Macro, Money and Finance: A Continuous-Time Approach

Problem Set

Student: Alvaro Moran
Professor: Fernando Mendo

March 15, 2025

1. Consider an infinitely-lived household with logarithmic preferences over consumption $\{c_t\}_{t\geq 0}$,

$$U_0 = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{-\rho t}\log(c_t)dt\right] \tag{1}$$

The household has initial wealth $n_0 > 0$ and does not receive any endowment or labor income. Wealth can be invested into two assets:

- A risk-free bond with (instantaneous) return $r^b dt$.
- A risky stock with return $r^s dt + \sigma dZ_t$, where Z_t is a Brownian motion.

Here, r^b, r^s, and σ are constant parameters.

The household's net worth evolution is given by:

$$dn_t = -c_t dt + n_t\left[(1-\theta_t^s)r^b dt + \theta_t^s(r^s dt + \sigma dZ_t)\right] \tag{2}$$

where θ_t^s denotes the fraction of wealth invested into the stock. The household chooses consumption $\{c_t\}_{t\geq 0}$ and portfolio shares $\{\theta_t^s\}_{t\geq 0}$ to maximize utility U_0 subject to the net worth evolution and a solvency constraint $n_t \geq 0$.

(a) In this part, you will solve the consumption-portfolio choice problem using the Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) equation. The state space of this decision problem is one-dimensional with state variable n_t, so you can denote the household's value function by $V(n)$.

i. Write down the (deterministic) HJB equation for the value function $V(n)$.
La ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) está dada por:

$$\rho V(n) = \max_c\left\{\log(c) + \frac{\mathbb{E}[V(n)]}{dt}\right\}$$

Resolvemos primero la derivada temporal esperada:

$$\frac{E[V(n)]}{dt} = \frac{V_n\, dn + \frac{1}{2}V_{nn}\,(dn)^2}{dt}$$

$$V_n\, dn = V_n\left((-c + n[(1-\theta^s)r^b + r^s\theta^s])\, dt + n\sigma\theta^s\, dZ\right)$$

Y el término cuadrático:

$$V_{nn}\,(dn)^2 = V_{nn}\,(n\sigma\theta^s)^2\, dt$$

Combinando todo,

$$\frac{E[V(n)]}{dt} = \frac{V_n(-c + n[(1-\theta^s)r^b + r^s\theta^s])dt + \frac{1}{2}V_{nn}\,(n\sigma\theta^s)^2\, dt}{dt}$$

Simplificando:

$$\frac{E[V(n)]}{dt} = V_n\left(-c + n[(1-\theta^s)r^b + r^s\theta^s]\right) + \frac{1}{2}V_{nn}(n\sigma\theta^s)^2$$

Finalmente, resolviendo para $V(n)$:

$$\boxed{\rho V(n) = \log(c) + V_n\left(-c + n[(1-\theta^s)r^b + r^s\theta^s]\right) + \frac{1}{2}V_{nn}(n\sigma\theta^s)^2}$$

ii. Take first-order conditions with respect to all choice variables.
Me doy cuenta de que una parte de la ecuación contiene la variable c y otra parte contiene θ^s. Dado que en ninguna sección de la ecuación aparecen ambas simultáneamente, puedo reordenarla de la siguiente manera:

$$\rho V(n) = \max_c\{\log(c) - V_n c\} + \max_{\theta^s}\left\{V_n\, n\,((1-\theta^s)r^b + r^s\theta^s) + \frac{1}{2}V_{nn}\,(n\sigma\theta^s)^2\right\}$$

<u>Condición de Primer Orden del Consumo:</u>

Para c, tenemos:

$$\frac{\partial \rho V(n)}{\partial c} = \frac{1}{c} - V_n = 0$$

De donde se obtiene:

$$\boxed{\frac{1}{c} = V_n \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{V_n}}$$

Condición de Primer orden de θ^s

La ecuación de primer orden con respecto a θ^s es:

$$\frac{\partial \rho V(n)}{\partial \theta^s} = V_n(-nr^b + r^s n) + V_{nn}(n\sigma)^s \theta^s = 0$$

Despejando θ^s:

$$\boxed{\theta^s = \frac{nr^b - r^s n^s}{(n\sigma)^2} \frac{V_n}{V_{nn}}}$$

iii. Assume optimal consumption is proportional to net worth, $c(n) = an$, with some constant $a > 0$ (to be determined below). Use the first-order condition for consumption derived in part (b) to turn this into a guess for the value function $V(n)$. *Hint: Don't forget to add an integration constant (call it b) when moving from $V'(n)$ to $V(n)$; $V(n)$ is the sum of two terms.*

De la CPO de c encontrada anteriormente tenemos que :

$$\frac{1}{c} = V_n$$

Despejando:

$$c = \frac{1}{V_n}$$

Para la función de valor $V(n)$, integramos V_n y asumimos el guess que nos pide $c = an$:

$$V = \int V_n \, dn = \int \frac{1}{an} \, dn$$

Resolviendo la integral:

$$\boxed{V(n) = \frac{1}{a} \log(n) + b}$$

donde b es una constante de integración.

iv. Use your guess for $V(n)$ to simplify the first-order condition for θ^s_t and solve the resulting equation for θ^s_t.

De la ecuación de la CPO de θ^s tenemos que:

$$\theta^s = \frac{nr^b - r^s n^s}{(n\sigma)^2} \frac{V_n}{V_{nn}}$$

Usamos las derivadas de $V(n) = \frac{1}{a} \log(n) + b$:

$$V_n = \frac{1}{an}, \quad V_{nn} = \frac{-1}{an^2}$$

Sustituyendo en la ecuación de la CPO:

$$\theta^s = \frac{n(r^b - r^s)}{(n\sigma)^2} \left(\frac{V_n}{V_{nn}} \right)$$

Reemplazando V_n y V_{nn}:

$$\theta^s = \frac{n(r^b - r^s)}{(n\sigma)^2} \left(\frac{\frac{1}{an}}{\frac{-1}{an^2}} \right)$$

Simplificando:

$$\boxed{\theta^s = \frac{(r^s - r^b)}{\sigma^2}}$$

v. Substitute the optimal choices and the guess for $V(n)$ into the HJB equation to eliminate $V(n)$, $V'(n)$, $V''(n)$, c, θ^s and the max operator.
Hago los reemplazos solicitados en $V(n)$, $V'(n)$, $V''(n)$ y c

$$\rho\left(\frac{1}{a}\log(n)+b\right) = \log(an) - \frac{an}{an} + \frac{1}{an}n\left[(1-\theta^s)r^b + r^s\theta^s\right] - \frac{1}{2an^2}(n\sigma\theta^s)^2$$

Expandiendo términos:

$$\rho\left(\frac{1}{a}\log(n)+b\right) = \log(a) + \log(n) - 1 + \frac{1}{a}\left[(r^s - r^b)\theta^s\right] - \frac{1}{2an^2}(n\sigma\theta^s)^2 + \frac{r^b}{a}$$

Recordemos que:

$$\theta^s = \frac{(r^s - r^b)}{\sigma^2}$$

Sustituyendo θ^s:

$$\rho\left(\frac{1}{a}\log(n)+b\right) = \log(a) + \log(n) - 1 + \frac{1}{a}\left[(r^s - r^b)\frac{(r^s - r^b)}{\sigma^2}\right] - \frac{1}{2a}\left(\sigma\frac{(r^s - r^b)}{\sigma^2}\right)^2 + \frac{r^b}{a}$$

Finalmente, despejando ρb:

$$\boxed{\rho b = \log a + \log n\left(n - \frac{\rho}{a}\right) - 1 + \frac{1}{2a}\frac{(r^b - r^s)^2}{\sigma^2} + \frac{r^b}{a}}$$

vi. The resulting equation in step (e) has to hold for all $n > 0$ (if it does not, the previous guess was incorrect). Show that this is indeed possible if we choose a and b appropriately. What are the required values for a and b?
Para eliminar la dependencia en n, necesitamos que:

$$\log(n)\cdot\left(1 - \frac{\rho}{a}\right) = 0$$

De donde se sigue que:

$$1 - \frac{\rho}{a} = 0$$

Despejando a:

$$\boxed{a = \rho}$$

Ahora, Para hallar b hacemos el remplazo de $a = \rho$, tenemos la ecuación:

$$\rho b = \log(\rho) - 1 + \frac{1}{2\rho}\frac{(r^b - r^s)^2}{\sigma^2} + \frac{r^b}{\rho}$$

Despejamos b:

$$b = \frac{1}{\rho}\left(\log(\rho) - 1 + \frac{1}{2\rho}\frac{(r^b - r^s)^2}{\sigma^2} + \frac{r^b}{\rho}\right)$$

(b) Now consider the same decision problem as before but approach it with the stochastic maximum principle instead of the HJB equation.

i. Denote by ξ_t the costate for net worth n_t and by σ_t^ξ its (arithmetic) volatility loading (that is $d\xi_t = \mu_t^\xi dt + \sigma_t^\xi dZ_t$ with some drift μ_t^ξ). Write down the Hamiltonian of the problem.
Planteamos la forma del Hamiltoniano

$$H = e^{-\rho t} \ln u(c) + n\xi_t \mu^n + \operatorname{tr}\left((\sigma_\xi)^T \sigma^n\right)$$

Recordar

$$dn = n\left(\frac{-c}{n} + \left[(1-\theta^s)r^b + r^s\theta^s\right]\right) dt + n\sigma\theta^s\, dZ)$$

Definiendo μ^n y σ^n:

$$\mu^n = \left(\frac{-c}{n} + \left[(1-\theta^s)r^b + r^s\theta^s\right]\right)$$

$$\sigma^n = \sigma\theta^s$$

Entonces, la ecuación diferencial se puede reescribir como:

$$dn = n\mu^n dt + n\sigma^n dZ$$

En base a eso podemos definir la Hamiltoniana:

$$\boxed{H = e^{-\rho t} \ln u(c) + n\xi_t \left(\frac{-c}{n} + \left[(1-\theta^s)r^b + r^s\theta^s\right]\right) + \operatorname{tr}\left((\sigma^\xi)^T \sigma\theta^s n\right)}$$

ii. The choice variables have to maximize the Hamiltonian at all times. Take the first-order conditions in this maximization problem.
<u>Calculamos la CPO de c:</u>

$$\frac{\partial H}{\partial c} = -\xi_t + \frac{e^{\rho t}}{c} = 0$$

De aquí, despejamos c:

$$\boxed{c = \frac{e^{-\rho t}}{\xi_t}}$$

<u>Calculamos la CPO θ^s:</u>

$$\frac{\partial H}{\partial \theta^s} = n\xi_t(-r^b + r^s) + \left((\sigma^\xi)^T n\sigma\right) = 0$$

$$\boxed{(r^s - r^b) = -\frac{\left((\sigma^\xi)\sigma\right)}{\xi_t}}$$

iii. Let's again make the guess $c_t = an_t$ with an unknown constant $a > 0$. Use the first-order condition for consumption derived in part (b) to turn this into a guess for the costate ξ_t. Also determine the implied costate volatility σ_t^ξ.
Partimos de la condición óptima para c^*:

$$c^* = \frac{e^{-\rho t}}{\xi_t}$$

Dado nuestro guess $c = an$, igualamos ambas expresiones:

$$an = \frac{e^{-\rho t}}{\xi_t}$$

Despejamos ξ_t:

$$\xi_t = \frac{e^{-\rho t}}{an}$$

Partimos de la ecuación diferencial para ξ_t:

$$d\xi_t = \mu^{\xi}\, dt + \sigma^{\xi} dZ$$

Sustituyendo $\xi_t = \frac{e^{-\rho t}}{an}$, obtenemos:

$$d\xi_t = -\frac{\rho e^{-\rho t}}{an} dt + \frac{e^{-\rho t}}{an^3}(dn)^2 - \frac{e^{-\rho t}}{an^2} dn$$

Recordando que:

$$dn = n\left(r^b(1-\theta^s) + r^s\theta^s - \frac{c}{n}\right) dt + n\sigma\theta^s dZ$$

Al elevar al cuadrado dn:

$$(dn)^2 = n^2(\sigma\theta^s)^2 dZ^2$$

Dado que $dZ^2 = dt$, sustituimos:

$$(dn)^2 = n^2(\sigma\theta^s)^2 dt$$

Nos enfocamos en el termino estocástico de ξ, denotada como σ^{ξ}.
Sabemos que el término estocástico proviene de la dinámica de dn:

$$dn^Z = n\sigma\theta^s dZ$$

Partimos de la ecuación diferencial de ξ_t:

$$d\xi_t = -\frac{\rho e^{-\rho t}}{an} dt + \frac{e^{-\rho t}}{an^3}(dn)^2 - \frac{e^{-\rho t}}{an^2} dn$$

Observamos que, por las reglas de multiplicación de procesos estocásticos, el único término que contribuye a la volatilidad es dn, ya que los demás términos son deterministas.
Así, obtenemos que:

$$\sigma^{\xi} = -\frac{e^{-\rho t}}{an^2} dn^Z$$

Sustituyendo $dn^Z = n\sigma\theta^s dZ$, llegamos a:

$$\sigma^{\xi} = \frac{-e^{-\rho t}}{an}\sigma\theta^s$$

Finalmente, usando la definición de ξ_t, expresamos la volatilidad de ξ de manera compacta:

$$\boxed{\sigma^{\xi} = -\xi_t\sigma\theta^s}$$

iv. Determine the optimal solution for θ_t^s.
Usando la CPO de θ^s

$$(r^s - r^b) = -\frac{\left((\sigma^{\xi})\sigma\right)}{\xi_t}$$

$$(r^s - r^b) = \frac{((\xi_t\sigma\theta^s)\sigma)}{\xi_t}$$

Con esto encuentro la solución óptima para θ^s

$$\boxed{\frac{(r^s - r^b)}{\sigma^2} = \theta^s}$$

v. Write down the costate equation for ξ_t and substitute in your guess for c_t, the implied guesses for ξ_t and σ_t^{ξ}, and the implied optimal solution for θ_t^s. Show that the costate equation is indeed satisfied (and hence the guess was correct) if you choose a suitably. Which value(s) for a work?
<u>Equación de coestado:</u>

$$d\xi_t = \mu^\xi \, dt + \sigma^\xi dZ$$

Sustituyendo su expresión:

$$d\xi_t = -\frac{\rho e^{-\rho t}}{an} dt + \frac{e^{-\rho t}}{an^3}(dn)^2 - \frac{e^{-\rho t}}{an^2} dn$$

Recordamos que:

$$dn = n\left(r^b(1-\theta^s) + r^s\theta^s - \frac{c}{n}\right) dt + n\sigma\theta^s dZ$$

Elevando al cuadrado:

$$(dn)^2 = n^2(\sigma\theta^s)^2 dt$$

Sustituyendo en la ecuación de $d\xi_t$:

$$d\xi_t = -\frac{\rho e^{-\rho t}}{an} dt + \frac{e^{-\rho t}}{an}(\sigma\theta^s)^2 dt - \frac{e^{-\rho t}}{an}\left(\left(r^b(1-\theta^s) + r^s\theta^s - \frac{c}{n}\right) dt + \sigma\theta^s dZ\right)$$

Recordamos que:

$$\mu^\xi = \frac{e^{-\rho t}}{an}\left(\rho + ((\sigma\theta^s)^2 + r^b(1-\theta^s) + r^s\theta^s - \frac{c}{n})\right)$$

Y utilizando la solcuión óptima de c y θ^s:

$$c = an, \quad \theta^s = \frac{r^s - r^b}{\sigma^2}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación final de μ^ξ:

$$\mu^\xi = -\frac{e^{-\rho t}}{an}\left(\rho + \left(\frac{r^s - r^b}{\sigma}\right)^2 + r^b + \frac{(r^s - r^b)^2}{\sigma^2} - a\right)$$

Simplificamos:

$$\boxed{\mu^\xi = -\frac{e^{-\rho t}}{an}\left(\rho + r^b - a\right)}$$

Ahora para verificar que sea satisfecha debo encontrar que la relación esperada con la derivada del Hamiltoniano $\mu^\xi = -H_n^n$

Calculo de H_n^n

Dado que:

$$\xi_t = \frac{e^{-\rho t}}{an}$$

La función Hamiltoniana es:

$$H = e^{-\rho t} \ln u(c) + n\xi_t\left(\frac{-c}{n} + \left[(1-\theta^s)r^b + r^s\theta^s\right]\right) + \operatorname{tr}\left((\sigma^\xi)^T \sigma\theta^s n\right)$$

Calculamos H_n^n:

$$H_n^n = -r^b\theta^s\xi_t + r^b\xi_t + r^s\theta^s\xi_t + \sigma(-\xi_t\sigma\theta^s)\theta^s$$

Sustituyendo $\xi_t = \frac{e^{-\rho t}}{an}$ en **todas** las instancias:

$$H_n^n = -r^b\theta^s\frac{e^{-\rho t}}{an} + r^b\frac{e^{-\rho t}}{an} + r^s\theta^s\frac{e^{-\rho t}}{an} + \sigma\left(-\frac{e^{-\rho t}}{an}\sigma\theta^s\right)\theta^s$$

Factorizamos $\frac{e^{-\rho t}}{an}$:

$$H_n^n = \frac{e^{-\rho t}}{an}\left(-r^b\theta^s + r^b + r^s\theta^s - \sigma^2\theta^s\theta^s\right)$$

Sustituyendo $\theta^s = \frac{r^s - r^b}{\sigma^2}$:

$$H_n^n = \frac{e^{-\rho t}}{an}\left(r^b + (r^s - r^b)\frac{r^s - r^b}{\sigma^2} - (r^s - r^b)\sigma^2\left(\frac{r^s - r^b}{\sigma^2}\right)^2\right)$$

$$H_n^n = \frac{e^{-\rho t}}{an}\left(r^b + \frac{(r^s - r^b)^2}{\sigma^2} - \frac{(r^s - r^b)^2}{\sigma^2}\right)$$

$$H_n^n = \frac{e^{-\rho t}}{an}r^b$$

Por lo tanto, la expresión final es:

$$\boxed{H_n^n = \frac{e^{-\rho t}r^b}{an}}$$

Comparativa $\mu^\xi = -H_n^n$

$$\mu^\xi = -H_n^n$$

Tengo

$$\mu^\xi = -\frac{e^{-\rho t}}{an}\left(\rho + r^b - a\right)$$

$$H_n^n = \frac{e^{-\rho t}r^b}{an}$$

Entonces

$$-\frac{e^{-\rho t}}{an}\left(\rho + r^b - a\right) = -\frac{e^{-\rho t}r^b}{an}$$

Para que esta relación se cumpla necesito

$$\boxed{\rho = a}$$

vi. Verify that the optimal solution coincides with the one you obtained from the HJB approach. Also show that $\xi_t = e^{-\rho t}V'(n_t)$, where V is the value function determined previously.

Ambos problemas son equivalentes

En ambos problemas, tenemos que el equilibrio de c y θ^s está dado por:

$$c = n\rho \quad (\rho = a)$$

$$\theta^s = \frac{(r^s - r^b)}{\sigma^2}$$

Dado que estos resultados son idénticos, podemos asumir que ambos problemas llevan a la misma conclusión.

Demostración de que $\xi_t = e^{-\rho t}V'(n_t)$

Después de resolver el problema, encontramos que el coestado está dado por:

$$\xi_t = \frac{e^{-\rho t}}{an}$$

Recordemos que la derivada de la función valor $V(n_t)$, encontrada en el inciso (a), es:

$$V'(n_t) = \frac{1}{c}$$

En equilibrio, sabemos que $c = an$, por lo que:

$$V'(n_t) = \frac{1}{c} = \frac{1}{an}$$

De esta manera, se cumple la relación:

$$\boxed{\xi_t = e^{-\rho t} V'(n_t) = \frac{e^{-\rho t}}{an}}$$

2. In this exercise, you will solve BruSan (2014) numerically, under the assumption of log utility. Our goal is to construct functions $q(\eta)$, $\iota(\eta)$, $\kappa(\eta)$ and $\sigma^q(\eta)$ on the $[0,1]$ grid. Slides 133-135 describe the set of equations and the algorithm. The parameter values are:

$$\rho_e = 0.06, \quad \rho_h = 0.05, \quad a_e = 0.11, \quad a_h = 0.03, \quad \delta = 0.05, \quad \phi = 10, \quad \alpha = 0.5, \quad \sigma = 0.1$$

where $\Phi(\iota) = (1/\phi)\log(1 + \phi\iota)$.

(a) Solve the model at the boundaries: for $\eta = 0$ and $\eta = 1$.

<u>Equaciones necesarias para resolver lo solicitado</u>

Por las condiciones de equilibrio de mercado, se cumple que:

$$\underbrace{\eta x^{k,e}}_{\kappa^e} + \underbrace{(1-\eta)x^{k,h}}_{\kappa^h} = 1$$

Además, se tiene la siguiente ecuación:

$$(a^e - a^h)\kappa^e + a^h = \iota(q) + q\left[\eta\rho_e + (1-\eta)\rho_h\right]$$

Junto con las siguientes relaciones:

$$\Phi'(\iota) = \frac{1}{q}$$

$$1 + \phi\iota = q$$

$$\iota = \frac{1}{\phi}q - \frac{1}{\phi}$$

<u>**Caso:** $\eta = 1$</u>

En este caso, se tiene que:

$$k^e = 1, \quad k^h = 0$$

Lo que implica que:

$$a^e = \frac{1}{\phi}q - \frac{1}{\phi} + q\rho_e$$

Despejando q:

$$\boxed{q = \frac{1 + a^e\phi}{1 + \rho_e\phi}}$$

<u>**Caso:** $\eta = 0$</u>

En este caso:

$$k^e = 0, \quad k^h = 1$$

Lo que nos lleva a:

$$a^h = \frac{1}{\phi}q - \frac{1}{\phi} + q\rho_h$$

Despejando q:

$$\boxed{q = \frac{1 + a^h\phi}{1 + \rho_h\phi}}$$

(b) Create a uniform grid for $\eta \in [0.0001, 0.9999]$.
Se realizó en el código de MATLAB `ejercicio2.m`.

(c) Solve the ODE for $q(\eta)$ assuming $\kappa(0) = 0$ as boundary condition. Stop once you reach $\kappa \geq 1$. From here on, set $\kappa = 1$, solve for q and σ^q.
Se emplearon las siguientes ecuaciones

$$\iota(q) = \frac{1}{\phi}q - \frac{1}{\phi} \tag{1}$$

$$\kappa^e(q) = \frac{\iota(q) + q(\eta\rho_e + (1-\eta)\rho_h) - a^h}{a^e - a^h} \tag{2}$$

$$0 = \left(\frac{a^e - a^h}{q} - \frac{\kappa^e(q) - \eta}{\eta(1-\eta)} \left(\frac{\sigma}{1 - \left(\frac{\kappa^e(q)}{\eta} - 1\right)\left(\eta \frac{dq}{d\eta}\frac{1}{q}\right)} \right)^2 \right) \tag{3}$$

recordar que ι viene de

$$\Phi(\iota) = (1/\phi)\log(1 + \phi\iota)$$

$$\Phi'(\iota) = \frac{1}{1 + \phi\iota}.$$

$$\Phi'(\iota) = (q^K)^{-1}$$
$$1 + \phi\iota = (q^K)$$
$$\iota = \frac{1}{\phi}(q^K) - \frac{1}{\phi}$$

Con estas ecuaciones, realizo el código en `MATLAB` llamado `ejercicio2.m`, en el cual se calcula $q(\eta)$ siguiendo un procedimiento en dos partes.
Se emplea la ecuación (3) para aproximar la derivada de q con respecto a η, utilizando diferencias finitas:

$$q_\eta \approx \frac{q(i) - q(i-1)}{\eta(i) - \eta(i-1)}$$

La simulación comienza con un valor inicial $q(0)$, obtenido en el inciso (a). Además, $\eta(1)$ proviene de la grilla y se define $\eta(0) = 0$. Para continuar, es necesario encontrar un valor $q(1)$ que satisfaga la ecuación (3).
Este procedimiento se repite iterativamente:

- En cada paso, se emplea el valor previamente calculado $q(i-1)$.
- Se determina $q(i)$ de manera que se cumpla la ecuación (3).
- De esta forma, se obtiene la secuencia de valores $q(\eta)$ de manera progresiva.

Este enfoque permite construir $q(\eta)$ a lo largo de la grilla de valores de η.
El proceso continúa hasta que se alcanza la condición $\kappa^e \geq 1$. A partir de este punto, se emplea la ecuación (2) para calcular q, imponiendo la restricción $\kappa^e = 1$.

(d) Verify your solution by plotting $q(\eta)$ and $\sigma^q(\eta)$. Also plot $\iota(\eta)$, $\kappa(\eta)$.
Se ploteó usando las siguientes ecuaciones.
Los valores de q_η y κ^e provienen del problema.

Figure 1: Gráfico de q.

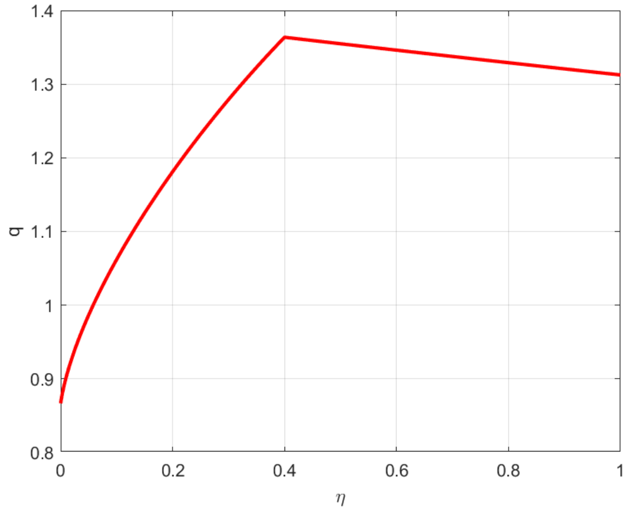
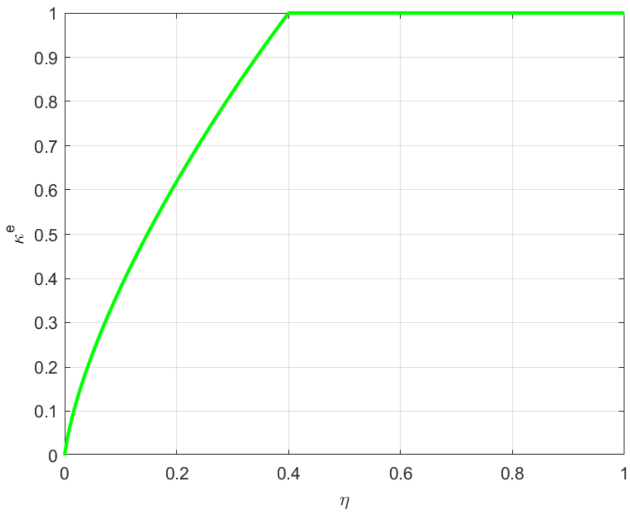


Figure 2: Gráfico de κ^e.



La función ι se define como:

$$\iota = \frac{1}{\phi} q^K - \frac{1}{\phi}$$

Además, se emplea la ecuación:

$$\sigma^q = \left(\frac{\sigma}{1 - \left(\frac{\kappa}{\eta} - 1\right) \left(\eta \frac{dq}{d\eta} \frac{1}{q}\right)} \right) - \sigma$$

Figure 3: Gráfico de ι.

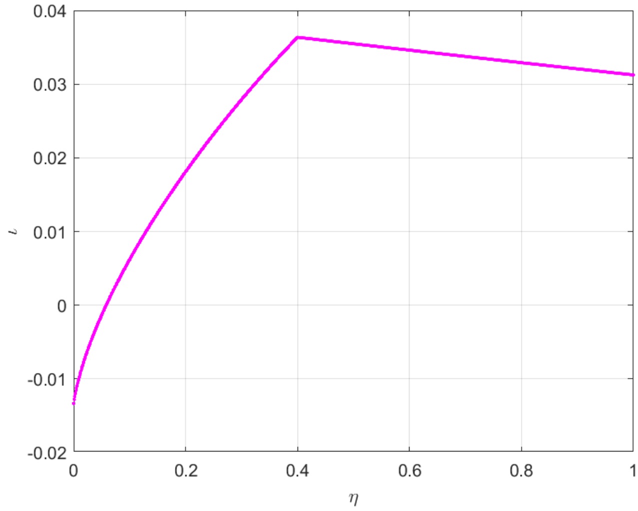
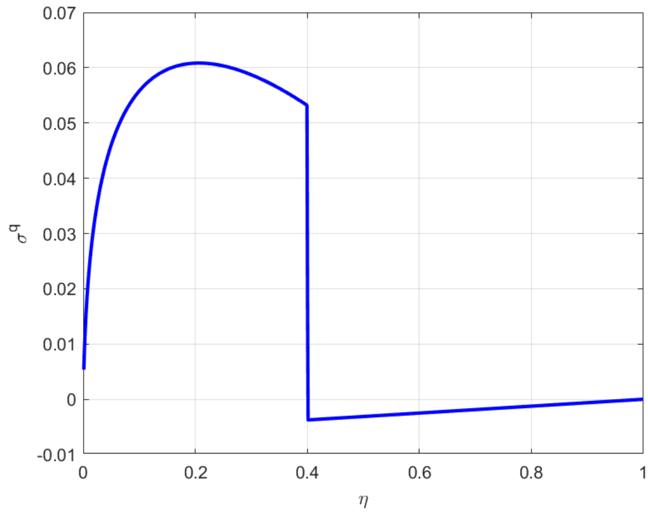


Figure 4: Gráfico de σ^q.



(e) An alternative derivation for the drift and volatility of η in the general case is given by:

$$\mu_t^\eta = (1-\eta_t)\left[(\varsigma_t^e - \sigma - \sigma_t^q)(\sigma_t^\eta + \sigma + \sigma_t^q) - (\varsigma_t^h - \sigma - \sigma_t^q)\left(\frac{-\eta_t}{1-\eta_t}\sigma_t^\eta + \sigma + \sigma_t^q\right)\right] - \left(\frac{C_t^e}{N_t^e} - \frac{C_t^h}{N_t^h}\right) \tag{3}$$

$$\sigma_t^\eta = \frac{\kappa_t - \eta_t}{\eta_t}(\sigma + \sigma_t^q) \tag{4}$$

where ς_e and ς_h are risk prices. Show these expressions are equivalent to the ones derived in the slides (you can assume logarithmic preferences).

Iniciamos hallando el valor de μ Tenemos que de los slides:

$$\eta\mu^\eta = \eta(1-\eta)\left(\mu^{n,e} - \mu^{n,h} + \frac{c_h}{n_h} - \frac{c_e}{n_e}\right) - \eta\sigma_\eta\left(\eta\sigma^{n,e} + (1-\eta)\sigma^{n,h}\right) \tag{5}$$

$$\mu^\eta = (1-\eta)\left(\mu^{n,e} - \mu^{n,h} + \frac{c_h}{n_h} - \frac{c_e}{n_e}\right) - \sigma_\eta\left(\eta\sigma^{n,e} + (1-\eta)\sigma^{n,h}\right) \tag{1}$$

$$\mu^{n,e} = r + \zeta_e \sigma^{n,e} \tag{2}$$

$$\mu^{n,h} = r + \zeta_h \sigma^{n,h} \tag{3}$$

$$\sigma^{n,e} = x_{k,e}(\sigma + \sigma_q) = \frac{\kappa_e}{\eta}(\sigma + \sigma_q) \tag{4}$$

$$\sigma^{n,h} = x_{k,h}(\sigma + \sigma_q) = \frac{1-\kappa_e}{1-\eta}(\sigma + \sigma_q) \tag{5}$$

$$\eta\sigma^{\eta} = (\kappa^e - \eta)(\sigma + \sigma_q) \tag{6}$$

Con esto aplicamos los reemplazos de (3) y (2) en (1)

$$\mu^{\eta} = (1-\eta)(\left(r + \zeta_e\sigma^{n,e} - r - \zeta_h\sigma^{n,h} + \frac{c_h}{n_h} - \frac{c_e}{n_e}\right) - \frac{\sigma_\eta}{(1-\eta)}\left(\eta\sigma^{n,e} + (1-\eta)\sigma^{n,h}\right))$$

$$\mu^{\eta} = (1-\eta)(\left(\zeta_e\sigma^{n,e} - \zeta_h\sigma^{n,h} + \frac{c_h}{n_h} - \frac{c_e}{n_e}\right) - \frac{\sigma_\eta}{(1-\eta)}\left(\eta\sigma^{n,e} + (1-\eta)\sigma^{n,h}\right))$$

Reordenamos (6)

$$\frac{\eta\sigma^{\eta}}{\sigma + \sigma^q} + \eta = \kappa^e$$

$$\frac{\eta\sigma^{\eta} + \eta(\sigma + \sigma^q)}{\sigma + \sigma^q} = \kappa^e$$

Reordenamos (5)

$$\sigma^{n,h} = \frac{1-\kappa_e}{1-\eta}(\sigma + \sigma_q)$$

$$\sigma^{n,h} = \frac{(\sigma + \sigma_q)}{1-\eta} - \frac{k_e}{1-\eta}(\sigma + \sigma_q)$$

Incorporamos (6) en (5) y (4)

$$\sigma^{n,e} = \frac{1}{\eta}(\sigma + \sigma_q) * \frac{\eta\sigma^{\eta} + \eta(\sigma + \sigma^q)}{\sigma + \sigma^q}$$

$$\sigma^{n,h} = \frac{(\sigma + \sigma_q)}{1-\eta} - \frac{\eta\sigma^{\eta} + \eta(\sigma + \sigma^q)}{\sigma + \sigma^q} * \frac{1}{1-\eta}(\sigma + \sigma_q)$$

Tenemos para $\sigma^{n,e}$

$$\sigma^{n,e} = \sigma^{\eta} + (\sigma + \sigma^q)$$

Mientras que para $\sigma^{n,h}$

$$\sigma^{n,h} = \frac{(\sigma + \sigma_q)}{1-\eta} - \frac{\eta\sigma^{\eta} + \eta(\sigma + \sigma^q)}{1-\eta}$$

$$\sigma^{n,h} = \frac{(1-\eta) * (\sigma + \sigma_q) - \eta\sigma^{\eta}}{1-\eta}$$

$$\sigma^{n,h} = (\sigma + \sigma_q) - \frac{\eta\sigma^{\eta}}{1-\eta}$$

Utilizo lo desarrollado $\sigma^{n,e}$ y $\sigma^{n,h}$

$$\sigma^{n,h} - \sigma^{n,e} = (\sigma + \sigma_q) - \frac{\eta\sigma^\eta}{1-\eta} - \sigma^\eta - (\sigma + \sigma^q)$$

$$\sigma^{n,h} - \sigma^{n,e} = -\frac{\sigma^\eta}{1-\eta}$$

Reemplazo lo encontrado en μ^η

$$\mu^\eta = (1-\eta)((\left(\zeta_e\sigma^{n,e} - \zeta_h\sigma^{n,h} + \frac{c_h}{n_h} - \frac{c_e}{n_e}\right) - \frac{\sigma_\eta}{(1-\eta)}\left(\eta\sigma^{n,e} + (1-\eta)\sigma^{n,h}\right)))$$

$$\mu^\eta = (1-\eta)((\left(\zeta_e\sigma^{n,e} - \zeta_h\sigma^{n,h} + \frac{c_h}{n_h} - \frac{c_e}{n_e}\right) + \left(\sigma^{n,h} - \sigma^{n,e}\right)\left(\eta\sigma^{n,e} + (1-\eta)\sigma^{n,h}\right)))$$

Reemplazo la expresión $(\eta\sigma^{n,e} + (1-\eta)\sigma^{n,h})$ en μ^η con los valores en 4 y 5

$$\mu^\eta = (1-\eta)((\left(\zeta_e\sigma^{n,e} - \zeta_h\sigma^{n,h} + \frac{c_h}{n_h} - \frac{c_e}{n_e}\right) + \left(\sigma^{n,h} - \sigma^{n,e}\right)\left(\eta\frac{\kappa_e}{\eta}(\sigma + \sigma_q) + (1-\eta)\frac{1-\kappa_e}{1-\eta}(\sigma + \sigma_q)\right)))$$

$$\mu^\eta = (1-\eta)((\left(\zeta_e\sigma^{n,e} - \zeta_h\sigma^{n,h} + \frac{c_h}{n_h} - \frac{c_e}{n_e}\right) + \left(\sigma^{n,h} - \sigma^{n,e}\right)((\sigma + \sigma_q)))$$

Reordeno lo que encontre anteriormente

$$\mu^\eta = (1-\eta)((\left(\zeta_e\sigma^{n,e} - \zeta_h\sigma^{n,h} + \frac{c_h}{n_h} - \frac{c_e}{n_e}\right) + \left(\sigma^{n,h} - \sigma^{n,e}\right)((\sigma + \sigma_q)))$$

$$\mu^\eta = (1-\eta)((\left((\zeta_e - (\sigma + \sigma_q))\sigma^{n,e} - (\zeta_h - (\sigma + \sigma_q))\sigma^{n,h} + \frac{c_h}{n_h} - \frac{c_e}{n_e}\right)$$

Reemplazo lo que defini de $\sigma^{n,e}$ y $\sigma^{n,h}$

$$\mu^\eta = (1-\eta)\Bigg[((\zeta_e - (\sigma + \sigma_q))\left(\sigma^\eta + (\sigma + \sigma^q)\right)) \\ - \left((\zeta_h - (\sigma + \sigma_q))\left(\sigma + \sigma_q - \frac{\eta\sigma^\eta}{1-\eta}\right)\right) - \left(\frac{c_e}{n_e} - \frac{c_h}{n_h}\right)\Bigg]$$

Obtuve la expresión equivalente a lo solicitado en la pregunta
Ahora lo hago similar σ^η
Tengo de los slides:

$$\sigma_\eta = \left(\frac{\kappa^e}{\eta} - 1\right)\frac{\sigma}{1 - \left(\frac{\kappa^e}{\eta} - 1\right)\frac{\eta q_\eta}{q}} \tag{1}$$

$$\sigma + \sigma^q = \frac{\sigma}{1 - \left(\frac{\kappa^e}{\eta} - 1\right)\frac{\eta q_\eta}{q}} \tag{2}$$

Reemplazando (2) en (1):

$$\sigma_\eta = \left(\frac{\kappa^e}{\eta} - 1\right)(\sigma + \sigma^q) \tag{6}$$

Reordenando:

$$\sigma_\eta = \left(\frac{\kappa^e - 1}{\eta}\right)(\sigma + \sigma^q) \tag{7}$$

Obteniendo así una expresión equivalente a la solicitada en la pregunta.

(f) Plot $\eta\mu^{\eta}(\eta)$ and $\eta\sigma^{\eta}(\eta)$. Tenemos que

$$\eta\mu_{\eta} = \eta(1-\eta)(\rho_h - \rho_e) + (k^e - 2\eta k^e + \eta^2)\frac{k^e - \eta}{\eta(1-\eta)}(\sigma + \sigma_q)^2$$

$$\eta\sigma_{\eta} = (k^e - \eta)(\sigma + \sigma_q)$$

(g) Plot $r(\eta)$. Note that you will need to approximate a second order derivative.
De los slides tengo que Condición del portafolio optimo

$$\mu_q + \Phi(\iota(q)) + \sigma\sigma_q + \frac{\kappa^e a_e + (1-\kappa^e)a_h}{q} - r = \left(\frac{(\kappa^e)^2}{\eta} + \frac{(1-\kappa^e)^2}{1-\eta}\right)(\sigma + \sigma_q)^2$$

Además

$$q\mu^q = q_\eta\mu_\eta + \frac{1}{2}q_{\eta\eta}(\eta\sigma^\eta)^2$$

$$\mu^q = \frac{q_\eta}{q}\mu_\eta + \frac{1}{2q}q_{\eta\eta}(\eta\sigma^\eta)^2$$

Sustituyo

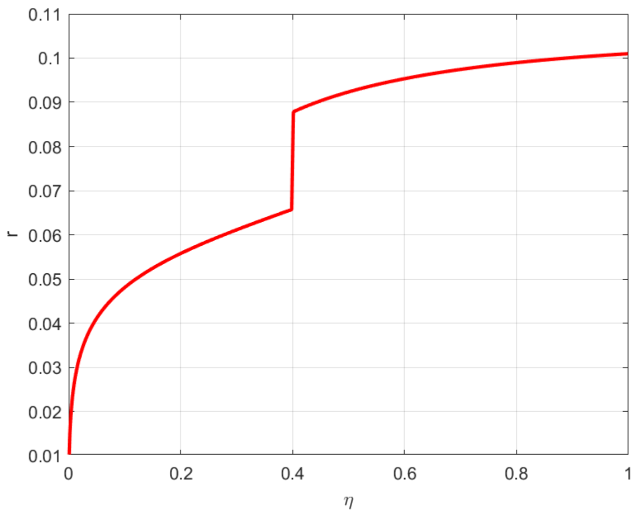
$$\frac{q_\eta}{q}\mu_\eta + \frac{1}{2q}q_{\eta\eta}(\eta\sigma^\eta)^2 + \Phi(\iota(q)) + \sigma\sigma_q + \frac{\kappa^e a_e + (1-\kappa^e)a_h}{q} - r = \left(\frac{(\kappa^e)^2}{\eta} + \frac{(1-\kappa^e)^2}{1-\eta}\right)(\sigma + \sigma_q)^2$$

Reordeno

$$r = \frac{q_\eta}{q}\mu_\eta + \frac{1}{2q}q_{\eta\eta}(\eta\sigma^\eta)^2 + \Phi(\iota(q)) + \sigma\sigma_q + \frac{\kappa^e a_e + (1-\kappa^e)a_h}{q} - \left(\frac{(\kappa^e)^2}{\eta} + \frac{(1-\kappa^e)^2}{1-\eta}\right)(\sigma + \sigma_q)^2$$

Con esta expresión programo y se encuentra en el codigo ejercicio2.m

Figure 5: Gráfico de r.



3. Consider the first monetary model studied in class with log utility and without government policy ($\mu_B = i = \sigma_B = G = \tau = 0$). There can still be a constant supply of bonds $B_t \neq 0$. In this problem, we add stochastic volatility to the model. Suppose idiosyncratic risk $\tilde{\sigma}$ evolves according to the exogenous stochastic process

$$d\tilde{\sigma}_t = b(\tilde{\sigma}_{ss} - \tilde{\sigma}_t)dt + \nu\sqrt{\tilde{\sigma}_t}dZ_t \tag{8}$$

where $\tilde{\sigma}_{ss}$, b, and ν are constants.

(a) Use goods market clearing and optimal investment to express q_K, q_B, and ι in terms of

$$\vartheta := \frac{q_B}{q_B + q_K}.$$

A partir de lo encontrado en la 3b Tenemos condiciones de Primer Orden (CPO):
Para c:

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{\rho n} \Rightarrow c = \rho n$$

Para ι:

$$\Phi'(\iota) = (q^K)^{-1}$$

Además tengo las market clearing conditions

- **Bienes**

$$a - \iota = \left(q_t^B + q_t^K\right)\frac{c_t}{n_t}$$

- **Capital**

$$x^k = \frac{q_t^K}{q_t^K + q_t^B}$$

recordar que

$$\Phi(\iota) = (1/\phi)\log(1 + \phi\iota)$$

$$\Phi'(\iota) = \frac{1}{1 + \phi\iota}.$$

$$\Phi'(\iota) = (q^K)^{-1}$$
$$1 + \phi\iota = (q^K)$$
$$\iota = \frac{1}{\phi}(q^K) - \frac{1}{\phi}$$

Recordar que

$$c = \rho n$$

reemplazar esto en el market clearing condition

$$a - \iota = \left(q_t^B + q_t^K\right)\rho$$

$$a - \frac{1}{\phi}(q^K) + \frac{1}{\phi} = \left(q_t^B + q_t^K\right)\rho$$

$$a - \frac{1}{\phi}(q^K) + \frac{1}{\phi} = \left(q_t^B + q_t^K\right)\rho\frac{q_t^k}{q_t^k}$$

$$a - \frac{1}{\phi}(q^K) + \frac{1}{\phi} = \left(q_t^B + q_t^K\right)\rho\frac{q_t^k}{q_t^k}$$

$$a\phi - (q^K) + 1 = \phi\left(q_t^B + q_t^K\right)\rho\frac{q_t^k}{q_t^k}$$

$$a\phi - (q^k) + 1 = \phi \left(\frac{1}{1-\vartheta}\right) \rho q_t^k$$

$$a\phi + 1 = (\phi(\frac{1}{1-\vartheta})\rho + 1)q_t^k$$

$$(1-\vartheta)\frac{a\phi + 1}{\phi\rho + 1 - \vartheta} = q_t^k$$

Hallar q_t^b

$$a - \frac{1}{\phi}(q_t^K) + \frac{1}{\phi} = \left(q_t^B + q_t^K\right)\rho$$

$$q_t^B = \frac{1}{\rho}(a + \frac{1}{\phi} - (\frac{1}{\phi} + \rho)q_t^K)$$

$$q_t^B = \frac{1}{\rho}(a + \frac{1}{\phi} - (\frac{1}{\phi} + \rho)(1-\vartheta)\frac{a\phi+1}{\phi\rho + 1 - \vartheta})$$

$$q_t^B = \frac{1}{\rho}\left(a + \frac{1}{\phi} - \frac{(1-\vartheta)(a\phi+1)(\frac{1}{\phi}+\rho)}{\phi\rho + 1 - \vartheta}\right)$$

$$q_t^B = \frac{1}{\rho}\left(\frac{a\phi+1}{\phi} - \frac{1}{\phi}(1-\vartheta)\frac{(a\phi+1)(1+\phi\rho)}{\phi\rho+1-\vartheta}\right)$$

$$q_t^B = \frac{1}{\rho}\left(\frac{a\phi+1}{\phi}\left[1 - \frac{(1-\vartheta)(1+\phi\rho)}{\phi\rho+1-\vartheta}\right]\right)$$

$$q_t^B = \frac{1}{\rho}\left(\frac{a\phi+1}{\phi} \cdot \frac{\vartheta\phi\rho}{\phi\rho+1-\vartheta}\right)$$

$$q_t^B = \left(\frac{\vartheta(a\phi+1)}{\phi\rho+1-\vartheta}\right)$$

Ahora hallemos ι

$$\iota = \frac{1}{\phi}(q^K) - \frac{1}{\phi}$$

$$\iota = \frac{1}{\phi}((1-\vartheta)\frac{a\phi+1}{\phi\rho+1-\vartheta}) - \frac{1}{\phi}$$

$$\iota = \frac{a(1-\vartheta) - \rho}{(1-\vartheta) + \rho}$$

(b) Derive the "money valuation equation", i.e., an expression of the form $\mu_{\vartheta t} = f(\vartheta_t, \tilde{\sigma}_t)$ (drift of ϑ) where f only depends on parameters of the model.

Feel free to use the following suggestion or an alternative procedure:

(a) Postulate a Geometric Brownian motion for ϑ, q_B, and q_K.

(b) Use the definition of ϑ to find the law of motion $d\vartheta_t$ using Itô's Lemma.

(c) Use the martingale pricing condition to simplify the expression for $\mu_{\vartheta t}$:

$$\mathbb{E}\left[\frac{dr_t^{K,i}}{dt}\right] - \mathbb{E}\left[\frac{dr_t^B}{dt}\right] = \zeta_t\left(\sigma_t^{K,i} - \sigma_t^B\right) + \tilde{\zeta}_t\left(\tilde{\sigma}_t^{K,i} - \tilde{\sigma}_t^B\right) \tag{9}$$

where ζ is the price of risk.

(d) Find the price of risk and replace it in the expression for $\mu_{\vartheta t}$.

Tenemos lo siguiente Partimos de la ecuación:

$$\vartheta = \frac{q_B}{q_B + q_K}$$

Las derivadas parciales son:

$$\vartheta_{q_B} = \frac{q_K}{(q_B + q_K)^2}$$

$$\vartheta_{q_K} = -\frac{q_B}{(q_B + q_K)^2}$$

Las segundas derivadas parciales son:

$$\vartheta_{q_B q_B} = -\frac{2q_K}{(q_B + q_K)^3}$$

$$\vartheta_{q_K q_K} = \frac{2q_B}{(q_B + q_K)^3}$$

$$\vartheta_{q_B q_K} = \frac{q_B - q_K}{(q_B + q_K)^3}$$

Dado un proceso estocástico q_t, aplicamos el Lema de Itô para calcular la diferencial de ϑ:

$$d\vartheta = \vartheta_{q_B} dq_B + \vartheta_{q_K} dq_K + \frac{1}{2}\left(\vartheta_{q_B q_B}(dq_B)^2 + 2\vartheta_{q_B q_K} dq_B dq_K + \vartheta_{q_K q_K}(dq_K)^2\right)$$

Sabemos que:

$$dq_B = q_B \mu^{q_B} dt + q_B \sigma^{q_B} dZ$$

$$dq_K = q_K \mu^{q_K} dt + q_K \sigma^{q_K} dZ$$

Sustituyendo en la ecuación de $d\vartheta$:

$$d\vartheta = \vartheta_{q_B}(q_B \mu^{q_B} dt + q_B \sigma^{q_B} dZ) + \vartheta_{q_K}(q_K \mu^{q_K} dt + q_K \sigma^{q_K} dZ)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\vartheta_{q_B q_B}(q_B \sigma^{q_B} dZ)^2 + 2\vartheta_{q_B q_K}(q_B \sigma^{q_B} dZ)(q_K \sigma^{q_K} dZ) + \vartheta_{q_K q_K}(q_K \sigma^{q_K} dZ)^2\right)$$

Usando la propiedad de **diferenciales estocásticas**:

$$(dZ)^2 = dt$$

Se obtiene:

$$d\vartheta = \left[\vartheta_{q_B} q_B \mu^{q_B} + \vartheta_{q_K} q_K \mu^{q_K} + \frac{1}{2}\left(\vartheta_{q_B q_B} q_B^2 (\sigma^{q_B})^2 + 2\vartheta_{q_B q_K} q_B q_K \sigma^{q_B} \sigma^{q_K} + \vartheta_{q_K q_K} q_K^2 (\sigma^{q_K})^2\right)\right] dt$$

$$+ \left[\vartheta_{q_B} q_B \sigma^{q_B} + \vartheta_{q_K} q_K \sigma^{q_K}\right] dZ$$

Sustituyendo las derivadas:

$$\vartheta_{q_B} = \frac{q_K}{(q_B + q_K)^2}, \quad \vartheta_{q_K} = -\frac{q_B}{(q_B + q_K)^2}$$

$$\vartheta_{q_B q_B} = -\frac{2q_K}{(q_B + q_K)^3}, \quad \vartheta_{q_K q_K} = \frac{2q_B}{(q_B + q_K)^3}, \quad \vartheta_{q_B q_K} = \frac{q_B - q_K}{(q_B + q_K)^3}$$

Sustituyendo en la ecuación de $d\vartheta$:

$$d\vartheta = \left[\frac{q_K}{(q_B+q_K)^2} q_B \mu^{q_B} - \frac{q_B}{(q_B+q_K)^2} q_K \mu^{q_K}\right] dt$$

$$+\frac{1}{2}\left[\left(-\frac{2q_K}{(q_B+q_K)^3}\right) q_B^2 (\sigma^{q_B})^2 + 2\left(\frac{q_B-q_K}{(q_B+q_K)^3}\right) q_B q_K \sigma^{q_B}\sigma^{q_K} + \left(\frac{2q_B}{(q_B+q_K)^3}\right) q_K^2 (\sigma^{q_K})^2\right] dt$$

$$+\left[\frac{q_K}{(q_B+q_K)^2} q_B \sigma^{q_B} - \frac{q_B}{(q_B+q_K)^2} q_K \sigma^{q_K}\right] dZ$$

Dado que:

$$\vartheta = \frac{q_B}{q_B+q_K}, \quad 1-\vartheta = \frac{q_K}{q_B+q_K}$$

Sustituyéndolo en la ecuación diferencial de $d\vartheta$:

$$d\vartheta = \left[\vartheta(1-\vartheta)(\mu^{q_B} - \mu^{q_K})\right] dt$$

$$+\frac{1}{2}\left[-2\vartheta^2(1-\vartheta) q_B (\sigma^{q_B})^2 + 2\vartheta(1-\vartheta)(\vartheta-(1-\vartheta))\sigma^{q_B}\sigma^{q_K} + 2\vartheta(1-\vartheta)^2 q_K (\sigma^{q_K})^2\right] \frac{dt}{q_B+q_K}$$

$$+\left[\vartheta(1-\vartheta)(\sigma^{q_B} - \sigma^{q_K})\right] dZ$$

Simplifico

$$d\vartheta = \vartheta(1-\vartheta)[[(\mu^{q_B} - \mu^{q_K})] dt$$

$$\left[-\vartheta q_B (\sigma^{q_B})^2 + (\vartheta-(1-\vartheta))\sigma^{q_B}\sigma^{q_K} + (1-\vartheta) q_K (\sigma^{q_K})^2\right] dt$$

$$+\left[(\sigma^{q_B} - \sigma^{q_K})\right] dZ]$$

La ecuación diferencial de ϑ está dada por:

$$d\vartheta = \vartheta(1-\vartheta)((\mu^{q_B} - \mu^{q_K}) dt$$

$$+(\sigma^{q_K} - \sigma^{q_B})\left[(1-\vartheta)\sigma^{q_K} + \vartheta\sigma^{q_B}\right] dt$$

$$+(\sigma^{q_B} - \sigma^{q_K}))dZ$$

Para $dr_t^{k,i}$

$$dr_t^{k,i} = \frac{d(q_t k_{i,t})}{q_t k_{i,t}} + \frac{(a-\iota)}{q_t} dt$$

Recordar que

$$dk_{i,t} = k_{i,t}((\Phi(u_{i,t}) - \delta)\, dt + \tilde{\sigma} d\tilde{z})$$

$$dK = \int (\Phi(u_{i,t}) - \delta) k_{i,t}\, dt$$

Tengo también

$$d(q_t^k k_t) = k_t dq_t^k + q_t^k dk_t$$

Sustituyendo las expresiones diferenciales:

$$d(q_t^K k_t) = k_t q_t^k \left(\mu^{q_k} dt + \sigma^{q_K} dZ\right) + q_t^K k_t ((\Phi(\iota) - \delta)\, dt + \tilde{\sigma} d\tilde{z})$$

Por lo tanto, la expresión final para dr_t^k queda:
Dado que:

$$d(q_t^k k_t) = k_t dq_t^k + q_t^k dk_t$$

Sustituyendo las expresiones diferenciales:

$$d(q_t^k k_t) = k_t q_t^k \left(\mu^{q_k} dt + \sigma^{q_K} dZ\right) + q_t^k k_t \left((\Phi(\iota) - \delta) dt + \tilde{\sigma} d\tilde{z}\right)$$

Por lo tanto, la expresión final para dr_t^k queda:

$$dr_t^k = \left(\frac{a - \iota}{q}\right) dt + \mu^{q_K} dt + \sigma^{q_K} dZ + (\Phi(\iota) - \delta) dt + \tilde{\sigma} d\tilde{z}$$

Para dr_t^B
La ecuación diferencial está dada por:

$$dr_t^B = \frac{d\left(\frac{q_t^B K_t}{B_t}\right)}{\frac{q_t^B K_t}{B_t}}$$

La diferencial de la fracción se obtiene aplicando la regla de Itô:

$$d\left(\frac{q_t^B K_t}{B_t}\right) = \frac{K_t}{B_t} dq_t^B + \frac{q_t^B}{B_t} dK_t$$

Sustituyendo las ecuaciones diferenciales de q_t^B, K_t y B_t:

$$d\left(\frac{q_t^B K_t}{B_t}\right) = \frac{K_t}{B_t} \left((q_t^B) \left(\mu^{q_B} dt + \sigma^{q_B} dZ\right)\right)$$

$$+ \frac{q_t^B}{B_t} K_t \left((\Phi(\iota) - \delta) dt\right)$$

Por lo tanto, la ecuación final para dr_t^B queda:

$$dr_t^B = \mu^{q_B} dt + \sigma^{q_B} dZ + (\Phi(\iota) - \delta) dt$$

Con esta información puedo plantear el problema de maximización

$$\max \left(\int_0^\infty e^{\rho t} c_t \, dt \right)$$

Sujeto a la ecuación diferencial:

$$dn_t = -c_t dt + \left(n_t - q_t^K k_t\right) dr_t^B + q_t^K k_t dr_t^K$$

Reemplazando en dn_t:

$$\begin{aligned} dn_t = & -c_t dt + \left(n_t - q_t^K k_t\right) \Big[(\mu^{q_B} dt + \sigma^{q_B} dZ) + (\Phi(\iota) - \delta) dt\Big] \\ & + q_t^K k_t \left[\left(\frac{a - \iota}{q}\right) dt + \mu^{q_K} dt + \sigma^{q_K} dZ + (\Phi(\iota) - \delta) dt + \tilde{\sigma} d\tilde{z} \right]. \end{aligned}$$

$$\frac{dn}{n} = -\frac{c}{n} dt + \mu^n dt + \tilde{\sigma}^n d\tilde{Z} + \sigma^n dZ$$

$$\mu^n = (1-x_t)\Big(\mu^{q_B}dt + (\Phi(\iota)-\delta)dt\Big) + x_t\left(\frac{a-\iota}{q}dt + \mu^{q_K}dt + (\Phi(\iota)-\delta)dt + \tilde{\sigma}d\tilde{z}\right)$$

$$\sigma^n = (1-x_t)\sigma^{q_B} + x_t\sigma^{q_K}$$

$$\tilde{\sigma}^n = x_t\tilde{\sigma}$$

Donde

$$x_t = \frac{q_t^K k_t}{n}$$

Con esta información puedo plantear la HJB Tenemos que

$$u = \log(c_t)$$

Suponemos que la función valor tiene esta forma

$$V(\xi n) = \frac{1}{\rho}\log(\xi n)$$

Recordemos que la HJB

$$\rho(\frac{1}{\rho})\log(\xi n) = log(c_t) + \frac{E(\frac{1}{\rho}\log(\xi n))}{dt}$$

$$\frac{E(\frac{1}{\rho}\log(\xi n))}{dt} = \frac{1}{\rho dt}((\frac{1}{\xi}d\xi + \frac{1}{n}(-\frac{c}{n}dt + \mu^n dt) - \frac{1}{\xi^2}(d\xi)^2 - \frac{1}{n^2}(dn)^2)$$

$$d\xi = \mu^\xi \xi dt + \sigma^\xi \xi dZ$$

$$\frac{E(\frac{1}{\rho}\log(\xi n))}{dt} = \frac{1}{\rho}((\mu^\xi) + (-\frac{c}{n} + \mu^n) - (\sigma^\xi)^2 - (\tilde{\sigma}^n)^2 - (\sigma^n)^2$$

Planteamos la ecuación de HJB:

$$\log(\xi n) = \log(c_t) + \frac{1}{\rho}\left(\mu^\xi + \left(-\frac{c}{n} + \mu^n\right) - (\sigma^\xi)^2 - (\tilde{\sigma}^n)^2 - (\sigma^n)^2\right)$$

El problema de maximización:

$$\log(\xi n) = \max_c\left\{\log(c_t) - \frac{c}{\rho n}\right\} + \max_{x,i}\left\{\frac{1}{\rho}\left(\mu^n - (\tilde{\sigma}^n)^2 - (\sigma^n)^2\right)\right\} + \frac{1}{\rho}\left(\mu^\xi - (\sigma^\xi)^2\right)$$

Condiciones de Primer Orden (CPO):
Para c:

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{\rho n} \Rightarrow c = \rho n$$

Para x:

$$\mu^{q_K} - \mu^{q_B} + \frac{a-\iota}{q^K} + x\left(\sigma^{q_K} - \sigma^{q_B}\right)^2 + \sigma^{q_K}\sigma^{q_B} - (\sigma^{q_B})^2 + \tilde{\sigma}^2(x) = 0$$

Para ι:

$$\Phi'(\iota) = (q^K)^{-1}$$

$$\iota = \frac{1}{\phi}(q^K) - 1$$

Para encontrar $d\vartheta$
Usamos la CPO de x

$$\mu^{q_K} - \mu^{q_B} - \mu^B + \frac{a-\iota}{q^K} - x\left(\sigma^{q_K} - \sigma^{q_B}\right)^2 - \sigma^{q_K}\sigma^{q_B} + (\sigma^{q_B})^2 - \tilde{\sigma}^2(x) = 0$$

$$\mu^{q_K} - \mu^{q_B} - \mu^\beta + \frac{a-\iota}{q^K} + \left(\sigma^{q_B} - \sigma^{q_K}\right)\left(x\sigma^{q_K} + (1-x)\sigma^{q_B}\right) + \tilde{\sigma}^2(x) = 0$$

recordar que por clearing market condition

$$x = \frac{q_t^k}{q_t^k + q_t^B}$$

$$x = 1 - \vartheta$$

$$\mu^{q_K} - \mu^{q_B} + \frac{a-\iota}{q^K} + \left(\sigma^{q_B} - \sigma^{q_K}\right)\left((1-\vartheta)\sigma^{q_K} + (\vartheta)\sigma^{q_B}\right) - \tilde{\sigma}^2(1-\vartheta) = 0$$

$$\mu^{q_K} - \mu^{q_B} + \frac{a-\iota}{q^K} + \left(\sigma^{q_B} - \sigma^{q_K}\right)\left((1-\vartheta)\sigma^{q_K} + (\vartheta)\sigma^{q_B}\right) - \tilde{\sigma}^2(1-\vartheta) = 0$$

$$\frac{a-\iota}{q^K} - \tilde{\sigma}^2(1-\vartheta) = -\mu^{q_K} + \mu^{q_B} - \left(\sigma^{q_B} - \sigma^{q_K}\right)\left((1-\vartheta)\sigma^{q_K} + \vartheta\sigma^{q_B}\right)$$

Tenemos que

$$d\vartheta = \vartheta(1-\vartheta)\left[(\mu^{q_B} - \mu^{q_K})dt + \left(\sigma^{q_K} - \sigma^{q_B}\right)\left[(1-\vartheta)\sigma^{q_K} + \vartheta\sigma^{q_B}\right]dt + (\sigma^{q_B} - \sigma^{q_K})dZ\right]$$

Y dada esta estructura:

$$\mu_\vartheta = (1-\vartheta)\left[\left(\mu^{q_B} - \mu^{q_K}\right) + \left(\sigma^{q_K} - \sigma^{q_B}\right)\left[(1-\vartheta)\sigma^{q_K} + \vartheta\sigma^{q_B}\right]\right]$$

$$\mu_\vartheta = (1-\vartheta)\left[\frac{a-\iota}{q^K} - \tilde{\sigma}^2(1-\vartheta)\right]$$

Uso el market clearing para reemplazar $a - \iota$

$$a - \iota = \left(q_t^B + q_t^K\right)\frac{c}{n}$$

$$\mu_\vartheta = (1-\vartheta)\left[\frac{q_t^k + q_t^B}{q_t^K}\frac{c}{n} - \tilde{\sigma}^2(1-\vartheta)\right]$$

$$\mu_\vartheta = (1-\vartheta)\left[\frac{1}{1-\vartheta}\frac{c}{n} - \tilde{\sigma}^2(1-\vartheta)\right]$$

Recordar que $c = \rho n$

$$\mu_\vartheta = (1-\vartheta)\left[\frac{1}{1-\vartheta}\frac{\rho n}{n} - \tilde{\sigma}^2(1-\vartheta)\right]$$

La money value equiation

$$\mu_\vartheta = \rho - \tilde{\sigma}^2(1-\vartheta)^2$$

(c) Suppose that $\sigma_{\sigma,t} = 0$ and the economy is at the steady state with $\tilde{\sigma}_t = \tilde{\sigma}^{ss}$ for some $\tilde{\sigma}^{ss} > 0$.

(i) Derive expressions for q^B, q^K and ϑ in the monetary and non-monetary equilibria.
Equilibrio no monetario caso q^B $q_B = 0$ Caso q^K

$$a - \frac{1}{\phi}(q^K) + \frac{1}{\phi} = \left(q^K\right)\rho$$

$$q^K = \frac{a\phi + 1}{\rho\phi + 1}$$

caso ι

$$\iota = \frac{1}{\phi}(q^K) - 1$$

$$\iota = \frac{1}{\phi}(\frac{a\phi + 1}{\rho\phi + 1}) - \frac{1}{\phi}$$

$$\iota = \frac{1}{\phi}(\frac{a\phi + 1}{\rho\phi + 1} - 1)$$

$$\iota = (\frac{a - \rho}{\rho\phi + 1})$$

Equilibrio monetario
Partimos de que
La money value equation

$$\mu_\vartheta = \rho - \tilde{\sigma}^2(1-\vartheta)^2$$

$$\mu_\vartheta = 0$$

$$\frac{\rho}{\tilde{\sigma}^2} = (1-\vartheta)^2$$

$$\sqrt{\frac{\rho}{\tilde{\sigma}^2}} = 1 - \vartheta$$

$$\frac{\sqrt{\rho}}{\tilde{\sigma}} = 1 - \vartheta$$

Además

$$\frac{\sqrt{\rho}}{\tilde{\sigma}} = 1 - \vartheta$$

$$\vartheta = 1 - \frac{\sqrt{\rho}}{\tilde{\sigma}}$$

Uso esto para reemplazar en las definiciones encontradas en 3a

$$(1-\vartheta)\frac{a\phi + 1}{\phi\rho + 1 - \vartheta} = q_t^k$$

$$q_t^B = \left(\frac{\vartheta(a\phi + 1)}{\phi\rho + 1 - \vartheta}\right)$$

$$\iota = \frac{a(1-\vartheta) + \rho}{(1-\vartheta) + \rho}$$

Reemplazo para hallar el equilibrio monetario

$$(\frac{\sqrt{\rho}}{\tilde{\sigma}})\frac{a\phi + 1}{\phi\rho + (\frac{\sqrt{\rho}}{\tilde{\sigma}})} = q^k$$

$$q^k = (\frac{\sqrt{\rho}(a\phi + 1)}{\sigma\phi\rho + \sqrt{\rho}})$$

$$q^B = \left(\frac{(1 - \frac{\sqrt{\rho}}{\tilde{\sigma}})(a\phi + 1)}{\phi\rho\tilde{\sigma} + \sqrt{\rho}\frac{\sqrt{\rho}}{\tilde{\sigma}}}\right)$$

$$q^B = \left(\frac{(\tilde{\sigma} - \sqrt{\rho}(a\phi + 1)}{\phi\rho\tilde{\sigma} + \sqrt{\rho}} \right)$$

$$\iota = \frac{a(\frac{\sqrt{\rho}}{\tilde{\sigma}}) - \rho}{(\frac{\sqrt{\rho}}{\tilde{\sigma}}) + \rho}$$

$$\iota = \frac{a\sqrt{\rho} - \tilde{\sigma}\rho}{\sqrt{\rho} + \tilde{\sigma}\rho}$$

Recordar que en el equilibrio $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}^{ss}$.
Equilibrio no monetario

$$q^K = \frac{a\phi + 1}{\rho\phi + 1}$$

$$q^B = 0$$

$$\vartheta = 0$$

Equilibrio monetario

$$\vartheta = 1 - \frac{\sqrt{\rho}}{\tilde{\sigma}^{ss}}$$

$$q^B = \frac{(\tilde{\sigma}^{ss} - \sqrt{\rho})(a\phi + 1)}{\phi\rho\tilde{\sigma}^{ss} + \sqrt{\rho}}$$

$$q^K = \frac{\sqrt{\rho}(a\phi + 1)}{\tilde{\sigma}^{ss}\phi\rho + \sqrt{\rho}}$$

(ii) What is the smallest value of $\tilde{\sigma}^{ss}$ that allows for a monetary equilibrium? Denote this value by $\tilde{\sigma}^{ss}_{\min}$.
El valor mínimo de $\tilde{\sigma}^{ss}_{\min}$ debe ser tal que garantice que ϑ sea mayor o igual que 0:

$$\vartheta = 1 - \frac{\sqrt{\rho}}{\tilde{\sigma}^{ss}} \geq 0$$

Despejando $\tilde{\sigma}^{ss}$:

$$\tilde{\sigma}^{ss} > \sqrt{\rho}$$

Por lo tanto, el valor mínimo requerido es:

$$\tilde{\sigma}^{ss}_{\min} = \sqrt{\rho}$$

(iii) Suppose that $\tilde{\sigma}^{ss} > \tilde{\sigma}^{ss}_{\min}$, what happens to q^B, q^K and ϑ as $\tilde{\sigma}^{ss}$ rises?
En el equilibrio monetario, se tiene que:

$$\vartheta = 1 - \frac{\sqrt{\rho}}{\tilde{\sigma}^{ss}}$$

$$q^B = \frac{(\tilde{\sigma}^{ss} - \sqrt{\rho})(a\phi + 1)}{\phi\rho\tilde{\sigma}^{ss} + \sqrt{\rho}}$$

$$q^K = \frac{\sqrt{\rho}(a\phi + 1)}{\tilde{\sigma}^{ss}\phi\rho + \sqrt{\rho}}$$

Se puede observar que, a medida que $\tilde{\sigma}^{ss}$ aumenta, ocurre lo siguiente:

- ϑ crece hasta aproximarse a 1.
- q^K comienza a decrecer.
- Dado que ϑ aumenta y q^K disminuye en proporción a q^B, se tiene la relación:

$$\vartheta = \frac{q^B}{q^K + q^B}$$

- Como consecuencia, q^B comienza a crecer.

Esto puede interpretarse como que, en un contexto de mayor incertidumbre, los agentes se refugian en los bonos, ya que estos son activos seguros.

$$\boxed{\tilde{\sigma}^{ss} \uparrow \Rightarrow \vartheta \uparrow \Rightarrow q^K \downarrow, \quad q^B \uparrow}$$

(iv) Suppose that $0 < \tilde{\sigma}^{ss} < \tilde{\sigma}^{ss}_{\min}$, what happens to q^B, q^K and ϑ as $\tilde{\sigma}^{ss}$ falls?
Mientras que si $0 < \tilde{\sigma}^{ss} < \tilde{\sigma}^{ss}_{\min}$, en este caso q^B sería igual a 0. Sin embargo, esto no es posible, ya que los precios no pueden ser negativos.
Por lo tanto, asumimos que $q^B = 0$. En este caso, se obtiene una relación idéntica al equilibrio no monetario:

$$q^K = \frac{a\phi + 1}{\rho\phi + 1}$$

Por lo cual, una caída en $\tilde{\sigma}^{ss}$ no afectan a q^K.

$$\boxed{0 < \tilde{\sigma}^{ss} < \tilde{\sigma}^{ss}_{\min} \Rightarrow q^B = 0 \Rightarrow q^K = \frac{a\phi + 1}{\rho\phi + 1}, \quad \tilde{\sigma}^{ss} \downarrow \text{ no afecta a } q^K}$$

4. Solving the previous model numerically

(a) Set $a = 0.2$, $\phi = 1$, $\delta = 0.05$, $\rho = 0.01$, $\tilde{\sigma}^{ss} = 0.2$, $b = 0.05$, $\nu = 0.02$.

(b) Apply Itô's lemma to $\vartheta = \vartheta(\tilde{\sigma}_t)$, and equate the drift term with $\vartheta_t \mu_t^\vartheta$, where μ_t^ϑ is given by the Cox-Ingersol-Ross process above. This gives you an HJB-looking equation for $\vartheta(\tilde{\sigma})$.
Lema de Itô para ϑ

$$d\vartheta = \vartheta_{\tilde{\sigma}} d\tilde{\sigma} + \vartheta_{\tilde{\sigma}\tilde{\sigma}} (d\tilde{\sigma})^2$$

Recordar

$$d\tilde{\sigma}_t = b(\tilde{\sigma}_{ss} - \tilde{\sigma}_t)dt + \nu\sqrt{\tilde{\sigma}_t} dZ_t$$

Entonces

$$d\vartheta = \vartheta_{\tilde{\sigma}}(b(\tilde{\sigma}_{ss} - \tilde{\sigma}_t)dt + \nu\sqrt{\tilde{\sigma}_t} dZ_t) + \vartheta_{\tilde{\sigma}\tilde{\sigma}}(b(\tilde{\sigma}_{ss} - \tilde{\sigma}_t)dt + \nu\sqrt{\tilde{\sigma}_t} dZ_t)^2$$

Aplicamos el lema de Itô a $\vartheta(\tilde{\sigma}_t)$ dado el proceso estocástico para $\tilde{\sigma}_t$:

$$d\tilde{\sigma}_t = b(\tilde{\sigma}_{ss} - \tilde{\sigma}_t)dt + \nu\sqrt{\tilde{\sigma}_t} dZ_t.$$

La expansión del lema de Itô nos da:

$$d\vartheta = \vartheta_{\tilde{\sigma}} d\tilde{\sigma} + \frac{1}{2}\vartheta_{\tilde{\sigma}\tilde{\sigma}} (d\tilde{\sigma})^2.$$

Reemplazamos $d\tilde{\sigma}_t$

$$d\vartheta = \vartheta_{\tilde{\sigma}} \left[b(\tilde{\sigma}_{ss} - \tilde{\sigma}_t)dt + \nu\sqrt{\tilde{\sigma}_t} dZ_t\right] + \frac{1}{2}\vartheta_{\tilde{\sigma}\tilde{\sigma}} \left[b(\tilde{\sigma}_{ss} - \tilde{\sigma}_t)dt + \nu\sqrt{\tilde{\sigma}_t} dZ_t\right]^2.$$

Usamos las reglas de multiplicación:
Esto simplifica a:

$$d\vartheta = \vartheta_{\tilde{\sigma}} \left[b(\tilde{\sigma}_{ss} - \tilde{\sigma}_t)dt + \nu\sqrt{\tilde{\sigma}_t} dZ_t\right] + \frac{1}{2}\vartheta_{\tilde{\sigma}\tilde{\sigma}} \nu^2 \tilde{\sigma}_t dt.$$

Distribuyendo términos:

$$d\vartheta = b\vartheta_{\tilde{\sigma}}(\tilde{\sigma}_{ss} - \tilde{\sigma}_t)dt + \nu\vartheta_{\tilde{\sigma}}\sqrt{\tilde{\sigma}_t} dZ_t + \frac{1}{2}\nu^2\vartheta_{\tilde{\sigma}\tilde{\sigma}}\tilde{\sigma}_t dt.$$

Finalmente tenemos

$$d\vartheta = \left[b\vartheta_{\tilde{\sigma}}(\tilde{\sigma}_{ss} - \tilde{\sigma}_t) + \frac{1}{2}\nu^2\vartheta_{\tilde{\sigma}\tilde{\sigma}}\tilde{\sigma}_t\right] dt + \nu\vartheta_{\tilde{\sigma}}\sqrt{\tilde{\sigma}_t} dZ_t.$$

Recordamos que suponemos la siguiente ecuación diferencial estocástica para ϑ:

$$d\vartheta = \vartheta\mu_t^\vartheta dt + \vartheta\sigma^\vartheta dZ.$$

También, de la ecuación de valoración monetaria (*money valuation equation*), tenemos:

$$\mu_\vartheta = \rho - \tilde{\sigma}^2(1-\vartheta)^2.$$

A partir de esto, podemos escribir:

$$\vartheta\mu^\vartheta = b\vartheta_{\tilde{\sigma}}(\tilde{\sigma}_{ss} - \tilde{\sigma}_t) + \frac{1}{2}\nu^2\vartheta_{\tilde{\sigma}\tilde{\sigma}}\tilde{\sigma}_t.$$

Por otro lado, también se tiene:

$$\vartheta\mu^\vartheta = \vartheta\big(\rho - \tilde{\sigma}^2(1-\vartheta)^2\big).$$

Igualando ambas expresiones:

$$\vartheta\big(\rho - \tilde{\sigma}^2(1-\vartheta)^2\big) = b\vartheta_{\tilde{\sigma}}(\tilde{\sigma}_{ss} - \tilde{\sigma}_t) + \frac{1}{2}\nu^2\vartheta_{\tilde{\sigma}\tilde{\sigma}}\tilde{\sigma}_t.$$

Reorganizando la ecuación para que tenga una forma similar a una ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB):

$$\vartheta\rho = \vartheta\tilde{\sigma}^2(1-\vartheta)^2 + b\vartheta_{\tilde{\sigma}}(\tilde{\sigma}_{ss} - \tilde{\sigma}_t) + \frac{1}{2}\nu^2\vartheta_{\tilde{\sigma}\tilde{\sigma}}\tilde{\sigma}_t.$$

(c) Solve the model using value function iteration:

(i) Suggest a grid for $\tilde{\sigma}$ and construct the M matrix using `buildM.m`. Se realizo en el codigo ejercicio4.m

(ii) Rewrite the money valuation equation such that in the discretized form you get:

$$\rho\vartheta = u(\vartheta) + M\vartheta \tag{10}$$

de la 4b tengo que

$$\vartheta\rho = \vartheta\tilde{\sigma}^2(1-\vartheta)^2 + b\vartheta_{\tilde{\sigma}}(\tilde{\sigma}_{ss} - \tilde{\sigma}_t) + \frac{1}{2}\nu^2\vartheta_{\tilde{\sigma}\tilde{\sigma}}\tilde{\sigma}_t.$$

Entonces puedo decir que

$$u(\vartheta) = \sigma^2(1-\theta)^2\theta$$

El resto fue realizado en ejercicio4

(iii) Write a loop that updates $\vartheta(\tilde{\sigma})$ with the implicit method:

$$\vartheta_{t-\Delta t} = \left((1+\rho\Delta t)I - \Delta t M\right)^{-1}\left(\Delta t u(\vartheta_t) + \vartheta_t\right) \tag{11}$$

Esto fue realizado en ejercicio4.m

(iv) Iterate over $\vartheta(\tilde{\sigma})$ until convergence.
Esto fue realizado en ejercicio4.m

(d) Plot ϑ, q^B, q^K, r^f, ς, $\tilde{\xi}$ as functions of $\tilde{\sigma}$. Explain the dependence of the variables on $\tilde{\sigma}$.
Tengo que de 3a

$$q^k = (1-\vartheta)\frac{a\phi + 1}{\phi\rho + 1 - \vartheta}$$

$$q^B = \left(\frac{\vartheta(a\phi + 1)}{\phi\rho + 1 - \vartheta}\right)$$

Con esta información gráfico lo que se encuentra en ejercicio4.m
Para el caso de $\tilde{\zeta}_t$ y ζ_t, por la condición de martingala tenemos:

Figure 6: Gráfico de ϑ.

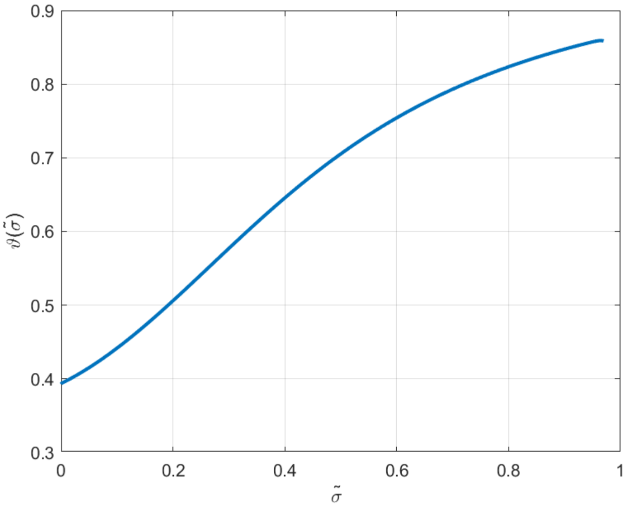
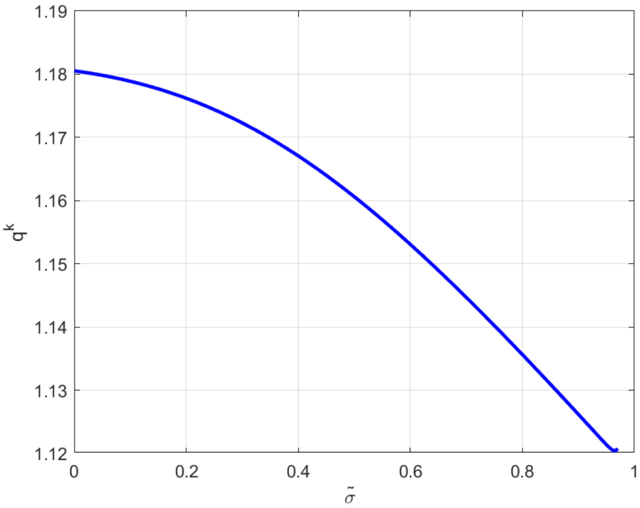


Figure 7: Gráfico de q^k.



$$\mathbb{E}\left[\frac{dr_t^{K,i}}{dt}\right] - \mathbb{E}\left[\frac{dr_t^B}{dt}\right] = \zeta_t\left(\sigma_t^{K,i} - \sigma_t^B\right) + \tilde{\zeta}_t\left(\tilde{\sigma}_t^{K,i} - \tilde{\sigma}_t^B\right). \tag{12}$$

Defino en base a lo encontrado en 3b $\mathbb{E}\left[\frac{dr_t^{K,i}}{dt}\right]$ y $\mathbb{E}\left[\frac{dr_t^B}{dt}\right]$ Tenemos

$$dr_t^k = \left(\frac{a-\iota}{q}\right)dt + \mu^{q_K}dt + \sigma^{q_K}dZ + (\Phi(\iota)-\delta)dt + \tilde{\sigma}d\tilde{z}$$

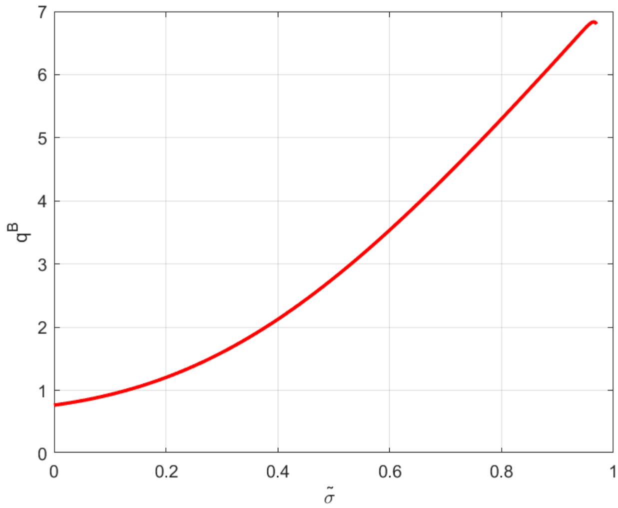
$$dr_t^B = \mu^{q_B}dt + \sigma^{q_B}dZ + (\Phi(\iota)-\delta)dt$$

Entonces

$$\mathbb{E}\left[\frac{dr_t^{K,i}}{dt}\right] = \left(\frac{a-\iota}{q}\right) + \mu^{q_K} + (\Phi(\iota)-\delta)$$

$$\mathbb{E}\left[\frac{dr_t^B}{dt}\right] = \mu^{q_B} + (\Phi(\iota)-\delta)$$

Figure 8: Gráfico de q^B.



Entonces tengo que

$$\mathbb{E}\left[\frac{dr_t^{K,i}}{dt}\right] - \mathbb{E}\left[\frac{dr_t^B}{dt}\right] = \frac{a-\iota}{q} + \mu^{q_K} - \mu^{q_B}.$$

Tengo lo encontrado con la HJB en la pregunta 3b

$$\frac{a-\iota}{q^K} - \tilde{\sigma}^2(1-\vartheta) = -\mu^{q_K} + \mu^{q_B} - \left(\sigma^{q_B} - \sigma^{q_K}\right)\left((1-\vartheta)\sigma^{q_K} + \vartheta\sigma^{q_B}\right)$$

Reordeno

$$\frac{a-\iota}{q^K} + \mu^{q_K} - \mu^{q_B} = -\left(\sigma^{q_B} - \sigma^{q_K}\right)\left((1-\vartheta)\sigma^{q_K} + \vartheta\sigma^{q_B}\right) + (1-\vartheta)\tilde{\sigma}^2$$

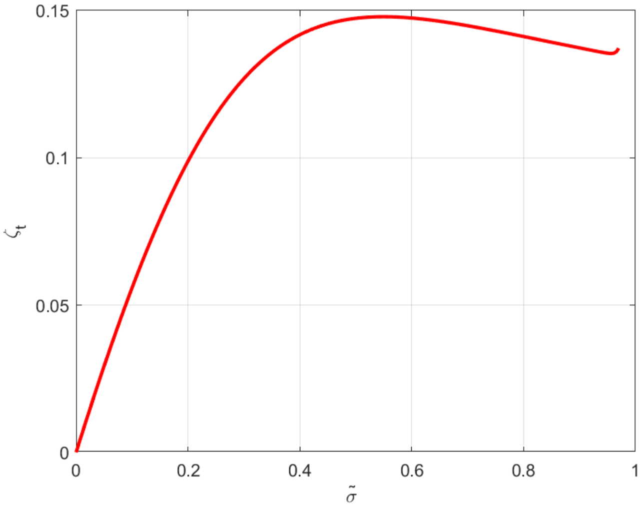
Comparo con el metodo de martingala

$$\mathbb{E}\left[\frac{dr_t^{K,i}}{dt}\right] - \mathbb{E}\left[\frac{dr_t^B}{dt}\right] = \zeta_t\left(\sigma_t^{K,i} - \sigma_t^B\right) + \tilde{\zeta}_t\left(\tilde{\sigma}_t^{K,i} - \tilde{\sigma}_t^B\right).$$

Entonces tengo dado a que puedo asumir que $\tilde{\sigma}_t^{K,i} = \tilde{\sigma}$

$$\boxed{\tilde{\zeta}_t = (1-\vartheta)\tilde{\sigma}}$$

Figure 9: Gráfico de ζ.



Ahora debemos hallar la tasa de interés
Además,la tasa libre de riesgo se define como

$$r^f = \rho + \mu_t^\zeta + (\sigma^\zeta)^2$$

Además

$$\mu_t^\zeta = (\Phi(\iota) - \delta)$$

$$\sigma^\zeta = \zeta = (1 - \vartheta)\tilde{\sigma}$$

Tengo que

$$\iota = \frac{1}{\phi}(q^K) - \frac{1}{\phi}$$

$$\Phi(\iota) = (1/\phi)\log(1 + \phi\iota)$$

Entonces expreso la formula como

$$\boxed{r^f = \rho + (1/\phi)\log(1 + \phi(\frac{1}{\phi}(q^K) - \frac{1}{\phi})) + ((1 - \vartheta)\tilde{\sigma})^2}$$

Figure 10: Gráfico de r^f.