Universidad

Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Tarea 03

Alumno:
Ramírez López Alvaro. 316276355

Profesor: Jesús Villagómez Chávez
Ayudantes: Gabriela Peña Franco
Martha Rubí Gutiérrez González

11 de noviembre de 2024

1. ¿Cuáles de las siguientes relaciones son funciones? En caso de ser función, calcula su dominio y su imagen:

   a) $\{(n,m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : n, m \geq 0 \land 5n = m\}$.
   b) $\{(n,m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : n, m \geq 0 \land 5m = n\}$.
   c) $\{(n,m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : n, m \geq 0 \land m \leq n\}$.
   d) $\{(n,m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : n \geq 0 \land m = 3\}$.
   e) $\{(n,m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : m = n^2\}$.
   f) $\{(n,m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : m^2 = n^2\}$.
   g) $\{(n,m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : 4n + 2m = 6\}$.

Solución:

a) $\{(n,m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid n, m \geq 0 \text{ y } 5n = m\}$

Análisis: Para cada $n \geq 0$, existe un único $m \geq 0$ dado por $m = 5n$.

Conclusión: Es una función.

- Dominio: $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 0\}$
- Imagen: $\{m \in \mathbb{Z} \mid m = 5n,\ n \geq 0\} = \{0, 5, 10, 15, \dots\}$

b) $\{(n,m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid n, m \geq 0 \text{ y } 5m = n\}$

Análisis: Solo los $n \geq 0$ múltiplos de 5 tienen un $m \geq 0$ correspondiente dado por $m = \frac{n}{5}$.

Conclusión: Es una función, pero su dominio está restringido.

- Dominio:$\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 0 \text{ y } n \text{ es múltiplo de } 5\}$
- Imagen: $\{m \in \mathbb{Z} \mid m \geq 0\}$

c) $\{(n,m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid n, m \geq 0 \text{ y } m \leq n\}$

Análisis: Para cada $n \geq 0$, existen múltiples valores de m que satisfacen $m \leq n$.

Conclusión: No es una función (no hay unicidad de m para cada n).

d) $\{(n,m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid n \geq 0 \text{ y } m = 3\}$

Análisis: Para cada $n \geq 0$, m es siempre 3.

Conclusión: Es una función.

- Dominio: $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 0\}$
- Imagen: $\{3\}$

e) $\{(n,m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m = n^2\}$

Análisis: Para cada $n \in \mathbb{Z}$, existe un único m dado por $m = n^2$.

Conclusión: Es una función.

- Dominio: $\mathbb{Z}$
- Imagen: $\{m \in \mathbb{Z} \mid m \geq 0 \text{ y } m \text{ es un cuadrado perfecto}\}$

f) $\{(n,m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m^2 = n^2\}$

Análisis: Para cada n, hay dos posibles valores de m: $m = n$ y $m = -n$.

Conclusión: No es una función (no hay unicidad de m para cada n).

g) $\{(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 4n + 2m = 6\}$

Análisis: Despejando m, obtenemos $m = 3 - 2n$. Para cada $n \in \mathbb{Z}$, existe un único m.

Conclusión: Es una función.

- Dominio: $\mathbb{Z}$
- Imagen: $\{m \in \mathbb{Z} \mid m = 3 - 2n,\ n \in \mathbb{Z}\}$, es decir, todos los números enteros impares.

2. Determina la inyectividad, suprayectividad y biyectividad de las siguientes funciones:

   a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(n) = 2n$.
   b) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(n) = n + 7$.
   c) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, f(n) = n + 7$.
   d) $f : A \to A/R, f(a) = [a]_R$, donde A es un conjunto y R una relación de equivalencia sobre A.

Solución:

a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad f(n) = 2n$

- **Inyectividad:**Una función es inyectiva si $f(n_1) = f(n_2)$ implica $n_1 = n_2$. Supongamos que $f(n_1) = f(n_2)$:

$$2n_1 = 2n_2 \implies n_1 = n_2$$

  Por lo tanto, f es inyectiva.
- **Suprayectividad:** Una función es suprayectiva si para todo $y \in \mathbb{N}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(n) = y$.
  El codominio es $\mathbb{N}$, pero la imagen de f es el conjunto de los números naturales pares $\{0, 2, 4, 6, \ldots\}$.
  Hay números naturales impares que no son imagen de ningún elemento de $\mathbb{N}$ bajo f.
  Por lo tanto, f no es suprayectiva.
- **Biyectividad:** Como f es inyectiva pero no suprayectiva, f no es biyectiva.

b) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad f(n) = n + 7$

- **Inyectividad:**
  Supongamos que $f(n_1) = f(n_2)$:

$$n_1 + 7 = n_2 + 7 \implies n_1 = n_2$$

  Por lo tanto, f es inyectiva.
- **Suprayectividad:**
  La imagen de f es $\{n + 7 \mid n \in \mathbb{N}\}$. El menor valor es $f(0) = 7$ (si consideramos $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$).
  Los números naturales menores que 7 no son imagen de ningún $n \in \mathbb{N}$.
  Por lo tanto, f no es suprayectiva.
- **Biyectividad:** Como f es inyectiva pero no suprayectiva, f no es biyectiva.

c) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad f(n) = n + 7$

- **Inyectividad:**
  Si $f(n_1) = f(n_2)$:

$$n_1 + 7 = n_2 + 7 \implies n_1 = n_2$$

  Por lo tanto, f es inyectiva.

- **Suprayectividad:**
  Para cualquier $y \in \mathbb{Z}$, podemos encontrar $n = y - 7 \in \mathbb{Z}$ tal que:

  $$f(n) = (y - 7) + 7 = y$$

  Por lo tanto, f es suprayectiva.
- **Biyectividad:** Como f es inyectiva y suprayectiva, f es biyectiva.

d) $f : A \to A/R, \quad f(a) = [a]_R$
Donde A es un conjunto y R es una relación de equivalencia sobre A.

- **Inyectividad:**
  La función f asigna a cada elemento $a \in A$ su clase de equivalencia $[a]_R$.
  Si $f(a_1) = f(a_2)$, entonces:

  $$[a_1]_R = [a_2]_R \implies a_1 \sim a_2$$

  Esto significa que a_1 y a_2 son equivalentes bajo R, pero no necesariamente iguales.
  Por lo tanto, f no es inyectiva a menos que R sea la relación de igualdad.
- **Suprayectividad:**
  Cada clase de equivalencia $[a]_R \in A/R$ tiene al menos un representante en A.
  Por definición, para cualquier $[a]_R \in A/R$, existe $a \in A$ tal que $f(a) = [a]_R$.
  Por lo tanto, f es suprayectiva.
- **Biyectividad:** Como f es suprayectiva pero no inyectiva, f no es biyectiva.

3. Sea $f : A \to B$ una función. Demuestra que:

   a) f es inyectiva si y sólo si $f^{-1}[f[X]] = X$, para todo $X \subseteq A$.
   b) f es inyectiva si y sólo si $f[X \cap Y] = f[X] \cap f[Y]$, para $X, Y \subseteq A$.
   c) f es suprayectiva si y sólo si $f[f^{-1}[Y]] = Y$, para todo $Y \subseteq B$.
   d) f es biyectiva si y sólo si $f[X^c] = (f[X])^c$, para todo $X \subseteq A$.

Solución:

a) f es inyectiva si y sólo si $f^{-1}[f[X]] = X$ para todo $X \subseteq A$.**
Demostración:
($\Rightarrow$) Si f es inyectiva, entonces $f^{-1}[f[X]] = X$ para todo $X \subseteq A$.
Sea $X \subseteq A$. Queremos demostrar que $f^{-1}[f[X]] = X$.
Primero, probamos que $X \subseteq f^{-1}[f[X]]$:
Esto es siempre cierto, independientemente de si f es inyectiva o no.
Sea $x \in X$. Entonces, $f(x) \in f[X]$.
Por definición de preimagen:

$$x \in f^{-1}[f[X]] \quad \text{porque} \quad f(x) \in f[X].$$

Por lo tanto, $x \in f^{-1}[f[X]]$, y así $X \subseteq f^{-1}[f[X]]$.
Ahora, probamos que $f^{-1}[f[X]] \subseteq X$:

Supongamos que $y \in f^{-1}[f[X]]$. Entonces, $f(y) \in f[X]$.

Esto significa que existe $x \in X$ tal que $f(y) = f(x)$.

Como f es inyectiva y $f(y) = f(x)$, entonces $y = x$.

Pero $x \in X$, por lo que $y \in X$.

Por lo tanto, $f^{-1}[f[X]] \subseteq X$.

Conclusión:

Combinando ambos resultados, obtenemos $f^{-1}[f[X]] = X$.

($\Leftarrow$) Si $f^{-1}[f[X]] = X$ para todo $X \subseteq A$, entonces f es inyectiva.

Supongamos que f no es inyectiva. Entonces, existen $a_1, a_2 \in A$ con $a_1 \neq a_2$ tales que $f(a_1) = f(a_2)$.

Sea $X = \{a_1\}$.

Entonces, $f[X] = \{f(a_1)\}$.

Ahora, calculemos $f^{-1}[f[X]]$:

$$f^{-1}[f[X]] = f^{-1}[\{f(a_1)\}] = \{x \in A \mid f(x) = f(a_1)\}.$$

Pero sabemos que tanto a_1 como a_2 están en $f^{-1}[f[X]]$ porque $f(a_1) = f(a_2)$.

Por lo tanto:

$$f^{-1}[f[X]] \supseteq \{a_1, a_2\}.$$

Pero $X = \{a_1\}$, entonces $f^{-1}[f[X]] \neq X$.

Esto contradice la suposición de que $f^{-1}[f[X]] = X$ para todo $X \subseteq A$.

Conclusión:

Por contraposición, si $f^{-1}[f[X]] = X$ para todo $X \subseteq A$, entonces f es inyectiva.

b) f es inyectiva si y sólo si $f[X \cap Y] = f[X] \cap f[Y]$ para todo $X, Y \subseteq A$.

($\Rightarrow$) Si f es inyectiva, entonces $f[X \cap Y] = f[X] \cap f[Y]$.

Prueba:

Primero, probamos que $f[X \cap Y] \subseteq f[X] \cap f[Y]$:

Sea $y \in f[X \cap Y]$. Entonces, existe $x \in X \cap Y$ tal que $y = f(x)$.

Como $x \in X$ y $x \in Y$, entonces $y \in f[X]$ y $y \in f[Y]$.

Por lo tanto, $y \in f[X] \cap f[Y]$.

Ahora, probamos que $f[X] \cap f[Y] \subseteq f[X \cap Y]$:

Sea $y \in f[X] \cap f[Y]$. Entonces, existe $x_1 \in X$ tal que $y = f(x_1)$ y existe $x_2 \in Y$ tal que $y = f(x_2)$.

Como f es inyectiva y $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $x_1 = x_2$.

Por lo tanto, $x_1 \in X \cap Y$, y así $y = f(x_1) \in f[X \cap Y]$.

Conclusión:

Por ambos resultados, $f[X \cap Y] = f[X] \cap f[Y]$.

($\Leftarrow$) Si $f[X \cap Y] = f[X] \cap f[Y]$ para todo $X, Y \subseteq A$, entonces f es inyectiva.

Prueba:

Supongamos que f no es inyectiva. Entonces, existen $a_1, a_2 \in A$ con $a_1 \neq a_2$ tales que $f(a_1) = f(a_2)$.

Sea $X = \{a_1\}$ y $Y = \{a_2\}$.

Entonces:

$X \cap Y = \emptyset$, por lo que $f[X \cap Y] = f[\emptyset] = \emptyset$.

$f[X] = \{f(a_1)\}$.

$f[Y] = \{f(a_2)\}$.

Como $f(a_1) = f(a_2)$, entonces $f[X] = f[Y] = \{f(a_1)\}$.

Por lo tanto, $f[X] \cap f[Y] = \{f(a_1)\}$.

Pero entonces:

$$f[X \cap Y] = \emptyset \neq \{f(a_1)\} = f[X] \cap f[Y].$$

Esto contradice la suposición de que $f[X \cap Y] = f[X] \cap f[Y]$.

Conclusión:

Por contraposición, si $f[X \cap Y] = f[X] \cap f[Y]$ para todo $X, Y \subseteq A$, entonces f es inyectiva.

c) f es suprayectiva si y sólo si $f[f^{-1}[Y]] = Y$ para todo $Y \subseteq B$.

Demostración:

($\Rightarrow$) Si f es suprayectiva, entonces $f[f^{-1}[Y]] = Y$ para todo $Y \subseteq B$.

Prueba:

Sea $Y \subseteq B$.

Primero, probamos que $f[f^{-1}[Y]] \subseteq Y$:

Sea $y \in f[f^{-1}[Y]]$. Entonces, existe $x \in f^{-1}[Y]$ tal que $y = f(x)$.

Por definición de $f^{-1}[Y]$, tenemos $f(x) \in Y$.

Entonces, $y = f(x) \in Y$.

Por lo tanto, $f[f^{-1}[Y]] \subseteq Y$.

Ahora, probamos que $Y \subseteq f[f^{-1}[Y]]$:

Sea $y \in Y$.

Como f es suprayectiva, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

Por lo tanto, $x \in f^{-1}[Y]$ porque $f(x) = y \in Y$.

Entonces, $y = f(x) \in f[f^{-1}[Y]]$.

Por lo tanto, $Y \subseteq f[f^{-1}[Y]]$.

Conclusión:

Combinando ambos resultados, $f[f^{-1}[Y]] = Y$.

($\Leftarrow$) Si $f[f^{-1}[Y]] = Y$ para todo $Y \subseteq B$, entonces f es suprayectiva.

Prueba:

Supongamos que f no es suprayectiva. Entonces, existe $b_0 \in B$ tal que no existe $a \in A$ con $f(a) = b_0$.

Sea $Y = \{b_0\}$.

Entonces, $f^{-1}[Y] = \emptyset$ porque no hay ningún $a \in A$ tal que $f(a) = b_0$.

Por lo tanto:

$$f[f^{-1}[Y]] = f[\emptyset] = \emptyset \neq Y = \{b_0\}.$$

Esto contradice la suposición de que $f[f^{-1}[Y]] = Y$ para todo $Y \subseteq B$.

Conclusión:

Por contraposición, si $f[f^{-1}[Y]] = Y$ para todo $Y \subseteq B$, entonces f es suprayectiva.

d) f es biyectiva si y sólo si $f[X^c] = (f[X])^c$ para todo $X \subseteq A$.

Demostración:

Primero, recordemos que:

$X^c = A \setminus X$, el complemento de X en A.

$(f[X])^c = B \setminus f[X]$, el complemento de $f[X]$ en B.

($\Rightarrow$) Si f es biyectiva, entonces $f[X^c] = (f[X])^c$ para todo $X \subseteq A$.

Prueba:

Sea $X \subseteq A$.

Primero, probamos que $f[X^c] \subseteq (f[X])^c$:

Sea $y \in f[X^c]$. Entonces, existe $x \in X^c$ tal que $y = f(x)$.

Si $y \in f[X]$, entonces existiría $x' \in X$ tal que $y = f(x')$.

Pero como f es inyectiva (por ser biyectiva), $x = x'$, lo cual es imposible porque $x \in X^c$ y $x' \in X$.

Por lo tanto, $y \notin f[X]$, y así $y \in (f[X])^c$.

Ahora, probamos que $(f[X])^c \subseteq f[X^c]$:

Sea $y \in (f[X])^c$. Entonces, $y \notin f[X]$.

Como f es sobreyectiva, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

Si $x \in X$, entonces $y = f(x) \in f[X]$, contradicción.

Por lo tanto, $x \in X^c$, y así $y = f(x) \in f[X^c]$.

Conclusión:

Por ambos resultados, $f[X^c] = (f[X])^c$.

($\Leftarrow$) Si $f[X^c] = (f[X])^c$ para todo $X \subseteq A$, entonces f es biyectiva.

Prueba de inyectividad:

Supongamos que f no es inyectiva. Entonces, existen $a_1, a_2 \in A$ con $a_1 \neq a_2$ y $f(a_1) = f(a_2) = y_0$.

Sea $X = \{a_1\}$.

Entonces:

$X^c = A \setminus \{a_1\}$.

$f[X] = \{f(a_1)\} = \{y_0\}$.

$f[X^c]$ contiene al menos $f(a_2) = y_0$ porque $a_2 \in X^c$.

Por lo tanto, $y_0 \in f[X^c]$.

Pero entonces:

$$y_0 \in f[X^c] \implies y_0 \in (f[X])^c \quad \text{(por la suposición).}$$

Sin embargo, $y_0 \in f[X]$, por lo que $y_0 \notin (f[X])^c$.

Esto es una contradicción.

Prueba de sobreyectividad:

Supongamos que f no es sobreyectiva. Entonces, existe $y_1 \in B$ tal que no existe $a \in A$ con $f(a) = y_1$.

Sea $X = A$.

Entonces:

$X^c = \emptyset$.

$f[X] = f[A] \subsetneq B$ (porque f no es sobreyectiva).

$f[X^c] = f[\emptyset] = \emptyset$.

$(f[X])^c = B \setminus f[A]$, que contiene al menos y_1.

Por lo tanto, $y_1 \in (f[X])^c$.

Pero $f[X^c] = \emptyset$, entonces $(f[X])^c \neq f[X^c]$, contradiciendo la suposición.

Conclusión:

Por contradicción, f debe ser inyectiva y sobreyectiva, es decir, biyectiva.

4. Responde las siguientes preguntas:

   a) ¿Existe $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ función tal que $g \neq \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$ y $g \circ g = g$?

   b) ¿Existe $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ función biyectiva tal que $g \neq \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$ y $g \circ g = g$?

   c) ¿Existe $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ función biyectiva tal que $g \neq \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$ y $g \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$?

Solución:

a) ¿Existe $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $g \neq \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$ y $g \circ g = g$?

Respuesta: Sí, existe tal función.

Explicación:

Una función que satisface $g \circ g = g$ se denomina idempotente. Queremos encontrar una función idempotente que no sea la identidad.

Ejemplo de función:

Definamos $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ como:

$$g(n) = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ es impar} \\ n, & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Verificación:

$g \neq \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$: Porque $g(n)$ cambia los números impares a 0, por lo que no es la función identidad.

Idempotencia ($g \circ g = g$):

Para todo $n \in \mathbb{N}$:

Si n es par:

$$g(g(n)) = g(n) = n$$

Si n es impar:

$$g(g(n)) = g(0) = g(0) = 0 = g(n)$$

En ambos casos, $g(g(n)) = g(n)$, por lo que $g \circ g = g$.

Conclusión: Existe al menos una función g que cumple las condiciones dadas.

b) ¿Existe $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ biyectiva tal que $g \neq \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$ y $g \circ g = g$?

Respuesta: No, no existe tal función.

Explicación:

Supongamos que existe una función biyectiva $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $g \circ g = g$ y $g \neq \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$.

Demostración por contradicción:

g es biyectiva, por lo que tiene una función inversa g^{-1}.

Dado que $g \circ g = g$, podemos aplicar g^{-1} a ambos lados:

$$g^{-1} \circ g \circ g = g^{-1} \circ g$$

Simplificando:

$$g \circ g^{-1} \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}} \circ g = g$$

Pero dado que $g^{-1} \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$, tenemos:

$$\mathrm{Id}_{\mathbb{N}} \circ g = g$$

Esto implica que $g = g$, lo cual es siempre cierto. Sin embargo, no hemos llegado a una contradicción aún.

Consideremos que g es idempotente y biyectiva. La única función biyectiva idempotente es la identidad. Esto se debe a que si g es idempotente ($g \circ g = g$) y biyectiva, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$g(n) = g(g(n))$$

Como g es inyectiva, esto implica que:

$$n = g(n)$$

Por lo tanto, g es la identidad, lo cual contradice $g \neq \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$.

Conclusión: No existe una función biyectiva g distinta de la identidad que sea idempotente.

c) ¿Existe $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ biyectiva tal que $g \neq \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$ y $g \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$?

Respuesta: Sí, existe tal función.

Explicación:

Una función que satisface $g \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$ se denomina involutiva. Queremos encontrar una función biyectiva involutiva que no sea la identidad.

Ejemplo de función:

Definamos $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ como sigue:

$$g(n) = \begin{cases} n+1, & \text{si } n \text{ es par} \\ n-1, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Verificación:

g es biyectiva:

Inyectividad: Supongamos que $g(n_1) = g(n_2)$. Entonces:

Si ambos n_1 y n_2 son pares:

$$n_1 + 1 = n_2 + 1 \implies n_1 = n_2$$

Si ambos son impares:

$$n_1 - 1 = n_2 - 1 \implies n_1 = n_2$$

Si uno es par y otro impar, sus imágenes serán distintas, pues uno será $n+1$ y otro $n-1$.

Sobreyectividad: Para cualquier $m \in \mathbb{N}$:

Si m es par, entonces $m = g(m-1)$ (porque $m-1$ es impar).

Si m es impar, entonces $m = g(m+1)$ (porque $m+1$ es par).

$g \neq \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$:

Porque, por ejemplo, $g(0) = 1 \neq 0$.

Involutividad ($g \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$):

Para todo $n \in \mathbb{N}$:

- Si n es par:
  $g(n) = n + 1$ (impar).
  $g(g(n)) = g(n + 1)$.
  Como $n + 1$ es impar, entonces:
  $$g(n + 1) = (n + 1) - 1 = n$$
- Si n es impar:
  $g(n) = n - 1$ (par).
  $g(g(n)) = g(n - 1)$.
  Como $n - 1$ es par, entonces:
  $$g(n - 1) = (n - 1) + 1 = n$$

En ambos casos, $g(g(n)) = n$, por lo que $g \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$.

Conclusión: Existe una función biyectiva g distinta de la identidad que es involutiva.

5. (Extra) Sea $f : A \to B$ una función. Definimos la asignación $F : B \to A$ con regla de correspondencia $F(Y) = f^{-1}[Y]$. Demuestra que:

   a) F es función.
   b) Si f es inyectiva, entonces F es suprayectiva.
   c) Si f es suprayectiva, entonces F es inyectiva.
   d) Si F es suprayectiva, entonces f es inyectiva.
   e) Si F es inyectiva, entonces F es suprayectiva.

Solución:

Sea $f : A \to B$ una función. Definimos la asignación $F : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$ con regla de correspondencia $F(Y) = f^{-1}[Y]$, donde $\mathcal{P}(B)$ es el conjunto de las partes de B.

a) F es función.

Demostración:

Para demostrar que F es una función de $\mathcal{P}(B)$ en $\mathcal{P}(A)$, debemos mostrar que para cada $Y \subseteq B$, existe un único $F(Y) \subseteq A$.

Por la definición de F, para cada $Y \subseteq B$, se asigna el conjunto $F(Y) = f^{-1}[Y]$, que es el conjunto de todos los elementos en A cuya imagen por f pertenece a Y:

$$f^{-1}[Y] = \{a \in A \mid f(a) \in Y\}.$$

Este conjunto está bien definido para cada $Y \subseteq B$. Por lo tanto, F es una función de $\mathcal{P}(B)$ en $\mathcal{P}(A)$.

b) 2. Si f es inyectiva, entonces F es sobreyectiva.

Demostración:

Supongamos que f es inyectiva. Queremos demostrar que F es sobreyectiva, es decir, que para todo $X \subseteq A$, existe $Y \subseteq B$ tal que $F(Y) = X$.

Sea $X \subseteq A$. Definamos $Y = f[X]$, es decir:

$$Y = \{f(a) \mid a \in X\}.$$

Ahora, calculemos $F(Y)$:

$$F(Y) = f^{-1}[Y] = \{a \in A \mid f(a) \in Y\}.$$

Pero como $Y = f[X]$, entonces $f(a) \in Y$ si y solo si $f(a) \in f[X]$. Dado que f es inyectiva, $f(a) \in f[X]$ si y solo si $a \in X$.

Por lo tanto:

$$F(Y) = \{a \in A \mid a \in X\} = X.$$

Así, para todo $X \subseteq A$, existe $Y = f[X] \subseteq B$ tal que $F(Y) = X$.

Conclusión: F es sobreyectiva.

c) Si f es suprayectiva, entonces F es inyectiva.

Demostración:

Supongamos que f es suprayectiva. Queremos demostrar que F es inyectiva, es decir, que si $F(Y_1) = F(Y_2)$ entonces $Y_1 = Y_2$.

Sea $Y_1, Y_2 \subseteq B$ tales que $F(Y_1) = F(Y_2)$. Entonces:

$$f^{-1}[Y_1] = f^{-1}[Y_2].$$

Queremos demostrar que $Y_1 = Y_2$.

Dado que f es suprayectiva, para todo $y \in B$ existe $a \in A$ tal que $f(a) = y$.

Ahora, tomemos $y \in Y_1$. Como f es suprayectiva, existe $a \in A$ tal que $f(a) = y$. Entonces, $a \in f^{-1}[Y_1]$.

Pero $f^{-1}[Y_1] = f^{-1}[Y_2]$, por lo que $a \in f^{-1}[Y_2]$, lo que implica que $f(a) \in Y_2$. Por lo tanto, $y \in Y_2$.

De manera similar, si $y \in Y_2$, entonces $y \in Y_1$.

Por lo tanto, $Y_1 = Y_2$.

Conclusión: F es inyectiva.

d) Si F es sobreyectiva, entonces f es inyectiva.

Demostración:

Supongamos que F es sobreyectiva y que f no es inyectiva. Buscaremos una contradicción.

Como f no es inyectiva, existen $a_1, a_2 \in A$ con $a_1 \neq a_2$ tales que $f(a_1) = f(a_2) = b$.

Consideremos el conjunto $X = \{a_1\} \subseteq A$. Como F es sobreyectiva, existe $Y \subseteq B$ tal que $F(Y) = X$.

Entonces, $F(Y) = f^{-1}[Y] = \{a \in A \mid f(a) \in Y\} = \{a_1\}$.

Pero sabemos que $f(a_1) = b$, por lo que $a_1 \in f^{-1}[Y]$ implica que $b = f(a_1) \in Y$.

Del mismo modo, como $f(a_2) = b$ y $b \in Y$, entonces $a_2 \in f^{-1}[Y]$.

Esto significa que $a_2 \in F(Y) = \{a_1\}$, lo cual es una contradicción, ya que $a_2 \neq a_1$.

Conclusión: Nuestra suposición de que f no es inyectiva conduce a una contradicción. Por lo tanto, si F es sobreyectiva, entonces f es inyectiva.

e) Si F es inyectiva, entonces F es sobreyectiva.

Demostración:

Supongamos que F es inyectiva. Queremos demostrar que F es sobreyectiva, es decir, que para todo $X \subseteq A$, existe $Y \subseteq B$ tal que $F(Y) = X$.

Sin embargo, en general, la inyectividad de F no implica que F sea sobreyectiva. Veamos un contraejemplo.

Contraejemplo:

Consideremos los conjuntos $A = \{1\}$ y $B = \{a, b\}$. Definamos $f : A \to B$ como $f(1) = a$.

La función f es inyectiva (ya que A tiene un solo elemento), pero no es suprayectiva (ya que $b \notin f(A)$).

Ahora, definamos $F : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$:

$F(\emptyset) = f^{-1}[\emptyset] = \emptyset$.

$F(\{a\}) = f^{-1}[\{a\}] = \{1\}$.

$F(\{b\}) = f^{-1}[\{b\}] = \emptyset$.

$F(\{a, b\}) = f^{-1}[\{a, b\}] = \{1\}$.

Observamos que $F(\{a\}) = F(\{a, b\}) = \{1\}$. Sin embargo, $\{a\} \neq \{a, b\}$, lo que indica que F no es inyectiva, contradiciendo nuestra suposición.

Pero este contraejemplo muestra que la inyectividad de F no garantiza su sobreyectividad. De hecho, en este ejemplo, F no es sobreyectiva (ya que no alcanza ciertos subconjuntos de $\mathcal{P}(A)$).

Conclusión:

La inyectividad de F no implica que F sea sobreyectiva. Por lo tanto, el enunciado es falso en general.