

# Introducción

Juan Carlos Aquino Chávez

*Banco Central de Reserva del Perú*

13 de enero de 2025

La presente nota contiene una traducción libre de [Stokey y Lucas \(1989\)](#), capítulo 1).

La investigación en dinámica económica ha experimentado una transformación notable en las recientes décadas. Hace una generación, los investigadores empíricos estaban típicamente obligados a añadir dinámica y elementos estocásticos como ideas tardías a las predicciones sobre el comportamiento derivadas de modelos económicos estáticos y determinísticos. Hoy, en cualquier área de aplicación, tenemos teorías que se encargan explícitamente de agentes económicos racionales que operan a través del tiempo en entornos estocásticos. La idea de un equilibrio económico ha experimentado una evolución similar: ya no lleva la connotación de un sistema en reposo. Se dispone ahora de métodos potentes para analizar modelos teóricos con resultados de equilibrio descritos por los mismos tipos de procesos estocásticos complicados que usamos para describir el comportamiento económico observado.

Éstos desarrollos teóricos están basados en una amplia variedad de resultados en economía, matemáticas y estadística: la visión de activos contingentes de los equilibrios económicos introducida por [Arrow \(1953\)](#) y [Debreu \(1959\)](#), las aplicaciones económicas del cálculo de variaciones, de las cuales [Ramsey \(1928\)](#) y [Hotelling \(1931\)](#) fueron pioneros hace mucho tiempo, la teoría de la programación dinámica de [Bellman \(1957\)](#) y [Blackwell \(1965\)](#). Nuestra meta en este libro es proporcionar tratamientos autocontenidos de estas ideas teóricas que forman la base de la dinámica económica moderna. Nuestro enfoque se distingue por su uso sistemático de métodos recursivos, métodos que hacen posible tratar

una amplia variedad de problemas de dinámica económica -tanto determinísticos como estocásticos- desde un punto de vista bastante unificado.

Para ilustrar a qué nos referimos con un enfoque recursivo de la dinámica económica, comenzamos con una lista de ejemplos concretos, tomados de la mucho más larga lista de aplicaciones a ser tratada en detalle en capítulos posteriores. Estos ejemplos también sirven para ilustrar los tipos de preguntas económicas sustanciales que pueden ser estudiadas con los métodos analíticos en este libro.

Considérese primero una economía que produce un único bien que puede ser o bien consumido o bien invertido. La cantidad consumida rinde utilidad inmediata al único tomador de decisiones, un “planificador social”. La cantidad invertida aumenta el *stock* de capital, haciendo por tanto posible que se incremente la producción en el futuro. ¿Cuál es la política de consumo e inversión que maximiza la suma de utilidades a través de un horizonte de planificación infinito?

Considérese luego una economía que por lo demás es similar a la recién descrita, pero que está sujeta a choques aleatorios que afectan el monto de producto que puede ser producido con un *stock* de capital dado. ¿Cómo debería ser tomada la decisión consumo-inversión si el objetivo es maximizar la suma esperada de utilidades?

Supóngase que un trabajador desea maximizar el valor presente de sus ingresos. En cualquier período se le presenta una oferta salarial en la cual él puede trabajar una unidad de tiempo o cero. Si él trabaja, él toma los ingresos y retiene el mismo trabajo el siguiente período. Si él no trabaja, él busca una actividad que da lugar a una nueva oferta salarial proveniente de una distribución de probabilidad conocida. ¿Qué regla de decisión debería él adoptar si su meta es maximizar valor presente descontado esperado de sus ingresos de por vida?

Un gerente de tienda tiene en existencias un número dado de artículos de un tipo específico. La

demanda es estocástica, de manera que en cualquier período él puede agotar existencias y abstenerse de las ventas que él hubiera podido lograr con un mayor inventario o incurrir en los costos de mantener artículos sin vender. Al inicio de cada periodo él puede colocar una orden por más artículos. El costo de esta acción incluye un cargo fijo por envío más un cargo por artículo ordenado. La orden debe ser colocada antes de que el gerente conozca la demanda del periodo actual. Si su meta es maximizar el valor presente descontado esperado de sus ganancias, ¿cuándo debería él colocar una orden? y, cuando una orden es colocada, ¿cuán grande debería ser?

Una economía está dotada con un número fijo de activos productivos que tienen rendimientos exógenamente dados y descritos por un proceso estocástico. Estos activos son poseídos de manera privada, y se transan derechos a todos ellos en un mercado de valores competitivo. ¿Cómo están relacionados los precios de equilibrio competitivo en este mercado a las preferencias del consumidor sobre el consumo de los bienes y al estado actual del proceso de rendimientos? ¿Cómo se altera la respuesta a esta pregunta si los activos pueden ser producidos?

Un monopolista enfrenta una curva de demanda para su producto que se desplaza estocásticamente. Su capacidad actual de producción está determinada por sus inversiones pasadas, pero él tiene la opción de invertir en aumentos de capacidad, aumentos que estarán disponibles para la producción en el futuro. ¿Qué estrategia de inversión maximiza el valor presente descontado esperado de los beneficios? Alternativamente, supóngase que hay muchas firmas en esta industria. ¿Cuáles son las estrategias de inversión para todas estas firmas en equilibrio competitivo y qué implican estas para el comportamiento de la producción y los precios de la industria?

Estos problemas tienen evidentemente mucho en común. En cada caso un tomador de decisiones -un planificador social, un trabajador, un gerente, un mercado entero, una firma o colección de firmas- debe elegir una secuencia de acciones a lo largo del tiempo. En el primer ejemplo no hay incertidumbre, de manera que la secuencia entera puede también ser elegida desde el principio. En los otros cinco

ejemplos el entorno está sujeto a choques externos impredecibles, y está claro que las mejores acciones futuras dependen de las magnitudes de dichos choques. Considérese cómo podríamos formular cada uno de estos problemas matemáticamente y a qué nos podríamos referir con un enfoque recursivo a cada uno.

El primer ejemplo es el problema de ahorro óptimo que Frank Ramsey formuló y resolvió en 1928. Ramsey vió el problema como uno de maximizar una función (utilidad total) de una infinidad de variables (consumo y *stock* de capital en cada fecha) sujeto a las restricciones impuestas por la tecnología. Él formuló el problema en tiempo continuo y aplicó cálculo de variaciones para obtener una caracterización muy precisa de la dinámica que maximiza la utilidad: el *stock* de capital debería converger monotónicamente al nivel que, si es sostenido, maximiza el consumo por unidad de tiempo.

En el problema de Ramsey la característica del conjunto de posibilidades de producción que cambia a lo largo del tiempo es el *stock* actual de capital. Esta observación sugiere que una manera alternativa de describir la política óptima es en términos de una función que da la inversión actual óptima de la sociedad como una función de su *stock* actual de capital; y de hecho la solución de Ramsey puede ser expresada en esta forma. Así, una estrategia matemática alternativa es buscar directamente la función de ahorro óptimo y entonces usar esta función para computar la secuencia óptima de inversiones desde cualquier *stock* inicial. Esta forma de ver el problema -decidir la acción inmediata a tomar como una función de la situación actual- es llamada una formulación recursiva porque explota la observación de que un problema de decisión de la misma estructura general es recurrente en cada periodo.

Dado que Ramsey resolvió por completo su problema usando métodos variacionales, este ejemplo es más adecuado para definir un enfoque recursivo que para motivarlo. Considérese luego la variación estocástica de este problema. En este caso obviamente no tiene sentido elegir un plan de inversiones determinístico para todas las fechas futuras: las mejores elecciones futuras dependerán de cuánto producto está disponible en el momento, y ello a su vez dependerá de los choques aún no realizados a la

productividad del capital. Para llevar a cabo el análogo de la estrategia de Ramsey, uno debe seguir la formulación de activos contingentes presentada por Kenneth Arrow (1953) y Gerard Debreu (1959) y ver un plan de inversión como una sucesión de inversiones, cada una de las cuales es hecha de manera contingente a la historia de choques que se han realizado hasta el momento en que la decisión es de hecho implementada.

Esta formulación de activos contingentes es un punto de vista enormemente útil para muchos fines (y es de hecho esencial para el análisis en partes de este libro), pero en el contexto actual lleva a un problema de maximización en un espacio en el que es mucho más difícil trabajar que en el espacio de secuencias que Ramsey usó. Aún así, una formulación recursiva del problema de Ramsey estocástico es difícilmente más complicada que aquella para el caso determinístico. Con choques aleatorios el estado actual del sistema está descrito por dos variables: el capital y el choque actual. En este caso, buscamos una función ahorro que expresa la decisión óptima de inversión como una función de solo estas dos variables.

El problema de búsqueda óptima de trabajo puede ser también formulado como uno de elegir una secuencia de acciones contingentes, pero es incómodo hacerlo. En este problema los choques que el agente decisor observa dependen de sus acciones: si él toma el trabajo, él nunca aprende qué ofertas salariales podría haber recibido si hubiera seguido buscando. Formulado recursivamente, el problema se convierte en uno de elegir un único número, el salario de reserva. El trabajador debe entonces aceptar cualquier trabajo que ofrezca un salario por encima de este nivel y rechazar cualquier oferta por debajo de este. El problema de inventario discutido después tiene una estructura similar, aunque en este caso se deben escoger dos números: el nivel de inventario que gatilla una orden y el tamaño de la orden.

El ejemplo de valoración de activos no tiene un único agente decisor, como si lo tenían los primeros cuatro ejemplos. El problema aquí es la determinación de los precios de equilibrio de mercado. Podemos, para esta economía, calcular los precios de Arrow-Debreu para los derechos fechados a los bienes,

contingentes a las historias de choques hasta la fecha en la cual el intercambio va a ocurrir. Alternativamente (y uno puede mostrar equivalentemente), podemos pensar en los precios como siendo fijados en una sucesión de mercados *spot* de acciones. De este segundo punto de vista recursivo buscamos una expresión para los precios de equilibrio como funciones del estado del sistema, lo cual es exactamente análogo a expresar las decisiones de los agentes como funciones del estado.

Nuestro ejemplo final era un problema microeconómico que involucraba inversión en una única industria con el comportamiento de la demanda del consumidor como dado. Cuando la industria es un monopolio, este problema tiene un único agente decisor y es entonces similar en estructura al problema del planificador social de elegir los ahorros óptimos en una economía estocástica. Si la industria es competitiva, nos gustaría resolver simultáneamente los precios y niveles de inversión de equilibrio. Como conjeturó Harold Hotelling en su documento de 1931 sobre recursos agotables, en este caso la industria como un todo resuelve un problema de maximización del excedente del consumidor que tiene exactamente la misma estructura matemática que la que tiene el problema del monopolio.

Como esperamos que estos ejemplos ilustren, una gran variedad de problemas económicos y otros problemas de decisión están formulados muy naturalmente en un marco recursivo. Entonces, un primer objetivo de este libro es presentar de una manera unificada la teoría de toma de decisiones recursiva -programación dinámica (en la terminología de Richard Bellman)- e ilustrar la aplicación de esta teoría a una gran variedad de problemas económicos.

Un segundo objetivo es mostrar cómo los métodos de programación dinámica pueden ser combinados con aquellos de la teoría moderna del equilibrio general para dar lugar a modelos tratables de sistemas económicos dinámicos. Esta posibilidad es más fácil de ver cuando el sistema mismo como un todo resuelve un problema del máximo, y algunas de nuestras aplicaciones toman esta forma. También consideraremos sistemas cuyo comportamiento no puede ser imitado por ningún problema de decisión individual pero para los cuales los métodos recursivos todavía pueden ser fructíferamente aplicados.

Estos ejemplos dan una sensación de los tipos de problemas económicos que abordaremos y del punto de vista general desde el cual pretendemos estudiarlos. Ya que a este nivel informal no es posible discutir las preguntas técnicas que dichos problemas hacen, no podemos en esta coyuntura proporcionar una visión panorámica útil del resto del libro. Por consiguiente, en el siguiente capítulo estudiamos un ejemplo económico concreto que ilustra el rango de métodos analíticos con los cuales estaremos lidiando. En dicho punto estaremos en posición de dar un esbozo del resto del libro.

## Referencias

- Arrow, K. J. (1953). Le rôle des valeurs boursières pour la répartition la meilleure des risques. *Econometrie*, 40:41–48. Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique, Paris.
- Traducido en 1964 como “The role of securities in the optimal allocation of risk bearing.” *Review of Economic Studies* 31(2):91-96.
- Bellman, R. (1957). *Dynamic Programming*. Princeton University Press.
- Blackwell, D. (1965). Discounted Dynamic Programming. *Annals of Mathematical Statistics*, 36(1):226–235.
- Debreu, G. (1959). *The Theory of Value*. Yale University Press.
- Hotelling, H. (1931). The Economics of Exhaustible Resources. *Journal of Political Economy*, 39(2):137–175.
- Ramsey, F. P. (1928). A Mathematical Theory of Saving. *Economic Journal*, 38(152):543–559.
- Stokey, N. L. y Lucas, Jr., R. E. (1989). *Recursive Methods in Economic Dynamics*. Harvard University Press. Con E. C. Prescott.