Programación dinámica bajo certeza

Juan Carlos Aquino Chávez

Banco Central de Reserva del Perú

16 de enero de 2025

La presente nota contiene una traducción libre de Stokey y Lucas (1989, capítulo 4). Cabe anotar que excluyo intencionalmente mi versión de las demostraciones. La principal razón es que estas se realizan en clase. Por otro lado, modifico ligeramente el lenguaje formal para hacerlo similar al empleado en textos estándar de análisis real. Además, añado comentarios aclaratorios (con diferente coloración) a lo largo de la exposición. Finalmente, para evitar la confusión que podría surgir al revisar el texto original, hago uso de la siguiente notación:

- T denota el horizonte temporal (que puede ser finito o infinito),
- $\mathcal{T}$ (caligráfica) denota el operador de un conjunto de funciones a sí mismo,
- F denota la función de producción,
- $\mathcal{F}$ (caligráfica) denota la función retorno, y
- $\tilde{x}$ denota un plan factible.

Expresado en términos de sucesiones infinitas, los problemas en los que estamos interesados son de la forma

$$\sup_{\{x_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \mathcal{F}(x_t, x_{t+1}) \tag{PS}$$

$$\text{s. a } x_{t+1} \in \Gamma(x_t),\ t = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$x_0 \in X \text{ dado.}$$

Correspondiendo a cualquiera de estos problemas, tenemos una ecuación funcional de la forma

$$v(x) = \sup_{y \in \Gamma(x)} [\mathcal{F}(x, y) + \beta v(y)], \text{ para todo } x \in X. \tag{EF}$$

En este capítulo establecemos la relación entre las soluciones a estos problemas y desarrollamos métodos para analizar el último.

Ejercicio 1 *a. Muestre que el modelo de crecimiento de un sector discutido al inicio del Capítulo* **??** *puede ser expresado como en PS.*

b. Muestre que el modelo de crecimiento de muchos sectores

$$\sup_{\{(c_t, k_{t+1})\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t)$$

$$s.\ a\ (k_{t+1} + c_t, k_t) \in Y,\ t = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$dado\ k_0 \in \mathbb{R}^l_+,$$

donde $Y \subseteq \mathbb{R}^{2l}_+$ es un conjunto de producción fijo, también puede ser escrito de esta manera.

Como insinuamos en el último capítulo y mostramos en este, algunas herramientas matemáticas muy potentes -y relativamente simples- pueden ser usadas para estudiar la ecuación funcional (EF). Sin embargo, para tomar ventaja de estas, debemos mostrar que las soluciones a (EF) corresponden a las soluciones al problema secuencial (PS). En la sección 1 establecemos rigurosamente las conexiones entre las soluciones a estos dos problemas, conexiones que Richard Bellman llamó el *Principio de Optimalidad*. Entonces la sección 2 desarrolla los principales resultados del capítulo: teoremas de existencia, unicidad, y caracterización para las soluciones a (EF) bajo el supuesto de que la función retorno $\mathcal{F}$ es acotada. El caso en que $\mathcal{F}$ exhibe retornos constantes a escala es tratado en la sección 3, y el caso en que $\mathcal{F}$ es una función retorno no acotada arbitraria en la sección 4. La sección 5 trata la relación entre el enfoque de programación dinámica de la optimización a lo largo del tiempo y el enfoque (variacional) clásico. La Sección 4.6 contiene referencias para discusión adicional de algunas de las ideas matemáticas y económicas. En el Capítulo 5 ilustramos cómo los métodos desarrollados en las secciones 2-4 pueden ser aplicados a una gran variedad de problemas económicos.

1. El Principio de Optimalidad

En esta sección estudiamos la relación entre las soluciones a los problemas (PS) y (EF). (Nótese que "sup" ha sido usado en lugar de "máx" en ambos, de tal manera que podemos ignorar -por el momento- la pregunta de si el óptimo es alcanzado.) La idea general, por supuesto, es que la solución υ a (EF), evaluada en x_0, da lugar al valor del supremo en (PS) cuando el estado inicial es x_0 y que una sucesión $\{x_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ alcanza el supremo en (PS) si y solo si satisface

$$\upsilon(x_t) = \mathcal{F}(x_t, x_{t+1}) + \beta\upsilon(x_{t+1}),\ t = 0, 1, 2, \ldots. \tag{1}$$

Richard Bellman llamó a estas ideas el Principio de Optimalidad. Intuitivo como es, el Principio necesita ser demostrado. Escribir de manera precisa las condiciones bajo las cuales se mantiene es nuestra tarea en esta sección.

Los principales resultados son el Teorema 1, que establece que la función supremo υ^* para el problema secuencial (PS) satisface la ecuación funcional (EF), y el Teorema 2, que establece un inverso parcial. La naturaleza "parcial" del inverso surge del hecho de que se debe imponer una condición de acotación. Entonces los Teoremas 3 y 4 se encargan de la caracterización de las políticas óptimas. El Teorema 3 muestra que si $\{x_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ es una sucesión que alcanza el supremo en (PS), entonces satisface (1) para $\upsilon = \upsilon^*$. De manera inversa, el Teorema 4 establece que cualquier sucesión $\{x_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ que satisface (1) para $\upsilon = \upsilon^*$, y también satisface una condición de acotación, alcanza el supremo en (PS). Así, los cuatro teoremas tomados juntos establecen condiciones bajo las cuales las soluciones a (PS) y a (EF) coinciden exáctamente, y las políticas óptimas son aquellas que satisfacen (1).

Para comenzar debemos establecer cierta notación. Sea X el conjunto de posibles valores para la variable de estado x. En esta sección no necesitaremos imponer ninguna restricción sobre el conjunto X. Puede ser un subconjunto de un espacio Euclideano, un conjunto de funciones, un conjunto de distribuciones de probabilidad, o cualquier otro conjunto. Sea $\Gamma : X \rightrightarrows X$ la correspondencia que describe las restricciones de factibilidad. Esto es, para cada $x \in X$, $\Gamma(x)$ es el conjunto de valores factibles para la variable de estado en el siguiente período si el estado actual es x. Sea A el grafo de Γ:

$$A = \{(x, y) \in X \times X : y \in \Gamma(x)\}.$$

Sea la función de valor real $\mathcal{F} : A \to \mathbb{R}$ la función retorno de un período, y sea $\beta \geq 0$ el factor de descuento (estacionario). Entonces los "dados" para el problema son X, Γ, $\mathcal{F}$, y β.

Primero debemos establecer condiciones bajo las cuales el problema (PS) está bien definido. Esto es, debemos encontrar condiciones bajo las cuales el conjunto factible es no vacío y la función objetivo está bien definida para todo punto en el conjunto factible.

Llámese a cualquier sucesión $\{x_t^*\}_{t=0}^{\infty}$ en X un *plan*. Dado $x_0 \in X$, sea

$$\Pi(x_0) = \{\{x_t\}_{t=0}^{\infty} : x_{t+1} \in \Gamma(x_t), \, t = 0, 1, \ldots\}$$

el conjunto de planes que son *factibles desde* x_0. Esto es, $\Pi(x_0)$ es el conjunto de todas las sucesiones $\{x_t\}$ que satisfacen las restricciones en (PS). Denote $\tilde{x} = (x_0, x_1, \ldots)$ un elemento típico de $\Pi(x_0)$. El siguiente supuesto asegura que $\Pi(x_0)$ es no vacío, para todo $x_0 \in X$.

Supuesto 1 $\Gamma(x)$ *es no vacío, para todo* $x \in X$.

La única restricción adicional sobre X, Γ, $\mathcal{F}$, y β que necesitaremos en esta sección es un requerimiento de que todos los planes factibles puedan ser evaluados usando la función objetivo $\mathcal{F}$ y la tasa de descuento β.

Supuesto 2 *Para todo* $x_0 \in X$ *y* $\tilde{x} \in \Pi(x_0)$,

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{t=0}^{n} \beta^t \mathcal{F}(x_t, x_{t+1}) \text{ existe (aunque puede ser } +\infty \text{ o } -\infty).$$

Hay una variedad de formas de asegurar que el Supuesto 2 se cumple. Claramente se satisface si la función $\mathcal{F}$ es acotada y $0 < \beta < 1$. Alternativamente, para cualquier $(x, y) \in A$, sea

$$\mathcal{F}^+(x, y) = \max\{0, \mathcal{F}(x, y)\} \text{ y } \mathcal{F}^-(x, y) = \max\{0, -\mathcal{F}(x, y)\}. \tag{2}$$

Entonces el Supuesto 2 se cumple si para cada $x_0 \in X$ y $\tilde{x} \in \Pi(x_0)$, ya sea

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{t=0}^{n} \beta^t \mathcal{F}^+(x_t, x_{t+1}) \quad < \quad +\infty, \text{ o} \tag{3}$$
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{t=0}^{n} \beta^t \mathcal{F}^-(x_t, x_{t+1}) \quad < \quad +\infty, \text{ o ambos.} \tag{4}$$

Entonces una condición suficiente para los Supuestos 1-2 es que $\mathcal{F}$ sea acotada por encima o por debajo y $0 < \beta < 1$. Otra condición suficiente es que para cada $x_0 \in X$ y $\tilde{x} \in \Pi(x_0)$, existe $\theta \in (0, \beta^{-1})$ y $0 < c < \infty$ tal que

$$\mathcal{F}(x_t, x_{t+1}) \leq c\theta^t, \text{ para todo } t. \tag{5}$$

El siguiente ejercicio provee una forma de verificar que lo último se cumple.

Ejercicio 2 *a. Muestre que el Supuesto 2 se cumple si $X = \mathbb{R}^l_+$; $0 < \beta < 1$; existe $0 < \theta < 1/\beta$ tal que $y \in \Gamma(x)$ implica $\|y\| = \theta \|x\|$; $\mathcal{F}(0,0) = 0$; $\mathcal{F}$ es creciente en sus primeros l argumentos y decreciente en sus últimos l argumentos; $\mathcal{F}$ es cóncava en sus primeros l argumentos; y $0 \in \Gamma(x)$, para todo x.*

b. Muestre que el Supuesto 2 se cumple si $X = \mathbb{R}^l_+$; $0 < \beta < 1$; existe $0 < \theta < 1/\beta$ tal que $y \in \Gamma(x)$ implica $\mathcal{F}(y, 0) \leq \theta\mathcal{F}(x, 0)$; $\mathcal{F}$ es creciente en sus primeros l argumentos y decreciente en sus últimos l argumentos; y $0 \in \Gamma(x)$, para todo x.

Para cada $n = 0, 1, \ldots$, defínase $u_n : \Pi(x_0) \to \mathbb{R}$ mediante

$$u_n(\tilde{x}) = \sum_{t=0}^{n} \beta^t \mathcal{F}(x_t, x_{t+1}).$$

Entonces $u_n(\tilde{x})$ es la suma parcial de los retornos (descontados) en los períodos desde 0 hasta n del plan factible $\tilde{x}$. Bajo el Supuesto 2 también podemos definir $u : \Pi(x_0) \to \bar{\mathbb{R}}$ mediante

$$u(\tilde{x}) = \lim_{n\to\infty} u_n(\tilde{x}),$$

donde $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ es el conjunto de los números reales extendidos. De esta manera $u(\tilde{x})$ es la suma (infinita) de retornos descontados de la sucesión factible $\tilde{x}$.

Si los Supuestos 1 y 2 se cumplen, entonces el conjunto de planes factibles $\Pi(x_0)$ es no vacío para cada $x_0 \in X$, y la función objetivo en (PS) está bien definida para cada plan $\tilde{x} \in \Pi(x_0)$. Podemos entonces definir la *función supremo* $v^* : X \to \bar{\mathbb{R}}$ mediante

$$v^*(x_0) = \sup_{\tilde{x} \in \Pi(x_0)} u(\tilde{x}).$$

Entonces $v^*(x_0)$ es el supremo en (PS). Nótese que se sigue por definición que v^* es la única función que satisface las siguientes tres condiciones:

a. si $|v^*(x_0)| < \infty$, entonces

$$v^*(x_0) \geq u(\tilde{x}), \text{ para todo } \tilde{x} \in \Pi(x_0); \tag{6}$$

y para cualquier $\varepsilon > 0$,

$$v^*(x_0) < u(\tilde{x}) + \varepsilon, \text{ para algun } \tilde{x} \in \Pi(x_0); \tag{7}$$

b. si $v^*(x_0) = +\infty$, entonces existe una sucesión $\{\tilde{x}^k\}$ en $\Pi(x_0)$ tal que $\lim_{k\to\infty} u\left(\tilde{x}^k\right) = +\infty$; y

c. si $v^*(x_0) = -\infty$, entonces $u(\tilde{x}) = -\infty$, para todo $\tilde{x} \in \Pi(x_0)$.

Nuestro interés está en las conexiones entre la función supremo v^* y las soluciones v de la ecuación funcional (EF). Al interpretar los siguientes resultados, es importante recordar que v^* está siempre inequívocamente definida (provistos que los Supuestos 1 y 2 se cumplen), mientras que (EF) puede -por todo lo que sabemos hasta ahora- tener cero, una o muchas soluciones.

Diremos que v^* satisface la ecuación funcional si se cumplen tres condiciones:

a. Si $|v^*(x_0)| < \infty$, entonces

$$v^*(x_0) \geq \mathcal{F}(x_0, y) + \beta v^*(y), \text{ para todo } y \in \Gamma(x_0); \tag{8}$$

y para cualquier $\varepsilon > 0$,

$$v^*(x_0) < \mathcal{F}(x_0, y) + \beta v^*(y) + \varepsilon, \text{ para algun } y \in \Gamma(x_0); \tag{9}$$

b. si $\upsilon^*(x_0) = +\infty$, entonces existe una sucesión $\{y^k\}$ en $\Gamma(x_0)$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} [\mathcal{F}(x_0, y^k) + \beta\upsilon^*(y^k)] = +\infty; \tag{10}$$

c. si $\upsilon^*(x_0) = -\infty$, entonces

$$\mathcal{F}(x_0, y) + \beta\upsilon^*(y) = -\infty, \text{ para todo } y \in \Gamma(x_0). \tag{11}$$

Antes de que demostremos que la función supremo υ^* satisface la ecuación funcional, es útil establecer un resultado preliminar.

Lema 1 *Satisfagan $X, \Gamma, \mathcal{F}$ y β el Supuesto 2. Entonces, para cualquier $x_0 \in X$ y cualquier $(x_0, x_1, \ldots) = \tilde{x} \in \Pi(x_0)$,*

$$u(\tilde{x}) = \mathcal{F}(x_0, x_1) + \beta u(\tilde{x}'),$$

donde $\tilde{x}' = (x_1, x_2, \ldots)$.

Teorema 1 *Satisfagan X, Γ, $\mathcal{F}$ y β los Supuestos 1-2. Entonces la función υ^* satisface (EF).*

El siguiente teorema proporciona un inverso parcial al Teorema 1. Muestra que υ^* es la única solución de la ecuación funcional que satisface cierta condición de acotación.

Teorema 2 *Satisfagan X, Γ, $\mathcal{F}$ y β los Supuestos 1-2. Si υ es una solución de (EF) y satisface*

$$\lim_{n\to\infty} \beta^n \upsilon(x_n) = 0, \textit{ para todo } (x_0, x_1, \ldots) \in \Pi(x_0), \textit{ para todo } x_0 \in X, \tag{12}$$

entonces $\upsilon = \upsilon^*$.

Es una consecuencia inmediata del Teorema 2 que la ecuación funcional (EF) posee como mucho una solución que satisfaga (12).

En resumen, hemos establecido dos resultados principales sobre las soluciones a (EF). El Teorema 1 muestra que υ^* satisface (EF). La ecuación funcional puede tener otras soluciones también, pero el Teorema 2 muestra que estas soluciones extrañas siempre violan (12). Por lo tanto una solución a (EF) que satisface (12) es υ^*. El siguiente ejemplo es un caso donde (EF) posee una solución extraña además de υ^*.

Considere un consumidor cuya función objetivo es simplemente el consumo descontado. El consumidor posee riqueza inicial $x_0 \in X = \mathbb{R}$, y puede endeudarse o prestar a la tasa de interés $\beta^{-1} - 1$, donde $\beta \in (0, 1)$. No hay restricciones al endeudamiento, de manera que el problema es simplemente

$$\max_{\{c_t, x_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t c_t$$

$$\text{s. a } 0 \leq c_t \leq x_t - \beta x_{t+1},\ t = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$x_0 \text{ dado.}$$

Ya que el consumo no está acotado, la función supremo es obviamente $\upsilon^*(x) = +\infty$, para todo x. Ahora considere la formulación recursiva de este problema. La función retorno es $\mathcal{F}(x, y) = x - \beta y$, y la correspondencia que describe el conjunto factible es $\Gamma(x) = (-\infty, \beta^{-1}x]$; de manera que la ecuación funcional es

$$\upsilon(x) = \sup_{y \leq \beta^{-1}x} [x - \beta y + \beta \upsilon(y)].$$

La función $\upsilon^*(x) = +\infty$ satisface esta ecuación, como lo implica el Teorema 1, pero la función $\upsilon(x) = x$ también la satisface. Pero ya que la sucesión $x_t = \beta^{-1}x_0$, $t = 0, 1, \ldots$, está en $\Pi(x_0)$, (12) no se cumple y el Teorema 2 no aplica.

El siguiente ejercicio da dos variaciones al Teorema 2 que son algunas veces útiles cuando (12) no se cumple.

Ejercicio 3 *Satisfagan X, Γ, $\mathcal{F}$ y β los Supuestos 1-2. Sea υ una solución de (EF) con*

$$\limsup_{t\to\infty} \beta^n \upsilon(x_n) \leq 0, \text{ para todo } x_0 \in X, \text{ para todo } (x_0, x_1, \ldots) \in \Pi(x_0), \tag{13}$$

a. Muestre que $\upsilon \leq \upsilon^*$.

b. Suponga adicionalmente que para cada $x_0 \in X$ y $\tilde{x} \in \Pi(x_0)$, existe $\tilde{x}' = (x_0, x_1', x_2', \ldots) \in \Pi(x_0)$ tal que $\lim_{n\to\infty} \beta^n \upsilon(x_n') = 0$ y $u(\tilde{x}') \geq u(\tilde{x})$. Muestre que $\upsilon = \upsilon^*$.

Nuestra siguiente tarea es caracterizar planes factibles que alcancen el óptimo, si es que alguno lo consigue. Llame a un plan factible $\tilde{x} \in \Pi(x_0)$ un *plan óptimo desde* x_0 si alcanza el supremo en (PS), esto es, si $u(\tilde{x}) = v^*(x_0)$. Los siguientes dos teoremas se encargan de la relación entre los planes óptimos y aquellos que satisfacen la ecuación de política (1) para $v = v^*$. El siguiente teorema muestra qué planes óptimos satisfacen (1).

Teorema 3 *Satisfagan X, Γ, $\mathcal{F}$ y β los Supuestos 1-2. Sea $\tilde{x}^* \in \Pi(x_0)$ un plan factible que alcanza el supremo en (PS) para el estado inicial x_0. Entonces*

$$v^*(x_t^*) = \mathcal{F}(x_t^*, x_{t+1}^*) + \beta v^*(x_{t+1}^*),\ t = 0, 1, 2, \ldots. \tag{14}$$

El siguiente teorema proporciona un inverso parcial al Teorema 3. Muestra que cualquier sucesión que satisfaga (14) y una condición de acotación es un plan óptimo.

Teorema 4 *Satisfagan X, Γ, $\mathcal{F}$ y β los Supuestos 1-2. Sea $\tilde{x}^* \in \Pi(x_0)$ un plan factible desde x_0 que satisface (14), y con*

$$\limsup_{t\to\infty} \beta^t v^*(x_t^*) \leq 0. \tag{15}$$

Entonces $\tilde{x}^*$ alcanza el supremo en (PS) para el estado inicial x_0.

El ejemplo de consumo usado después del Teorema 2 puede ser modificado para ilustrar por qué se necesita 15. Sean las preferencias como se especificó anteriormente, de manera que $c_t = x_t - \beta x_{t+1} = \mathcal{F}(x_t, x_{t+1})$, para todo t. Sin embargo, prohibamos el endeudamiento al requerir $x_t \geq 0$, para todo t. Entonces en forma secuencial el problema es

$$\max_{\{x_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (x_t - \beta x_{t+1})$$
$$\text{s. a } 0 \leq x_{t+1} \leq \beta^{-1} x_t,\ t = 0, 1, \ldots,$$
$$x_0 \text{ dado.}$$

Si cancelamos todos los términos compensados en la función objetivo, se sigue inmediatamente que la función supremo es $v^* = x_0$, para todo $x_0 \geq 0$. Es también claro que v^* satisface la ecuación funcional

$$v^*(x) = \max_{y \in [0, \beta^{-1} x]} [(x - \beta y) + \beta v^*(y)], \text{ para todo } x,$$

como lo implica el Teorema 2.

Consideremos ahora los planes que alcanzan el óptimo. Dado cualquier $x_0 \geq 0$, el conjunto de planes factibles $\Pi(x_0)$ está conformado por las sucesiones

$$(x_0, 0, 0, 0, \ldots),(x_0, \beta^{-1}x_0, 0, 0, \ldots),(x_0, \beta^{-1}x_0, \beta^{-2}x_0, 0, \ldots), \text{ etc.},$$

y todas las conbinaciones convexas de las mismas. Por lo tanto cualquier plan factible satisface 14. Es directo verificar que, como lo implica el Teorema 4, cualquier plan que satisface (15) también rinde una utilidad $\upsilon^*(x_0) = x_0$. (Esencialmente, no importa cuándo ocurra el consumo mientras ocurra en un tiempo finito.) Por otro lado, el plan factible $x_t = \beta^{-1}x_0$, $t = 0, 1, \ldots$, (en cada período invierta todo y no consuma nada) rinde una utilidad descontada de cero, para todo $x \geq 0$. Para $x > 0$, sin embargo, viola (15), de manera que el Teorema 4 no aplica.

Llamaremos a cualquier correspondencia no vacía $G : X \to X$, con $G(x) \subseteq \Gamma(x)$, para todo $x \in X$, una *correspondencia de política*, ya que $G(x)$ es un conjunto factible de acciones si el estado es x. Si G es de valor único, la llamamos una *función de política* y la denotamos mediante una g minúscula. Si una sucesión $\tilde{x} = (x_0, x_1, \ldots)$ satisface $x_{t+1} \in G(x_t)$, $t = 0, 1, 2, \ldots$, diremos que $\tilde{x}$ es *generada desde x_0 por G*.

Finalmente, definiremos la *correspondencia de política óptima G^** mediante

$$G^*(x) = \{y \in \Gamma(x) : \upsilon^*(x) = \mathcal{F}(x, y) + \beta\upsilon^*(y)\}.$$

Entonces el Teorema 3 muestra que cada plan óptimo $\{x_t^*\}$ es generado desde G^*, y el Teorema 4 muestra que cualquier plan $\{x_t^*\}$ generado desde G^* -si, adicionalmente, satisface (15)- es un plan óptimo.

2. Rendimientos Acotados

En esta sección estudiamos ecuaciones funcionales de la forma

$$v(x) = \max_{y \in \Gamma(x)} [\mathcal{F}(x, y) + \beta v(y)] \tag{16}$$

bajo el supuesto de que la función $\mathcal{F}$ es acotada y que el factor de descuento β es estríctamente menor a uno.

Como se mencionara anteriormente, sea X el conjunto de los posibles valores para la variable de estado; sea $\Gamma : X \rightrightarrows X$ la correspondencia que describe las restricciones de factibilidad; sea $A = \{(x, y) \in X \times X : y \in \Gamma(x)\}$ el grafo de Γ; sea $\mathcal{F} : A \to \mathbb{R}$ la función retorno; y sea $\beta \geq 0$ el factor de descuento. A lo largo de esta sección, impondremos los dos siguientes supuestos sobre X, Γ, $\mathcal{F}$, y β.

Supuesto 3 *X es un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^l$, y la correspondencia $\Gamma : X \rightrightarrows X$ es no vacía, de valor compacto y continua.*

Supuesto 4 *La función $\mathcal{F} : A \to \mathbb{R}$ es acotada y continua, y $0 < \beta < 1$.*

Está claro que bajo los Supuestos 3-4, los Supuestos 1-2 se mantienen, de manera que el problema secuencial correspondiente a (16) está bien definido. Es más, los Teoremas 1-4 implican que bajo estos supuestos las soluciones a (16) coinciden exáctamente -tanto en términos de valores y planes óptimos- a las soluciones del problema secuencial.

El requisito de que X sea un subconjunto de un espacio Euclideano de dimensión finita puede ser relajado en mucho de lo que sigue, pero al costo una inversión adicional sustancial en terminología y notación. (Recuerde que las definiciones de s.c.s y s.c.i. provistas en el Capítulo **??** aplicaban solo a correspondencias de un espacio Euclideano a otro.) Sin embargo, muchos de los argumentos en esta sección aplican de manera mucho más amplia. También nótese que el supuesto de que X es convexo no es necesario para los Teoremas 5 y 6.

Si B es una cota para $|\mathcal{F}(x,y)|$, entonces la función supremo v^* satisface $|v^*(x)| \leq B/(1-\beta)$, para todo $x \in X$. En este caso es natural buscar soluciones a (16) en el espacio $C(X)$ de funciones contínuas y acotadas $f : X \to \mathbb{R}$, con la norma del supremo: $\|f\| = \sup_{x\in X} |f(x)|$. Claramente, cualquier solución de (16) en $C(X)$ satisface las hipótesis del Teorema 2 y por lo tanto es la función supremo. Además, dada una solución $v \in C(X)$ de (16), podemos definir la correspondencia de política $G : X \to X$ mediante

$$G(x) = \{y \in \Gamma(x) : v(x) = \mathcal{F}(x,y) + \beta v(y)\}, \tag{17}$$

y los Teoremas (3) y (4) implican que para cualquier $x_0 \in X$, una sucesión $\{x_t^*\}$ alcanza el supremo en el problema secuencial si y solo si es generada por G.

El resto de la sección procede como sigue. Defina el operador $\mathcal{T}$ sobre $C(x)$ mediante

$$(\mathcal{T}f)(x) = \max_{y\in\Gamma(x)} [\mathcal{F}(x,y) + \beta f(y)], \tag{18}$$

de manera que (16) se convierte en $v = \mathcal{T}v$. Primero, si solo usamos las restricciones de continuidad y acotación en los Supuestos 3 y 4, el Teorema 5 establece que $\mathcal{T} : C(X) \to C(X)$, que $\mathcal{T}$ posee un único punto fijo en $C(X)$, y que la correspondencia de política G definida en (17) es no vacía y s.c.s. El Teorema 6 establece que bajo restricciones de monotonicidad adicionales sobre $\mathcal{F}$ y Γ, v es estríctamente creciente. El Teorema 7 establece que bajo restricciones adicionales de concavidad sobre $\mathcal{F}$ y restricciones de convexidad sobre Γ, v es estríctamente cóncava y G es una función (es decir, de valor único) contínua. El Teorema 8 muestra que si $\{v_n\}$ es una sucesión de aproximaciones definida por $v_n = \mathcal{T}^n v_0$, con v_0 apropiadamente elegida, entonces la sucesión de funciones de política asociadas $\{g_n\}$ converge uniformemente a la función de política óptima g dada por (17). Finalmente, el Teorema 10 establece que si $\mathcal{F}$ es contínuamente diferenciable, entonces v también lo es.

Teorema 5 *Satisfagan X, Γ, $\mathcal{F}$ y β los Supuestos 3 y 4, y sea $C(X)$ el espacio de todas las funciones continuas y acotadas $\mathcal{F} : X \to \mathbb{R}$, con la norma del supremo. Entonces el operador $\mathcal{T}$ mapea $C(X)$ a sí mismo, $\mathcal{T} : C(X) \to C(X)$; $\mathcal{T}$ tiene un único punto fijo $v \in C(x)$; y para todo $v_0 \in C(x)$,*

$$\|\mathcal{T}^n v_0 - v\| \leq \beta^n \|v_0 - v\|, \ n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{19}$$

Además, dado v, la correspondencia de política óptima $G : X \to X$ definida por (17) es de valor compacto y s.c.s.

Se sigue inmediatamente del Teorema 2 que bajo las hipótesis del Teorema 5, la única función continua y acotada v que satisface (16) es la función supremo para el problema secuencial asociado. Esto es, los Teoremas 2 y 5 juntos establecen que bajo los Supuestos 3-3 la función supremo es acotada y contínua. Además, se sigue entonces de los Teoremas 4 y 5 que existe al menos un plan óptimo: cualquier plan generado por la correspondencia (no vacía) G es óptima.

Para caracterizar v y G de manera más precisa, necesitamos más información acerca de $\mathcal{F}$ y Γ. Los siguientes dos resultados muestran cómo el Corolario **??** del Teorema de la Aplicación Contractiva puede ser usado para obtener caracterizaciones más precisas de v y G.

Supuesto 5 *Para cada y, $\mathcal{F}(\cdot, y)$ es estríctamente creciente en cada uno de sus primeros l argumentos.*

Supuesto 6 *Γ es monótona en el sentido que $x \leq x'$ implica $\Gamma(x) \subseteq \Gamma(x')$.*

Teorema 6 *Satisfagan X, Γ, $\mathcal{F}$ y β los Supuestos 3-6, y sea v la única solución a (16). Entonces v es estríctamente creciente.*

Supuesto 7 *$\mathcal{F}$ es estríctamente cóncava; es decir,*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\theta(x,y) + (1-\theta)(x',y')] &\geq \theta\mathcal{F}(x,y) + (1-\theta)\mathcal{F}(x',y'), \\ \text{para todo } (x,y),\ (x',y') &\in A, \text{ y para todo } \theta \in (0,1), \end{aligned}$$

y la desigualdad es estrícta si $x \neq x'$.

Supuesto 8 *Γ es convexa en el sentido que para cualquier $0 \leq \theta \leq 1$, y $x, x' \in X$,*

$$y \in \Gamma(x) \text{ e } y' \in \Gamma(x') \text{ implica } \theta y + (1-\theta)y' \in \Gamma[\theta x + (1-\theta)x'].$$

El Supuesto 8 implica que para cada $x \in X$, el conjunto $\Gamma(x)$ es convexo y no hay "retornos crecientes." Nótese que ya que X es convexo, el Supuesto 8 es equivalente a asumir que el gráfo de Γ (el conjunto A) es convexo.

Teorema 7 *Satisfagan X, Γ, $\mathcal{F}$ y β los Supuestos 3-4 y 7-8; satisfaga v (16); y satisfaga G (17). Entonces v es estríctamente cóncava y G es una función continua y de valor único.*

Los Teoremas 6 y 7 caracterizan la función valor al usar el hecho de que el operador $\mathcal{T}$ preserva ciertas propiedades. Entonces si v_0 tiene la propiedad P y P es preservada bajo $\mathcal{T}$, entonces podemos concluir que cada función en la sucesión $\{\mathcal{T}^n v_0\}$ tiene la propiedad P. Entonces, si P es preservada bajo convergencia uniforme, podemos concluir que v también tiene la propiedad P. La misma idea general puede ser usada para establecer hechos acerca de la función de política g, pero necesitamos establecer el sentido en el cual las funciones de política aproximadas -las funciones g_n que alcanzan $\mathcal{T}^n v_0$- convergen a g. El siguiente resultado se basa en el Teorema **??** para abordar este asunto.

Teorema 8 *(Convergencia de las funciones de política) Satisfagan X, Γ, $\mathcal{F}$ y β los Supuestos 3-4 y 7-8; y satisfagan v y g (16) y (17). Sea $C'(X)$ el conjunto de las funciones continuas, acotadas y cóncavas $f : X \to \mathbb{R}$, y sea $v \in C'(X)$. Sea $\{(v_n, g_n)\}$ definida por*

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \mathcal{T} v_n,\ n = 0, 1, 2, \ldots,\ y \\ g_n(x) &= \arg\max_{y \in \Gamma(x)} [\mathcal{F}(x, y) + \beta v_n(y)],\ n = 0, 1, 2, \ldots. \end{aligned}$$

Entonces $g_n \to g$ punto por punto. Si X es compacto, entonces la convergencia es uniforme.

El siguiente ejercicio se encarga del caso en que el espacio de estados X es finito o contable, como ocurre en las aplicaciones computacionales.

Ejercicio 4 *Sea $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ un conjunto finito o contable; sea la correspondencia $\Gamma : X \rightrightarrows X$ no vacía y de valor finito; sea $A = \{(x, y) \in X \times X : y \in \Gamma(x)\}$; sea $\mathcal{F} : A \to \mathbb{R}$ una función acotada; y sea $0 < \beta < 1$. Sea $B(X)$ el conjunto de las funciones acotadas $f : X \to \mathbb{R}$, con la norma del supremo. Defina el operador $\mathcal{T}$ mediante (18).*

a. Muestre que $\mathcal{T} : B(X) \to B(X)$; que $\mathcal{T}$ tiene un único punto fijo $v \in B(X)$; que (19) se cumple para todo $v_0 \in B(X)$; y que la correspondencia de política óptima $G : X \rightrightarrows X$ definida por (17) es no vacía.

Sea H el conjunto de funciones $h : X \to X$ tales que $h(x) \in \Gamma(x)$, para todo $x \in X$. Para cualquier $h \in H$, defina el operador $\mathcal{T}_h$ sobre $B(X)$ mediante $(\mathcal{T}_h f)(x) = \mathcal{F}[x, h(x)] + \beta f[h(x)]$.

b. Muestre que para cualquier $h \in H$, $\mathcal{T}_h : B(X) \to B(X)$, y $\mathcal{T}_h$ tiene un único punto fijo $w \in B(X)$.

Sea $h_0 \in H$ dado, y considere el siguiente algoritmo. Dado h_n, sea w_n el único punto fijo de $\mathcal{T}_{h_n}$. Dado w_n, escoja h_{n+1} de manera que $h_{n+1}(x) \in \arg\max_{y\in\Gamma(x)}[\mathcal{F}(x, y) + \beta w_n(y)]$.

c. Muestre que la sucesión de funciones $\{w_n\}$ converge a v, el único punto fijo de $\mathcal{T}$. [Ayuda. Muestre que $w_0 \le \mathcal{T}w_0 \le w_1 \le \mathcal{T}w_1 \le \ldots$.]

Un algoritmo basado en el Ejercicio 4 involucra aplicar los operadores $\mathcal{T}_{h_n}$ -operadores que no requieren ninguna maximización- repetidamente y aplicar $\mathcal{T}$ solo infrecuentemente. Ya que la maximización es usualmente el paso costoso en estos cómputos, los ahorros pueden ser considerables.

Una vez que la existencia de una única solución $v \in C(X)$ de la ecuación funcional (16) ha sido establecida, nos gustaría tratar el problema del máximo en dicha ecuación como un problema de programación ordinario y usar los métodos estándar de cálculo para caracterizar la función de política g. Por ejemplo, considérese la ecuación funcional para el modelo de crecimiento con un sector:

$$v(x) = \max_{0\le y\le f(x)} \{U[f(x) - y] + \beta v(y)\}.$$

Si supiéramos que v es diferenciable (y que la solución del problema del máximo en (16) siempre es interior), entonces la función de política g podría ser dada implícitamente por la condición de primer orden

$$U'[f(x) - g(x)] - \beta v'[g(x)] = 0. \tag{20}$$

Además, si supiéramos que v fuera dos veces diferenciable, la monotonicidad de g podría ser establecida al diferenciar (20) con respecto a x y examinar la expresión resultante para g'. Sin embargo, la legitimidad de estos métodos depende de la diferenciabilidad de las funciones U, f, v, y g. Somos libres de adoptar el supuesto de diferenciabilidad que elijamos para U y f, pero las propiedades de v y g deben ser establecidas. Ahora nos enfocamos en lo que se conoce sobre este problema.

Benveniste y Scheinkman (1979) han mostrado que bajo condiciones suficientemente generales la función v es *una vez* diferenciable. Esto es (20) es válida bajo condiciones muy amplias. Sin embargo, condiciones conocidas que aseguren que v es *dos veces* diferenciable (y por lo tanto que g es una vez diferenciable) son extremadamente fuertes (véase Araujo y Scheinkman, 1977). Por lo tanto, diferenciar (20) es rara vez útil como una forma de establecer las propiedades de g. Sin embargo, en casos en que g es monótona, es usualmente posible establecer ese hecho mediante un argumento directo que involucra una condición de primer orden como (20).

Comenzamos con el teorema demostrado por Benveniste y Scheinkman.

Teorema 9 *(Benveniste y Scheinkman) Sea $X \subseteq \mathbb{R}^l$ un conjunto convexo, sea $V : X \to \mathbb{R}$ cóncava, sea $x_0 \in int(X)$, y sea D una vecindad de x_0. Si existe una función cóncava y diferenciable $W : D \to \mathbb{R}$, con $W(x_0) = V(x_0)$ y con $W(x) \leq V(x)$ para todo $x \in D$, entonces V es diferenciable en x_0 y*

$$V_i(x_0) = W_i(x_0),\ i = 1, 2, \ldots, l.$$

La Figura 1 ilustra la idea detrás de este resultado.

Figura 1: Idea del teorema de Benveniste y Scheinkman

Aplicar este resultado a programas dinámicos es sencillo, dada la siguiente restricción adicional.

Supuesto 9 *$\mathcal{F}$ es continuamente diferenciable en el interior de A.*

Teorema 10 *(Diferenciabilidad de la función valor) Satisfagan X, Γ, $\mathcal{F}$ y β los Supuestos 3-4 y 7-9, y satisfagan v y g (16) y (17). Si $x_0 \in int(X)$ y $g(x_0) \in int\Gamma(x_0)$, entonces v es continuamente diferenciable en x_0 con derivadas dadas por*

$$v_i(x_0) = \mathcal{F}_i[x_0, g(x_0)],\ i = 1, 2, \ldots, l.$$

Nótese que la demostración requiere solo que $\mathcal{F}$ sea diferenciable en sus primeros l argumentos.

Con la diferenciabilidad de la función valor establecida, es frecuentemente directo mostrar que la función de política óptima g es monótona, y acotar su pendiente.

Ejercicio 5 *Considere la condición de primer orden (20). Asuma que U, f, y v son estríctamente crecientes, estríctamente cóncavas, y contínuamente diferenciables, y que $0 < g(x) < f(x)$, para todo x. Use (20) para mostrar que g es estríctamente creciente y que su pendiente es menor que la pendiente de f. Es decir,*

$$0 < g(x') - g(x) < f(x') - f(x), \text{ si } x' > x.$$

[Ayuda. Refiérase a la Figura 2.]

Figura 2: Diagrama para el ejercicio

En aplicaciones específicas es a menudo posible obtener caracterizaciones más precisas de v o de G o de ambas que aquellas provistas por los teoremas anteriores. Es útil tener en mente que una vez que la existencia y la unicidad de la solución a (16) han sido establecidas, el lado derecho de dicha ecuación puede ser tratado como un problema ordinario de maximización. Entonces cualquier herramienta que pueda ser traída para lidiar con dicho problema debería ser explotada. Pero dichos argumentos usualmente se basan en las propiedades de $\mathcal{F}$ o de Γ o de ambas que son específicas a la aplicación a la mano.

Debería tambien ser enfatizado que incluso en casos que no se ajustan a los supuestos de esta sección, argumentos similares a los anteriores pueden frecuentemente ser usados. En este sentido los resultados anteriores deberían ser vistos como sugerentes, no (bajo ninguna circunstancia) definitivos. Las secciones 5.12 y 5.15 ilustran este punto, tal y como lo hacen muchas otras aplicaciones en la literatura. Una ilustración particularmente buena es el caso de problemas de programación dinámica que exhiben retornos constantes a escala, a los cuales nos dirigimos a continuación.

3. Rendimientos Constantes a Escala

A veces deseamos trabajar con funciones retorno $\mathcal{F}$ que no son acotadas. Por ejemplo, en el modelo de crecimiento óptimo con un sector, cualquier función de utilidad de la forma $U(c) = (c^{1-\sigma}-1)/(1-\sigma)$, $\sigma \geq 1$, junto con cualquier tecnología de la forma $f(k) = k^{\alpha}$, $0 < \alpha \leq 1$, da lugar a una función retorno no acotada. En este caso y otros como este, se viola el Supuesto 4 si se toma a X como todo el conjunto

$\mathbb{R}^l_+$. Existen varias formas de lidiar con problemas de este tipo.

En algunos casos es natural restringir a que el espacio de estados sea un conjunto compacto $X \subset \mathbb{R}^l_+$. Si Γ es de valor compacto y continua y si $\mathcal{F}$ es continua, entonces con esta restricción sobre X impuesta, $\mathcal{F}$ es acotada sobre el conjunto compacto A. En estos casos los argumentos en la sección 2 pueden ser aplicados directamente. Por lo tanto, muchas veces una elección juiciosa del espacio de estados es todo lo que necesitamos para aplicar aquellos argumentos a problemas en los cuales las funciones de utilidad, funciones de beneficios, y así, son no acotadas.

Sin embargo, existen muchos casos interesantes en donde el espacio de estados no puede ser restringido. Por ejemplo, ningun modelo de acumulación de capital en el cual la tecnología permita crecimiento sostenido puede ser tratado de esta manera. En esta sección y la siguiente, describimos dos formas en las cuales los argumentos en la Sección 2 pueden ser adaptados a modelos con retornos no acotados.

Esta sección se encarga de sistemas en los cuales la función retorno y las restricciones de factibilidad exhiben ambas retornos constantes a escala, y las restricciones tienen la propiedad adicional de que las sucesiones factibles $\{x_t\}$ no pueden crecer "muy rápido." Primero mostramos que los Teoremas 1-5 se cumplen para problemas de este tipo, de manera que las soluciones a la ecuación funcional corresponden exáctamente a las soluciones, tanto en términos de valores y políticas. Entonces los Teoremas 11 y 12 establecen que una ecuación funcional posee una única solución, y que esta solución y la correspondencia de política asociada son homogeneas de grado uno.

A lo largo de esta sección permitiremos que X sea un *cono convexo* en $\mathbb{R}^l$. Esto es, $X \subseteq \mathbb{R}^l$ es un conjunto convexo con la propiedad de que $x \in X$ implica $\alpha x \in X$, para cualquier $\alpha \geq 0$. Por ejemplo, $\mathbb{R}^l$ y $\mathbb{R}^l_+$ son ambos conos convexos. En lugar de los Supuestos 3 y 4, usaremos las siguientes restricciones. Al igual que en la Sección 2, denote A el grafo de Γ.

Supuesto 10 *$X \subseteq \mathbb{R}^l$ es un cono convexo. La correspondencia $\Gamma : X \rightrightarrows X$ es no vacía, de valor* *compacto, y continua, y para cualquier* $x \in X$*,*

$$y \in \Gamma(x) \text{ implica } \lambda y \in \Gamma(\lambda x), \text{ para todo } \lambda \geq 0.$$

Es decir, el grafo de Γ *es un cono. Adicionalmente, para algún* $\alpha \in (0, \beta^{-1})$*,*

$$\|y\|_E \leq \alpha \|x\|_E \,, \text{ para todo } x \in X \text{ e } y \in \Gamma(x),$$

(donde $\|\cdot\|_E$ *denota la norma Euclideana en* $\mathbb{R}^l$*).*

Supuesto 11 $\beta \in (0,1)$*; y* $\mathcal{F} : A \to \mathbb{R}$ *es continua y homogénea de grado uno, y para algún* $0 < B < \infty$*,*

$$|\mathcal{F}(x,y)| \leq B(\|x\|_E + \|y\|_E), \text{ para todo } (x,y) \in A.$$

El Supuesto 10 dice que la correspondencia Γ que describe las restricciones de factibilidad exhibe rendimientos constantes a escala, y acota la tasa de crecimiento $\{\|x_t\|\}_E$ para sucesiones factibles $\{x_t\}$ hasta β^{-1}. El Supuesto 11 dice que la función $\mathcal{F}$ exhibe retornos constantes a escala, e impone una cota uniforme sobre el ratio de $\mathcal{F}$ a la norma de sus argumentos.

Nuestra siguiente tarea consiste en elegir un espacio de funciones apropiado dentro del cual busquemos soluciones a la ecuación funcional y entonces definir un operador apropiado sobre dicho espacio. Buscaremos soluciones a la ecuación funcional dentro del espacio de funciones $f : X \to \mathbb{R}$ que son continuas y homogeneas de grado uno, y acotadas en el sentido que $|f(x)| / \|x\|_E < +\infty$, para todo $x \in X$. Para capturar lo último, es útil emplear la norma

$$\|f\| = \max_{\substack{\|x\|_E = 1 \\ x \in X}} |f(x)|. \tag{21}$$

Sea $H(X)$ el espacio de funciones $f : X \to \mathbb{R}$ que son continuas y homogéneas de grado uno, y acotadas en la norma en (21). Defínase el operador $\mathcal{T}$ sobre $H(X)$ mediante

$$(\mathcal{T}f)(x) = \sup_{y \in \Gamma(x)} \left[\mathcal{F}(x,y) + \beta f(y)\right]. \tag{22}$$

La propiedad de contracción del operador $\mathcal{T}$ puede ser verificada al usar una modificación de las condiciones suficientes de Blackwell para una contracción. Para cualquier función f que sea homogénea de grado uno y para cualquier $a \in \mathbb{R}$, definiremos en este contexto la función $f + a$ mediante

$$(f + a)(x) = f(x) + a \|x\|,$$

(donde aquí y en lo sucesivo descartamos el subíndice E). Es inmediato que $f+a$ es también homogénea de grado uno.

Teorema 11 *Sea $X \subseteq \mathbb{R}^l$ un cono convexo, y sea $H(X)$ como se define lineas arriba, con la norma en (21). Satisfaga $\mathcal{T} : H(X) \to H(X)$*

a. (monotonicidad) $f, g \in H$ y $f \leq g$ implican $\mathcal{T}f \leq \mathcal{T}g$;

b. (descuento) existe $\gamma \in (0, 1)$ tal que para todo $f \in H$ y todo $a \geq 0$, $\mathcal{T}(f + a) \leq \mathcal{T}f + \gamma a$.

Entonces $\mathcal{T}$ es una contracción con módulo γ.

Nuestro siguiente resultado usa este teorema para establecer que el operador $\mathcal{T}$ definido en (22) es una contracción con módulo $\alpha\beta$.

Teorema 12 *Satisfagan X, Γ, $\mathcal{F}$ y β los Supuestos 10 y 11, y defínase $H(X)$ como lineas arriba. Entonces el operador $\mathcal{T}$ definido en (22) tiene un único punto fijo $v \in H(X)$. Adicionalmente*

$$\|\mathcal{T}^n v_0 - v\| \leq (\alpha\beta)^n \|v_0 - v\|, \; n = 1, 2, \ldots, \text{ para todo } v_0 \in H(X); \tag{23}$$

y la correspondencia de política asociada $G : X \rightrightarrows X$ es de valor compacto y s.c.s. Además, G es homogénea de grado uno: para cualquier $x \in X$,

$$y \in G(x) \text{ implica } \lambda y \in G(\lambda x), \text{ para todo } \lambda \geq 0.$$

4. Rendimientos No Acotados

En esta sección presentamos un teorema que es útil cuando los Supuestos 1-2 se cumplen, de manera que la función supremo v^* satisface la ecuación funcional (Teorema 1), pero la hipótesis de acotación necesaria para la demostración del Teorema 2 no se cumple. En dichos casos la ecuación funcional puede también tener otras soluciones. El resultado principal de esta sección es el Teorema 13, el cual da condiciones suficientes para que una solución a la ecuación funcional sea la función supremo υ^*. Entonces mostramos cómo este resultado puede ser aplicado a dos modelos económicos con formas funcionales específicas. El primero es un modelo de crecimiento óptimo de un sector con una función de utilidad logarítmica y una función de producción Cobb-Douglas; el segundo es un modelo de inversión con una función objetivo cuadrática y restricciones lineales.

La demostración del Teorema 13 explota sólo la monotonicidad del operador $\mathcal{T}$, definido sobre el conjunto de todas las funciones $f : X \to \mathbb{R}$, mediante

$$(\mathcal{T} f)(x) = \sup_{y \in \Gamma(x)} \left[\mathcal{F}(x, y) + \beta f(y) \right].$$

La idea detrás de la demostración es empezar con una función $\hat{\upsilon}$ que es una cota superior para υ^* y entonces aplicar el operador $\mathcal{T}$ a $\hat{\upsilon}$, iterando hacia abajo y hacia un punto fijo.

Teorema 13 *Satisfagan X, Γ, $\mathcal{F}$ y β los Supuestos 1-2, y sean Π, u y υ^* definidas como en la sección 1. Supóngase que existe una función $\hat{\upsilon} : X \to \mathbb{R}$ tal que*

$$\begin{aligned} \mathcal{T}\hat{\upsilon} &\leq \hat{\upsilon}; & (24)\\ \lim_{n\to\infty} \beta^n \hat{\upsilon}(x_n) &\leq 0, \text{ para todo } x_0 \in X, \text{ para todo } \tilde{x} \in \Pi(x_0); & (25)\\ u(\tilde{x}) &\leq \hat{\upsilon}(x_0), \text{ para todo } x_0 \in X, \text{ para todo } \tilde{x} \in \Pi(x_0); & (26) \end{aligned}$$

Si la función $\upsilon : X \to \bar{\mathbb{R}}$ definida por

$$\upsilon(x) = \lim_{n\to\infty} (\mathcal{T}^n \hat{\upsilon})(x)$$

es un punto fijo de $\mathcal{T}$, entonces $\upsilon = \upsilon^*$.

Este teorema es particularmente útil en el estudio de los modelos de elasticidad unitaria y lineal-cuadrático descritos anteriormente. Para estos casos es fácil conjeturar una solución para la ecuación funcional (Ejercicio **??**); el Teorema 13 asegura que esta conjetura efectivamente provee una solución al problema a la mano. Además, como se verá adelante, en estos ejemplos la función valor y la función de política tienen formas cerradas convenientes que involucran solo un número finito de parámetros.

Este hecho hace a estas dos estructuras paramétricas especialmente útiles para constuir ejemplos, para propósitos computacionales, y para estimación econométrica.

Aplicaremos primero el Teorema 13 a la forma elástica unitaria del modelo de crecimiento óptimo de un sector:

$$\max_{\{k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln\left(k_t^{\alpha} - k_{t+1}\right)$$

$$\text{s. a } 0 \leq k_{t+1} \leq k_t^{\alpha},\ t = 0, 1, 2, \ldots,$$

donde $\alpha, \beta \in (0,1)$, y el conjunto X es el intervalo abierto $(0, \infty)$. La función retorno no es acotada ni por arriba ni por abajo sobre este intervalo. (Nótese que incluso si restringiéramos nuestra atención al conjunto $(0,1]$ de saldos de capital que se pueden mantener, el retorno no estaría acotado por debajo.)

Ya que $\Gamma(k) = (0, k^{\alpha}) \neq \emptyset$, claramente, el Supuesto 1 se cumple para todo $k \in X$. Para aplicar el Teorema 13 a este problema debemos mostrar también que el 2 se cumple. Para esto nótese que la restricción tecnológica implica que $\ln(k_{t+1}) \leq \alpha \ln(k_t)$, para todo t. Dado k_0, se sigue entonces que cualquier senda factible $\{k_t\} \in \Pi(k_0)$ satisface

$$\ln(k_t) \leq \alpha^t \ln(k_0), \text{ para todo } t.$$

Por lo tanto para cualquier k_0, cualquier senda factible $\{k_t\} \in \Pi(k_0)$, la sucesión de retornos por período satisface

$$\mathcal{F}(k_t, k_{t+1}) \leq \mathcal{F}(k_t, 0) = \ln(k_t^{\alpha}) = \alpha \ln(k_t) \leq \alpha^{t+1} \ln k_0, \text{ para todo } t. \tag{27}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sum_{t=0}^{n} \beta^t \mathcal{F}^{+}(k_t, k_{t+1}) &\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{t=0}^{n} (\beta\alpha)^t \alpha |\ln(k_0)| = \alpha |\ln(k_0)|/(1-\alpha\beta), \\ \text{para todo } \{k_t\} &\in \Pi(k_0), \text{ para todo } k_0 > 0. \end{aligned}$$

donde $\mathcal{F}^{+}$ es definida como en la sección 1. Por tanto el Supuesto 2 se cumple.

Luego necesitamos una función $\hat{\upsilon}$ que sea una cota superior de la función supremo υ^*. Ya que (27) implica que

$$\upsilon^*(k) \leq \alpha \ln(k_0)/(1-\alpha\beta), \text{ para todo } k > 0,$$

podemos tomar $\hat{\upsilon}(k) = \alpha \ln(k)/(1-\alpha\beta)$. Con $\hat{\upsilon}$ así definida, cláramente (24)-(26) se cumplen. Además, con $\mathcal{T}$ definida mediante

$$(\mathcal{T}f)(k) = \sup_{0 \leq y \leq k^\alpha} [\ln(k^\alpha - y) + \beta f(y)],$$

podemos verificar mediante cálculos directos que

$$(\mathcal{T}^n \hat{\upsilon})(k) = \frac{1-\beta^{n+1}}{1-\beta} \left[\ln(1-\alpha\beta) + \frac{\alpha\beta}{1-\alpha\beta} \ln(\alpha\beta) \right] + \frac{\alpha}{1-\alpha\beta} \ln(k), \; n = 1, 2, \ldots.$$

Esta sucesión converge a

$$\upsilon(k) = \frac{1}{1-\beta} \left[\ln(1-\alpha\beta) + \frac{\alpha\beta}{1-\alpha\beta} \ln(\alpha\beta) \right] + \frac{\alpha}{1-\alpha\beta} \ln(k).$$

Recuerde del Ejercicio **??** que esta función υ es un punto fijo de $\mathcal{T}$. Por lo tanto por el Teorema 13, $\upsilon = \upsilon^*$. Además, ya que el Teorema 4 aplica, la función de política asociada, la tasa de ahorro constante $g(k) = \alpha\beta k^\alpha$, genera la sucesión óptima de saldos de capital.

El Teorema 13 también es aplicable a problemas con funciones de retorno cuadráticas. Existe una extensa literatura sobre dichos problemas, pero un ejemplo económico simple basta para ilustrar las principales ideas. Sea $X = \mathbb{R}$, y sea $\Gamma(x) = \mathbb{R}$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Considere la función retorno

$$\mathcal{F}(x, y) = ax - \frac{1}{2}bx^2 - \frac{1}{2}c(y-x)^2, \; a, b, c > 0. \tag{28}$$

Piénsese en el término $ax - \frac{1}{2}bx^2$ como uno que describe el ingreso neto de la firma cuando el saldo de capital es x, y el término $c(y-x)^2/2$ como el costo de cambiar el saldo de capital de x a y. Entonces, dada una tasa de interés constante $r > 0$, el poblema que afronta la firma es

$$\max_{\{x_{t+1}\}_{t=0}^\infty} \sum_{t=0}^\infty \delta^t \left[ax_t - \frac{1}{2}bx_t^2 - \frac{1}{2}c(x_{t+1} - x_t)^2 \right],$$

donde $\delta = 1/(1+r)$.

Para aplicar el Teorema 13 a este problema, primero nótese que la función retorno $\mathcal{F}$ en (28) es acotada superiormente por a/b. Por lo tanto la función $\hat{v}$ definida por $\hat{v} = a/b/(1-\delta)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, satisface (24)-(26). Además, se sigue por inducción que las funciones $\mathcal{T}^n \hat{v}$ toman la forma:

$$(\mathcal{T}^n \hat{v})(x) = \alpha_n x - \frac{1}{2}\beta_n x^2 + \gamma_n,$$

donde los coeficientes de estas funciones cuadráticas están dados recursivamente por $\alpha_0 = \beta_0 = 0$, $\gamma_0 = a/b$, y

$$\beta_{n+1} = b + \frac{\delta\beta_n c}{\delta\beta_n + c}, \tag{29}$$

$$\alpha_{n+1} = a + \frac{\delta\alpha_n c}{\delta\beta_n + c} \tag{30}$$

$$\gamma_{n+1} = \delta\gamma_n + \frac{1}{2}\frac{(\delta\alpha_n)^2}{\delta\beta_n + c},\ n = 0, 1, \ldots. \tag{31}$$

Es un ejercicio simple el verificar de (29) que $\beta_n \to \beta$, donde $0 < \beta < 1$, y entonces de (30) y (31) que $\alpha_n \to \alpha$ y $\gamma_n \to \gamma$. La función límite claramente satisface la ecuación funcional y por lo tanto el Teorema 13 implica que es la función supremo v^*. La función de política asociada es $g(x) = (\alpha + cx)/(\beta + c)$, y se sigue del Teorema 4 que cualquier sucesión $\{x_t\}$ generada a partir de ella es óptima.

En este ejemplo particular, haría sentido económico restringir $\{x_t\}$ al intervalo $X' = [0, a/b)$, ya que el capital negativo no tiene interpretación y acumular más capital que a/b es costoso y reduce los ingresos. $\mathcal{F}$ es acotada sobre $X' \times X'$, de manera que con esta restricción la teoría de la Sección 2 aplicaría. Pero la ventaja computacional de retornos cuadráticos surge del hecho de que los retornos marginales son lineales en la(s) variable(s) de estado. Por lo tanto si todos los máximos son descritos por condiciones de primer orden, la función de política óptima es también lineal en la(s) variable(s) de estado. Por tanto nos damos cuenta de la conveniencia de la forma cuadrática si los máximos son alcanzados en puntos interiores del conjunto factible. Fijar $X = \mathbb{R}$ y $\Gamma(x) = \mathbb{R}$, para todo $x \in X$, asegura que este es el caso. Después de obtener una solución, podemos siempre chequear para ver si satisface restricciones económicamente razonables. [Nótese que en el ejemplo anterior, si x_0 está en el intervalo $[0, a/b]$, entonces la sucesión óptima $x_{t+1} = g(x_t)$, $t = 0, 1, \ldots$, permanece en el intervalo para todo t.]

El Teorema 13 es también útil al lidiar con problemas cuadráticos de muchas dimensiones. Es fácil calcular una cota superior $\hat{v}$ que satisfaga (24)-(26), ya que cualquier cuadrática cóncava es acotada por arriba. Las iteraciones $\mathcal{T}\hat{v}$ son fácilmente calculadas, ya que están definidas por un número finito de parámetros. Si la sucesión converge, el Teorema 13 implica que la función límite es la función supremo y el Teorema 4 implica que la política lineal que la alcanza es óptima. Si el problema es estríctamente cóncavo, no hay otras políticas óptimas.

5. Ecuaciones de Euler

Existe un modo de ataque clásico (del siglo XVIII) para el problema secuencial

$$\sup_{\{x_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \mathcal{F}(x_t, x_{t+1}) \tag{PS}$$

$$\text{s. a } x_{t+1} \in \Gamma(x_t),\ t = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$x_0 \in X \text{ dado},$$

que involucra tratarlo como un problema de programación directa en las variables de decisión $\{x_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$. Condiciones necesarias para un programa óptimo pueden ser desarrolladas partiendo de la observación de que si $\left\{x_{t+1}^*\right\}_{t=0}^{\infty}$ resuelve el problema (PS), dado x_0, entonces x_{t+1}^* debe resolver

$$\max_y \left[\mathcal{F}\left(x_t^*, y\right) + \beta\mathcal{F}\left(y, x_{t+2}^*\right)\right], \text{ para } t = 0, 1, \ldots, \tag{32}$$

sujeto a

$$y \in \Gamma\left(x_t^*\right) \text{ y } x_{t+2}^* \in \Gamma\left(y\right).$$

Esto es, una variación factible de la sucesión $\left\{x_{t+1}^*\right\}_{t=0}^{\infty}$ en el período t no puede llevar a una mejora con respecto a una política óptima. (Una derivación de condiciones necesarias a través de este tipo de argumento es llamada un enfoque “variacional”. En el presente contexto, las condiciones derivadas de esta manera son llamadas Ecuaciones de Euler, ya que Leonhard Euler fue el primero que las obtuvo de un análogo en tiempo contínuo de este problema.)

Cúmplanse los Supuestos 3-5, 7 y 9; denote $\mathcal{F}_x$ el vector de l componentes que consta de las derivadas parciales $(\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_l)$ de $\mathcal{F}$ con respecto a sus primeros l argumentos, y denote $\mathcal{F}_y$ el vector $(\mathcal{F}_{l+1}, \ldots, \mathcal{F}_{2l})$. Dado que $\mathcal{F}$ es contínuamente diferenciable y estríctamente cóncava, si x^*_{t+1} está en el interior del conjunto $\Gamma\left(x^*_t\right)$ para todo t, las condiciones de primer orden para (32) son

$$0 = \mathcal{F}_y\left(x^*_t, x^*_{t+1}\right) + \beta \mathcal{F}_x\left(x^*_{t+1}, x^*_{t+2}\right), \; t = 0, 1, 2, \ldots . \tag{33}$$

Este es un sistema de l ecuaciones en diferencias de segundo orden en el vector x_t de variables de estado. Dado el vector de l componentes x_0, su solución forma una familia de l parámetros, y se necesitan condiciones de frontera adicionales para hallar la única solución que de hecho es óptima.

Estas condiciones de frontera adicionales vienen dadas por la *condición de transversalidad*

$$\lim_{t \to \infty} \beta^t \mathcal{F}_x\left(x^*_t, x^*_{t+1}\right) \cdot x^*_t = 0. \tag{34}$$

Esta condición tiene la seguiente interpretación. Dado que el vector de derivadas $\mathcal{F}_x$ es el vector de retornos marginales ante incrementos en las variables de estado actuales, el producto interno $\mathcal{F}_x \cdot x$ es una forma de valor total en el periodo t del vector de variables de estado. Por ejemplo, en el modelo de crecimiento con varios sectores, $\mathcal{F}_x$ es el vector de precios de bienes de capital. En este caso (34) requiere que el valor presente descontado del nivel de capital en el período t, evaluado usando los precios de mercado del período t, tienda a cero conforme t tiende a infinito. Encuentre uno(a) estas interpretaciones de mercado útiles o no, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 14 *(Suficiencia de las condiciones de Euler y transversalidad) Sea $X \subset \mathbb{R}^l_+$, y satisfaga $\mathcal{F}$ los Supuestos 3-5, 7, y 9. Entonces la sucesión $\left\{x^*_{t+1}\right\}_{t=0}^{\infty}$ con $x^*_{t+1} \in int\Gamma\left(x^*_t\right)$, $t = 0, 1, \ldots$, es óptima para el problema (PS), dado x_0, si satisface (33) y (34).*

Demostración. Sea x_0 dado; satisfaga $\{x^*_t\}_{t=0}^{\infty} \in \Pi\left(x_0\right)$ (33) y (34); y sea $\{x_t\}_{t=0}^{\infty} \in \Pi\left(x_0\right)$ cualquier sucesión factible. Basta con mostrar que la diferencia, llamémosla D, entre la función objetivo evaluada en $\{x^*_t\}_{t=0}^{\infty}$ y en $\{x_t\}_{t=0}^{\infty}$ es no negativa. Ya que $\mathcal{F}$ es contínua, cóncava y diferenciable (Supuestos 4, 7 y 9), se cumple que

$$\mathcal{F}(x^*_t, x^*_{t+1}) - \mathcal{F}(x_t, x_{t+1}) \geq \mathcal{F}_x(x^*_t, x^*_{t+1}) \cdot (x^*_t - x_t) + \mathcal{F}_y(x^*_t, x^*_{t+1}) \cdot (x^*_{t+1} - x_{t+1})$$

con lo cual

$$
\begin{aligned}
D &\equiv \lim_{T\to\infty} \sum_{t=0}^{T} \beta^t \left[\mathcal{F}(x_t^*, x_{t+1}^*) - \mathcal{F}(x_t, x_{t+1})\right] \\
&\geq \lim_{T\to\infty} \sum_{t=0}^{T} \beta^t \left[\mathcal{F}_x(x_t^*, x_{t+1}^*) \cdot (x_t^* - x_t) + \mathcal{F}_y(x_t^*, x_{t+1}^*) \cdot (x_{t+1}^* - x_{t+1})\right] \\
&= \lim_{T\to\infty} \{\mathcal{F}_x(x_0^*, x_1^*) \cdot (x_0^* - x_0) + \mathcal{F}_y(x_0^*, x_1^*) \cdot (x_1^* - x_1) \\
&\quad +\beta\mathcal{F}_x(x_1^*, x_2^*) \cdot (x_1^* - x_1) + \beta\mathcal{F}_y(x_1^*, x_2^*) \cdot (x_2^* - x_2) \\
&\quad +\beta^2\mathcal{F}_x(x_2^*, x_3^*) \cdot (x_2^* - x_2) + \beta^2\mathcal{F}_y(x_2^*, x_3^*) \cdot (x_3^* - x_3) \\
&\quad \vdots \\
&\quad +\beta^{T-1}\mathcal{F}_x(x_{T-1}^*, x_T^*) \cdot (x_{T-1}^* - x_{T-1}) + \beta^{T-1}\mathcal{F}_y(x_{T-1}^*, x_T^*) \cdot (x_T^* - x_T) \\
&\quad +\beta^T\mathcal{F}_x(x_T^*, x_{T+1}^*) \cdot (x_T^* - x_T) + \beta^T\mathcal{F}_y(x_T^*, x_{T+1}^*) \cdot (x_{T+1}^* - x_{T+1})\}.
\end{aligned}
$$

Ya que $x_0^* - x_0 = 0$, reordenando términos obtenemos

$$
\begin{aligned}
D \geq \lim_{T\to\infty} \Bigg\{ &\sum_{t=0}^{T-1} \beta^t \left[\mathcal{F}_y(x_t^*, x_{t+1}^*) + \beta\mathcal{F}_x(x_{t+1}^*, x_{t+2}^*) \cdot (x_{t+1}^* - x_{t+1})\right] \\
&+\beta^T\mathcal{F}_y(x_T^*, x_{T+1}^*) \cdot (x_{T+1}^* - x_{T+1}) \Bigg\}
\end{aligned}
$$

Ya que $\{x_t^*\}$ satisface (33), los términos en la sumatoria son todos iguales a cero. Por lo tanto, sustituyendo (33) en el último término también así como usando (34) da lugar a

$$
\begin{aligned}
D &\geq \lim_{T\to\infty} \beta^T\mathcal{F}_y(x_T^*, x_{T+1}^*) \cdot (x_{T+1}^* - x_{T+1}) \\
&= \lim_{T\to\infty} \beta^T[-\beta\mathcal{F}_x(x_{T+1}^*, x_{T+2}^*)] \cdot (x_{T+1}^* - x_{T+1}) \\
&= \lim_{T\to\infty} \beta^{T+1}\mathcal{F}_x(x_{T+1}^*, x_{T+2}^*) \cdot (x_{T+1} - x_{T+1}^*) \\
&= \lim_{T\to\infty} \beta^{T+1}\mathcal{F}_x(x_{T+1}^*, x_{T+2}^*) \cdot x_{T+1} - \lim_{T\to\infty} \beta^{T+1}\mathcal{F}_x(x_{T+1}^*, x_{T+2}^*) \cdot x_{T+1}^* \\
&\geq -\lim_{T\to\infty} \beta^{T+1}\mathcal{F}_x(x_{T+1}^*, x_{T+2}^*) \cdot x_{T+1}^* \\
&= -\lim_{T\to\infty} \beta^T\mathcal{F}_x(x_T^*, x_{T+1}^*) \cdot x_T^*,
\end{aligned}
$$

donde la penúltima línea usa el hecho de que $\mathcal{F}_x \geq 0$ (Supuesto 5) y $x_t \geq 0$, para todo t. Se sigue de (34) que $D \geq 0$, lo cual establece el resultado deseado. ■

(Nótese que el Teorema 14 no requiere de ninguna restricción sobre Γ o β porque el teorema aplica solo si la sucesión que satisface (33) y (34) ya ha sido encontrada. Las restricciones sobre Γ y β son necesarias para asegurar que dicha sucesión pueda ser localizada.)

Kamihigashi (2002) demuestra la suficiencia la necesidad de la condición de transversalidad 34. Por lo tanto las dos condiciones presentadas, Euler y transversalidad, son necesarias y suficientes.

Ejercicio 6 *a. Use el Teorema 14 para obtener una demostración alternativa de que la función de política $g(k) = \alpha\beta k^{\alpha}$ es óptima para el modelo de crecimiento óptimo de la sección 4.*

b. Use el Teorema 14 para obtener una demostración alternativa de que la función de política $g(x) = (\alpha + cx) / (\beta + c)$ es óptima para el modelo de inversión cuadrática de la sección 4.

Las ecuaciones de Euler también pueden ser derivadas diréctamente de la ecuación funcional

$$v(x) = \max_{y \in \Gamma(x)} \left[\mathcal{F}(x, y) + \beta v(y)\right]. \tag{EF}$$

Supóngase que la función valor v es diferenciable; supóngase, como se hizo anteriormente, que el lado derecho de (EF) es siempre alcanzado en el interior de $\Gamma(x)$; y denote $v'(y)$ el vector $[v_1(y), \ldots, v_l(y)]$ de derivadas parciales de v. Entonces las condiciones de primer orden para el problema del máximo (EF) son

$$0 = \mathcal{F}_y[x, g(x)] + \beta v'[g(x)]. \tag{35}$$

La condición de la envolvente para este mismo problema del máximo es

$$v'(x) = \mathcal{F}_x[x, g(x)]. \tag{36}$$

Ahora hágase $x = x_t$ y $g(x) = g(x_t) = x_{t+1}$ en (35) para obtener

$$0 = \mathcal{F}_y(x_t, x_{t+1}) + \beta v'(x_{t+1}),$$

y hágase $x = x_{t+1}$ y $g(x) = g(x_{t+1}) = x_{t+2}$ en (36) para obtener

$$v'(x_{t+1}) = \mathcal{F}_x(x_{t+1}, x_{t+2}).$$

Eliminando $v'(x_{t+1})$ entre estas dos ecuaciones da lugar a las ecuaciones de Euler (33).

Implícitamente, (35) es un sistema de l ecuaciones en diferencias de primer orden en x_t, y los l valores iniciales x_0 son suficientes para seleccionar una solución única. No hace falta ninguna condición de frontera del problema, visto de esta forma. Usar (36) para eliminar $v'[g(x)]$ de (35) reproduce la ecuación de Euler (33), pero este paso también descarta información útil, de manera que no debe sorprender que muchas sucesiones $\{x_t\}$ satisfagan (33) pero no (35).

Referencias

Araujo, A. y Scheinkman, J. A. (1977). Smoothness, Comparative Dynamics, and the Turnpike Property. *Econometrica*, 45(3):601–620.

Benveniste, L. M. y Scheinkman, J. A. (1979). On the Differentiability of the Value Function in Dynamic Models of Economics. *Econometrica*, 47(3):727–732.

Kamihigashi, T. (2002). A simple proof of the necessity of the transversality condition. *Economic Theory*, 20(2):427–433.

Stokey, N. L. y Lucas, Jr., R. E. (1989). *Recursive Methods in Economic Dynamics*. Harvard University Press. Con E. C. Prescott.

Apéndice A Derivaciones

[Disponible]

