Explorando los límites del universo: El algoritmo CHIRP

Álvaro Rodríguez Gallardo

Universidad de Granada

Miércoles, 24 de enero del 2024

Contents

Conceptos clave

- **Astrofísica**: Rama de la astronomía que se encarga de entender el funcionamiento del Universo mediante leyes físicas y químicas.
- **Bispectro**: Transformada de Fourier de tercer momento. Si $f_1 + f_2 + f_3 = 0$, entonces el bispectro de las señales f_1, f_2 es el valor esperado en el producto de la transformada en las tres frecuencias.
- **Interferometría de línea de base muy larga (VLBI)**: Técnica usada en astrofísica para obtener imágenes del Universo. Símil al "Divide y Vencerás".
- **EHT**: Event Horizon Telescope. Proyecto a futuro para la observación del horizonte de sucesos de agujeros negros.
- **SKAO**: Square Kilometer Array Observatory. De propósito más general, pero con filosofía parecida.

Conceptos clave

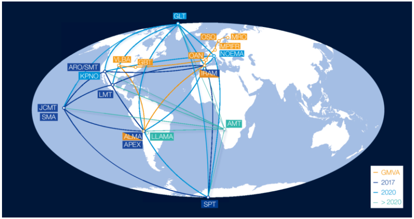


Figure: Ejemplo VLBI

$$\theta = 1.22\frac{\lambda}{D}$$

Figure: Fórmula de Rayleigh

¿Por qué más algoritmos?

- **PROBLEMA**: Como la relación es inversa entre la resolución angular de la imagen y diámetro de los telescopios, entonces...

¿Por qué más algoritmos?

- **PROBLEMA**: Como la relación es inversa entre la resolución angular de la imagen y diámetro de los telescopios, entonces...
  - Mejor resolución (menor resolución angular) implica mayor diámetro del telescopio.

¿Por qué más algoritmos?

- **PROBLEMA**: Como la relación es inversa entre la resolución angular de la imagen y diámetro de los telescopios, entonces...
  - Mejor resolución (menor resolución angular) implica mayor diámetro del telescopio.
  - **Voy a aumentar el diámetro del telescopio**: ¡Caro e inviable! Si quisiésemos captar el agujero negro central de la Vía Láctea, que emite una radiación de 2.5x10^{-10} radianes, con una resolución angular de 10^{-10} radianes y longitud de onda 1.3mm, ¡telescopios con diámetro de 13000km!

¿Por qué más algoritmos?

- **PROBLEMA**: Como la relación es inversa entre la resolución angular de la imagen y diámetro de los telescopios, entonces...
  - Mejor resolución (menor resolución angular) implica mayor diámetro del telescopio.
  - **Voy a aumentar el diámetro del telescopio**: ¡Caro e inviable! Si quisiésemos captar el agujero negro central de la Vía Láctea, que emite una radiación de 2.5x10^{-10} radianes, con una resolución angular de 10^{-10} radianes y longitud de onda 1.3mm, ¡telescopios con diámetro de 13000km!
  - **Voy a aumentar la distancia entre telescopios**: Costoso (movemos los telescopios se queremos cambiar la resolución) e imposible (en un momento dado, estarán en polos opuestos en el planeta, la Tierra es finita).

¿Por qué más algoritmos?

- **Solución**: ¡Vamos a diseñar algoritmos robustos!
  - CLEAN. Suponemos la imagen calibrada y con fuentes brillantes. **¿Los agujeros negros tienen puntos brillantes?**
  - BSMEM. Suponemos entropía máxima. **¿La nebulosa de Orión tiene un patrón simple?**
  - SQUEEZE. Estudio muy complejo de parámetros. **¿Merece la pena?**

Algoritmo CHIRP

- Propuesto por Bouman et. al.
- **Algoritmo iterativo**. A partir de X_p obtiene X_{p+1}.
- Hipótesis "Hacer **muchas** suposiciones sobre pocos datos" está mal planteada.
- Problema de optimización implícito: A partir de una primera aproximación X_0 busca mejores aproximaciones en cada iteración, que expliquen lo mejor posible las observaciones.

- Considérese que queremos reconstruir la imagen $X_{p+1} = I_\lambda(l, m)$, con $l \in \left[-\frac{F_l}{2}, \frac{F_l}{2}\right]$ y $m \in \left[-\frac{F_m}{2}, \frac{F_m}{2}\right]$, a partir de la imagen X_p.

Algoritmo CHIRP. Aproximaciones

- Considérese que queremos reconstruir la imagen $X_{p+1} = I_\lambda(l, m)$, con $l \in \left[-\frac{F_l}{2}, \frac{F_l}{2}\right]$ y $m \in \left[-\frac{F_m}{2}, \frac{F_m}{2}\right]$, a partir de la imagen X_p.
- La imagen es la transformada inversa de las visibilidades (cómo la luz de distintas partes interfieren entre sí al llegar al telescopio) o del bispectro observado.

Algoritmo CHIRP. Aproximaciones

- Considérese que queremos reconstruir la imagen $X_{p+1} = I_\lambda(l, m)$, con $l \in \left[-\frac{F_l}{2}, \frac{F_l}{2}\right]$ y $m \in \left[-\frac{F_m}{2}, \frac{F_m}{2}\right]$, a partir de la imagen X_p.
- La imagen es la transformada inversa de las visibilidades (cómo la luz de distintas partes interfieren entre sí al llegar al telescopio) o del bispectro observado.
- **Aproximación discreta sin suponer fuentes puntuales discretas**. Vamos a usar funciones pulso, N_l en el sentido de l y N_m en el de m:

Algoritmo CHIRP. Aproximaciones

- Considérese que queremos reconstruir la imagen $X_{p+1} = I_\lambda(l, m)$, con $l \in \left[-\frac{F_l}{2}, \frac{F_l}{2}\right]$ y $m \in \left[-\frac{F_m}{2}, \frac{F_m}{2}\right]$, a partir de la imagen X_p.
- La imagen es la transformada inversa de las visibilidades (cómo la luz de distintas partes interfieren entre sí al llegar al telescopio) o del bispectro observado.
- **Aproximación discreta sin suponer fuentes puntuales discretas**. Vamos a usar funciones pulso, N_l en el sentido de l y N_m en el de m:
  - $l = i\Delta_l + \frac{\Delta_l}{2} - \frac{F_l}{2}$ con $i = 0, \ldots, N_l - 1$ y $\Delta_l = \frac{F_l}{N_l}$
  - $m = i\Delta_m + \frac{\Delta_m}{2} - \frac{F_m}{2}$ con $i = 0, \ldots, N_m - 1$ y $\Delta_m = \frac{F_m}{N_m}$
- **Teorema de desplazamiento + Teorema de Cittert-Zernike**. Tras discretizar la tranformada de Fourier, llamemos $H(u, v)$, escalando con $X_p[i, j]$, que es la imagen propuesta, seguimos en el intervalo de frecuencias en que se trabaja.

Algoritmo CHIRP. Aproximaciones

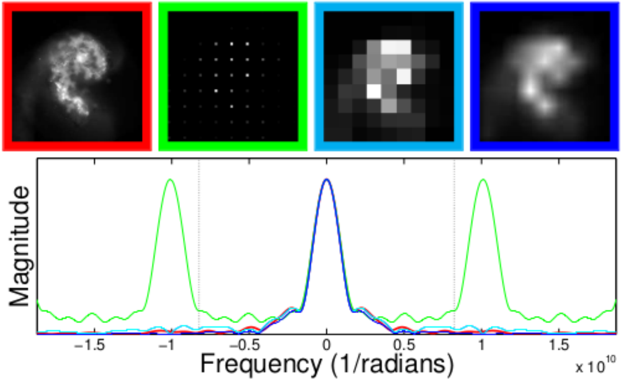


Figure: Comparación de métodos de discretizar imágenes

Algoritmo CHIRP. Función a optimizar

- Vamos a reconstruir la imagen con un enfoque estadístico.
- Sea X la imagen propuesta, x un coeficiente suyo e $\{y_k\}_{k=1,\ldots M}$ una muestra (mediciones del bispectro).
- Se divide la imagen en parches para cada coeficiente x, denotado $P_k \cdot x$ el parche k-ésimo de la imagen según el coeficiente x

Algoritmo CHIRP. Función a optimizar

- **Eliminando ruido**.
  - **¡Fundamental!** Discrepancia entre la medición real y la ideal del bispectro.
  - Si y_k es una medición real con ruido, y la ideal extraida de la parametrización anterior, $\xi_k(x)$, podemos inferir la diferencia entre ellos como $\xi_k(x) - y_k$. Como son números complejos, separamos en su parte real e imaginaria.
  - Generalizando a M observaciones del bispectro, se define la relación entre la imagen ideal y la ruidosa como

$$-D(y|x) = \gamma \sum_{k=1}^{M} \left[\frac{\alpha_k}{2} \left(\begin{pmatrix} \xi_k^{\mathcal{R}}(x) - y_k^{\mathcal{R}} \\ \xi_k^{\mathcal{S}}(x) - y_k^{\mathcal{S}} \end{pmatrix}^T \Sigma_k^{-1} \begin{pmatrix} \xi_k^{\mathcal{R}}(x) - y_k^{\mathcal{R}} \\ \xi_k^{\mathcal{S}}(x) - y_k^{\mathcal{S}} \end{pmatrix} \right) \right]$$

$$\alpha_k = \frac{3}{T_k} \text{ con } k = 1, ..., M$$

Algoritmo CHIRP. Función a optimizar

- **Eliminando ruido**.
- **Buscar la imagen más plausible**
  - Uso de un reguralizador. **Queremos imágenes coherentes**.
  - Nos basamos en 'priors patches'. Todas las imágenes comparten ciertas caracteristicas estadísticas localmente.
  - Dados N parches, expresamos

$$EPLL_r(x) = \sum_{k=1}^{N} \log p(P_k \cdot x).$$

Algoritmo CHIRP. Función a optimizar

- Nos queda la expresión

$$f_r(x|y) = -D(y|x) - EPLL_r(x)$$

Algoritmo CHIRP. Función a optimizar

- Nos queda la expresión

$$f_r(x|y) = -D(y|x) - EPLL_r(x)$$

- **¡Vamos a buscar el valor de x que más se ajusta a las observaciones y!**

Algoritmo CHIRP. Pseudocódigo

- $P_k \cdot x$ es un parche superpuesto. Para cada uno, tomemos N parches auxiliares de forma iterativa, llamemos $\{z_k\}_{k=1,\ldots N}$.
- Se obtiene un polinomio a partir de $\{z_k\}_{k=1,\ldots N}$.
  - **Si usamos visibilidades**: Polinomio de grado 2.
  - **Si usamos bispectro**: Polinomio de grado 6.
- Sea β un parámetro de ponderación y X_0 primera aproximación.
- **Criterio de parada**: Número de iteraciones (según β, estabilidad,...).

Algoritmo CHIRP. Pseudocódigo

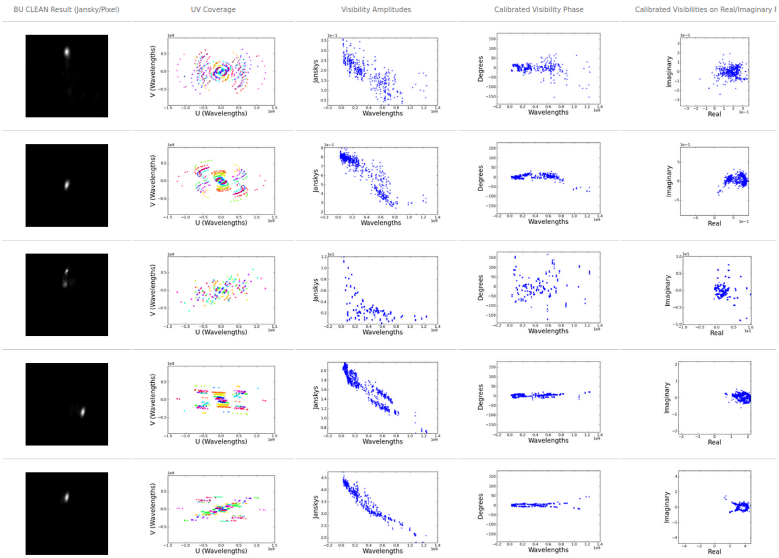
Algorithm 1 Algoritmo CHIRP con Patch Priors

Inicializar:
Establecer imagen inicial X_0
Definir patch_priors
Establecer parámetros para la función de costo y el proceso de optimización
Fijar criterios de convergencia
Proceso Iterativo:
for $p = 0, 1, 2, \ldots$ hasta CriterioParada **do**
    Calcular la Transformada de Fourier de X_p
    Comparar con los datos de visibilidad de VLBI
    Optimizar para obtener X_{p+1} basándose en patch_priors y X_p
    Verificar criterios de convergencia
end for
return X_{p+1}

Dataset

- VLBI Reconstruction Dataset.
- CHIRP da por ahora mejores resultados.
- Gran conjunto de imágenes, clasificadas en:
  - **Reales**: Imágenes reales de cuerpos ya captados y reconstruidos.
  - **Artificales**: Simulaciones de qué podría captar el EHT a partir de datos VLBI.
- Actualmente, por desarrollos posteriores a CHIRP, separación en **entrenamiento** y **tests**.

Dataset


BU CLEAN Result (Jansky/Pixel)
UV Coverage
Visibility Amplitudes
Calibrated Visibility Phase
Calibrated Visibilities on Real/Imaginary
V (Wavelengths)
U (Wavelengths)
Janskys
Wavelengths
Degrees
Imaginary
Real

Resultados

- Arroja buenos resultados: Más cerca de parecerse a las imágenes de prueba.

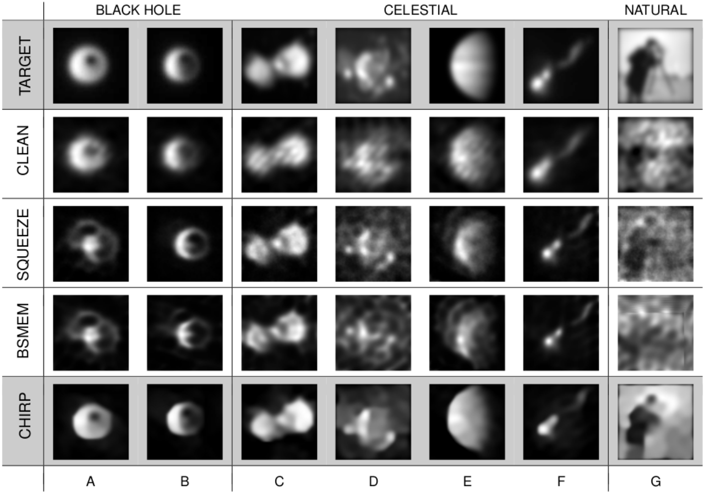
Resultados

- Arroja buenos resultados: Más cerca de parecerse a las imágenes de prueba.
- Para tareas de observación celestial, rivaliza con CLEAN.

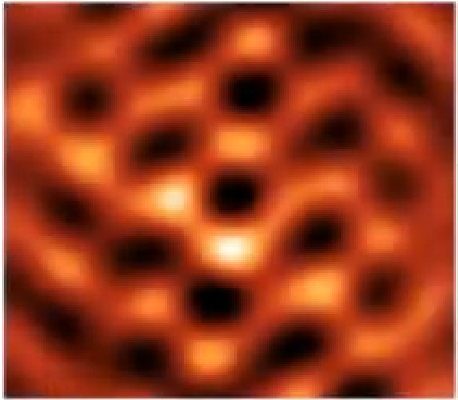
Resultados

- Arroja buenos resultados: Más cerca de parecerse a las imágenes de prueba.
- Para tareas de observación celestial, rivaliza con CLEAN.
  - **¡Pero CLEAN necesita datos calibrados!**.

Resultados


BLACK HOLE
CELESTIAL
NATURAL
TARGET
CLEAN
SQUEEZE
BSMEM
CHIRP
A
B
C
D
E
F
G

Resultados



X_0

Imagen Reconstruida

Conclusión

- CHIRP es un algoritmo bastante genérico, construido en el contexto de detección de agujeros negros.
- Hace el menor número de suposiciones posible, únicamente a partir de observaciones.
- Mejora respecto métodos anteriores.
- Colaboración con la Visión por Computador:
  - Mejora del algoritmo CHIRP.
  - Creación de otros algoritmos de reconstrucción.
  - Extracción de características. Algoritmos REx, VIDA,...

Referencias

- Extreme Imaging via Physical Model Inversion: Seeing Around Corners and Imaging Black Holes, by Katherine L. Bouman.
- Computational Imaging for VLBI Image Reconstruction, by Katherine L. Bouman, Michael D. Johnson, Daniel Zoran, Vincent L. Fish, Sheperd S. Doeleman, William T. Freeman.
- VLBI Reconstruction Dataset.
- A Year Beyond the Horizon: Advancing Our Understanding of M87* with New EHT Observations, by IAA-CSIC EHT group.