Universidad
Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Tarea 03

Alumno:
Ramírez López Alvaro. 316276355

Profesor: Jesús Villagómez Chávez
Ayudantes: Gabriela Peña Franco
Martha Rubí Gutiérrez González

9 de septiembre de 2024

1. ¿Cuáles de las siguientes relaciones son funciones? En caso de ser función, calcula su dominio y su imagen:

    a) $\{(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : n, m \geq 0 \wedge 5n = m\}$.
    b) $\{(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : n, m \geq 0 \wedge 5m = n\}$.
    c) $\{(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : n, m \geq 0 \wedge m \leq n\}$.
    d) $\{(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : n \geq 0 \wedge m = 3\}$.
    e) $\{(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : m = n^2\}$.
    f) $\{(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : m^2 = n^2\}$.
    g) $\{(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : 4n + 2m = 6\}$.

2. Determina la inyectividad, suprayectividad y biyectividad de las siguientes funciones:

    a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(n) = 2n$.
    b) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(n) = n + 7$.
    c) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, f(n) = n + 7$.
    d) $f : A \to A/R, f(a) = [a]_R$, donde A es un conjunto y R una relación de equivalencia sobre A.

3. Sea $f : A \to B$ una función. Demuestra que:

    a) f es inyectiva si y sólo si $f^{-1}[f[X]] = X$, para todo $X \subseteq A$.
    b) f es inyectiva si y sólo si $f[X \cap Y] = f[X] \cap f[Y]$, para $X, Y \subseteq A$.
    c) f es suprayectiva si y sólo si $f[f^{-1}[Y]] = Y$, para todo $Y \subseteq B$.
    d) f es biyectiva si y sólo si $f[X^c] = (f[X])^c$, para todo $X \subseteq A$.

4. Responde las siguientes preguntas:

    a) ¿Existe $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ función tal que $g \neq \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$ y $g \circ g = g$?
    b) ¿Existe $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ función biyectiva tal que $g \neq \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$ y $g \circ g = g$?
    c) ¿Existe $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ función biyectiva tal que $g \neq \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$ y $g \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$?

5. (Extra) Sea $f : A \to B$ una función. Definimos la asignación $F : B \to A$ con regla de correspondencia $F(Y) = f^{-1}[Y]$. Demuestra que:

    a) F es función.
    b) Si f es inyectiva, entonces F es suprayectiva.
    c) Si f es suprayectiva, entonces F es inyectiva.
    d) Si F es suprayectiva, entonces f es inyectiva.
    e) Si F es inyectiva, entonces F es suprayectiva.