El modelo de Solow

Juan Carlos Aquino Chávez

Banco Central de Reserva del Perú

13 de enero de 2025

La presente nota contiene una traducción libre del artículo seminal de Solow (1956). Es preciso realizar una serie de aclaraciones. Primero, a diferencia del artículo original en tiempo continuo, mi exposición se realiza en tiempo discreto para guardar consistencia con el resto del curso, pero al mismo tiempo manteniendo la esencia de los resultados. Segundo, no realizo una traducción total sino que me enfoco en los aspectos que considero más relevantes para el curso. En particular, omito las secciones de ejemplos, extensiones y cualificaciones. En última instancia, deberá tenerse en cuenta que la presente nota es un complemento mas no un sustituto de la fuente original.

1. Introducción

Toda teoría depende de supuestos que no son absolutamente verdaderos. Esto es lo que la convierte en una teoría. El arte de teorizar satisfactoriamente es hacer los inevitables supuestos simplificadores de tal forma que los resultados finales no sean muy sensibles[1]. Un supuesto "crucial" es uno sobre el cual las conclusiones sí dependen sensiblemente, y es importante que los supuestos cruciales sean razonablemente realistas. Cuando los resultados de una teoría parecen provenir específicamente de un supuesto crucial especial, es decir si el supuesto es dudoso, los resultados son sospechosos.

Quisiera argumentar que algo como esto es verdad para el modelo de crecimiento económico Harrod-

[1] Así, los costos de transporte fueron meramente una complicación irrelevante para la teoría ricardiana del comercio, pero una característica vital de la realidad para von Thünen.

Domar. La conclusión característica y poderosa de la línea de pensamiento Harrod-Domar es que inclusive para el largo plazo el sistema económico está, en el mejor de los casos, balanceado sobre un filo de navaja de crecimiento de equilibrio. Si las magnitudes de los principales parámetros -la tasa de ahorro, el ratio capital-trabajo, la tasa de incremento de la fuerza laboral- tan solo se deslizaran ligeramente del punto muerto, la consecuencia sería un desempleo creciente o una inflación prolongada. En términos de Harrod, la pregunta crítica de balance se reduce a una comparación entre la tasa natural de crecimiento que depende, en ausencia de cambio tecnológico, del incremento de la fuerza laboral, y la tasa garantizada de crecimiento que depende de los hábitos de ahorro e inversión de los hogares y firmas.

Pero esta oposición fundamental entre tasas garantizadas y naturales al final proviene del supuesto crucial de que la producción toma lugar bajo condiciones de *proporciones fijas*. No hay posibilidad de sustituir trabajo por capital en la producción. Si se abandona este supuesto, la noción de filo de navaja de balance inestable se va con este. Precisamente, es difícilmente sorprendente que dicha rigidez grave en una parte del sistema implique falta de flexibilidad en otra.

Una característica notable del modelo Harrod-Domar es que consistentemente estudia problemas de largo plazo con las herramientas usuales de corto plazo. Uno usualmente piensa en el largo plazo como el dominio del análisis neoclásico, la tierra del margen. En lugar de ello Harrod y Domar hablan del largo plazo en términos del multiplicador, el acelerador, "el" coeficiente de capital. La mayor parte de este documento está dedicado a un modelo de crecimiento de largo plazo que acepta todos los supuestos del modelo Harrod-Domar a excepción del de proporciones fijas. En lugar de ello asumo que el único *commodity* compuesto es producido con capital y trabajo bajo las condiciones neoclásicas estándar. La adaptación del sistema a una tasa de incremento de la fuerza laboral exógenamente dada es trabajada con cierto detalle, para ver si aparece la inestabilidad de Harrod. Las reacciones de precios, salarios e intereses juegan un rol importante en este proceso de ajuste neoclásico, de manera que son también analizadas. Luego algunos de los otros supuestos son ligeramente relajados para ver en qué cambios cualitativos resultan: se permite el cambio tecnológico neutral.

2. Un modelo de crecimiento de largo plazo

Existe solo un *commodity*, el producto como un todo, cuya tasa de producción por periodo está designada por Y_t. Así podemos hablar sin ambigüedad del ingreso real de la comunidad. Parte del producto de cada periodo es consumido y el resto es ahorrado e invertido. La fracción de producto ahorrada es una constante s, de manera que la tasa de ahorro por periodo es sY_t. El *stock* de capital de la comunidad K_t toma la forma de una acumulación del *commodity* compuesto. Entonces la inversión neta es solo la tasa de incremento de este *stock* de capital $K_{t+1} - K_t$, de manera que tenemos la identidad básica en cada instante del tiempo:

$$K_{t+1} - K_t = sY_t. \tag{1}$$

El producto es producido con la ayuda de dos factores de producción, capital y trabajo, cuya tasa de insumo es L_t. Las posibilidades tecnológicas están representadas por una función de producción

$$Y = F(K, L). \tag{2}$$

Se entiende al producto como producto neto después de hacer efectiva la depreciación del capital. Sobre la producción, todo lo que diremos por el momento es que exhibe rendimientos constantes a escala. Entonces la función de producción es homogénea de primer grado. Esto equivale a asumir que no existe un recurso escaso y no aumentable como la tierra. La presencia de rendimientos constantes a escala parece ser el supuesto natural a adoptar en una teoría de crecimiento. El caso de tierra escasa podría llevar a rendimientos decrecientes a escala en capital y trabajo y el modelo se volvería más ricardiano[2].

Al insertar (2) en (1) obtenemos

$$K_{t+1} - K_t = sF(K_t, L_t). \tag{3}$$

Esta es una ecuación en dos incógnitas. Una forma de cerrar el sistema sería añadir una ecuación de demanda por trabajo: la productividad marginal física del trabajo es igual a la tasa salarial real; y

[2] Véase, por ejemplo, Haavelmo (1954, pp. 9-11). No todos los países “subdesarrollados” son áreas con escasez de tierras. Etiopía es un contraejemplo. Uno puede imaginar la teoría como una que se aplica mientras se pueda obtener tierra cultivable de la naturaleza a un costo esencialmente constante.

una ecuación de oferta de trabajo. La última podría tomar la forma general de hacer a la oferta laboral una función del salario real, o más clásicamente de igualar el salario real a un nivel convencional de subsistencia. En cualquier caso habrían tres ecuaciones en las tres incógnitas K, L y el salario real.

En lugar de esto procedemos más en el espíritu del modelo de Harrod. Como resultado de un crecimiento poblacional exógeno la fuerza laboral se incrementa a una tasa relativa constante n. En ausencia de cambio tecnológico n es la tasa de crecimiento natural de Harrod. Así:

$$L_t = L_0 (1+n)^t . \tag{4}$$

En (3) L denota el empleo total; en (4) L denota la oferta disponible de trabajo. Al identificar a los dos estamos asumiendo que el pleno empleo se mantiene perpetuamente. Cuando insertamos (4) en (3) para obtener

$$K_{t+1} - K_t = sF\left(K_t, L_0 (1+n)^t\right) \tag{5}$$

tenemos la ecuación básica que determina la senda temporal de acumulación de capital que debería ser seguida si todo el trabajo disponible fuera a ser empleado.

Alternativamente (4) puede ser vista como una curva de oferta de trabajo. Dice que la fuerza laboral de crecimiento exponencial es ofrecida completamente inelástica para el empleo. La curva de oferta laboral es una línea vertical que se desplaza a la derecha en el tiempo a medida que la fuerza laboral crece según (4). Entonces la tasa salarial real se ajusta tal que todo el trabajo disponible es empleado, y la ecuación de productividad marginal determina la tasa salarial que de hecho regirá[3].

En resumen, (5) es una ecuación en diferencias en la única variable K_t. Su solución da el único perfil temporal del *stock* de capital de la comunidad que empleará completamente el trabajo disponible. Una vez que conozcamos la senda temporal del *stock* de capital y aquella de la fuerza laboral, podemos computar de la función de producción la correspondiente senda temporal del producto real. La

[3] El conjunto completo de tres ecuaciones consiste de (3), (4) y $\dfrac{\partial F(K,L)}{\partial L} = w$.

ecuación de productividad marginal determina la senda temporal de la tasa salarial real. También está involucrado un supuesto de pleno empleo del *stock* disponible de capital. En cualquier punto del tiempo el *stock* preexistente de capital (el resultado de una acumulación previa) es ofrecido inelásticamente. Entonces hay una ecuación de productividad marginal similar para el capital que determina la renta real por unidad de tiempo para los servicios del *stock* de capital. El proceso puede ser visto de esta manera: en cualquier momento del tiempo la oferta de trabajo disponible está dada por (4) y el *stock* disponible de capital también es un dato. Ya que el retorno real de los factores se ajustará para alcanzar el pleno empleo del trabajo y el capital, podemos usar la función de producción (2) para encontrar la tasa actual de producto. Entonces la propensión a ahorrar nos dice cuánto del producto neto será ahorrado e invertido. Así conocemos la acumulación neta de capital durante el período actual. Añadido al *stock* ya acumulado, esto da el capital disponible para el siguiente período, y se puede repetir todo el proceso.

3. Posibles patrones de crecimiento

Para ver si siempre hay una senda de acumulación de capital consistente con cualquier tasa de crecimiento de la fuerza laboral, debemos estudiar la ecuación en diferencias (5) para la naturaleza cualitativa de sus soluciones. Naturalmente sin especificar la forma exacta de la función de producción no podemos esperar encontrar la solución exácta. Pero ciertas propiedades amplias son sorprendentemente fáciles de aislar, incluso gráficamente.

Para hacerlo así introducimos una nueva variable $r = \dfrac{K}{L}$, el ratio de capital a trabajo. Ya que $r = \dfrac{K}{L}$, la tasa relativa (bruta) de cambio de r es el ratio de tasas relativas (brutas) de cambio. Es decir:

$$\frac{r_{t+1}}{r_t} = \frac{\dfrac{K_{t+1}}{L_{t+1}}}{\dfrac{K_t}{L_t}} = \frac{K_{t+1}}{K_t}\frac{L_t}{L_{t+1}}.$$

Ahora, en primer lugar $\dfrac{L_{t+1}}{L_t} = 1 + n$. En segundo lugar $K_{t+1} = K_t + sF(K_t, L_t)$. Haciendo estas sustituciones:

$$\frac{r_{t+1}}{r_t} = \frac{1 + s\dfrac{F\left(K_t, L_t\right)}{K_t}}{1+n}.$$

Ahora extráigase L de F, nótese que $\dfrac{L}{K} = \dfrac{1}{r}$, y luego de reescribir obtenemos

$$\left(1+n\right)\left(r_{t+1} - r_t\right) = sF\left(r_t, 1\right) - nr_t. \tag{6}$$

Es fácil interpretar la función $F\left(r,1\right)$ que aparece en (6). Es la curva de producto total a medida que se emplean montos cambiantes r de capital con una unidad de trabajo. Alternativamente da el producto por trabajador como una función del capital por trabajador. Entonces (6) establece que la tasa de cambio del ratio capital-trabajo es la diferencia de dos términos, uno que representa el incremento del capital y uno que representa el incremento del trabajo.

Cuando $r_{t+1} - r_t = 0$, el ratio capital-trabajo es una constante, y el *stock* de capital debe estar expandiéndose a la misma tasa que la fuerza laboral, es decir n. (La tasa garantizada de crecimiento, garantizada por la tasa de retorno real del capital apropiada, es igual a la tasa natural). En la Figura 1, el rayo desde el origen con pendiente n representa a la función nr. La otra curva es la función $sF\left(r,1\right)$. Se dibuja aquí pasando por el origen y cóncava: no hay producto a menos que ambos insumos sean positivos y productividad marginal del capital decreciente como sería el caso, por ejemplo, con la función Cobb-Douglas. En el punto de intersección $nr = sF\left(r,1\right)$ y $r_{t+1} - r_t = r - r = 0$. Si el ratio capital-trabajo r^* llegara a ser alcanzado, será mantenido, y el capital y el trabajo crecerán desde ese momento en adelante de manera proporcional. Por rendimientos constantes a escala, el producto también crecerá a la misma tasa relativa n, y el producto por cabeza de fuerza laboral será constante.

Pero si $r \neq r^*$, ¿cómo evolucionará el ratio capital-trabajo en el tiempo? A la derecha del punto de intersección, cuando $r > r^*$, $nr > sF\left(r,1\right)$ y de (6) vemos que r decrecerá hacia r^*. En cambio si $r < r^*$ inicialmente, el gráfico muestra que $nr < sF\left(r,1\right)$, $r_{t+1} - r_t > 0$ y r se incrementará hacia r^*. Entonces el valor de equilibrio r^* es *estable*. Cualquiera sea el valor inicial del ratio capital-trabajo, el sistema evolucionará *hacia* un estado de crecimiento balanceado a la tasa natural. Las sendas temporales de

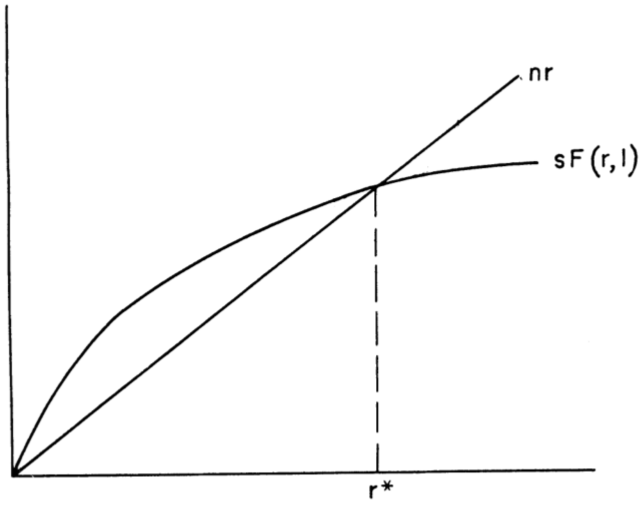

Figura 1: Único punto positivo de intersección.

capital y producto no serán exáctamente exponenciales excepto asintóticamente[4]. Si el *stock* de capital inicial está por debajo del ratio de equilibrio, el capital y el producto crecerán a un ritmo mayor que la fuerza laboral hasta que se aproximen al ratio de equilibrio. Si el ratio inicial está por encima del valor de equilibrio, el capital y el producto crecerán más lento que la fuerza laboral. El crecimiento del producto siempre está entre aquellos del trabajo y el capital.

Por supuesto, la estabilidad fuerte mostrada en la Figura 1 no es inevitable. El ajuste estable del capital y el producto hacia un estado de crecimiento balanceado surge por la forma en la que he dibujado la curva de productividad $F(r, 1)$. Muchas otras configuraciones son posibles *a priori*. Por ejemplo en la Figura 2 hay tres puntos de intersección. La inspección muestra que r_1 y r_3 son estables, pero r_2 no lo es. Dependiendo del ratio capital-trabajo inicialmente observado, el sistema evolucionará hacia un crecimiento balanceado ya sea al ratio r_1 o r_3. En cualquier caso la oferta laboral, el stock de capital y el producto real se expandirán asintóticamente a la tasa n, pero alrededor de r_1 hay menos capital que alrededor de r_3, con lo que el nivel de producto por cabeza será menor en el primer caso que en el segundo. El crecimiento balanceado relevante de equilibrio está en r_1 para un ratio inicial

[4]Existe una excepción a esto. Si $K = 0$, $r = 0$ y el sistema no puede ser iniciado; sin capital no hay producto y por tanto no hay acumulación. Pero este equilibrio es inestable: la más mínima acumulación de capital iniciará el sistema hacia r^*.

en cualquier lugar entre 0 y r_2, y está en r_3 para cualquier ratio inicial mayor a r_2. El ratio r_2 es por sí mismo un ratio de crecimiento de equilibrio, pero uno inestable; cualquier perturbación accidental será magnificada a lo largo del tiempo. La Figura 2 ha sido dibujada de tal manera que la producción es posible sin capital; por lo que el origen no es una configuración de "crecimiento" de equilibrio.

Inclusive la Figura 2 no agota las posibilidades. Es posible que no exista crecimiento balanceado de equilibrio[5]. Cualquier función $F(r, 1)$ no decreciente puede ser convertida en una función de producción con retornos constantes a escala simplemente al multiplicarla por L; el lector puede construir una gran variedad de dichas curvas y examinar las soluciones resultantes a (6). En la Figura 3 se muestran dos posibilidades, junto con un rayo nr. Ambas tienen productividad marginal decreciente en todo lugar, y una se sitúa completamente por encima de nr mientras que la otra se sitúa completamente por debajo[6]. El primer sistema es tan productivo y ahorra tanto que el pleno empleo perpetuo incrementará el ratio capital-trabajo (y también el producto por cabeza) más allá de todo límite; tanto el capital como el ingreso se incrementan más rápido que la oferta laboral. El segundo sistema es tan improductivo que la senda de pleno empleo lleva solo a un ingreso per capita decreciente para siempre. Ya que la inversión neta es siempre positiva y la oferta laboral es creciente, el ingreso agregado solo puede crecer.

La conclusión básica es que, cuando la producción toma lugar bajo las condiciones neoclásicas usuales de proporciones variables y rendimientos constantes a escala, no hay una oposición simple entre tasas de crecimiento natural y garantizada. Puede no haber -de hecho en el caso de la función Cobb-Douglas nunca puede haber- ningún *filo de navaja*. El sistema puede ajustarse a cualquier tasa de crecimiento de la fuerza laboral, y eventualmente aproximarse a un estado de expansión proporcional estable.

[5]Esto parece contradecir un teorema en Solow y Samuelson (1953), pero la contradicción es solo aparente. Se asume ahí que todo *commodity* tenía productividad marginal positiva en la producción de cada *commodity*. Aquí el capital no puede ser usado para producir trabajo.

[6]La ecuación de la primera podría ser $s_1 F^1(r, 1) = nr + \sqrt{r}$, aquella de la segunda $s_2 F_2(r, 1) = \dfrac{nr}{r+1}$.

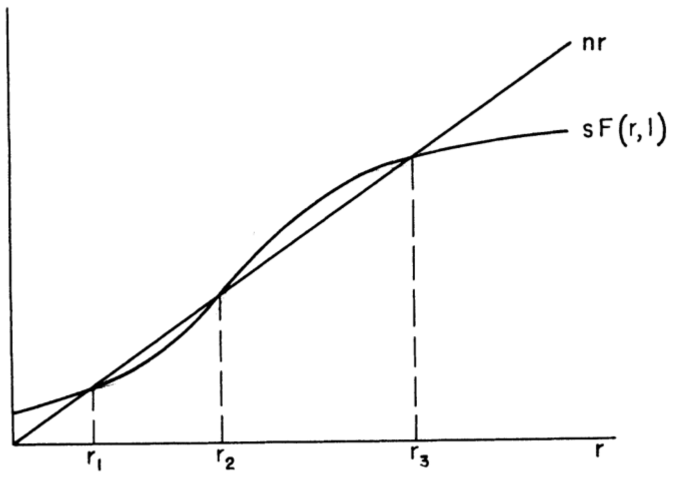

Figura 2: Tres puntos de intersección.

4. Ejemplos

En esta sección propongo muy brevemente trabajar tres ejemplos, tres simples elecciones de la forma de la función de producción para las cuales es posible resolver explícitamente la ecuación en diferencias básica (6).

Ejemplo 1 (Proporciones fijas) *Este es el caso Harrod-Domar. Se requiere de a unidades de capital para producir una unidad de producto; y b unidades de trabajo. Entonces a es un coeficiente de aceleración. Por supuesto, una unidad de producto puede ser producida con más capital y/o trabajo que esto (las isocuantas son esquinas de ángulo recto); el primer cuello de botella en ser alcanzado limita la tasa de producto. Esto puede ser expresado en la forma (2) al decir*

$$Y = F(K, L) = \text{mín}\left(\frac{K}{a}, \frac{L}{b}\right)$$

donde "mín (...)" significa el menor de los números dentro de los paréntesis. La ecuación en diferencias básica (6) se convierte en

$$(1+n)(r_{t+1} - r_t) = s\,\text{mín}\left(\frac{r_t}{a}, \frac{1}{b}\right) - nr_t.$$

Evidentemente para un r muy pequeño debemos tener $\frac{r_t}{a} < \frac{1}{b}$, de manera que en este rango $(1+n)(r_{t+1} - r_t) = s\frac{r_t}{a} - nr_t = \left(\frac{s}{a} - n\right) r_t$. Pero cuando $\frac{r_t}{a} \geq \frac{1}{b}$; i.e., $r_t \geq \frac{a}{b}$, la ecuación se convierte en $(1+n)(r_{t+1} - r_t) = \frac{s}{b} - nr_t$. Es más fácil ver cómo esto funciona gráficamente. En la Figura 4 la función $s\,\text{mín}\left(\frac{r}{a}, \frac{1}{b}\right)$

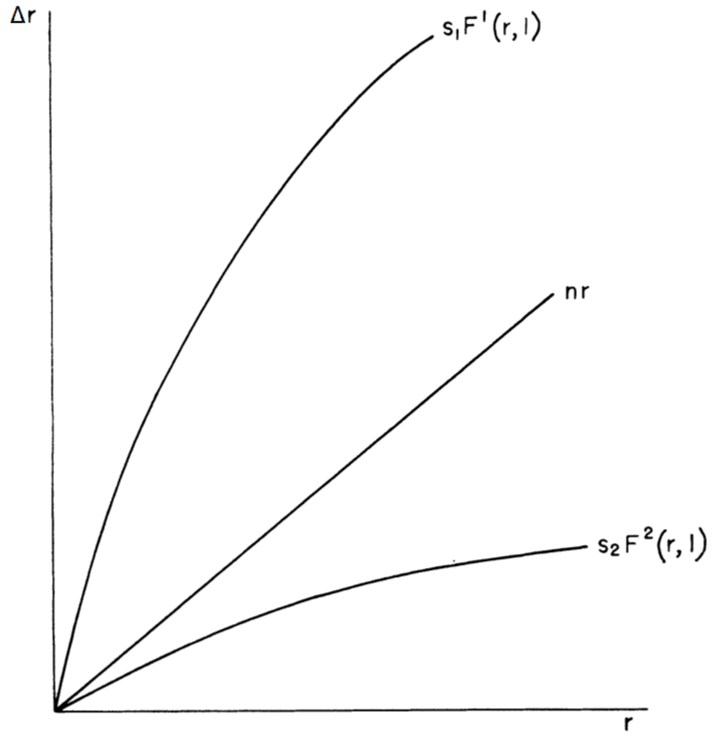

Figura 3: Ningún punto positivo de intersección.

está representada por una línea quebrada: el rayo desde el origen con pendiente $\frac{s}{a}$ *hasta que* r *alcanza el valor* $\frac{a}{b}$, *y luego una línea horizontal a la altura* $\frac{s}{b}$. *En el modelo de Harrod* $\frac{s}{a}$ *es la tasa garantizada de crecimiento.*

Ahora hay tres posibilidades:

(a) $n_1 < \frac{s}{a}$, *la tasa natural excede la tasa garantizada. Se puede apreciar de la Figura 4 que* $n_1 r$ *es siempre mayor que* $s \min\left(\frac{r}{a}, \frac{1}{b}\right)$, *de manera que* r *siempre decrece. Suponga que el valor inicial del ratio capital-trabajo es* $r_0 > \frac{a}{b}$, *entonces* $(1+n)(r_{t+1} - r_t) = \frac{s}{b} - n_1 r_t$, *cuya solución es* $r_t = \left(r_0 - \frac{s}{n_1 b}\right)\left(\frac{1}{1+n_1}\right)^t + \frac{s}{n_1 b}$. *Entonces* r_t *decrece hacia* $\frac{s}{n_1 b}$ *que a su vez es menor que* $\frac{a}{b}$. *En un punto del tiempo* t_1 *fácilmente calculable,* r *alcanzá* $\frac{a}{b}$. *Desde ese momento en adelante* $(1+n_1)(r_{t+1} - r_t) = \left(\frac{s}{a} - n_1\right) r_t$, *cuya solución es* $r_t = \frac{a}{b}\left(\frac{1+s/a}{1+n_1}\right)^{t-t_1}$. *Ya que* $\frac{s}{a} < n_1$, r *decrecerá hacia cero. En el momento* t_1, *cuando* $r_{t_1} = \frac{a}{b}$ *la oferta laboral y el stock de capital están en balance. Desde ese momento en adelante, a medida que el ratio capital-trabajo decrece, el trabajo se vuelve redundante y el grado de la redundancia crece. El monto de desempleo puede ser calculado del hecho que* $K_t = rL_0(1+n)^t$ *recordando que, cuando el capital está en el factor*

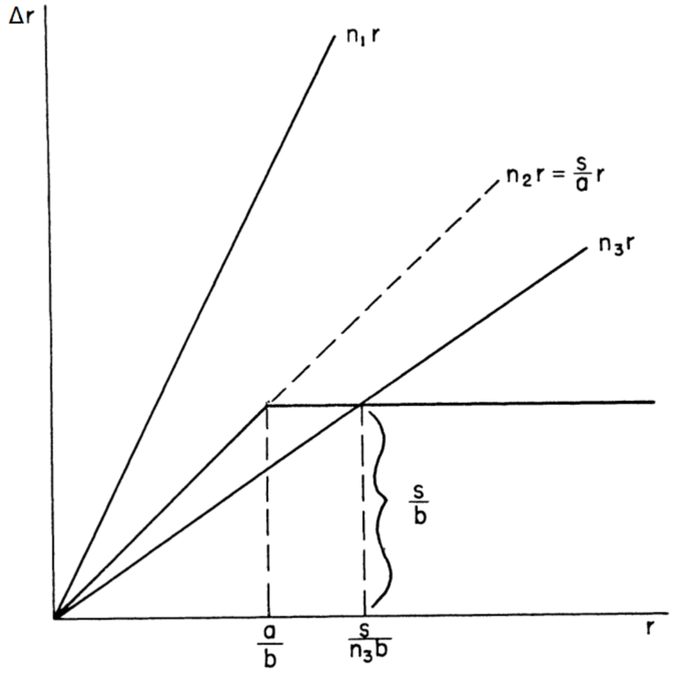

Figura 4: ABC

de cuello de botella, el producto es $\dfrac{K}{a}$ *y el desempleo es* $b\dfrac{K}{a}$.

(b) $n_2 = \dfrac{s}{a}$*, las tasas garantizada y natural son iguales. Si inicialmente* $r > \dfrac{a}{b}$ *de manera que el trabajo es el cuello de botella, entonces* r *decrece hacia* $\dfrac{a}{b}$ *y permanece ahí. Si inicialmente* $r < \dfrac{a}{b}$*, entonces* r *se mantiene constante a lo largo del tiempo, en una suerte de equilibrio neutral. El stock de capital y la oferta laboral crecen a la tasa camún* n_2*; cualquiera haya sido la redundancia porcentual del trabajo inicialmente, esta es preservada.*

(c) $n_3 < \dfrac{s}{a}$*, la tasa garantizada excede la tasa natural. Formalmente la solución es exactamente como en el caso (a) donde* n_3 *reemplaza a* n_1*. Existe un ratio capital-producto de equilibrio estable en* $r = \dfrac{s}{n_3 b}$*. Pero aquí el capital es redundante como se puede ver del hecho que la productividad marginal ha caído a cero. De hecho, la proporción del stock de capital que es empleada en crecimiento de equilibrio es* $\dfrac{an_3}{s}$*. Pero ya que el stock de capital está creciendo (a una tasa asintóticamente igual a* n_3*) el monto absoluto del exceso de capacidad está creciendo también. Esta apariencia de redundancia independiente de cualquier movimiento precio-salario es consecuencia de las proporciones fijas, y le otorga al modelo Harrod-Domar su característica de balance rígido. Como mínimo uno puede imaginar una función de producción tal que si* r *excede un valor crítico*

$r_{\text{máx}}$ el producto marginal del capital cae a cero, y si r cae por debajo de otro valor crítico $r_{\text{mín}}$, el producto marginal del trabajo cae a cero. Para ratios capital-trabajo intermedios las isocuantas son como siempre. La Figura 4 comenzaría con una porción lineal para $0 \leq r \leq r_{\text{mín}}$ y luego tener una fase como en la Figura 1 para $r_{\text{mín}} \leq r \leq r_{\text{máx}}$ para luego terminar con una línea horizontal para $r > r_{\text{máx}}$. Habría una zona entera de tasas de crecimiento de la oferta laboral que llevarían a un equilibrio como el de la Figura 1. Para valores de n debajo de esta zona el resultado sería una redundancia del capital, para valores de n encima de esta zona el resultado sería una redundancia del trabajo. En la medida que en el largo plazo las proporciones de factores son ampliamente variables la zona intermedia de tasas de crecimiento será amplia.

Ejemplo 2 (La función Cobb-Douglas) *Las propiedades de la función $Y = K^a L^{1-a}$ son muy bien conocidas como para necesitar comentarios aquí. La Figura 1 describe la situación independientemente de la elección de los parámetros a y n. La productividad marginal del capital crece indefinidamente a medida que el ratio capital-trabajo decrece, de manera que la curva $sF(r,1)$ debe crecer por encima del rayo nr. Pero ya que $a < 1$, la curva debe eventualmente cruzar el rayo por encima y después mantenerse debajo. Entonces el comportamiento asintótico del sistema es siempre un crecimiento balanceado a la tasa natural.*

La ecuación en diferencias (6) es en este caso $(1+n)(r_{t+1} - r_t) = sr_t^a - nr_t$. Defínase $b = 1 - a$. Se apreciará fácilmente que, a medida que t se vuelve grande, K_t crece esencialmente como $\left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{1}{b}} L_0 (1+n)^t$, i.e. a la misma tasa de crecimiento que la fuerza laboral. El valor de equilibrio del ratio capital-trabajo es $r^* = \left(\frac{s}{n}\right)^{\frac{1}{b}}$. Esto se puede verificar al poner $r_{t+1} = r_t = r^*$ en (6). De manera suficientemente razonable, este ratio de equilibrio es mayor mientras mayor sea la tasa de ahorro y menor la tasa de incremento de la oferta laboral.

Es suficientemente fácil trabajar la senda temporal del producto real de la misma función de producción. Obviamente, asintóticamente Y debe comportarse como si K y L crecieran a la tasa relativa n. El ingreso real por cabeza de fuerza laboral, Y/L, tiende al valor $(s/n)^{a/b}$. Precisamente, con la función Cobb-Douglas siempre es verdad que $Y/L = (K/L)^a = r^a$. Se sigue inmediatamente que el valor de equilibrio de K/Y es s/n. Pero K/Y es el "coeficiente de capital" en términos de Harrod, digamos

C. Entonces en el crecimiento de largo plazo tendremos $C = s/n$ o $n = s/C$: la tasa natural es igual a "la" tasa garantizada, no como un extraño golpe de suerte sino consecuencia de ajustes de oferta y demanda.

Ejemplo 3 *Una familia entera de funciones de producción de rendimientos constantes a escala está dada por $Y = (aK^p + bL^p)^{1/p}$. Difiere de la familia Cobb-Douglas en que la producción es posible con solo un factor. Pero comparte la propiedad de que si $p < 1$, la productividad marginal del capital se vuelve infinitamente grande a medida que el ratio capital-trabajo declina hacia cero. Si $p > 1$, las isocuantas tienen la convexidad "incorrecta"; cuando $p = 1$, las isocuantas son lineas rectas, la sustituibilidad es perfecta; me restringiré al caso $0 < p < 1$ que da lugar a los rendimientos marginales decrecientes usuales. De otra manera es difícilmente lógico insistir en el pleno empleo de ambos factores. En particular consideremos $p = 1/2$ de tal manera que la función de producción se convierte en*

$$Y = \left(a\sqrt{K} + \sqrt{L}\right)^2 = a^2K + L + 2a\sqrt{KL}.$$

La ecuación en diferencias básica es

$$(1+n)(r_{t+1} - r_t) = s\left(a\sqrt{r} + 1\right)^2 - nr_t. \tag{7}$$

Esta puede ser escrita como:

$$(1+n)(r_{t+1} - r_t) = s\left[\left(a^2 - n/s\right)r_t + 2a\sqrt{r_t} + 1\right] = s\left(A\sqrt{r_t} + 1\right)\left(B\sqrt{r_t} + 1\right)$$

donde $A = a - \sqrt{n/s}$ and $B = a + \sqrt{n/s}$.

Una vez más, es más fácil referirse a un diagrama. Hay dos posibilidades, ilustradas en la Figura 5. La curva $sF(r,1)$ comienza a una altura cuando $r = 0$. Si $sa^2 > n$, no existe equilibrio de crecimiento balanceado: el ratio capital-trabajo se incrementa indefinidamente y el producto real por cabeza también. El sistema es altamente productivo y ahorra/invierte suficiente en pleno empleo para expandirse rápidamente. Si $sa^2 < n$, existe un equilibrio de crecimiento balanceado estable. Se puede hallar el ratio capital-trabajo de equilibrio al poner $r_{t+1} = r_t = r^*$ en (7); este es $r^* = \left(1/\sqrt{n/s} - a\right)^2$. Se puede calcular además que el ingreso por cabeza que prevalece en el estado límite de crecimiento es $1/\left(1 - a\sqrt{s/n}\right)^2$. Esto es, el ingreso real por cabeza de fuerza laboral crecerá hacia este valor si empieza por debajo, o viceversa.

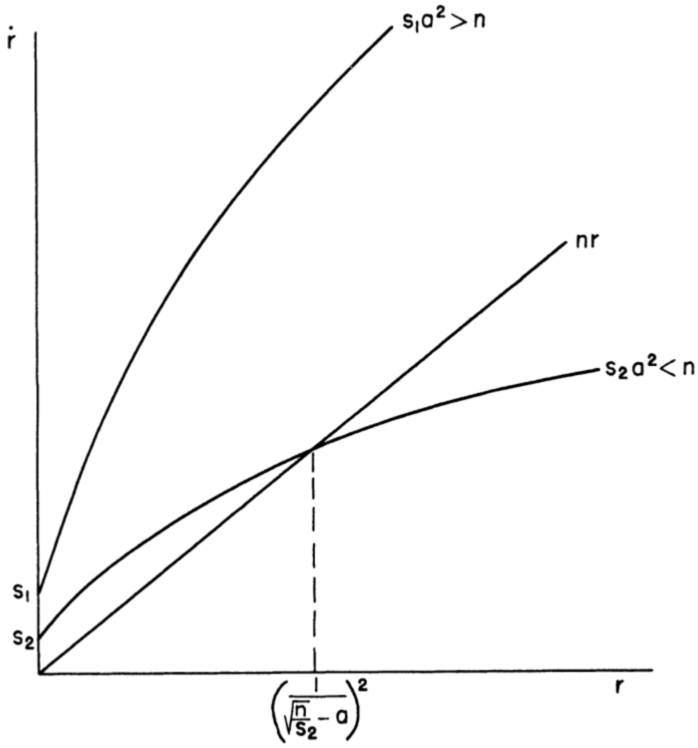

Figura 5: Dos posibilidades.

5. Comportamiento de las tasas de interés y salariales

Las sendas de crecimiento discutidas en las secciones anteriores pueden ser vistas de dos maneras. Desde un punto de vista no tienen significancia causal sino que simplemente indican el curso que la acumulación de capital y el producto real tendrían que tomar si no existieran ni el desempleo ni el exceso de capacidad. Sin embargo, desde otro punto de vista podemos preguntarnos qué tipo de comportamiento de mercado hará que la economía del modelo siga la senda de crecimiento de equilibrio. En esta dirección ya se asumió que tanto la creciente fuerza laboral como el *stock* de capital existente son llevados al mercado inelásticamente, con el salario real y la renta real del capital ajustándose instantáneamente para vaciar el mercado. Sin embargo, si las decisiones de ahorro e inversión son tomadas de manera independiente, se deben satisfacer algunas condiciones adicionales de eficiencia marginal del capital. El objetivo de esta sección es exponer el comportamiento apropiado de precios, salario e interés para las sendas de crecimiento bosquejadas anteriormente.

Hay cuatro precios involucrados en el sistema: (1) el precio de venta de una unidad de producto real (y ya que el producto real sirve también como capital este es el precio de tranferencia de una unidad del *stock* de capital) p_t; (2) la tasa salarial monetaria w_t; (3) la renta monetaria por unidad de tiempo de una unidad de *stock* de capital q_t; (4) la tasa de interés i_t. Podemos eliminar inmediatamente una de estas. En el sistema real con el que estamos trabajando no hay nada que determine el nivel absoluto de precios. Entonces podemos tomar p_t, el precio del producto real, como dado. Algunas veces será conveniente imaginar a p como una constante.

En una economía competitiva el salario real y la renta real están determinados por las ecuaciones tradicionales de productividad marginal:

$$\frac{\partial F}{\partial L} = \frac{w}{p} \tag{8}$$

y

$$\frac{\partial F}{\partial K} = \frac{q}{p}. \tag{9}$$

Nótese de paso que bajo rendimientos constantes a escala las productividades marginales dependen solo del ratio capital-trabajo r, y no de alguna de las cantidades de escala[7].

[7] En el caso polar de competencia pura, incluso si las firmas individuales tienen curvas de costo promedio con forma de U podemos imaginar cambios en el producto agregado ocurriendo únicamente por la entrada y salida de firmas idénticas de tamaño óptimo. Entonces el producto agregado es producido a un costo constante; y de hecho, por el gran número de firmas relativamente pequeñas produciendo cada una a un costo aproximadamente constante para variaciones pequeñas, podemos sin error sustancial definir una función de producción agregada que exhibirá rendimientos constantes a escala. Habrán desvíos menores ya que esta función de producción agregada no es estrictamente válida para variaciones en el producto menores al tamaño de una firma óptima. Pero este abultamiento puede ser tratado como insignificante para el análisis de largo plazo.

Naturalmente uno piensa en adaptar el modelo al supuesto más general de competencia monopolística universal. Pero el recurso anterior falla. Si la industria consiste en firmas idénticas en idénticos equilibrios de tangencia en grandes grupos entonces, sujeto a la restricción de que los cambios en el producto ocurren solo vía cambios en el número de firmas, uno puede quizás definir una función de producción agregada de costo constante. Pero ahora esta construcción es ampliamente irrelevante, porque incluso si quisiéramos ignorar su discontinuidad y tratarla como diferenciable, las derivadas parciales de dicha función no serán las productividades marginales a las cuales las firmas individuales responden. Cada firma está en el tramo descendente de su curva de costo unitario, mientras que en el caso competitivo cada firma estaba de hecho produciendo a costos localmente constantes. El difícil problema sigue siendo el de introducir competencia monopolística

La renta real sobre el capital q/p es una tasa propia de interés -es el retorno del capital en unidades de *stock* de capital. Un dueño de capital puede incrementar sus tenencias al rentar y reinvertir mediante interés compuesto a la tasa por periodo *variable* q/p; es decir, $\prod_{\tau=0}^{t}(1+q_\tau/p_\tau)$. Bajo condiciones de perfecto arbitraje existe una relación cerrada bien conocida entre la tasa monetaria de interés y la tasa propia del *commodity*, es decir

$$1+i_t=\frac{q_t}{p_t}+\frac{p_{t+1}}{p_t}. \tag{10}$$

Si el nivel de precios es de hecho constante, la tasa propia y la tasa de interés coincidirán. Si el nivel de precios está cayendo, la tasa propia debe exceder a la tasa de interés para inducir a la gente a poseer *commodities*. Que la relación exacta sea como en (10) puede ser vista de varias maneras. Por ejemplo, el dueño de \$1 en el periodo t tiene dos opciones: puede prestar el dinero por un periodo, digamos hasta $t+1$ y recibir i_t de interés, o puede comprar $1/p$ unidades de producto, obtener una renta de q/p y luego vender. En el primer caso tendrá $1+i_t$ al final del periodo; en el segundo caso tendrá $q_t/p_t+p_{t+1}/p_t$. En equilibrio estos dos montos deben ser iguales

$$1+i_t=\frac{q_t}{p_t}+\frac{p_{t+1}}{p_t}$$

o

$$i_t=\frac{q_t}{p_t}+\frac{p_{t+1}-p_t}{p_t}$$

que equivale a (10). Entonces esta condición iguala el atractivo de mantener riqueza en la forma de *stock* de capital o fondos prestables.

Otra forma de derivar (10) y ganar algo de intuición sobre su rol en nuestro modelo es notar que p_t, el precio de transferencia de una unidad de capital, debe igualar el valor presente de su flujo futuro

en modelos agregados. Por ejemplo, las ecuaciones de valor del producto marginal en el texto tendrían que pasar a ser relaciones de producto e ingreso marginal, las cuales a su vez requerirían la presencia explícita de curvas de demanda. Aquí se necesita mucha experimentación adicional, siendo la recompensa un mayor realismo.

de rentas netas. Entonces bajo predicción perfecta sobre las rentas futuras y tasas de interés:

$$p_t = \sum_{u=t}^{\infty} \frac{q_u}{\prod_{z=t}^{u}(1+i_z)}.$$

El cálculo de $p_t - \dfrac{p_{t+1}}{1+i_t}$ da lugar a (10). Entonces dentro de los confines de nuestro modelo (en particular ausencia de riesgo, una propensión promedio a ahorrar fija, y sin complicaciones monetarias) la tasa monetaria de interés y el retorno para los poseedores de capital se mantendrá justo en la relación requerida para inducir a la comunidad a mantener el *stock* de capital en existencia. La ausencia de riesgo e incertidumbre se muestra a sí misma en ausencia de preferencias por activos.

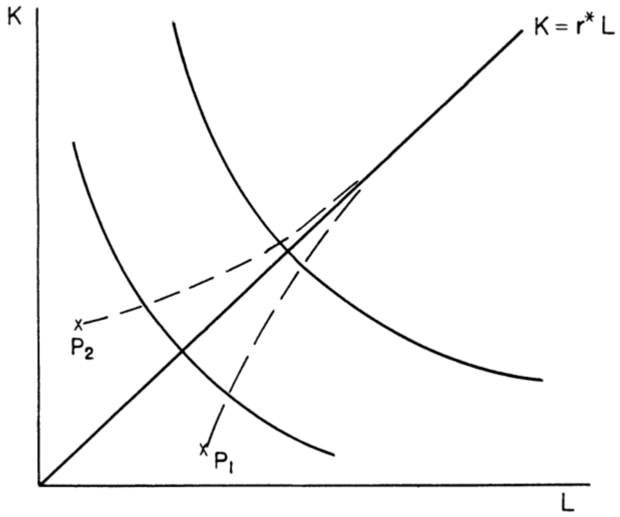

Figura 6: Único crecimiento balanceado estable de equilibrio.

Dado el nivel absoluto de precios p_t, las ecuaciones (8)-(10) determinan las otras tres variables de precios, cuyo comportamiento puede entonces ser calculado una vez que la senda particular de crecimiento es conocida.

Es posible obtener diagramáticamente una visión general, particularmente cuando existe un crecimiento balanceado estable de equilibrio. En la Figura 6 está dibujado el mapa de isocuantas de la función de producción $F(K,L)$, y algunos posibles tipos de sendas de crecimiento. Un ratio capital-trabajo dado r^* está representado en la Figura 6 por un rayo desde el origen con pendiente r^*. Supóngase que existe un ratio asintótico estable r^*; entonces todas las sendas que partan de condiciones iniciales arbitrarias se aproximan a dicho rayo en el límite. Se muestran dos de dichas sendas, surgiendo de los

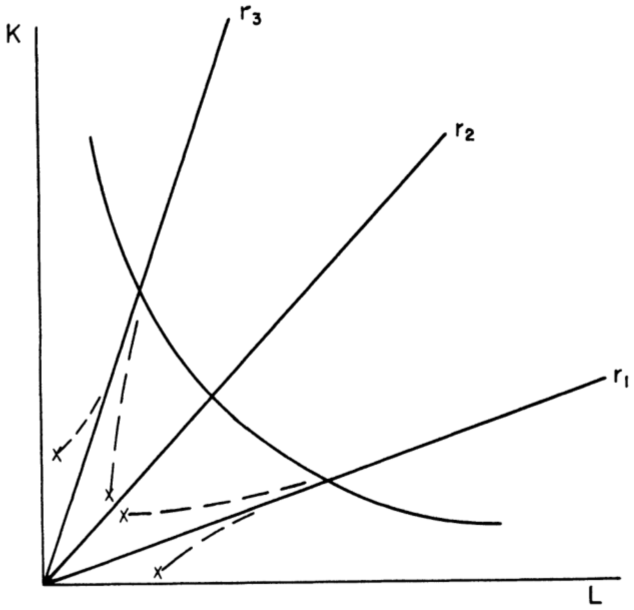

Figura 7: Múltiples crecimientos balanceados estables de equilibrio.

puntos iniciales P_1 y P_2. Ya que en la Figura 1 el acercamiento de r a r^* era monotónico, las sendas deben verse como se muestra en la Figura 6. Vemos que si el ratio capital-trabajo inicial es mayor al valor de equilibrio, el ratio cae y viceversa.

La Figura 7 corresponde a la Figura 2. Existen tres rayos "de equilibrio", pero el interno es inestable. El rayo interno es la línea divisoria entre las condiciones iniciales que llevan a uno de los rayos estables y aquellas que llevan al otro. Por supuesto, todas las trayectorias llevan hacia arriba y a la derecha, sin doblarse de regreso; K y L siempre crecen. El lector puede dibujar un diagrama correspondiente a la Figura 3, en la cual las sendas de crecimiento pasan a rayos más y más empinados o a más y más planos, significando $r \to \infty$ o $r \to 0$ respectivamente. Otra vez, remarco que K y L y por lo tanto Y se incrementan todas, pero si $r \to 0$, Y/L decrecerá.

Ahora, por los rendimientos constantes a escala sabemos que a lo largo de un rayo desde el origen, la pendiente de las isocuantas es constante. Esto expresa el hecho de que los productos marginales dependen solo del ratio de factores. Pero en competencia la pendiente de la isocuanta refleja el ratio de los precios de factores. Entonces a un r^* estable como en la Figura 6 le corresponde un ratio de equilibrio w/q. Además, si las isocuantas tienen la convexidad normal, es evidente que a medida que r se incrementa hacia r^{*}, el ratio w/q se incrementa hacia su valor límite, y viceversa si r está cayendo.

En el caso inestable, donde r tiende a infinito o cero puede ser que w/q tienda a infinito o cero. Si, por otro lado, las isocuantas alcanzan los ejes con pendientes intermedias entre la vertical y la horizontal, el ratio de precio de factores w/q tenderá a un límite finito.

Podría también ser útil señalar que la pendiente de la curva $F(r, 1)$ es la productividad marginal del capital en el valor correspondiente de r. Entonces el curso de la renta real q/p puede ser trazado en las Figuras 1, 2 y 3. Recuerde que en aquellos diagramas $F(r, 1)$ ha sido reducida por el factor s, por lo tanto lo mismo ocurre con la pendiente de la curva. $F(r, 1)$ en sí misma representa a Y/L, el producto por unidad de trabajo, como una función del ratio capital-trabajo.

En general, si existe una senda de crecimiento estable, la caída en el salario real o la renta real necesaria para llegar a ella puede no ser catastrófica en absoluto. Si existe una escasez inicial de trabajo (comparada con el ratio de equilibrio) el salario real tendrá que caer. Mientras mayor sea la tasa de incremento de la fuerza laboral y menor sea la propensión a ahorrar, menor será el ratio de equilibrio y por tanto el salario real tendrá que caer más. Pero la caída no es indefinida. Le debo a John Chipman la observación de que este resultado contradice directamente la postura de Harrod[8] de que se sería necesaria una tasa de interés en constante caída para mantener el equilibrio.

Referencias

Haavelmo, T. (1954). *A Study in the Theory of Economic Evolution.* Contributions to Economic Analysis. no. 3. North-Holland.

Pilvin, H. (1953). Full capacity vs. full employment growth. *The Quarterly Journal of Economics*, 67(4):545–552.

[8] En sus comentarios sobre un artículo escrito por Pilvin (1953, p. 545).

Solow, R. M. (1956). A Contribution to the Theory of Economic Growth. *The Quarterly Journal of Economics*, 70(1):65–94.

Solow, R. M. y Samuelson, P. A. (1953). Balanced Growth under Constant Returns to Scale. *Econometrica*, 21(3):412–424.

Apéndice A Derivaciones

A.1 Derivación

[Insertar aquí]

Apéndice B Demostraciones

B.1 Demostración

[Insertar aquí]

Apéndice C Ejercicios

Ejercicio 1 *[Insertar aquí]*

Ejercicio 2 *[Insertar aquí]*

Apéndice D Solución de ejercicios

D.1 Solución del ejercicio

Sabemos que la siguiente función de producción

$$Y = F(K, L)$$

exhibe rendimientos constantes a escala. Por lo tanto, es homogénea de grado uno y por definición tenemos que

$$\lambda F(K, L) = F(\lambda K, \lambda L), \text{ para } \lambda > 0.$$

Derivando la identidad anterior con respecto a λ obtenemos que

$$F(K,L) = F_1(\lambda K, \lambda L) K + F_2(\lambda K, \lambda L) L, \text{ para } \lambda > 0.$$

Ya que la relación anterior se cumple para todo $\lambda > 0$, se cumple para $\lambda = 1$ con lo cual

$$F(K,L) = F_1(K,L) K + F_2(K,L) L.$$

D.2 Solución del ejercicio

En equilibrio, las firmas maximizan los beneficios dados por

$$\Pi = pF(K,L) - qK - wL.$$

Las condiciones de primer orden vienen dadas por

$$pF_1(K,L) = q$$

y

$$pF_2(K,L) = w.$$

Lo anterior implica que.

$$\begin{aligned} \Pi &= pF(K,L) - qK - wL \\ &= pF(K,L) - pF_1(K,L) K - pF_2(K,L) L \\ &= p[F(K,L) - F_1(K,L) K - F_2(K,L) L] \\ &= 0, \end{aligned}$$

donde la última igualdad es consecuencia de los rendimientos constantes a escala.

D.3 Solución del ejercicio

$$
\begin{aligned}
0 &< F_2(K,L) \\
&= \frac{1}{L}\left[F_2(K,L)\,L\right] \\
&= \frac{1}{L}\left[F(K,L) - F_1(K,L)\,K\right] \\
&= \frac{1}{L}\left[F(r,1)\,L - F_1(r,1)\,r\right] \\
&= F(r,1) - F_1(r,1)\,r
\end{aligned}
$$

D.4 Solución del ejercicio

$$
\gamma =
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\gamma}{\partial r} &= \frac{1}{1+n}\frac{sF_1(r,1)\,r - sF(r,1)}{r^2} \\
&= \frac{s}{1+n}\frac{F_1(r,1)\,r - F(r,1)}{r^2} \\
&= -\frac{s}{1+n}\frac{F(r,1) - F_1(r,1)\,r}{r^2} \\
&= -\frac{s}{1+n}\frac{F_2(K,L)\,r}{r^2} < 0.
\end{aligned}
$$

D.5 Solución del ejercicio

D.6 Solución del ejercicio