FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES
ESPECIALIDAD DE ECONOMÍA
MICROECONOMÍA 2
SEMESTRE 2024-2

Modelos con producción y varios individuos: eficiencia paretiana y equilibrio walrasiano

Profesora:	Janneth Leyva (janneth.leyva@pucp.edu.pe)
Jefes de práctica:	Daniel Chavez (a20234761@pucp.edu.pe)
	Alvaro Moran (alvaro.moran@pucp.edu.pe)

Solucionario del ejercicio de aplicación

Considere una sociedad conformada por dos personas (1 y 2). El individuo 1 deriva directamente bienestar del consumo de los bienes x e y y del tiempo que dedica al ocio; mientras que el bienestar del individuo 2 depende únicamente de su consumo de los bienes x e y. Sus preferencias por estos bienes son adecuadamente recogidas por las siguientes funciones de utilidad:

$$u_1(x_1, y_1, h_1) = x_1^{\alpha_x} y_1^{\alpha_y} h_1^{\alpha_h} \; ; \; \alpha_x + \alpha_y + \alpha_h = 1$$
$$u_2(x_2, y_2) = x_2^{\beta_x} y_2^{\beta_y} \; ; \; \beta_x + \beta_y = 1$$

La sociedad cuenta con una dotación del bien y (w_y), pero no del bien x. Asimismo, cuenta con los conocimientos tecnológicos para producir ambos bienes. La producción del bien y solo requiere de trabajo (l_x) como input, mientras que para producir el bien x se requiere emplear, además de trabajo (l_y), el bien x (y_x). Las siguientes funciones de producción resumen el proceso de transformación que permite generar los bienes x e y:

$$f_x(l_x, y_x) = l_x^{\sigma_l} y_x^{\sigma_y} \; ; \; \sigma_l, \sigma_y > 0 \; ; \; \sigma_l + \sigma_y < 1$$
$$f_y(l_y) = \phi l_y \; ; \; \phi > 0$$

Teniendo en cuenta que el marco temporal de referencia consta de T horas y que en este periodo, dadas las restricciones biológicas de los individuos, estos pueden ofrecer hasta $\hat{l}_i$ horas a trabajar, se le pide responder a las siguientes preguntas:

a) Defina el problema de optimización cuya solución permite caracterizar las asignaciones pareto-eficientes para esta economía, identificando todas las restricciones que la economía enfrenta.

Planteamiento general:

$$\max u_1(x_1, y_1, h_1)$$
$$\text{s.a. } u_2(x_2, y_2) = \bar{u}_2$$
$$x_1 + x_2 = f_x(l_x, y_x)$$
$$y_1 + y_2 + y_x = f_y(l_y) + w_y$$
$$l_1 + h_1 = T$$
$$l_1 \leq \hat{l}_1$$
$$l_x + l_y = l_1 + \hat{l}_2$$

$$x_1, x_2, y_1, y_2, h_1, l_1, l_x, l_y, y_x \geq 0$$

Introduciendo las funciones de utilidad y de producción:

$$\max x_1^{\alpha_x} y_1^{\alpha_y} h_1^{\alpha_h}$$

$$\text{s.a. } x_2^{\beta_x} y_2^{\beta_y} = \bar{u}_2$$

$$x_1 + x_2 = l_x^{\sigma_l} y_x^{\sigma_y}$$

$$y_1 + y_2 + y_x = \phi l_y + w_y$$

$$l_1 + h_1 = T$$

$$l_1 \leq \hat{l_1}$$

$$l_x + l_y = l_1 + \hat{l_2}$$

$$x_1, x_2, y_1, y_2, h_1, l_1, l_x, l_y, y_x \geq 0$$

b) Obtenga las CPO para solución interior y a partir de estas identifique las condiciones de tangencia que caracterizan a las asignaciones pareto-eficientes.

Definimos la función lagrangiana considerando solución interior:

$$\begin{aligned} L = {} & u_1(x_1, y_1, h_1) + \lambda_1(\bar{u}_2 - u_2(x_2, y_2)) + \lambda_2 \left(f_x(l_x, y_x) - x_1 - x_2\right) \\ & + \lambda_3 \left(f_y(l_y) + w_y - y_1 - y_2 - y_x\right) + \lambda_4(l_1 + \hat{l}_2 - l_x - l_y) + \lambda_5(T - l_1 - h_1) \end{aligned}$$

Obtenemos las CPO:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \lambda_2 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial y_1} = \frac{\partial u_1}{\partial y_1} - \lambda_3 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial h_1} = \frac{\partial u_1}{\partial h_1} - \lambda_{=} 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -\lambda_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \lambda_2 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial y_2} = -\lambda_1 \frac{\partial u_2}{\partial y_2} - \lambda_3 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial l_x} = \lambda_2 \frac{\partial f_x}{\partial l_x} - \lambda_4 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial l_y} = \lambda_3 \frac{\partial f_y}{\partial l_y} - \lambda_4 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial y_x} = \lambda_2 \frac{\partial f_x}{\partial y_x} - \lambda_3 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial l_1} = \lambda_5 - \lambda_4 = 0$$

A partir de las CPO se definen las condiciones de tangencia que son satisfechas por las asignaciones pareto-eficientes:

$$\frac{Umgx_1}{Umgy_1} = \frac{Umgx_2}{Umgy_2} = \frac{1}{Pmgy_x} = \frac{Pmgl_y}{Pmgl_x}$$
$$\frac{Umgh_1}{Umgx_1} = Pmgl_x = Pmgy_x \times Pmgl_y$$
$$\frac{Umgh_1}{Umgy_1} = Pmgl_y$$

Considerando las funciones de utilidad y de producción específicas al problema:

$$\frac{\alpha_x y_1}{\alpha_y x_1} = \frac{\beta_x y_2}{\beta_y x_2} = \frac{1}{\sigma_y l_x^{\sigma_L} y_x^{\sigma_y - 1}} = \frac{\phi}{\sigma_L l_x^{\sigma_L - 1} y_x^{\sigma_y}}$$
$$\frac{\alpha_h x_1}{\alpha_x h_1} = \sigma_L l_x^{\sigma_l - 1} y_x^{\sigma_y} = \phi \sigma_y l_x^{\sigma_L} y_x^{\sigma_y - 1}$$
$$\frac{\alpha_h y_1}{\alpha_y h_1} = \phi$$

c) Obtenga la función de transformación para esta economía.

$$\max_{l_x, l_y, y_x \geq 0} l_x^{\sigma_L} y_x^{\sigma_y}$$

$$\textbf{s.a. } \phi l_y + w_y - y_x \geq \bar{y}_c$$
$$h_1 \geq \bar{h}_1$$
$$l_x + l_y \leq (T - h_1) + \hat{l}_2$$

Podemos reescribir este problema como un problema de optimización sin restricciones y una sola variable endógena:

$$\max_{l_x \geq 0} \; l_x^{\sigma_L} (\phi(T - \bar{h}_1 + \hat{l}_2 - l_x) + w_y + \bar{y}_c)^{\sigma_y}$$

A partir de la CPO de este problema obtenemos:

$$l_x(\bar{h}_1, \bar{y}_c) = \frac{\sigma_L}{\phi(\sigma_y + \sigma_L)} \left(\phi(T - \bar{h}_1 + \hat{l}_2) + w_y - \bar{y}_c \right)$$

Reemplazando l_x en la función de producción y simplificando se obtiene:

$$x_c = \frac{\sigma_L^{\sigma_L} \sigma_y^{\sigma_y}}{\phi^{\sigma_L}} \left[\frac{\phi(T - \bar{h}_1 + \hat{l}_2) + w_y - \bar{y}_c}{\sigma_L + \sigma_y} \right]^{\sigma_L + \sigma_y}$$

Definimos la función de transformación:

$$T(x_c, y_c, h_1) = x_c - \frac{\sigma_L^{\sigma_L} \sigma_y^{\sigma_y}}{\phi^{\sigma_L}} \left[\frac{\phi(T - \bar{h}_1 + \hat{l}_2) + w_y - \bar{y}_c}{\sigma_L + \sigma_y} \right]^{\sigma_L + \sigma_y}$$

d) Replantee el problema de optimización planteado en a) usando la función de transformación y muestre que a partir de las CPO de este problema se obtiene la misma condición de tangencia identificada en b).

$$\max_{x_1,x_2,y_1,y_2,h_1 \geq 0} u_1(x_1, y_1, h_1)$$
$$\text{s.a. } u_2(x_2, y_2) \geq \bar{u}_2$$
$$x_1 + x_2 = x_c$$
$$y_2 + y_1 = y_c$$
$$T(x_c, y_c, h_1) = 0$$

Definimos la función lagrangiana asociada considerando solución interior:

$$L = u_1(x_1, y_1, h_1) + \lambda_1 \left(u_2(x_2, y_2) - \bar{u}_2\right) + \lambda_2 \left(-T(x_1 + x_2, y_1 + y_2, h_1)\right)$$

Obtenemos las CPO:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x_1} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \lambda_2 \frac{\partial T(x_c, y_c, h_1)}{\partial x_c} = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial y_1} &= \frac{\partial u_1}{\partial y_1} - \lambda_2 \frac{\partial T(x_c, y_c, h_1)}{\partial y_c} = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial h_1} &= \frac{\partial u_1}{\partial h_1} + \lambda_2 \frac{\partial T(x_c, y_c, h_1)}{\partial h_1} = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial x_2} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \lambda_2 \frac{\partial T(x_c, y_c, h_1)}{\partial x_c} = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial y_2} &= \frac{\partial u_1}{\partial y_2} - \lambda_2 \frac{\partial T(x_c, y_c, h_1)}{\partial y_c} = 0
\end{aligned}$$

Identificamos las condiciones de tangencia:

$$\begin{aligned}
\frac{Umgx_1}{Umgy_1} = \frac{Umgx_2}{Umgy_2} &= \frac{\partial T(x_c, y_c, h_1)/\partial x_c}{\partial T(x_c, y_c, h_1)/\partial y_c} \\
\frac{Umgh_1}{Umgx_1} &= \frac{\partial T(x_c, y_c, h_1)/\partial h_1}{\partial T(x_c, y_c, h_1)/\partial x_c} \\
\frac{Umgh_1}{Umgy_1} &= \frac{\partial T(x_c, y_c, h_1)/\partial h_1}{\partial T(x_c, y_c, h_1)/\partial y_c}
\end{aligned}$$

Suponga que los individuos han decidido emplear mercados competitivos como mecanismo de asignación de recursos.

e) Establezca qué supuestos adicionales se requiere introducir a fin de que sea posible emplear este mecanismo de asignación de recursos y en adelante asuma que estos se cumplen.

Para que sea posible emplear este mecanismo necesitamos asumir que la sociedad se organiza en base a la propiedad privada y que la producción se organiza en firmas que persiguen la maximización de beneficios. Por lo tanto, necesitamos establecer un supuesto respecto de cómo se distribuye la propiedad sobre el bien w_y y sobre cómo se reparten los beneficios generados por la firma que produce el bien x entre los individuos. No necesitamos establecer cómo se distribuyen los beneficios generados por la firma que produce el bien y porque al ser el producto marginal del trabajo constante, el único nivel de beneficios compatible con la maximización de beneficios en un escenario perfectamente competitivo es cero. Por simplicidad, asumiremos que la producción de cada bien está a cargo de una firma y que el individuo 1 tiene toda la dotación del bien y, mientras que al individuo 2 le corresponde el 100 % de los beneficios generados por la firma que produce el bien x. A pesar de que hay solo 2 consumidores y solo 2 firmas asumiremos que todos los agentes se comportan como tomadores de precios en todos los mercados.

f) Plantee y resuelva el problema de optimización que enfrentan los agentes económicos en este nuevo escenario.

PMB de la firma que produce el bien x

$$\max_{l_x, y_x \geq 0} \pi_x = p_x(l_x^{\sigma_l} y_x^{\sigma_y}) - p_y(y_x) - w(l_x)$$

Obtenemos las CPO:

$$Pmgy_x = \sigma_y l_x^{\sigma_L} y_x^{\sigma_y - 1} = \frac{p_y}{p_x}$$

$$Pmgl_x = \sigma_L l_x^{\sigma_L - 1} y_x^{\sigma_y} = \frac{w}{p_x}$$

A partir de las CPO obtengo las funciones de demanda de factores y la función de oferta del bien x:

$$y_x^d(p) = (p_x(\frac{\sigma_l}{w})^{\sigma_l}(\frac{\sigma_y}{p_y})^{1-\sigma_l})^{\frac{1}{1-\sigma_l-\sigma_y}}$$

$$l_x^d(p) = (p_x(\frac{\sigma_l}{w})^{1-\sigma_y}(\frac{\sigma_y}{p_y})^{\sigma_y})^{\frac{1}{1-\sigma_l-\sigma_y}}$$

$$x^s(p) = \left(p_x^{(\sigma_l+\sigma_y)}\left(\frac{\sigma_l}{w}\right)^{\sigma_l}\left(\frac{\sigma_y}{p_y}\right)^{\sigma_y}\right)^{\frac{1}{1-\sigma_l-\sigma_y}}$$

Obtenemos la función valor del problema:

$$\pi_x(p) = \left(\frac{p_x}{w^{\sigma_l} p_y^{\sigma_y}}\right)^{\frac{1}{1-\sigma_l-\sigma_y}} m$$

donde $m = ((\sigma_l)^{\sigma_l}(\sigma_y)^{\sigma_y})^{\frac{1}{1-\sigma_l-\sigma_y}} - ((\sigma_l)^{1-\sigma_y}(\sigma_y)^{\sigma_y})^{\frac{1}{1-\sigma_l-\sigma_y}} - \left((\sigma_l)^{\sigma_l}(\sigma_y)^{1-\sigma_l}\right)^{\frac{1}{1-\sigma_l-\sigma_y}}$

PMB de la firma que produce el bien y

$$\max_{l_y \geq 0} \pi_y = p_y(\phi l_y) - w l_y$$

A partir de la CPO se obtiene:

$$\phi = \frac{p_y}{w}$$

Nótese que lo que se obtiene de este problema de optimización es una restricción sobre la relación entre p_y y w, de modo que el plan de producción elegido por la firma corresponda a un óptimo del PMB cuando la firma es tomadora de precios.

PMU del consumidor 1

$$\max_{x_1,y_1,h_1\geq 0} u_1(x_1,y_1,h_1) = x_1^{\alpha_x} y_1^{\alpha_y} h_1^{\alpha_h}$$
$$\textbf{s.a. } p_x x_1 + p_y y_1 + w h_1 = wT + p_y w_y$$

A partir de las CPO se obtiene que en el óptimo se cumple:

$$\frac{Umgx_1}{Umgy_1} = \frac{\alpha_x y_1}{\alpha_y x_1} = \frac{p_x}{p_y}$$
$$\frac{Umgx_1}{Umgh_1} = \frac{\alpha_x h_1}{\alpha_h x_1} = \frac{p_x}{w}$$
$$\frac{Umgy_1}{Umgh_1} = \frac{\alpha_y h_1}{\alpha_h y_1} = \frac{p_y}{w}$$

Funciones de demanda y oferta del consumidor 1:

$$x_1^d(p) = \frac{\alpha_x}{p_x}(wT + p_y w_y)$$
$$y_1^d(p) = \frac{\alpha_y}{p_y}(wT + p_y w_y)$$
$$h_1^d(p) = \frac{\alpha_h}{w}(wT + p_y w_y)$$
$$l_1^s(p) = T(1-\alpha_h) - \frac{\alpha_h p_y w_y}{w}$$

PMU del consumidor 2

$$\max_{x_2,y_2\geq 0} u_2(x_2,y_2) = x_2^{\beta_x} y_2^{\beta_y}$$
$$\textbf{s.a. } p_x x_2 + p_y y_2 = w\hat{l}_2 + \pi_x(p)$$

A partir de las CPO se obtiene que en el óptimo se cumple:

$$\frac{Umgx_2}{Umgy_2} = \frac{p_x}{p_y}$$

Funciones de demanda y oferta del consumidor 2:

$$x_2^d(p) = \frac{\beta_x}{p_x}(w\hat{l}_2 + \pi_x(p))$$
$$y_2^d(p) = \frac{\beta_y}{p_y}(w\hat{l}_2 + \pi_x(p))$$
$$l_2^s = \hat{l}_2$$

g) Muestre que la Ley de Walras se satisface, explique por qué y qué implica su cumplimiento en términos del álgebra del equilibrio.

$$p_x(x_1^d(p)+x_2^d(p)-x^s(p))+p_y(y_1^d(p)+y_2^d(p)+y_x^d(p)-y^s(p)-w_y)+w(l_x^d(p)+l_y^d(p)-l_1^s(p)-\hat{l}_2)$$

$$= [p_x x_1^d(p)+p_y y_1^d(p)-p_y w_y-wl_1^s(p)]+[p_x x_2^d(p)+p_y y_2^d(p)-\hat{l}_2]-[p_x x^s(p)-p_y y_x^d(p)-wl_x^d(p)]-[p_y y^s(p)-wl_y^d(p)]$$

$$= 0+\pi_x(p)-\pi_x(p)-\pi_y(p)=0$$

La Ley de Walras se satisface porque las preferencias de los individuos son monótonas lo que implica que los consumidores agotan sus recursos en la compra de bienes de consumo; y porque hemos distribuido la propiedad sobre w_y y sobre $\pi_x(p)$.

Dado que la Ley de Walras se satisface nos basta con emplear dos de las tres ecuaciones de equilibrio para obtener los precios de equilibrio para esta economía.

h) Obtenga el equilibrio walrasiano.

Usamos la relación entre p_y y w obtenida a partir del PMB de la firma que produce el bien y y establecemos el trabajo como bien numerario de modo que $w^*=1$ y $p_y^*=\phi$. Usando la ecuación de equilibrio en el mercado del bien x se obtiene:

$$p_x^* = \left(\frac{((\alpha_x+\beta_x)\,T+\alpha_x\phi w_y)}{(\sigma_l)^{\sigma_l}\left(\frac{\sigma_y}{\phi}\right)^{\sigma_y}-m\beta_x}\right)^{(1-(\sigma_l)-(\sigma_y))}$$

Remplazando los precios de equilibrio en las funciones de demanda de bienes y y factores obtenemos la asignación de equilibrio.

i) Muestre que el primer teorema fundamental del bienestar se satisface.

Sabemos que la asignación de equilibrio es factible pues a los precios de equilibrio se cumple:

$$x_1^d(p^*)+x_2^d(p^*)=f_x(l_x^d(p^*),y_x^d(p^*))$$

$$y_1^d(p^*)+y_2^d(p^*)+y_x^d(p^*)=f_y(l_y^d(p^*))+w_y$$

$$l_x^d(p^*)+l_y^d(p^*)=l_1+\hat{l_2}$$

y porque en el PMU del consumidor 1 se exige que: $l_1+h_1=T$. Asimismo de las CPO de los problemas de optimización de firmas y consumidores se obtiene:

Firma que produce x

$$Pmgl_x=\frac{w}{p_x}$$

$$Pmgy_x=\frac{p_y}{p_x}$$

Firma que produce y

$$Pmgl_y=\frac{w}{p_y}$$

Consumidor 1

$$\frac{Umgx_1}{Umgy_1}=\frac{\alpha_x y_1}{\alpha_y x_1}=\frac{p_x}{p_y}$$

$$\frac{Umgx_1}{Umgh_1} = \frac{\alpha_x h_1}{\alpha_h x_1} = \frac{p_x}{w}$$
$$\frac{Umgy_1}{Umgh_1} = \frac{\alpha_y h_1}{\alpha_h y_1} = \frac{p_y}{w}$$

Consumidor 2

$$\frac{Umgx_2}{Umgy_2} = \frac{p_x}{p_y}$$

Dado que existe un solo mercado para cada bien, a partir de las CPO se obtiene:

$$\frac{Umgx_1}{Umgy_1} = \frac{Umgx_2}{Umgy_2} = \frac{1}{Pmgy_x} = \frac{Pmgl_y}{Pmgl_x} = \frac{p_x}{p_y}$$

$$\frac{Umgh_1}{Umgx_1} = Pmgl_x = \frac{w}{p_x}$$
$$\frac{Umgh_1}{Umgy_1} = Pmgl_y = \frac{w}{p_y}$$

Lo que nos permite verificar que el 1TFB se satisface.