción) Sea* $X \subseteq \mathbb{R}^l$*, y sea* $B(X)$ *un espacio de funciones acotadas* $f : X \to \mathbb{R}$*, con la norma del supremo. Sea* $\mathcal{T} : B(X) \to B(X)$ *un operador que satisface*

a. *(monotonicidad)* $f, g \in B(X)$ *y* $f(x) \leq g(x)$*, para todo* $x \in X$*, implica* $(\mathcal{T}f)(x) \leq (\mathcal{T}g)(x)$*, para todo* $x \in X$*;*

b. *(descuento) existe algún* $\beta \in (0, 1)$ *tal que*

$$[\mathcal{T}(f + a)](x) \leq (\mathcal{T}f)(x) + \beta a,\ \textit{para todo}\ f \in B(X),\ a \geq 0,\ x \in X.$$

[Aquí $(f+a)(x)$ es la función definida por $(f+a)(x) = f(x) + a$.] Entonces $\mathcal{T}$ es una contracción con módulo β.

En muchas aplicaciones económicas las dos hipótesis del Teorema de Blackwell pueden ser verificadas de un vistazo. Por ejemplo, en el modelo de crecimiento óptimo con un sector, un operador $\mathcal{T}$ fue definido mediante

$$(\mathcal{T}v)(k) = \max_{0 \leq y \leq f(k)} \{U[f(k) - y] + \beta v(y)\}.$$

Si $v(y) \leq w(y)$ para todos los valores de y, entonces la función objetivo para la cual $\mathcal{T}w$ es el valor maximizado es uniformemente mayor que la función para la cual $\mathcal{T}v$ es el valor maximizado; de manera que la hipótesis (a) es obvia. La hipótesis de descuento (b) es igualmente fácil, ya que

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}(v+a)(k) &= \max_{0 \leq y \leq f(k)} \{U[f(k) - y] + \beta[v(y) + a]\} \\
&= \max_{0 \leq y \leq f(k)} \{U[f(k) - y] + \beta v(y)\} + \beta a \\
&= (\mathcal{T}v)(k) + \beta a.
\end{aligned}$$

El resultado de Blackwell jugará un rol clave en nuestro análisis de programas dinámicos.

3. El Teorema del Máximo

Querremos aplicar el Teorema de la Aplicación Contractiva para analizar problemas de programación dinámica que son mucho más generales que los ejemplos que hemos discutido hasta este momento. Si x es la variable de estado de inicio de período, un elemento de $X \subseteq \mathbb{R}^l$, y $y \in X$ es el estado de final de período a ser elegido, quisieramos permitir que el retorno de período actual $\mathcal{F}(x,y)$ y el conjunto de valores factibles y, dado x, sean especificados tan generalmente como sea posible. Por otro lado, queremos que el operador $\mathcal{T}$ definido mediante

$$\begin{aligned}
(\mathcal{T}v)(x) &= \sup_{y} [\mathcal{F}(x,y) + \beta v(y)] \\
& \quad \text{s. a } y \text{ factible dado } x,
\end{aligned}$$

tome el espacio $C(X)$ de funciones continuas y acotadas del estado hacia sí mismo. También quisiéramos tener la capacidad de caracterizar el conjunto de valores maximizadores de y, dado x.

Para describir el conjunto factible, usamos la idea de una ***correspondencia*** de un conjunto X hacia un conjunto Y: una relación que asigna un conjunto $\Gamma(x) \subseteq Y$ a cada $x \in X$. En el caso de interés aquí, $Y = X$. Por lo tanto buscamos restricciones sobre la correspondencia $\Gamma : X \rightrightarrows X$ que describen las restricciones de factibilidad y sobre la función retorno $\mathcal{F}$, que juntas aseguran que si $v \in C(X)$ y $(\mathcal{T}v)(x) = \sup_{y\in\Gamma(x)} [\mathcal{F}(x, y) + \beta v(y)]$ entonces $\mathcal{T}v \in C(X)$. Además, deseamos determinar las propiedades implicadas de la correspondencia $G(x)$ que contiene los valores valores maximizadores de y para cada x. El principal resultado en esta sección es el Teorema del Máximo, el cual consigue ambos objetivos.

Sea $X \subseteq \mathbb{R}^l$; sea $Y \subseteq \mathbb{R}^m$; sea $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ una función (de valor único) y sea $\Gamma : X \rightrightarrows Y$ una correspondencia (no vacía, posiblemente multivaluada). Nuestro interés está en problemas de la forma $\sup_{y\in\Gamma(x)} f(x, y)$. Si para cada x, $f(x, \cdot)$ es continua en y y el conjunto $\Gamma(x)$ es no vacío y compacto, entonces para cada x el máximo es alcanzado. En este caso la función

$$h(x) = \max_{y\in\Gamma(x)} f(x, y) \tag{9}$$

está bien definida, así como lo está el conjunto no vacío

$$G(x) = \{y \in \Gamma(x) : f(x, y) = h(x)\} \tag{10}$$

de valores y que alcanzan el máximo. En esta sección se añadirán restricciones adicionales sobre f y Γ, para asegurar que la función h y el conjunto G varían de una forma continua con x.

Existen varias nociones de continuidad para correspondencias, y cada una puede ser caracterizada en una variedad de formas. Para nuestros propósitos es conveniente usar definiciones enunciadas en términos de sucesiones.

Definición 8 *Una correspondencia $\Gamma : X \rightrightarrows Y$ es **semi-continua inferior** (s.c.i.) en x si $\Gamma(x)$ es no vacío y si, para cada $y \in \Gamma(x)$ y toda sucesión $x_n \to x$, existe $N \geq 1$ y una sucesión $\{y_n\}_{n=N}^{\infty}$*

tal que $y_n \to y$ y $y_n \in \Gamma(x_n)$, para todo $n \geq N$. [Si $\Gamma(x')$ es no vacío para todo $x' \in X$, entonces es siempre posible tomar $N = 1$.]

Definición 9 *Una correspondencia de valor compacto $\Gamma : X \rightrightarrows Y$ es* ***semi-continua superior*** *(s.c.s.) en x si $\Gamma(x)$ es no vacío y si, para cualquier sucesión $x_n \to x$ y cualquier sucesión $\{y_n\}$ tal que $y_n \in \Gamma(x_n)$, para todo n, existe una subsucesión convergente de $\{y_n\}$ cuyo punto límite y está en $\Gamma(x)$.*

Figura 2: Semi-continuidad superior y semi-continuidad inferior

La Figura 2 muestra una correspondencia que es s.c.i. pero no s.c.s. en x_1; es s.c.s. pero no s.c.i. en x_2; y es tanto s.c.s. como s.c.i. en todos los otros puntos. Nótese que nuestra definición de s.c.s. aplica solo a correspondencias que son de valor compacto. Dado que todas las correspondencias con las cuales estaremos trabajando satisfacen este requisito, la restricción no será vinculante. (Una definición de s.c.s. para todas las correspondencias está disponible, pero está establecida en términos de imagenes de conjuntos abiertos. Para nuestros propósitos esta definición es mucho menos conveniente, y su mayor alcance nunca es útil.)

Definición 10 *Una correspondencia Γ:$X \rightrightarrows Y$ es* ***continua*** *en $x \in X$ si es tanto s.c.s. como s.c.i. en x.*

Una correspondencia $\Gamma : X \rightrightarrows Y$ es llamada s.c.i., s.c.s., o continua si tiene dicha propiedad en todo punto $x \in X$. Nótese que si $\Gamma : X \rightrightarrows Y$, entonces para cualquier conjunto $\hat{X} \subset X$, definimos

$$\Gamma(\hat{X}) = \left\{ y \in Y : y \in \Gamma(x), \text{ para algún } x \in \hat{X} \right\}.$$

Ejercicio 11 *a. Muestre que si Γ es de valor único y s.c.s., entonces es contínua.*

b. Sea $\Gamma : \mathbb{R}^k \rightrightarrows \mathbb{R}^{l+m}$, y defina $\phi : \mathbb{R}^k \rightrightarrows \mathbb{R}^l$ mediante

$$\phi(x) = \left\{ y_1 \in \mathbb{R}^l : (y_1, y_2) \in \Gamma(x) \textit{ para algún } y_2 \in \mathbb{R}^m \right\}.$$

Muestre que si Γ es de valor compacto y s.c.s., entonces también lo es ϕ.

c. Sean $\phi : X \rightrightarrows Y$ y $\psi : X \rightrightarrows Y$ de valor compacto y s.c.s., y defínase $\Gamma = \phi \cup \psi$ mediante

$$\Gamma(x) = \{y \in Y : y \in \phi(x) \cup \psi(x)\}, \text{ para todo } x \in X.$$

Muestre que Γ es de valor compacto y s.c.s.

d. Sean $\phi : X \rightrightarrows Y$ y $\psi : X \rightrightarrows Y$ de valor compacto y s.c.s., y supóngase que

$$\Gamma(x) = \{y \in Y : y \in \phi(x) \cap \psi(x)\} \neq \emptyset, \text{ para todo } x \in X.$$

Muestre que Γ es de valor compacto y s.c.s.

e. Muestre que si $\phi : X \rightrightarrows Y$ y $\psi : Y \rightrightarrows Z$ son de valor compacto y s.c.s., entonces la correspondencia $\psi \circ \phi = \Gamma : X \rightrightarrows Z$ definida mediante

$$\Gamma(x) = \{z \in Z : z \in \psi(y), \text{ para algún } y \in \phi(x)\}$$

es también de valor compacto y s.c.s.

f. Sean $\Gamma_i : X \rightrightarrows Y_i$, $i = 1, \ldots, k$ de valor compacto y s.c.s. Muestre que $\Gamma : X \rightrightarrows Y = Y_1 \times \ldots \times Y_k$ definida mediante

$$\Gamma(x) = \{y \in Y : y = (y_1, \ldots, y_k), \text{ donde } y_i \in \Gamma_i(x), \ i = 1, \ldots, k\},$$

es también de valor compacto y s.c.s.

g. Muestre que si $\Gamma : X \rightrightarrows Y$ es de valor compacto y s.c.s., entonces para cualquier conjunto compacto $K \subseteq X$, el conjunto $\Gamma(K) \subseteq Y$ es también compacto. [Ayuda. Para mostrar que $\Gamma(K)$ es acotada, supóngase lo contrario. Sea $\{y_n\}$ una sucesión divergente en Γ, y escoja $\{x_n\}$ tal que $y_n \in \Gamma(x_n)$, para todo n.]

Ejercicio 12 *a. Muestre que si Γ es de valor único y s.c.i., entonces es continua.*

b. Sea $\Gamma : \mathbb{R}^k \rightrightarrows \mathbb{R}^{l+m}$, y defina $\phi : \mathbb{R}^k \rightrightarrows \mathbb{R}^l$ mediante

$$\phi(x) = \left\{y_1 \in \mathbb{R}^l : (y_1, y_2) \in \Gamma(x) \text{ para algún } y_2 \in \mathbb{R}^m\right\}.$$

Muestre que si Γ es s.c.i., entonces ϕ también lo es.

c. Sean $\phi : X \rightrightarrows Y$ y $\psi : X \rightrightarrows Y$ s.c.i., y defínase $\Gamma = \phi \cup \psi$ mediante

$$\Gamma(x) = \{y \in Y : y \in \phi(x) \cup \psi(x)\}, \text{ para todo } x \in X.$$

Muestre que Γ es s.c.i.

d. Sean $\phi : X \rightrightarrows Y$ y $\psi : X \rightrightarrows Y$ s.c.i., y supóngase que

$$\Gamma(x) = \{y \in Y : y \in \phi(x) \cap \psi(x)\} \neq \emptyset, \text{ para todo } x \in X.$$

Muestre mediante un ejemplo que Γ no necesita ser s.c.i. Muestre que si ϕ y ψ son ambas de valor convexo, y si $int\phi(x) \cap int\psi(x) \neq \emptyset$, entonces Γ es s.c.i. en x.

e. Muestre que si $\phi : X \rightrightarrows Y$ y $\psi : Y \rightrightarrows Z$ son s.c.i., entonces la correspondencia $\psi \circ \phi = \Gamma : X \rightrightarrows Z$ definida mediante

$$\Gamma(x) = \{z \in Z : z \in \psi(y), \text{ para algún } y \in \phi(x)\}$$

es también s.c.i.

f. Sean $\Gamma_i : X \rightrightarrows Y_i$, $i = 1, \ldots, k$ s.c.i. Muestre que $\Gamma : X \rightrightarrows Y = Y_1 \times \ldots \times Y_k$ definida mediante.

$$\Gamma(x) = \{y \in Y : y = (y_1, \ldots, y_k), \text{ donde } y_i \in \Gamma_i(x),\ i = 1, \ldots, k\},$$

es s.c.i.

Los siguientes dos ejercicios muestran algunas de las relaciones entre las restricciones establecidas en términos de desigualdades que involucran funciones continuas y aquellas establecidas en términos de correspondencias continuas. Estas relaciones son extremadamente importantes para muchos problemas en economía, donde las restricciones son frecuentemente establecidas en términos de funciones de producción, restricciones presupuestarias, y así sucesivamente.

Ejercicio 13 *a. Sea $\Gamma : \mathbb{R}_+ \rightrightarrows \mathbb{R}_+$ definida mediante $\Gamma(x) = [0, x]$. Muestre que Γ es continua.*

b. Sea $f : \mathbb{R}^l_+ \to \mathbb{R}_+$ una función continua, y defina la correspondencia $\Gamma : \mathbb{R}^l_+ \rightrightarrows \mathbb{R}_+$ mediante $\Gamma(x) = [0, f(x)]$. Muestre que Γ es continua.

c. *Sean* $f_i : \mathbb{R}_+^l \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}_+$, $i = 1, \dots, l$ *funciones continuas. Defina* $\Gamma : \mathbb{R}_+^l \times \mathbb{R}^m \rightrightarrows \mathbb{R}_+^l$ *mediante*

$$\Gamma(x, z) = \left\{ y \in \mathbb{R}_+^l : 0 \le y_i \le f_i(x^i, z),\ i = 1, \dots, l;\ y\ \sum_{i=1}^{l} x^i \le x \right\}.$$

Muestre que Γ *es continua.*

Ejercicio 14 a. *Sea* $H(x, y) : \mathbb{R}_+^l \times \mathbb{R}_+^m \to \mathbb{R}$ *continua, estríctamente creciente en sus primeros* l *argumentos, estríctamente decreciente en sus últimos* m *argumentos, con* $H(0, 0) = 0$*. Defina* $\Gamma : \mathbb{R}^l \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ *mediante* $\Gamma(x) = \{y \in \mathbb{R}^m : H(x, y) \ge 0\}$*. Muestre que si* $\Gamma(x)$ *es de valor compacto, entonces* Γ *es continua en* x*.*

b. *Sea* $H(x, y) : \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *continua y cóncava, y defina* Γ *como en la parte (a). Muestre que si* $\Gamma(x)$ *es de valor compacto y existe algún* $\hat{y} \in \Gamma(x)$ *tal que* $H(x, \hat{y}) > 0$*, entonces* Γ *es continua en* x*.*

c. *Defina* $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mediante* $H(x, y) = 1 - \max\{|x|, |y|\}$*, y defina* $\Gamma(x)$ *como en la parte (a). Â¿Dónde falla* Γ *en ser s.c.i.?*

Cuando tratemos de establecer propiedades de una correspondencia $\Gamma : X \rightrightarrows Y$, algunas veces es útil trabajar con su **grafo**, el conjunto

$$A = \{(x, y) \in X \times Y : y \in \Gamma(x)\}.$$

Los dos siguientes resultados brindan condiciones sobre A que son suficientes para asegurar la semi-continuidad superior e inferior de Γ, respectivamente.

Teorema 4 *Sea* $\Gamma : X \rightrightarrows Y$ *una correspondencia de valor no vacío, y sea* A *el grafo de* Γ*. Supóngase que* A *es cerrado, y que para cualquier conjunto acotado* $\hat{X} \subseteq X$*, el conjunto* $\Gamma(\hat{X})$ *es acotado. Entonces* Γ *es de valor compacto y s.c.s.*

Para ver por qué se requiere la hipótesis de acotación en el Teorema 4, considérese la correspondencia $\Gamma : \mathbb{R}_+ \rightrightarrows \mathbb{R}_+$ definida mediante

$$\Gamma(0) = 0, \text{ y } \Gamma(x) = \{0, 1/x\}, \text{ para todo } x > 0.$$

El grafo de Γ es cerrado, pero Γ no es s.c.s. en $x = 0$.

El siguiente ejercicio es una especie de converso del Teorema 4.

Ejercicio 15 *Sea $\Gamma : X \rightrightarrows X$ una correspondencia de valor compacto s.c.s. con grafo A. Muestre que si X es compacto entonces A es compacto.*

El siguiente teorema se encarga de la semicontinuidad inferior. Para cualquier $x \in \mathbb{R}^l$ y cualquier $\varepsilon > 0$, denote $B(x, \varepsilon)$ la bola cerrada de radio ε alrededor de x.

Teorema 5 *Sea $\Gamma : X \rightrightarrows Y$ una correspondencia de valor no vacío, y sea A el grafo de Γ. Supóngase que A es convexo; y que para cualquier conjunto acotado $\hat{X} \subseteq X$, existe un conjunto acotado $\hat{Y} \subseteq Y$ tal que $\Gamma(x) \cap \hat{Y} \neq \emptyset$, para todo $x \in \hat{X}$. Entonces Γ es s.c.i. en cualquier punto interior de X.*

Para ver por qué $\hat{x}$ debe ser un punto interior, considérese el caso donde X es un disco y A es un cono invertido que está inclinado de manera que la punta está directamente encima del perímetro de X. Sea $\hat{x}$ el punto debajo de la punta del cono, y tome una sucesión $\{x_k\}$ a lo largo del perímetro del disco. Entonces cada conjunto $\Gamma(x_n)$ es un único punto, pero $\Gamma(\hat{x})$ es un intervalo.

Ahora estamos en la capacidad de responder las preguntas: ¿Bajo qué condiciones la función $h(x)$ definida por el problema de maximización en (9) y el conjunto asociado de valores maximizadores y $G(x)$ definido en (10) varían continuamente con x? Una respuesta es provista en el siguiente teorema.

Teorema 6 *(Teorema del Máximo) Sean $X \subseteq \mathbb{R}^l$ y $Y \subseteq \mathbb{R}^m$, sea $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ una función continua, y sea $\Gamma : X \rightrightarrows Y$ una correspondencia de valor compacto y continua. Entonces la función $h : X \to \mathbb{R}$ definida en (9) es continua, y la correspondencia $G : X \rightrightarrows Y$ definida en (10) es no vacía, de valor compacto. y s.c.s.*

El siguiente ejercicio ilustra a través de ejemplos concretos lo que este teorema dice y no dice.

Ejercicio 16 *a. Sea $X = \mathbb{R}$, y sea $\Gamma(x) = Y = [-1, +1]$, para todo $x \in X$. Defina $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ mediante $f(x, y) = xy^2$. Grafique $G(x)$; muestre que $G(x)$ es s.c.s. pero no s.c.i. en $x = 0$.*

b. Sea $x = \mathbb{R}$, y sea $\Gamma(x) = [0, 4]$, para todo $x \in X$. Defina

$$f(x,y) = \max\left\{2 - (y-1)^2, x + 1 - (y-2)^2\right\}.$$

Grafique $G(x)$ y muestre que es s.c.s. Â¿Dónde exáctamente falla en ser s.c.i.?

c. Sea $X = \mathbb{R}_+$, $\Gamma(x) = \{y \in \mathbb{R} : -x \leq y \leq x\}$, y $f(x,y) = cos(y)$. Grafique $G(x)$ y muestre que es s.c.s. Â¿Dónde exáctamente falla en ser s.c.i.?

Supóngase que además de las hipótesis del Teorema del Máximo la correspondencia Γ es de valor convexo y la función f es estríctamente cóncava en y. Entonces G es de valor único y, por el Ejercicio 11a es una función contínua -llamémosle g. Los dos siguientes resultados establecen propiedades de g. El Lema 1 muestra que si $f(x,y)$ está cerca al valor maximizado $f[x, g(x)]$, entonces y está cerca de $g(x)$. El Teorema 7 se basa en este resultado para mostrar que si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones contínuas, cada una estríctamente cóncava en y, convergiendo uniformemente a f, entonces la sucesión de funciones maximizadoras $\{g_n\}$ converge puntualmente a g. La última convergencia es uniforme si X es compacto.

Lema 1 *Sea $X \subseteq \mathbb{R}^l$ y $Y \subseteq \mathbb{R}^m$. Supóngase que la correspondencia $\Gamma : X \rightrightarrows Y$ es no vacía, de valor compacto y convexo, y continua, y sea A el grafo de Γ. Supóngase que la función $f : A \to \mathbb{R}$ es continua y que $f(x,\cdot)$ es estríctamente cóncava, para cada $x \in X$. Defínase la función $g : X \to Y$ mediante*

$$g(x) = \arg\max_{y\in\Gamma(x)} f(x,y).$$

Entonces para cada $\varepsilon > 0$ y $x \in X$, existe $\delta_x > 0$ tal que

$$y \in \Gamma(x) \text{ y } |f[x, g(x)] - f(x,y)| < \delta_x \text{ implican } \|g(x) - y\| < \varepsilon.$$

Si X es compacto, entonces $\delta > 0$ puede ser elegido independientemente de x.

Teorema 7 *Sean X, Y, Γ y A definidas como en el Lema 1. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones (de valor real) continuas sobre A; supóngase que para cada n y cada $x \in X$, $f_n(x,\cdot)$ es estríctamente cóncava en su segundo argumento. Supóngase que f tiene las mismas propiedades y que $f_n \to f$ de* *manera uniforme (en la norma del supremo). Defínase las funciones g_n y g mediante*

$$\begin{aligned} g_n(x) &= \arg\max_{y\in\Gamma(x)} f_n(x,y),\ n=1,2,\ldots,\ y \\ g(x) &= \arg\max_{y\in\Gamma(x)} f(x,y). \end{aligned}$$

Entonces $g_n \to g$ de manera puntual. Si X es compacto, $g_n \to g$ de manera uniforme.

Referencias

Stokey, N. L. y Lucas, Jr., R. E. (1989). *Recursive Methods in Economic Dynamics.* Harvard University Press. Con E. C. Prescott.

Apéndice A Derivaciones

[Disponible]

