1.2. Problema de consumo y acumulación de activos

1.2.1. El problema

El tiempo es discreto y el horizonte temporal es infinito ($t = 0, 1, 2, \ldots$). En este contexto, un individuo enfrenta el problema de hallar su senda de consumo y acumulación de activos $\{c_t, a_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ para maximizar

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left\{ -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma c_t} \right\}; \, \gamma > 0; \, 0 < \beta < 1;$$

sujeto a

$$\begin{aligned} a_{t+1} &\leq \underbrace{R}_{=1+r} (a_t - c_t), \, t = 0, 1, \ldots, \\ c_t, a_{t+1} &\geq 0, \, t = 0, 1, \ldots \text{ y} \\ a_0 &> 0 \text{ dado.} \end{aligned}$$

En el problema anterior, el parámetro $\gamma > 0$ denota el coeficiente de aversión absoluta al riesgo y $\beta \in (0, 1)$ denota el parámetro de paciencia. Por su parte, $R > 1$ denota la tasa bruta de interés de un período a otro ($r := R - 1$ denota la tasa neta de interés). La condición de no negatividad del consumo se impone por sentido económico, mientras que la no negatividad en todo momento del nivel de activos se impone para descartar la posibilidad de contraer deuda. Finalmente, la condición inicial $a_0 > 0$ es un dato del problema.

1.2.2. Problema secuencial

Primero, aprovechamos que la función de utilidad instantánea es estríctamente creciente ("más es siempre mejor") para afirmar que la restricción de recursos se cumple con igualdad. Es decir, $a_{t+1} = R(a_t - c_t)$, lo cual implica que podemos despejar el consumo de la siguiente manera

$$c_t = a_t - \frac{a_{t+1}}{R},$$

lo cual indica que el consumo se calcula "residualmente" como la diferencia entre los activos con los cuales se empieza el período y el valor presente (a la tasa R) de la decisión de activos que se llevará al siguiente período. Entonces, podemos reescribir el problema como el de hallar la senda de activos $\{a_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ para maximizar

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left\{ -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma\left(a_t - \frac{a_{t+1}}{R}\right)} \right\}$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 0 &\leq a_{t+1} \leq R a_t, \, t = 0, 1, \ldots \text{ y} \\ a_0 &> 0 \text{ dado.} \end{aligned}$$

Nótese que hemos hecho uso de la no negatividad del consumo $c_t = a_t - \frac{a_{t+1}}{R} \geq 0$ para derivar la segunda desigualdad. De hecho, dicha condición se puede interpretar como una en que los activos del período siguiente no pueden exceder lo que se obtendría al ahorrar al máximo (i.e., si se decide no consumir nada en el presente).

1.2.3. Formulación de la ecuación funcional

Es fácil mostrar que al inicio de cada periodo t el nivel de activos a_t se encuentra dado y la variable de decisión es a_{t+1} (i.e., lo que se va a llevar al inicio del siguiente período). Podemos ahora escribir la ecuación de Bellman de la siguiente manera

$$\upsilon\left(a_t\right)=\max_{0\leq a_{t+1}\leq Ra_t}\left\{-\frac{1}{\gamma}e^{-\gamma\left(a_t-\frac{a_{t+1}}{R}\right)}+\beta\upsilon\left(a_{t+1}\right)\right\},\, a_t\geq 0,\, t=0,1,\ldots$$

y podemos observar que la estructura del problema es independiente del período temporal específico. Por esta razón, vamos a usar a para denotar a_t y a' para denotar a_{t+1}. De esta manera, la ecuación de Bellman se reduce a

$$\upsilon\left(a\right)=\max_{0\leq a'\leq Ra}\left\{-\frac{1}{\gamma}e^{-\gamma\left(a-\frac{a'}{R}\right)}+\beta\upsilon\left(a'\right)\right\},\, a\geq 0.$$

1.2.4. Algoritmo de iteración

$$\upsilon_{j+1}\left(a\right)=\max_{0\leq a'\leq Ra}\left\{-\frac{1}{\gamma}e^{-\gamma\left(a-\frac{a'}{R}\right)}+\beta\upsilon_j\left(a'\right)\right\},\, a\geq 0,\, j=0,1,\ldots.$$

El algoritmo consiste en:

Paso 1 Establecer un criterio (arbitrario) de tolerancia $\varepsilon>0$.

Paso 2 Imponer una condición inicial (arbitraria) υ_0.

Paso 3 Para cada $j+1$, usar υ_j para obtener υ_{j+1}.

Paso 4 Si la distancia entre υ_{j+1} y υ_j es menor a ε, estamos arbitrariamente cerca de la solución. En caso contrario, regresar al Paso 3.

Primera iteración

$$\upsilon_1\left(a\right)=\max_{0\leq a'\leq Ra}\left\{-\frac{1}{\gamma}e^{-\gamma\left(a-\frac{a'}{R}\right)}+\beta\upsilon_0\left(a'\right)\right\},\, a\geq 0.$$

Usamos (de manera arbitraria) la función nula $\upsilon_0\left(a\right)=0$ $\left(a\geq 0\right)$ como condición inicial. Entonces, la ecuación anterior se convierte en

$$\upsilon_1\left(a\right)=\max_{0\leq a'\leq Ra}\left\{-\frac{1}{\gamma}e^{-\gamma\left(a-\frac{a'}{R}\right)}\right\}\overset{a'=0=:g_1(a)}{=}-\frac{1}{\gamma}e^{-\gamma a},\, a\geq 0.$$

En el resultado anterior, hemos usado el hecho de que un mayor valor de a' implica un menor valor de todo el término entre llaves. Por tanto, para maximizar se debe elegir un a' tan pequeño como sea posible y en este caso dicho valor corresponde a $a'=0$. En conclusión, en esta primera iteración hemos obtenido

$$\upsilon_1\left(a\right)=-\frac{1}{\gamma}e^{-\gamma a}$$

y

$$g_1\left(a\right)=0$$

para $a\geq 0$. Nótese que el resultado de la primera iteración es una función exponencial de la variable de estado $a\geq 0$.

Segunda iteración

Para la siguiente iteración, sabemos que $\upsilon_1(a) = -\frac{1}{\gamma}e^{-\gamma a}$ para todo $a \geq 0$. Entonces $\upsilon_1(a') = -\frac{1}{\gamma}e^{-\gamma a'}$ ya que $a' \geq 0$. Procedemos a insertar dicha expresión en la segunda iteración, con lo cual obtenemos

$$\upsilon_2(a) = \max_{0 \leq a' \leq Ra} \left\{ -\frac{1}{\gamma}e^{-\gamma\left(a-\frac{a'}{R}\right)} + \beta \underbrace{\left(-\frac{1}{\gamma}e^{-\gamma a'}\right)}_{=\upsilon_1(a')} \right\},\ a \geq 0.$$

Para resolver el problema del lado derecho, resolvemos la condición de primer orden con respecto a a':

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow\ -\frac{1}{\gamma}e^{-\gamma\left(a-\frac{a'}{R}\right)}\left(\gamma\frac{1}{R}\right) + \beta\left(-\frac{1}{\gamma}e^{-\gamma a'}(-\gamma)\right) = 0 \\
&\Rightarrow\ -\frac{1}{\gamma}e^{-\gamma\left(a-\frac{a'}{R}\right)} = \beta R\left(-\frac{1}{\gamma}e^{-\gamma a'}\right) \\
&\Rightarrow\ -\gamma\left(a-\frac{a'}{R}\right) = \ln(\beta R) - \gamma a' \\
&\Rightarrow\ \gamma\left(\frac{1}{R}+1\right)a' = \ln(\beta R) + \gamma a \\
&\Rightarrow\ \gamma\left(\frac{1+R}{R}\right)a' = \ln(\beta R) + \gamma a \\
&\Rightarrow\ a' = \frac{R}{1+R}\frac{1}{\gamma}\ln(\beta R) + \frac{R}{1+R}a =: g_2(a).
\end{aligned}$$

Luego, reemplazamos la decisión óptima a' en el lado derecho de la ecuación de la segunda iteración y se llega a que

$$\begin{aligned}
\upsilon_2(a) &= \max_{0 \leq a' \leq Ra}\left\{-\frac{1}{\gamma}e^{-\gamma\left(a-\frac{a'}{R}\right)} + \beta\left(-\frac{1}{\gamma}e^{-\gamma a'}\right)\right\} \\
&= \beta R\left(-\frac{1}{\gamma}e^{-\gamma a'}\right) + \beta\left(-\frac{1}{\gamma}e^{-\gamma a'}\right) \\
&= (1+R)\beta\left(-\frac{1}{\gamma}e^{-\gamma a'}\right) \\
&= (1+R)\beta\left(-\frac{1}{\gamma}e^{-\gamma\left[\frac{R}{1+R}\frac{1}{\gamma}\ln(\beta R)+\frac{R}{1+R}a\right]}\right) \\
&= (1+R)\beta\left(-\frac{1}{\gamma}e^{\left[\ln(\beta R)^{-\frac{R}{1+R}}-\gamma\frac{R}{1+R}a\right]}\right) \\
&= (1+R)\beta\left(-\frac{1}{\gamma}e^{\ln(\beta R)^{-\frac{R}{1+R}}}e^{-\gamma\frac{R}{1+R}a}\right) \\
&= -(1+R)\beta\frac{1}{\gamma}(\beta R)^{-\frac{R}{1+R}}e^{-\gamma\frac{R}{1+R}a},\ a \geq 0.
\end{aligned}$$

Nótese que el resultado de la segunda iteración también es una función exponencial de la variable de estado $a \geq 0$.

1.2.5. Solución Vía Coeficientes Indeterminados

En base a los resultados del proceso de iteración, formulamos una conjetura educada (en inglés, *educated guess*) de la forma

$$\upsilon(a) = -Ee^{-Fa}$$

donde $E > 0$ y $F > 0$. El reemplazo de la conjetura en la ecuación de Bellman da lugar a

$$\underbrace{-Ee^{-Fa}}_{=\upsilon(a)} = \max_{0\leq a'\leq Ra}\left\{-\frac{1}{\gamma}e^{-\gamma\left(a-\frac{a'}{R}\right)} + \beta\underbrace{\left(-Ee^{-Fa'}\right)}_{=\upsilon(a')}\right\},\ a \geq 0,$$

y resolvemos la condición de primer orden con respecto a a':

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow\ -\frac{1}{\gamma}e^{-\gamma\left(a-\frac{a'}{R}\right)}\frac{\gamma}{R} + \beta\left(-Ee^{-Fa'}\right)(-F) = 0\\
&\Rightarrow\ -\frac{1}{\gamma}e^{-\gamma\left(a-\frac{a'}{R}\right)} = -\frac{1}{\gamma}\beta REFe^{-Fa'}\\
&\Rightarrow\ -\gamma\left(a-\frac{a'}{R}\right) = \ln(\beta REF) - Fa'\\
&\Rightarrow\ \left(\frac{\gamma}{R}+F\right)a' = \ln(\beta REF) + \gamma a\\
&\Rightarrow\ a' = \frac{1}{F+\gamma/R}\ln(\beta REF) + \frac{\gamma}{F+\gamma/R}a =: g(a).
\end{aligned}$$

Se puede apreciar que, obviamente, la decisión óptima de a' está expresada en términos de los coeficientes indeterminados E y F. Ahora, reemplazamos este resultado en la ecuación de Bellman y obtenemos que

$$\begin{aligned}
\underbrace{-Ee^{-Fa}}_{=\upsilon(a)} &= \max_{0\leq a'\leq Ra}\left\{-\frac{1}{\gamma}e^{-\gamma\left(a-\frac{a'}{R}\right)} + \beta\underbrace{\left(-Ee^{-Fa'}\right)}_{=\upsilon(a')}\right\}\\
&= -\frac{1}{\gamma}\beta REFe^{-Fa'} - \beta Ee^{-Fa'}\\
&= -\beta E\left(\frac{RF}{\gamma}+1\right)e^{-Fa'}\\
&= -\beta E\left(\frac{RF}{\gamma}+1\right)e^{-Fa'}\\
&= -\beta E\left(\frac{RF}{\gamma}+1\right)e^{-F\left\{\frac{1}{F+\gamma/R}\ln(\beta REF)+\frac{\gamma}{F+\gamma/R}a\right\}}\\
&= -\beta E\left(\frac{RF}{\gamma}+1\right)e^{\left\{-\frac{F}{F+\gamma/R}\ln(\beta REF)-\frac{\gamma F}{F+\gamma/R}a\right\}}\\
&= -\beta E\left(\frac{RF}{\gamma}+1\right)e^{\ln(\beta REF)^{-\frac{F}{F+\gamma/R}}}e^{-\frac{\gamma F}{F+\gamma/R}a}\\
&= -\beta E\left(\frac{RF}{\gamma}+1\right)(\beta REF)^{-\frac{F}{F+\gamma/R}}e^{-\frac{\gamma F}{F+\gamma/R}a},\ a \geq 0.
\end{aligned}$$

Entonces, si los lados izquierdo y derecho son iguales para cualquier valor de $a \geq 0$, se debe cumplir que

$$\begin{aligned}
-F &= -\frac{\gamma F}{F+\gamma/R} \\
&\Rightarrow 1 = \frac{\gamma}{F+\gamma/R} \\
&\Rightarrow F + \frac{\gamma}{R} = \gamma \\
&\Rightarrow F = \gamma\left(1-\frac{1}{R}\right) > 0, \text{ debido a que } R > 1,
\end{aligned}$$

y además

$$\begin{aligned}
-E &= -\beta E\left(\frac{RF}{\gamma}+1\right)(\beta REF)^{-\frac{F}{F+\gamma/R}} \\
&\Rightarrow 1 = \beta\left(\frac{RF}{\gamma}+1\right)(\beta REF)^{-\frac{F}{F+\gamma/R}} \\
&\Rightarrow 1 = \beta\left[\frac{R}{\gamma}\gamma\left(1-\frac{1}{R}\right)+1\right](\beta REF)^{-\frac{F}{F+\gamma/R}} \\
&\Rightarrow 1 = \beta R\,(\beta REF)^{-\frac{F}{F+\gamma/R}} \\
&\Rightarrow 1 = \beta R\,(\beta REF)^{-\frac{F}{\gamma}} \\
&\Rightarrow 1 = \beta R\,(\beta REF)^{-\frac{1}{\gamma}\gamma\left(1-\frac{1}{R}\right)} \\
&\Rightarrow 1 = \beta R\,(\beta REF)^{-\left(1-\frac{1}{R}\right)} \\
&\Rightarrow \ln 1 = \ln(\beta R) - \left(1-\frac{1}{R}\right)\ln(\beta REF) \\
&\Rightarrow \frac{R-1}{R}\ln(\beta REF) = \ln(\beta R) \\
&\Rightarrow \ln(\beta REF) = \frac{R}{R-1}\ln(\beta R) < 0 \\
&\Rightarrow \beta REF = (\beta R)^{\frac{R}{R-1}} < 0 \\
&\Rightarrow E = \frac{(\beta R)^{\frac{R}{R-1}}(\beta R)^{-1}}{F} \\
&\Rightarrow E = \frac{(\beta R)^{\frac{R}{R-1}-1}}{\gamma(1-1/R)} \\
&\Rightarrow E = \frac{(\beta R)^{\frac{1}{R-1}}}{\gamma(1-1/R)} > 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la función valor es

$$\upsilon(a) = -\overbrace{\frac{(\beta R)^{\frac{1}{R-1}}}{\gamma(1-1/R)}}^{E} e^{-\overbrace{\gamma(1-1/R)}^{F}a}$$

y además

$$\begin{aligned} a' &= \frac{1}{F+\gamma/R}\ln\left(\beta REF\right)+\frac{\gamma}{F+\gamma/R}a \\ &= \frac{1}{F+\gamma/R}\left(\frac{R}{R-1}\ln\left(\beta R\right)\right)+\frac{\gamma}{F+\gamma/R}a \\ &= \frac{1}{\gamma}\frac{R}{R-1}\ln\left(\beta R\right)+a =: g\left(a\right) \ \text{(función de política)}. \end{aligned}$$

Por último,

$$\begin{aligned} c &= a-\frac{a'}{R} \\ &= a-\frac{1}{R}\left[\frac{1}{\gamma}\frac{R}{R-1}\ln\left(\beta R\right)+a\right] \\ &= -\frac{1}{\gamma}\frac{1}{R-1}\ln\left(\beta R\right)+\left(1-\frac{1}{R}\right)a \geq 0. \end{aligned}$$

Culminamos afirmando que, dado un $a_0 > 0$:

$$\begin{aligned} \max_{\{a_{t+1}:0\leq a_{t+1}\leq Ra_t\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\left\{-\frac{1}{\gamma}e^{-\gamma\left(a-\frac{a'}{R}\right)}\right\} &= \upsilon\left(a_0\right) \\ &= -\frac{\left(\beta R\right)^{\frac{1}{R-1}}}{\gamma\left(1-1/R\right)}e^{-\gamma(1-1/R)a_0} \end{aligned}$$