

1 Electrostática

Para empezar, se considerará el caso especial de la **electrostática** donde las fuentes de carga son estáticas. Sin embargo, las cargas de prueba pueden estar en movimiento.

1.1 Ley de Coulomb

La fuerza ejercida sobre una carga de prueba q debido a una carga puntual q' , que se encuentran a una distancia $r_{q'q}$ está dada por la **ley de Coulomb**:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'q}{r_{q'q}^2} \hat{r}_{q'q} = \frac{q'q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

La constante ϵ_0 es llamada **permitividad del vacío**. Sus unidades en el SI es

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} C^2 N^{-1} m^{-2}$$

La fuerza es proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa. $\vec{r}_{q'q} = \vec{r} - \vec{r}'$ es el vector separación entre las dos cargas cuyos vectores de posición son \vec{r} (localización de q) y \vec{r}' (localización de q'). $r_{q'q} = |\vec{r} - \vec{r}'|$ es la magnitud y $\hat{r}_{q'q} = \vec{r}_{q'q}/r_{q'q} = (\vec{r} - \vec{r}')/|\vec{r} - \vec{r}'|$ es la dirección, la cual se dirige desde la carga puntual q' a la carga de prueba q ; esta es repulsiva si q' y q tienen el mismo signo y atractiva si sus signos son opuestos.

1.2 El campo eléctrico

Si tenemos un conjunto de cargas puntuales q'_1, q'_2, \dots, q'_n que se encuentran a una distancia $r_{1q}, r_{2q}, \dots, r_{nq}$ de q , la fuerza total se halla por el principio de superposición

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(q'_1 q \frac{(\vec{r}_q - \vec{r}'_1)}{|\vec{r}_q - \vec{r}'_1|^3} + q'_2 q \frac{(\vec{r}_q - \vec{r}'_2)}{|\vec{r}_q - \vec{r}'_2|^3} + \dots \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(q'_1 \frac{(\vec{r}_q - \vec{r}'_1)}{|\vec{r}_q - \vec{r}'_1|^3} + q'_2 \frac{(\vec{r}_q - \vec{r}'_2)}{|\vec{r}_q - \vec{r}'_2|^3} + \dots \right)$$

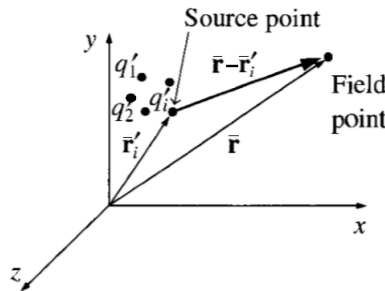
o

$$\vec{F} = q\vec{E} \quad (1.1)$$

donde

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q'_i \frac{(\vec{r} - \vec{r}'_i)}{|\vec{r} - \vec{r}'_i|^3} \quad (1.2)$$

\vec{E} es llamado **campo eléctrico** de las fuentes de carga. Como la carga fuente es estática, lo único que varía es la posición donde se mide el campo, es decir, el campo eléctrico es función de \vec{r} . El campo eléctrico está representado por un vector que varía en cada punto del espacio (se trata de un campo vectorial) y está determinado por la configuración de la fuente de cargas. Físicamente, $\vec{E}(\vec{r})$ es la fuerza por unidad de carga que se ejerce sobre una carga de prueba si se situase en el punto \vec{r} .



1.3 Distribuciones continuas de carga

Si la fuente del campo eléctrico es una distribución continua de cargas, la sumatoria se convierte en una integral

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dq' \quad (1.3)$$

Si la carga está extendida a lo largo de una línea, con densidad lineal de carga λ , entonces $dq' = \lambda dl'$; si la carga está distribuida sobre una superficie, con densidad superficial de carga σ , entonces $dq' = \sigma da'$; si la carga rellena un volumen, con densidad volumétrica de carga ρ , entonces $dq' = \rho d\tau'$:

$$dq' \longrightarrow \lambda dl' \sim \sigma da' \sim \rho d\tau'$$

Entonces, el campo eléctrico sobre una carga lineal es

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dl' \quad (1.4)$$

para una carga superficial,

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} da' \quad (1.5)$$

y para una carga volumétrica,

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\tau' \quad (1.6)$$

La ecuación (1.6) se suele llamar **ley de coulomb** porque una carga volumétrica es el caso más general de distribución de carga. $(\vec{r} - \vec{r}')$ es el vector que va desde dq' hasta el punto del campo \vec{r} .

2 Divergencia y rotacional del campo electrostático

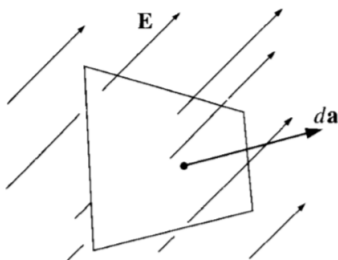
2.1 Líneas de campo, flujo y ley de Gauss

La magnitud del campo en una región del espacio está determinada por la densidad de líneas de campo. En el caso de una carga aislada, es más fuerte cerca del centro, donde las líneas del campo están más cerca, y más débil cuanto más lejos estén del centro.

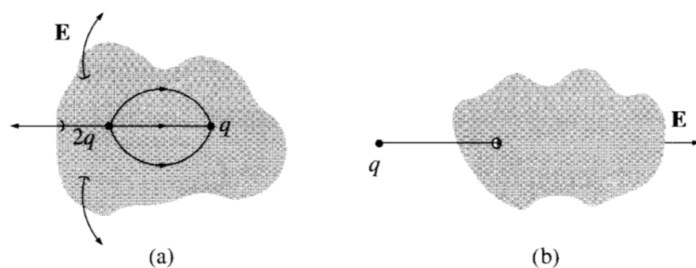
Las líneas de campo nacen en las cargas positivas y mueren en las negativas. Estas no finalizan en medio del aire, sino que se extienden al infinito. Además, las líneas nunca se cruzan. En una intersección, el campo tendría dos direcciones diferentes a la vez, lo cual carece de sentido. El **flujo de \vec{E}** a través de la superficie S se calcula mediante la integral

$$\Phi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{a} \quad (2.1)$$

que se define como la medida del número de líneas de campo que atraviesan la superficie S . Esto es así porque la intensidad del campo es proporcional a la densidad de líneas de campo (numero de líneas por unidad de área), y por lo tanto, $\vec{E} \cdot d\vec{a}$ es proporcional al numero de líneas que pasan a través de un elemento infinitesimal de área $d\vec{a}$. El producto punto hace que se tome la componente de \vec{E} en dirección perpendicular a la superficie.



Si una superficie encierra una distribución de carga que genera un campo, las líneas de campo que salen de las cargas positivas deberán atravesar la superficie cerrada o extinguirse en una carga negativa dentro de la superficie. Una carga fuera de dicha superficie no contribuirá en la integral de flujo, dado que sus líneas de campo entran por un lado y salen por el otro.



En el caso de una carga puntual q en el origen, el flujo de \vec{E} a través de una superficie esférica de radio r es

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r^2} \hat{r} \right) \cdot (r^2 \sin\theta d\theta d\phi \hat{r}) = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (2.2)$$

Date cuenta de que el radio de la esfera se cancela, porque mientras el área de la superficie aumenta en r^2 , el campo disminuye en $1/r^2$, así el producto es constante. No tiene por qué ser una esfera, cualquier superficie cerrada, sin importar su tamaño, sería atravesada por el mismo numero de líneas de campo. **El flujo a través de cualquier superficie que encierra una carga es q/ϵ_0 .**

Ahora suponga que en lugar de una simple carga en el origen, tenemos un conjunto de cargas. Según el principio de superposición, el campo total es la suma de todos los campos individuales:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i$$

El flujo a través de la superficie que las encierra a todas es

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \sum_{i=1}^n \left(\oint \vec{E}_i \cdot d\vec{a} \right) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{q_i}{\varepsilon_0} \right)$$

Entonces, para cualquier superficie cerrada

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \quad (2.3)$$

donde Q_{enc} es la carga total encerrada por la superficie. Esta es la llamada **ley integral de Gauss**. Como el campo electrostático depende de $1/r^2$ en la ecuación (2.2) se cancelan las r 's, lo que hace que el flujo total de \vec{E} no dependa de la superficie escogida y lo haga únicamente de la carga total encerrada. Podemos transformar (2.3) en su forma diferencial aplicando el teorema de la divergencia:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \int_V (\nabla \cdot \vec{E}) d\tau = \int_V \left(\frac{\rho}{\varepsilon_0} \right) d\tau$$

donde se ha reescrito Q_{enc} en términos de densidad de carga

$$Q_{enc} = \int_V \rho d\tau$$

Para cualquier volumen, los integrandos deberán ser iguales

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (2.4)$$

Esta es la **ley diferencial de Gauss**.

2.2 Divergencia de \vec{E}

Calculemos directamente la divergencia de la ecuación (1.6)

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{allspace} \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\tau'$$

Se ha extendido la integración a todo el espacio. De todas formas $\rho = 0$ en el exterior de la región. Hacemos la divergencia con respecto a las coordenadas de \vec{r} .

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \nabla \cdot \left(\frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) \rho(\vec{r}') d\tau'$$

cuya divergencia es

$$\nabla \cdot \left(\frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) = 4\pi\delta^3(\vec{r} - \vec{r}')$$

De este modo

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int 4\pi\delta^3(\vec{r} - \vec{r}')\rho(\vec{r}') d\tau' = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} \\ \nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Si integramos ambos lados sobre un volumen

$$\int_V \nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) d\tau = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho d\tau$$

aplicando el teorema de la divergencia volvemos a obtener la ley de Gauss

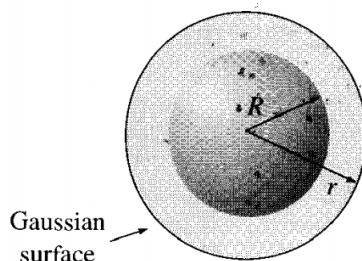
$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \quad (2.6)$$

2.3 Aplicaciones de la ley de Gauss

Esta sección tratará de mostrar el poder de la forma integral de la ley de Gauss. Cuando la simetría lo permite, se podrá calcular campos eléctricos de la forma más rápida y sencilla. Se va a ilustrar el método a través de ejemplos:

Ejemplo 1: Halla el campo en el exterior de una esfera sólida de radio R y carga total q

Dibuja una esfera imaginaria de radio $r > R$; esta es denominada **superficie gaussiana**.



La ley de Gauss dice que para una superficie cerrada

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

La simetría del problema nos permite extraer \vec{E} de la integral; esto es posible porque tiene el mismo módulo sobre toda la superficie esférica. Además, como \vec{E} apunta de forma radial hacia fuera de la superficie esférica, al igual que lo hace $d\vec{a}$, podemos droppear el producto punto,

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \int_S E da = E \int_S da = E 4\pi r^2$$

Entonces,

$$E 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

o, despejando y añadiendo la dirección radial del campo

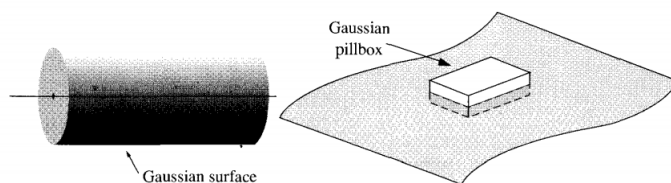
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

El campo fuera de una esfera es exactamente la misma que si tuviéramos toda la carga concentrada en el centro como si fuera una única partícula de carga q .

La ley de Gauss no siempre es útil. Si ρ no es uniforme esféricamente o si se ha escogido una superficie gaussiana con cualquier otra forma, seguirá siendo cierto que el flujo de \vec{E} es $(q\epsilon_0)$, pero no estaremos seguros de que \vec{E} tiene la misma dirección que $d\vec{a}$ ni que sea constante en magnitud sobre toda la superficie, no pudiendo extraer el módulo de \vec{E} de la integral. La simetría es crucial para la aplicación de la ley de Gauss. Existen tres simetrías que funcionan:

- Simetría esférica: Emplear una esfera concéntrica como superficie gaussiana.
- Simetría cilíndrica: Emplear un cilindro coaxial como superficie gaussiana.
- Simetría plana: Emplear una pillbox como superficie gaussiana

La 2 y la 3 técnicamente requieren de un cilindro de longitud infinita y de un plano extendido por todo el espacio en todas direcciones. Solemos emplearlos para obtener resultados aproximados de grandes superficies cilíndricas y planas.



2.4 Rotacional de E

Sea el campo electrostático generado por una carga puntual en el origen

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

Si calculamos la integral de línea de este campo desde un punto cualquiera a hasta otro punto b, en coordenadas esféricas:

Nota: En coordenadas esféricas $d\vec{l} = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin\theta d\phi \hat{\phi}$

$$\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{q}{r^2} dr = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \Big|_{r_a}^{r_b} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_a} - \frac{q}{r_b} \right)$$

donde r_a es la distancia del origen hasta el punto a y r_b es la distancia hasta b. La integral alrededor de una trayectoria cerrada es cero ($r_a = r_b$):

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (2.7)$$

aplicando el teorema de Stokes

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (2.8)$$

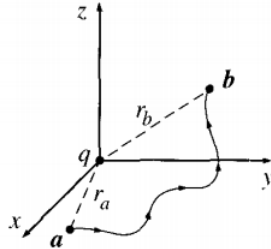
Si hay varias cargas, el principio de superposición afirma que el campo total vector es suma de los campos individuales:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots$$

entonces

$$\nabla \times \vec{E} = \nabla \times (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots) = (\nabla \times \vec{E}_1) + (\nabla \times \vec{E}_2) + \dots = 0$$

Por lo que las ecuaciones 2.7 y 2.8 son válidas para cualquier distribución de carga estática.



3 Potencial eléctrico en electrostática

3.1 Introducción al potencial

El campo electrostático es un tipo especial de función vectorial, una cuyo rotacional es cero. Cualquier vector cuyo rotacional es cero puede expresarse como el gradiente de una función escalar. Como $\nabla \times \vec{E} = 0$, la integral de línea de \vec{E} sobre cualquier camino cerrado es cero (Teorema de Stokes). Porque $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$, la integral de línea de \vec{E} del punto a al punto b es el mismo por cualquier camino. Como la integral de línea es independiente del camino podemos definir una función

$$V(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (3.1)$$

donde r_0 es algún punto de referencia estándar elegido de antemano. V depende únicamente del punto \vec{r} . Este campo escalar es llamado **potencial eléctrico**. La **diferencia de potencial** entre dos puntos \vec{a} y \vec{b} es

$$\Delta V = V(\vec{b}) - V(\vec{a}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{b}} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{a}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{b}} \vec{E} \cdot d\vec{l} - \int_{\vec{a}}^{\vec{r}_0} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (3.2)$$

Un teorema fundamental del gradiente afirma que

$$\nabla V \cdot d\vec{l} = dV \quad \text{por lo que} \quad \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} (\nabla V) \cdot d\vec{l} = V(\vec{b}) - V(\vec{a})$$

entonces

$$\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} (\nabla V) \cdot d\vec{l} = - \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

que es cierto para cualquier punto \vec{a} y \vec{b} . Para que esto se cumpla los integrandos deben ser iguales

$$\vec{E} = -\nabla V \quad (3.3)$$

Esto significa que el campo eléctrico es el gradiente del potencial escalar. Si la integral de línea dependiera del camino escogido, entonces la definición de V no tendría sentido. En este caso, V no definiría una función, ya que al cambiar la trayectoria se alteraría el valor de $V(\vec{r})$.

3.2 Comentarios del Potencial

Ventajas de la formulación potencial. Conociendo V puedes hallar fácilmente \vec{E} aplicando el gradiente de V. ¿Cómo es posible que siendo \vec{E} un vector de tres componentes, pero que V sea un escalar y que esta única función contenga toda la información que recoge tres funciones independientes? En realidad las tres componentes de \vec{E} no son tan independientes como parecen. De hecho, están explícitamente relacionadas mediante la condición $\nabla \times \vec{E} = 0$. En términos de componentes,

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

El punto de referencia \vec{r}_0 . Hay una ambigüedad en la definición de potencial dado que la elección del punto de referencia es arbitrario. Cambiar este punto equivale a sumar una constante K al potencial

$$V'(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}'_0}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{\vec{r}'_0}^{\vec{r}_0} \vec{E} \cdot d\vec{l} - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = K + V(\vec{r})$$

donde K es la integral de línea de \vec{E} del viejo punto de referencia \vec{r}_0 hasta el nuevo \vec{r}'_0 . Agregar una constante a V no afecta a la diferencia de potencial entre dos puntos:

$$V'(\vec{b}) - V'(\vec{a}) = V(\vec{b}) - V(\vec{a})$$

ya que las k's se cancelan. Tampoco afecta al gradiente de V:

$$\nabla V' = \nabla V$$

ya que la derivada de una constante es cero. Por lo que el conjunto de funciones potenciales que difieren solo del punto de referencia, es decir, de una constante K, corresponden al mismo campo \vec{E} . El potencial no tiene un significado físico real debido a que para cualquier punto podemos ajustar su valor mediante una apropiada

relocalización de \vec{r}_0 . La única cantidad interesante es la diferencia de potencial entre dos puntos cualesquiera, que es la misma independientemente del punto de referencia escogido.

Hay un lugar donde es natural situar a \vec{r}_0 en electrostática y este es un punto infinitamente alejado de la carga. De forma ordinaria, situamos el potencial igual a cero en el infinito. $V(\vec{r}_0) = 0$ donde $\vec{r}_0 = \infty$. Existe una circunstancia especial donde esta elección falla: cuando la distribución de carga se extiende hasta el infinito. En este caso, con esta elección, el potencial explota. Por ejemplo, el campo de un plano uniformemente cargado es $(\sigma/2\epsilon_0)\hat{n}$. Si colocamos $\vec{r}_0 = \infty$, entonces el potencial a una distancia de z diverge

$$V(z) = -\frac{1}{2\epsilon_0}\sigma(z - \infty)$$

esto se resuelve escogiendo otro punto de referencia.

El potencial obedece el principio de superposición. Este principio dice que la fuerza total sobre Q es el vector suma de las fuerzas de las fuentes de cargas individuales:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots$$

Dividiendo por Q vemos que el campo eléctrico también obedece el principio de superposición:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots$$

Si integramos desde el punto de referencia común \vec{r}_0 vemos que el potencial también obedece este principio:

$$V = V_1 + V_2 + \dots$$

El potencial en cualquier punto es la suma de los potenciales debidos a todas las fuentes de cargas separadamente.

Unidades del Potencial: El campo se mide en N/C. Entonces el potencial se mide en Nm/C o J/C, también llamado voltio (V).

3.3 Ecuación de Poisson y ecuación de Laplace

Se va a expresar la divergencia y el rotacional de \vec{E} en términos del potencial V

$$\nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot (-\nabla V) = -\nabla^2 V$$

entonces, la divergencia de \vec{E} es el laplaciano de V . Según la ley de Gauss

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Se conoce como **ecuación de Poisson**. En regiones donde no hay carga, $\rho = 0$, la ecuación de Poisson se reduce a la **ecuación de Laplace**,

$$\nabla^2 V = 0$$

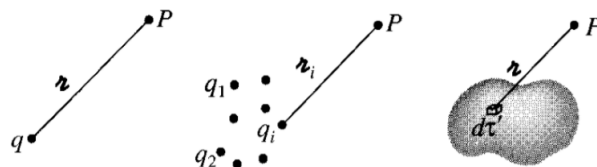
Para el rotacional se tiene que

$$\nabla \times \vec{E} = \nabla \times (-\nabla V) = 0$$

Esto es así porque el rotacional de un gradiente siempre es cero.

3.4 Potencial de una distribución de carga

Normalmente lo que se busca en el laboratorio es \vec{E} . Es más sencillo hallar primero V y luego calcular \vec{E} con el gradiente. Normalmente se conoce donde se encuentra la carga, esto es, se conoce $\rho(\vec{r})$ y queremos encontrar V . Ahora la ecuación de Poisson relaciona V y ρ , pero desafortunadamente lo hace de la forma errónea. Esta nos dará ρ si conocemos V . Como buscamos lo contrario, lo que tenemos que hacer es invertir la ecuación de Poisson.



Sea una carga puntual en el origen. El campo eléctrico es $\vec{E} = (1/4\pi\epsilon_0)(q/r^2)\hat{r}$ y $d\vec{l} = dr\hat{r} + r d\theta\hat{\theta} + r \sin\theta d\phi\hat{\phi}$, entonces

$$\vec{E}d\vec{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dr$$

Situando el punto de referencia en el infinito, el potencial de una carga puntual q en el origen es

$$V(r) = - \int_{r_0}^r \vec{E}d\vec{l} = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{q}{r'^2} dr' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r'} \Big|_{\infty}^r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

En general, el potencial de una carga puntual es

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Por el principio de superposición el potencial de una colección de cargas es

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}'_i|}$$

o, para una distribución continua

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dq$$

En particular, para un volumen de carga, es

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau'$$

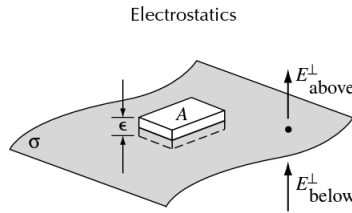
Esta es la ecuación que estábamos buscando. Nos dice como calcular V cuando conocemos ρ .

3.5 Condiciones de frontera

El campo eléctrico siempre presenta una discontinuidad cuando atraviesa una carga superficial σ . Suponga que dibujamos una caja muy fina de aspirinas como en la figura. La ley de Gauss dice que

$$\oint_S \vec{E}d\vec{a} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

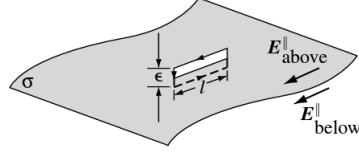
donde A es el área de la tapa de la caja. (Si σ varía de un punto a otro o la superficie es curva debemos escoger un A extremadamente pequeño).



Los lados de la caja de píldoras no contribuyen en el flujo en el límite $\epsilon \rightarrow 0$, lo que nos deja con

$$E_{above}^{\perp} - E_{below}^{\perp} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

donde E_{above}^{\perp} denota la componente de \vec{E} que es perpendicular a la superficie inmediatamente por encima, y E_{below}^{\perp} es lo mismo, pero inmediatamente por debajo de la superficie. Por consistencia, la dirección positiva es hacia el exterior del volumen. Conclusión: la componente normal de \vec{E} es discontinua, (existe una diferencia de σ/ϵ_0 en cualquier superficie. En particular, donde no hay carga superficial, E^{\perp} es continuo.



La componente tangencial de \vec{E} , por contraste, siempre es continua. Si aplicamos

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = 0$$

a la fina trayectoria rectangular de la imagen. Para $\epsilon \rightarrow 0$ el las direcciones normales no contribuyen en la integral, entonces

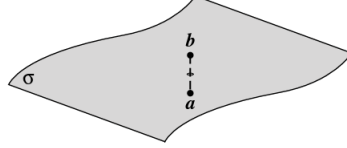
$$E_{above}^{\parallel} l - E_{below}^{\parallel} l = 0 \rightarrow E_{above}^{\parallel} = E_{below}^{\parallel}$$

donde E^{\parallel} es la componente de \vec{E} paralela a la superficie. Combinando las condiciones de frontera se obtiene

$$\vec{E}_{above} - \vec{E}_{below} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n} \quad (3.4)$$

donde \hat{n} es un vector unitario perpendicular a la superficie, apuntando desde abajo hacia arriba. Mientras tanto, el potencial es continuo a través de cualquier superficie

$$V_{above} - V_{below} = - \int_a^b \vec{E} d\vec{l}$$



donde la longitud del camino tiende a cero, por lo que la integral da como resultado

$$V_{above} = V_{below} \quad (3.5)$$

Sin embargo, el gradiente de V hereda la continuidad en \vec{E} porque $\vec{E} = -\nabla V$. Entonces

$$\nabla V_{above} - \nabla V_{below} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$$

o, más convenientemente,

$$\frac{\partial V_{above}}{\partial n} - \frac{\partial V_{below}}{\partial n} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (3.6)$$

donde

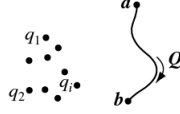
$$\frac{\partial V}{\partial n} = \nabla V \cdot \hat{n}$$

que denota la derivada de V en la dirección normal (esto es el ratio del cambio en la dirección perpendicular de la superficie).

4 Trabajo y energía en electrostática

4.1 Trabajo necesario para mover una carga

Suponga que tiene una configuración estacionaria de cargas, y quieres mover una carga de prueba Q del punto \vec{a} al punto \vec{b} . ¿Cuánto trabajo habría que realizar?



En cualquier punto a lo largo del camino, la fuerza eléctrica en Q es $\vec{F} = Q\vec{E}$. La fuerza que deberás ejercer, en oposición de su fuerza eléctrica, es $-Q\vec{E}$ (podría aplicarse una fuerza mayor, pero eso aceleraría a Q , y parte del esfuerzo se malgastaría generando energía cinética. Nosotros estamos interesados en la mínima fuerza que hay que ejercer para realizar el trabajo). El trabajo que se hace es entonces

$$W = \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{F} d\vec{l} = -Q \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{E} d\vec{l} = Q[V(\vec{b}) - V(\vec{a})]$$

Date cuenta de que la respuesta es independiente del camino tomado de \vec{a} a \vec{b} , por lo que se trata de una fuerza conservativa. Dividiendo entre Q

$$V(\vec{b}) - V(\vec{a}) = \frac{W}{Q} \quad (4.1)$$

En otras palabras, la diferencia de potencial entre \vec{a} y \vec{b} es igual al trabajo por unidad de carga requerida para mover una partícula de \vec{a} a \vec{b} . En particular, si se quiere traer Q desde un punto muy lejano hasta el punto \vec{r} , el trabajo que debe hacerse es

$$W = Q[V(\vec{r}) - V(\infty)]$$

entonces, si escogemos el infinito como punto de referencia

$$W = QV(\vec{r}) \quad (4.2)$$

En este sentido, potencial es energía potencial (el trabajo requerido para crear un sistema) por unidad de carga.

4.2 La energía de una distribución de cargas puntuales

¿Cuánto trabajo habría que emplear para reunir un conjunto de cargas puntuales? Imagine traer las cargas una a una desde el infinito. La primera carga, q_1 , no toma trabajo ya que no hay campo que se oponga al movimiento. Ahora traigamos la segunda carga. Según 4.2, esta acción costará $q_2 V_1(\vec{r}_2)$, donde V_1 es el potencial debido a q_1 , y \vec{r}_2 es la posición de q_2 :

$$W_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_2 \left(\frac{q_1}{r_{12}} \right)$$

donde r_{12} es la distancia entre q_1 y q_2 una vez están en posición. Ahora traemos q_3 ; esto requiere un trabajo de $q_3 V_{1,2}(\vec{r}_3)$, donde $V_{1,2}$ es el potencial debido a las cargas q_1 y q_2 , $(1/4\pi\epsilon_0)(q_1/r_{13} + q_2/r_{23})$. Entonces

$$W_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_3 \left(\frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}} \right)$$

La forma general es

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

La condición $j > i$ permite hacer el sumatorio sin contar el mismo par dos veces. También se puede contar intencionadamente cada par y dividir entre dos:

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

Sacando el factor q_i

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j \neq i}^n \frac{q_j}{r_{ij}} \right)$$

El término dentro del paréntesis es el potencial en el punto \vec{r}_i (la posición q_i) debido al resto de cargas ya colocadas. Entonces

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V(\vec{r}_i) \quad (4.3)$$

Esta ecuación nos dice cuánto trabajo toma formar una configuración de cargas puntuales. También es la cantidad de trabajo que el sistema te devuelve si desarmas el sistema (energía potencial almacenada).

4.3 Energía de una distribución continua de carga

Para un volumen de carga de densidad ρ , la ecuación 4.3 se convierte en

$$W = \frac{1}{2} \int \rho V d\tau \quad (4.4)$$

Empleando la ley de Gauss para expresar ρ en términos de \vec{E} :

$$\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}, \quad \text{entonces,} \quad W = \frac{\epsilon_0}{2} \int (\nabla \cdot \vec{E}) V d\tau$$

Integrando por partes para transferir la derivada de \vec{E} a V :

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \left[- \int \vec{E} (\nabla V) d\tau + \oint V \vec{E} d\vec{a} \right]$$

pero $\nabla V = -\vec{E}$, entonces

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\int_V E^2 d\tau + \oint_S V \vec{E} d\vec{a} \right) \quad (4.5)$$

¿Pero sobre qué volumen estamos integrando? Volvamos a 4.4. De su derivación, está claro que debemos integrar sobre la región donde se sitúa la carga. Sin embargo, valdría con cualquier región de mayor tamaño, ya que el territorio extra no contribuirá en la integral ya que $\rho = 0$ fuera del volumen donde se encuentra la carga. Volvamos a la ecuación 4.5. ¿Qué sucedería si extendemos el volumen más allá del mínimo necesario para encerrar toda la carga? La integral de E^2 solo puede aumentar positivamente; evidentemente, la integral de superficie deberá disminuir para dejar la suma intacta. De hecho, a largas distancias de la carga, E disminuye en $1/r^2$ y V en $1/r$, mientras que el área superficial crece en r^2 . Por lo tanto, la integral de superficie disminuye en $1/r$. La ecuación 4.5 te da la energía correcta W , independientemente del volumen usado (siempre y cuando encierre toda la carga), pero la contribución de la integral de volumen aumenta, mientras que la integral de superficie disminuye cuando tomas un volumen cada vez mayor. Si integramos sobre todo el espacio entonces la integral de superficie tiende a cero

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\text{all space}} E^2 d\tau \quad (4.6)$$

4.4 Comentarios sobre energía electrostática

(i) Una inconsistencia: La ecuación 4.6 implica que la energía de una distribución de carga estacionaria es siempre positiva. Por otro lado, la ecuación 4.3 (de la cual 4.6 deriva), puede ser positiva o negativa. Entonces ¿Cuál es la correcta? La respuesta es que ambas lo son, pero pertenecen a situaciones diferentes. En la ecuación 4.3 empezamos con cargas puntuales y simplemente encontramos el trabajo requerido para juntarlas sin tener en cuenta la energía propia de dichas cargas. La ecuación 4.6 indica que la energía de una carga puntual es de hecho infinita:

$$W = \frac{\epsilon_0}{2(4\pi\epsilon_0)^2} \int \left(\frac{q^2}{r^4} \right) (r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi) = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_0^\infty \frac{1}{r^2} dr = \infty$$

La ecuación 4.6 es más completa, en el sentido de que nos dice la energía total almacenada en una configuración de carga, pero 4.3 es más apropiada cuando estás tratando con cargas puntuales, porque preferimos no tener en cuenta esa porción de la energía total que se atribuye a la fabricación de las propias cargas puntuales.

Esta distinción se debe a que en 4.3 la forma del potencial $V(\vec{r}_i)$ representa el potencial debido a todas las otras cargas pero no por q_i . Pero en 4.4 la forma del potencial es $V(\vec{r})$ es el potencial total. Para una distribución continua de carga no hay distinción, ya que la cantidad de carga justo en el punto \vec{r} es muy pequeño, y su contribución al potencial es nula.

¿Donde se encuentra almacenada la energía?: Las ecuaciones 4.4 y 4.6 ofrecen dos formas distintas de calcular la misma cosa. La primera es una integral sobre la distribución de carga; la segunda es una integral sobre el campo. Entonces, ¿La energía se encuentra almacenada en la carga o en campo eléctrico? Está es una pregunta irresoluble, pero por ahora no es necesario preocuparse por este asunto.

Principio de superposición: Como la energía electrostática es cuadrática en el campo, esta no obedece el principio de superposición. La energía de un sistema compuesto no es la suma de las energías de sus partes consideradas separadamente:

$$W_{tot} = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 d\tau = \frac{\epsilon_0}{2} \int (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)^2 d\tau = \frac{\epsilon_0}{2} \int (E_1^2 + E_2^2 + 2\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2) d\tau = W_1 + W_2 + \epsilon_0 \int \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 d\tau$$

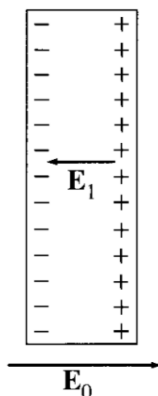
5 Conductores

5.1 Propiedades básicas

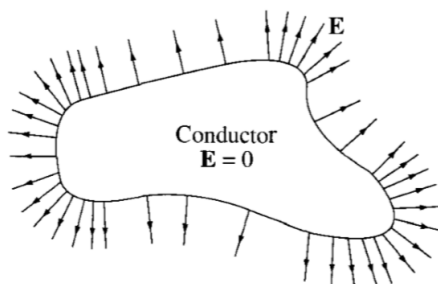
En un aislante, cada electrón está unido a un átomo particular. En un conductor metálico, uno o más electrones por átomo son libres de deambular por el material. (En un líquido conductor son los iones los que se desplazan). Un conductor perfecto es un material que contiene una fuente ilimitada de cargas completamente libres.

Las propiedades en la electrostática de un conductor ideal son:

1. **$\vec{E} = 0$ dentro de un conductor.** Esto es así porque si hubiera algún campo, las cargas libres se moverían, y por lo tanto dejaríamos de estar en electrostática. Este argumento es bastante insatisfactorio. Veamos que ocurre si aplicamos a un conductor un campo eléctrico externo \vec{E}_0 (figura). Inicialmente, desplazará todas las cargas positivas a la derecha, y a las negativas a la izquierda. (En la práctica son los electrones los que se mueven concentrando carga negativa a un lado y positiva a otro, los núcleos positivos. No importa cuál sea la carga que se mueva, el resultado es el mismo). Cuando llegan al extremo del material, las cargas se apilan: positiva en el lado derecho y negativa en el izquierdo. Entonces, la **carga inducida** produce un campo por su cuenta, \vec{E}_1 , que, como puedes ver en la figura, tiene dirección opuesta a \vec{E}_0 . Esto significa que el campo generado por la carga inducida tiende a cancelar el campo original. La carga continuará fluyendo hasta que se complete dicha cancelación, y el campo resultante dentro del conductor sea nula. El proceso es prácticamente instantáneo.



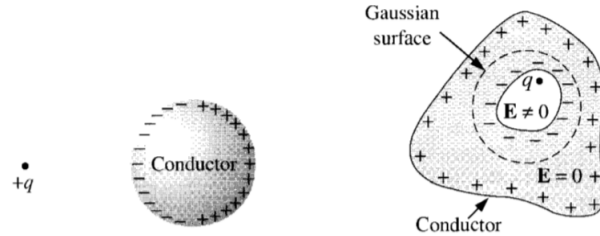
2. **$\rho = 0$ dentro de un conductor:** Esto se ve con la ley de Gauss: $\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$. Si $\vec{E} = 0$, entonces también lo será ρ . Todavía hay carga, pero la densidad de carga neta en el interior es cero (misma cantidad de carga positiva que negativa).
3. **Toda carga neta reside en la superficie:** Es el único lugar donde puede estar.
4. **Un conductor es equipotencial:** Si \vec{a} y \vec{b} son dos puntos cualquiera de un conductor dado,
$$V(\vec{b}) - V(\vec{a}) = - \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0, \text{ así que } V(\vec{a}) = V(\vec{b})$$
5. **\vec{E} es perpendicular a la superficie justo fuera del conductor:** De otra manera, la carga inmediatamente fluiría alrededor de la superficie hasta exterminar la componente tangencial.



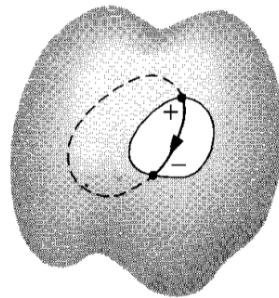
Las cargas se sitúan en la superficie porque es energéticamente más favorable.

5.2 Cargas inducidas

Si sostienes una carga $+q$ cerca de un conductor, ambos se van a ver atraídos. La carga q va a atraer las cargas negativas al lado más cercano a q y repeler las positivas hacia el lado más alejado. Otra forma de verlo es que las cargas se posicionarán dentro del conductor de forma que cancele, dentro del conductor, el campo generado por q . Como la carga negativa inducida está más cerca de q que la positiva, hay una fuerza neta de atracción.



Si hay alguna cavidad en el conductor, y dentro de esta alguna carga, entonces el campo en la cavidad no será cero. Dicha cavidad y su contenido está eléctricamente aislado del mundo exterior por el conductor circundante. Ningún campo eléctrico penetra el conductor; son cancelados en la superficie exterior por la carga inducida. De manera similar, el campo generado por la carga dentro de la cavidad es cancelado, fuera de la cavidad, por la carga inducida en la superficie exterior del conductor, que comunica la presencia de q al mundo exterior. La carga total inducida en la pared de la cavidad es igual y opuesta a la carga del interior. Si rodeamos la cavidad con una superficie gaussiana, todos los puntos dentro del conductor cumplen $\oint \vec{E} d\vec{a} = 0$, y por lo tanto, la carga neta encerrada debe de ser cero. Pero $Q_{enc} = q + q_{inducida}$, por lo que $q_{inducida} = -q$. Dentro de una cavidad sin carga el campo eléctrico es nulo, por lo que toda línea de campo que la atraviese debe nacer y morir en la pared de la cavidad ($\oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$).



5.3 Carga superficial y la fuerza en un conductor

Debido a que el campo dentro de un conductor es cero, la condición de frontera 3.4 requiere que el campo inmediatamente fuera sea

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n} \quad (5.1)$$

consistente con nuestra reciente conclusión de que el campo es normal a la superficie. En términos de potencial, la ecuación 3.6

$$\sigma = -\epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial n} \quad (5.2)$$

Estas ecuaciones nos permiten calcular la carga superficial en un conductor, si tenemos \vec{E} o V .

En presencia de un campo eléctrico, una carga superficial experimentará una fuerza. La fuerza por unidad de área, \vec{f} , es $\sigma \vec{E}$. Pero hay un problema. El campo eléctrico es discontinuo para una carga superficial; entonces, ¿Cuál es el valor que debemos usar? ¿ \vec{E}_{above} , \vec{E}_{below} o alguno entre medias? La respuesta es que deberíamos usar la media de las dos:

$$\vec{f} = \sigma \vec{E}_{media} = \frac{1}{2} \sigma (\vec{E}_{above} + \vec{E}_{below})$$

¿Por qué la media? Centremos nuestra atención en una área pequeña de una superficie, tan pequeña que pueda considerarse plana y la densidad de carga superficial constante. El campo total consiste en dos partes,

el atribuido al propio parche y la parte atribuida a todo lo demás (otras regiones de la superficie y cualquier fuente externa presente):

$$\vec{E} = \vec{E}_{\text{parche}} + \vec{E}_{\text{otros}}$$

El parche no puede ejercer una fuerza sobre si mismo. La fuerza en el parche, entonces, está exclusivamente generado por \vec{E}_{otros} , y este no sufre discontinuidad. La discontinuidad es debida enteramente a la carga del parche, que produce un campo $(\sigma/2\epsilon_0)$ en ambos lados, apuntando hacia afuera de la superficie. Entonces

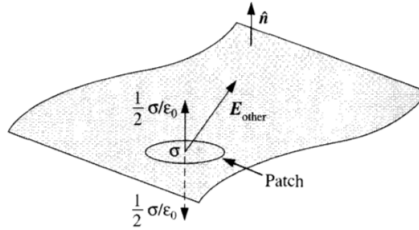
$$\begin{aligned}\vec{E}_{\text{above}} &= \vec{E}_{\text{otros}} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{n} \\ \vec{E}_{\text{below}} &= \vec{E}_{\text{otros}} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{n}\end{aligned}$$

y entonces

$$\vec{E}_{\text{otros}} = \frac{1}{2}(\vec{E}_{\text{above}} + \vec{E}_{\text{below}}) = \vec{E}_{\text{media}}$$

de esta forma removemos la contribución propia del parche. Esto es aplicable para cualquier carga superficial; en el caso particular de un conductor, el campo es cero dentro y $(\sigma/\epsilon_0)\hat{n}$ fuera (Eq 5.1), entonces la media es $(\sigma/2\epsilon_0)\hat{n}$, y la fuerza por unidad de área es

$$\vec{f} = \frac{1}{2\epsilon_0}\sigma^2\hat{n}$$



5.4 Capacitor

Supón que tenemos dos conductores cualquiera, y colocamos una carga $+Q$ en uno y $-Q$ en el otro. Como V es constante sobre un conductor, podemos hablar sin ambigüedad sobre una diferencia de potencial entre ellos:

$$V = V_+ - V_- = - \int_{(-)}^{(+)} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

No sabemos como se distribuye la carga por los dos conductores, y el cálculo del campo sería un lío si sus formas son complicadas: \vec{E} es proporcional a Q . Según la ley de Coulomb

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho}{r^2} \hat{r} d\tau$$

si doblas ρ , es decir, doblas Q (y también $-Q$), doblas \vec{E} . Ya que \vec{E} es proporcional a Q , también lo es V . La constante de proporcionalidad es llamada **capacidad**:

$$C = \frac{Q}{V} \quad (5.3)$$

La capacidad es una cantidad puramente geométrica, determinada por los tamaños, las formas y la separación de los dos conductores. En unidades del S.I, C se mide en **faradios (F)**; un faradio es un coulomb por voltio.

Observa que V es, por definición, el potencial del conductor positivo menos el del conductor negativo. Acorde con esto, la capacitancia es una cantidad positiva. (Ocasionalmente oirás hablar sobre la capacidad de un único conductor. En este caso, el segundo conductor, con la carga negativa, es una cáscara esférica imaginaria de radio infinito rodeando al primer conductor. Esta no contribuye al campo y el potencial V es el potencial con el infinito como punto de referencia).

Para cargar un capacitor, hay que remover los electrones de la lámina positiva y llevarlos a la lámina negativa. Haciendo esto se lucha contra el campo eléctrico, que intenta devolver dichas cargas a la lámina positiva. ¿Cuánto trabajo es necesario para cargar el capacitor una cantidad Q ? Suponga que en alguna etapa

intermedia del proceso la carga de la lámina positiva es q , por lo que la diferencia de potencial es q/C . De acuerdo con la ecuación 4.1, el trabajo necesario para transportar la siguiente porción de carga, dq , es

$$dW = \left(\frac{q}{C}\right) dq$$

Entonces, el trabajo total necesario de ir desde $q = 0$ a $q = Q$, es

$$W = \int_0^Q \left(\frac{q}{C}\right) dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

o, ya que $Q = CV$,

$$W = \frac{1}{2} CV^2$$

donde V es el potencial final del capacitor.

6 Técnicas especiales

6.1 Ecuación de la Laplace

En algunos casos es mejor tratar el problema en forma diferencial usando la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (6.1)$$

A menudo, estaremos interesados en encontrar el potencial en una región donde $\rho = 0$. Puede haber carga en cualquier sitio, pero nosotros estaremos interesados en regiones donde no hay carga. En este caso, la ecuación de Poisson se reduce a la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 V = 0 \quad (6.2)$$

o, escrito en coordenadas cartesianas,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (6.3)$$

6.1.1 La ecuación de Laplace en una dimensión

Supongamos que V depende de una única variable, x . Entonces, la ecuación de Laplace es

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = 0$$

La solución general sería

$$V(x) = mx + b \quad (6.4)$$

la ecuación de una línea recta. Contiene dos constantes indeterminadas (m, b). Quedan determinadas por las condiciones de frontera.

Voy a exponer dos características de este resultado; puede parecer obvio en una dimensión, pero su análogo en dos y tres dimensiones no lo son:

- $V(x)$ es la media de $V(x+a)$ y $V(x-a)$, para todo a :

$$V(x) = \frac{1}{2}[V(x+a) + V(x-a)]$$

Nos dice que se le asigna al punto x el promedio de los valores de la izquierda y la derecha de x .

- La ecuación de Laplace no posee ni máximo ni mínimo local; los valores extremos de V se situarán en los puntos finales. Esto es consecuencia de (1), ya que si hubiera un máximo local, V en ese punto sería mayor que en ambos lados, y, por lo tanto, no sería un punto promedio.

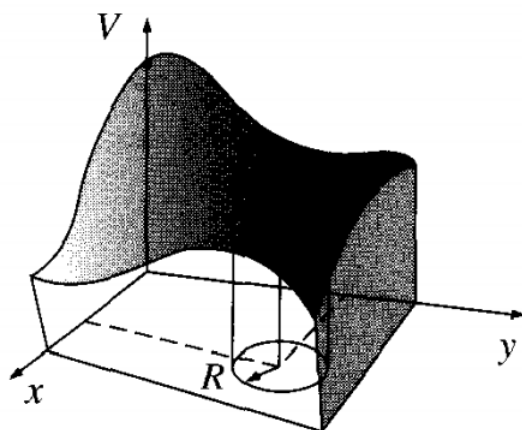
6.1.2 La ecuación de Laplace en dos dimensiones

Si V depende de dos variables, la ecuación de Laplace es:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

La solución general de esta ecuación no contiene un número finito de constantes arbitrarias, por lo que no se puede escribir una solución general. Sin embargo, es posible deducir ciertas propiedades comunes a todas las soluciones.

Nos ayudaremos con un ejemplo gráfico. La siguiente superficie satisface la ecuación de Laplace



Las funciones armónicas en dos dimensiones tienen las mismas propiedades que teníamos en el caso unidimensional:

- El valor de V en el punto (x, y) es el promedio de los valores alrededor de dicho punto. De forma más precisa, si dibujas un círculo de cualquier radio R centrado en (x, y) , el valor promedio de V en dicho círculo es igual al valor del centro:

$$V(x, y) = \frac{1}{2\pi R} \oint_{circle} V dl$$

- V no tienen máximo ni mínimo; todo extremo se encuentra en las fronteras. Carecen de valles, colinas, tan solo son la superficie más regular disponible.

6.1.3 La ecuación de Laplace en tres dimensiones

En tres dimensiones, las propiedades ya nombradas serían:

- El valor de V en el punto \vec{r} es el valor promedio de V sobre una superficie esfera de radio R centrada en \vec{r} :

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi R^2} \oint_{sphere} V da$$

- Como consecuencia, V no posee ni mínimo ni máximo local; los valores extremos de V se encuentran en la frontera.

6.1.4 Condiciones de frontera y teoremas de unicidad

La ecuación de Laplace no determina V por sí misma; además, debe proveerse un apropiado conjunto de condiciones de frontera. En el caso unidimensional es fácil, ya que la solución general $V = mx + b$ contiene dos constantes arbitrarias, y por lo tanto se requiere de dos condiciones de frontera.

En dos o tres dimensiones nos enfrentamos a una ecuación diferencial parcial, y no es fácil ver que constituye una aceptable condición de frontera. La prueba de que un conjunto de condiciones de frontera son suficientes se presenta en forma de teoremas de unicidad. Presentaré los dos más útiles:

Primer teorema de unicidad

Primer teorema de unicidad: La solución de la ecuación de Laplace en un volumen Vol está determinado de manera única si V está especificado en la superficie frontera S .

Demostración: Sea una región y su superficie. Suponga que hay dos soluciones para la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 V_1 = 0 \quad \text{and} \quad \nabla^2 V_2 = 0$$

Quiero probar que ambas son iguales. Para ello emplearemos el siguiente truco

$$V_3 \equiv V_1 - V_2$$

Eta diferencia obedece la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 V_3 = \nabla^2 V_1 - \nabla^2 V_2 = 0$$

y toma el valor de cero en todas las fronteras (ya que V_1 y V_2 son iguales allí). Pero la ecuación de Laplace permite no tener ni máximos ni mínimos locales (todo valor extremo ocurre en las fronteras). Entonces el máximo y el mínimo de V_3 son ambos cero. Por lo tanto, V_3 debe ser cero en todas partes, y por lo tanto

$$V_1 = V_2$$

Solo es necesario dos potenciales que cumplan la ecuación de Laplace y tengan los correctos valores en las fronteras. (Veremos el poder de este argumento en el método de las imágenes).

Mejoremos el primer teorema de unicidad. Anteriormente se asumió que no había carga dentro de la región en cuestión. Supongamos que sí la hay; en este caso, el potencial obedecería la ecuación de Poisson. Entonces

$$\nabla^2 V_1 = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \nabla^2 V_2 = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

por lo que

$$\nabla^2 V_3 = \nabla^2 V_1 - \nabla^2 V_2 = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$$

Una vez más, la diferencia satisface la ecuación de Laplace y tiene el valor cero en todas la fronteras, por lo que $V_3 = 0$ y se concluye que $V_1 = V_2$.

Conductores y segundo teorema de unicidad

La manera más simple de establecer las condiciones de frontera para un problema electrostático es especificar el valor de V en todas las superficies que rodean la región de interés. En el laboratorio, tenemos conductores conectados a baterías, que mantienen el potencial dado, o a tierra, es decir, a $V = 0$. Sin embargo, hay circunstancias en las que no sabemos el potencial en la frontera, pero sí las cargas de la superficie de algún conductor. Supongamos que la carga de dos conductores es Q_1 y Q_2 (no decimos cómo esta se distribuye sobre cada superficie cargada porque tan pronto coloquemos carga en los conductores, esta se mueve de una forma que no podemos controlar). Además tendremos una densidad de carga ρ en la región entre los conductores. ¿Está el campo eléctrico determinado de forma única, o existe un número de formas diferentes de ordenar las cargas generando diferentes campos?

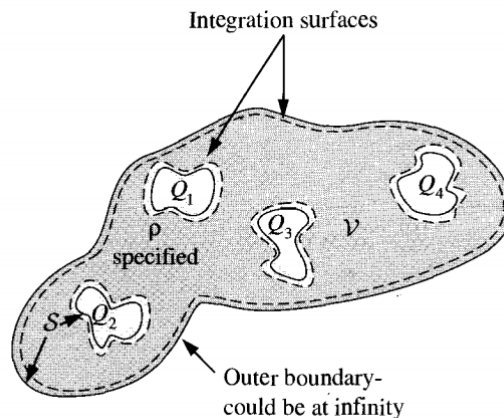
Segundo teorema de unicidad: En un volumen Vol rodeado por conductores y con una densidad de carga ρ , el campo eléctrico está únicamente determinado si conocemos la carga total de cada conductor.

Demostración: Suponga que hay dos campos satisfaciendo las condiciones del problema. Ambos obedecen la ley de gauss en forma diferencial en el espacio entre los conductores:

$$\nabla \vec{E}_1 = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \nabla \vec{E}_2 = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Y también en forma integral para una superficie gaussiana encerrando ambos conductores:

$$\oint_{ith\ surface\ conductora} \vec{E}_1 d\vec{a} = \frac{Q_i}{\varepsilon_0}, \quad \oint_{ith\ surface\ conductora} \vec{E}_2 d\vec{a} = \frac{Q_i}{\varepsilon_0}$$



Así mismo, para la frontera externa

$$\oint_{\text{frontera exterior}} \vec{E}_1 d\vec{a} = \frac{Q_{tot}}{\epsilon_0}, \quad \oint_{\text{frontera exterior}} \vec{E}_2 d\vec{a} = \frac{Q_{tot}}{\epsilon_0}$$

Como hicimos anteriormente, examinamos la diferencia

$$\vec{E}_3 = \vec{E}_1 - \vec{E}_2$$

que obedece

$$\nabla \vec{E}_3 = 0 \quad (6.5)$$

en la región entre los conductores, y

$$\oint \vec{E}_3 d\vec{a} = 0 \quad (6.6)$$

sobre cada superficie frontera.

Queda una pieza final de información que debemos explotar: Aunque no sepamos como se distribuye la carga Q_i sobre cada superficie conductora sabemos que cada conductor es equipotencial, y por lo tanto V_3 es una constante (no necesariamente la misma constante) sobre cada superficie conductora. El truquito a utilizar es

$$\nabla(V_3 \vec{E}_3) = V_3(\nabla \vec{E}_3) + \vec{E}_3(\nabla V_3) = -(E_3)^2$$

Donde he usado 6.5, y $\vec{E}_3 = -\nabla V_3$. Integrando sobre toda la región entre los conductores, y aplicando el teorema de la divergencia al término de la izquierda:

$$\int_V \nabla(V_3 \vec{E}_3) d\tau = \oint_S V_3 \vec{E}_3 d\vec{a} = - \int_V (E_3)^2 d\tau$$

La integral de superficie cubre todas las fronteras de la región en cuestión (los conductores y la frontera exterior). Ahora, V_3 es una constante sobre cada superficie (Si el límite exterior es infinito, entonces $V_3 = 0$ allí). De acuerdo con 6.6

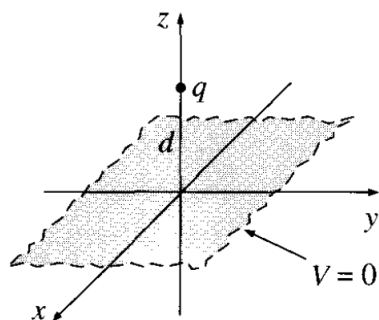
$$\int_V (E_3)^2 d\tau = 0$$

Pero el integrando nunca es negativo; la única manera de que la integral pueda anularse es si $E_3 = 0$ en todas partes. Consecuentemente, $\vec{E}_1 = \vec{E}_2$, quedando el teorema demostrado.

6.2 El método de las imágenes

6.2.1 El problema clásico de la imagen

Suponga que una carga puntual q se encuentra a una distancia d por encima de un plano conductor conectado a tierra (fig). ¿Cuál es el potencial en la región por encima del plano? q induce una cierta cantidad de carga negativa en la superficie del conductor; el potencial total es en parte debido a q directamente, y en parte a la carga que esta induce. ¿Pero cómo podemos calcular el potencial cuando no sabemos cuánta carga se induce ni como se distribuye?



Desde un punto de vista matemático nuestro problema consiste en resolver la ecuación de Poisson en la región $z > 0$, con una única carga puntual q en $(0,0,d)$, sujeta a las condiciones de contorno:

1. $V = 0$ cuando $z = 0$ ya que el plano conductor está conectado a tierra.
2. $V \rightarrow 0$ lejos de la carga, esto es, para $x^2 + y^2 + Z^2 \gg d^2$

El primer teorema de unicidad garantiza que hay solamente una función que cumple estos requerimientos; si satisface la ecuación de Poisson en la región de interés, y cumple las condiciones de contorno, entonces debe de ser la función correcta.

TRUCO: Olvida el problema actual; vamos a estudiar una situación completamente diferente. Este nuevo problema consiste en dos cargas puntuales, $+q$ en $(0,0,d)$ y $-q$ en $(0,0,-d)$, sin plano conductor (fig). Para esa configuración puedo fácilmente escribir su potencial

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}} - \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+d)^2}} \right] \quad (6.7)$$

Además, se tiene:

1. $V = 0$ cuando $z = 0$
2. $V \rightarrow 0$ para $x^2 + y^2 + Z^2 \gg d^2$

y la única carga en la región $z > 0$ es la carga puntual $+q$ en $(0,0,d)$. ¡Pero estas son precisamente las condiciones de problema original! Evidentemente la segunda configuración produce exactamente el mismo potencial que la primera configuración, en la parte superior de la región $z \geq 0$; la región inferior $z \leq 0$, es completamente diferente, pero ¿A quién le importa? La parte superior es la única que necesitamos. Se concluye pues que el potencial de una carga puntual encima de un conductor plano infinito viene dado por (6.7), para $z \geq 0$.

6.2.2 Carga superficial inducida

Ahora que sabemos el potencial, podemos computar la carga superficial σ inducida en el conductor. De acuerdo con (5.2),

$$\sigma = -\epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial n}$$

donde $\frac{\partial V}{\partial n}$ es la derivada normal de V en la superficie. En este caso, la dirección normal es \hat{z} , por lo que

$$\sigma = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial V}{\partial n} \right|_{z=0}$$

De (6.7),

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{-q(z-d)}{[x^2 + y^2 + (z-d)^2]^{3/2}} + \frac{q(z+d)}{[x^2 + y^2 + (z+d)^2]^{3/2}} \right\},$$

entonces

$$\sigma(x, y) = \frac{-qd}{2\pi(x^2 + y^2 + d^2)^{3/2}} \quad (6.8)$$

Como era de esperar, la carga inducida es negativa (asumiendo que q es positiva) y mayor en $x = y = 0$. Calculemos la carga total inducida

$$Q = \int \sigma da$$

Esta integral, sobre el plano xy , es más sencilla en coordenadas polares (r, ϕ) , con $r^2 = x^2 + y^2$ y $da = r dr d\phi$. Luego

$$\sigma(r) = \frac{-qd}{2\pi(r^2 + d^2)^{3/2}}$$

y

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{-qd}{2\pi(r^2 + d^2)^{3/2}} r dr d\phi = \frac{qd}{\sqrt{r^2 + d^2}} \Big|_0^\infty = -q \quad (6.9)$$

Evidentemente la carga total inducida en el plano es $-q$.

6.2.3 Fuerza y energía

La carga q es atraída hacia el plano, debido a la carga negativa inducida. Calculemos dicha fuerza. Como el potencial en la vecindad de q es el mismo que en el problema análogo (aquel con $+q$ y $-q$ pero sin conductor), también lo será el campo y , por lo tanto, la fuerza:

$$\vec{F} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(2d)^2} \hat{z} \quad (6.10)$$

!Cuidado; No todo es lo mismo en los dos problemas. La energía cambia. Con las dos cargas puntuales sin conductor, (4.3) tenemos

$$W = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{2d} \quad (6.11)$$

Pero para una única carga y el plano conductor la energía es la mitad

$$W = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{4d} \quad (6.12)$$

¿Por qué la mitad? Piensa en la energía almacenada en los campos ((4.6)):

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 d\tau$$

En el primer caso la región superior e inferior contribuyen y lo hacen, por simetría, del mismo modo; pero en el segundo caso, solamente la región superior contiene un campo distinto de cero, por lo que la energía es la mitad.

Por supuesto, uno puede también determinar la energía calculando el trabajo requerido para traer q del infinito. La fuerza requerida (que se opone a la fuerza eléctrica en (6.10)) es $(1/4\pi\epsilon_0)(q^2/4z^2)\hat{z}$, entonces

$$W = \int_{infy}^d \vec{F} d\vec{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^d \frac{q^2}{4z^2} dz = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{4d}$$

Cuando movemos q hacia el conductor, hacemos trabajo solamente en q . Es verdad que la carga inducida se está moviendo dentro del conductor, pero no me cuesta nada, ya que todo el conductor se encuentra a potencial cero. En contraste, si simultáneamente traemos dos cargas puntuales (sin conductor), hacemos trabajo en ambas, y el total es dos veces más grande.

6.2.4 Otros Problemas

El método de las imágenes descrito no está limitado a cargas puntuales; cualquier distribución de carga estacionaria cerca de un plano conductor conectado a tierra puede ser tratada de la misma forma, introduciendo su imagen espejo. (Recuerda que las cargas imagen tienen el signo opuesto, lo que garantiza que el plano xy se encontrará a potencial cero)

7 Campos eléctricos en medios materiales

7.1 Polarización

7.1.1 Dieléctricos

En este capítulo estudiaremos los campos eléctricos en la materia. La mayoría de los objetos, aproximadamente, pertenecen a dos clases: **conductores** y **aislantes** (o **dieléctricos**). Los conductores son sustancias que contienen un suministro ilimitado de cargas que se mueven libremente por el material. Es decir, muchos de los electrones no están asociados con un núcleo en particular, pero deambulan alrededor de estos. En un dieléctrico, en contraste, todas las cargas están unidas a átomos o moléculas específicas. Es como si estuvieran atados, pudiendo moverse y separarse solo un poco. Estos desplazamientos microscópicos no son tan dramáticos como la reestructuración de carga en un conductor, pero su efecto acumulativo son notorios. Al contrario que en los conductores, tanto la densidad de carga como el campo electrostático pueden ser distintos de cero en el interior de los materiales dieléctricos. Hay dos principales mecanismos por los que los campos eléctricos pueden distorsionar la distribución de carga en un dieléctrico: estiramiento y rotación.

7.1.2 Dipolos inducidos

¿Qué le sucede a un átomo neutral cuando se encuentra en un campo eléctrico \vec{E} ? La respuesta podría ser: "absolutamente nada, ya que como el átomo no está cargado, el campo no tendrá efecto en él". Pero esto es incorrecto. Aunque el átomo como un todo es eléctricamente neutro, hay un núcleo cargado positivamente y una nube de electrones cargada negativamente rodeándolo. Estas dos regiones son influidas por el campo: el núcleo es empujado en dirección al campo, y los electrones en dirección opuesta. En principio, si el campo es lo suficientemente grande, puede arrancar el electrón ionizando el átomo (la sustancia se convierte en un conductor). Con campos menos extremos, sin embargo, se establece un equilibrio, donde el centro de la nube de electrones no coincide con el núcleo. La carga positiva y negativa se atraen equiparando la repulsión que genera el campo. Ahora el átomo se encuentra **polarizado**, con carga positiva desplazada a un lado y negativa al otro, y posee un pequeño momento dipolar \vec{p} , que apunta a la misma dirección que \vec{E} . Normalmente, este momento dipolar inducido es aproximadamente proporcional al campo

$$\vec{p} = \alpha \vec{E} \quad (7.1)$$

la constante de proporcionalidad α es llamada **polarizabilidad**. Su valor depende de la estructura del átomo en cuestión.

Para moléculas la situación no es tan simple, porque frecuentemente se polarizan más fácilmente en unas direcciones que en otras. Cuando el campo está a un ángulo con respecto al eje de la molécula, debe resolverse el problema por componentes, paralela y perpendicular, y multiplicar cada una por su polarizabilidad correspondiente:

$$\vec{p} = \alpha_{\perp} \vec{E}_{\perp} + \alpha_{\parallel} \vec{E}_{\parallel}$$

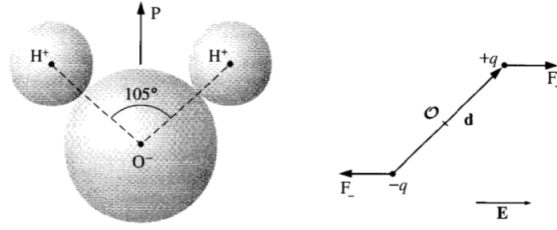
En este caso, el momento dipolar inducido puede no tener la misma dirección que \vec{E} . Para una molécula completamente asimétrica se emplea la forma más general de 7.1, de la relación lineal entre \vec{E} y \vec{p} :

$$\begin{aligned} p_x &= \alpha_{xx} E_x + \alpha_{xy} E_y + \alpha_{xz} E_z \\ p_y &= \alpha_{yx} E_x + \alpha_{yy} E_y + \alpha_{yz} E_z \\ p_z &= \alpha_{zx} E_x + \alpha_{zy} E_y + \alpha_{zz} E_z \end{aligned} \quad (7.2)$$

La colección de las nueve constantes α_{ij} constituye el **tensor de polarizabilidad** de la molécula. Sus valores dependen de la orientación de los ejes que se escojan, por lo que siempre será posible escoger uno de los ejes principales, cancelando los términos fuera de la diagonal, dejando únicamente tres polarizabilidades distintas de cero (α_{xx} , α_{yy} y α_{zz}).

7.1.3 Alineación de moléculas polares

Algunas moléculas tienen un momento dipolar permanente, debido a su distribución de carga asimétrica. Estas son llamadas **moléculas polares**. ¿Qué sucede cuando se sitúan en un campo eléctrico?



Si el campo es uniforme, la fuerza en el extremo positivo, $\vec{F}_+ = q\vec{E}$, cancela exáctamente la fuerza del extremo negativo, $\vec{F}_- = q\vec{E}$ (en el caso de que la carga positiva y negativa tengan la misma magnitud). Sin embargo, se genera un torque:

$$\vec{N} = (\vec{r}_+ \times \vec{F}_+) + (\vec{r}_- \times \vec{F}_-) = [(\vec{d}/2) \times (q\vec{E})] + [(-\vec{d}/2) \times (-q\vec{E})] = q\vec{d} \times \vec{E}$$

Por consiguiente, un dipolo $\vec{p} = q\vec{d}$, en un campo uniforme \vec{E} , experimenta un torque

$$\vec{N} = \vec{p} \times \vec{E} \quad (7.3)$$

Si el campo es no uniforme, \vec{F}_+ no equilibra exactamente \vec{F}_- , por lo que habrá una fuerza neta en el dipolo, junto con el torque. \vec{E} debería de cambiar abrupatamente en el espacio comprendido por una molécula. Esto no suele ocurrir. Dicha fuerza neta es:

$$\vec{F} = \vec{F}_+ + \vec{F}_- = q(\vec{E}_+ - \vec{E}_-) = q(\Delta\vec{E})$$

Asumiendo que el dipolo es muy corto, podemos usar la ecuación $dT = \nabla T \cdot d\vec{l}$ para aproximar un pequeño cambio en E_x :

$$\Delta E_x = (\nabla E_x) \cdot \vec{d}$$

análogamente con los ejes y y z tenemos,

$$\Delta \vec{E} = (\vec{d} \cdot \nabla) \vec{E},$$

y por lo tanto

$$\vec{F} = (\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E} \quad (7.4)$$

Para un dipolo perfecto de longitud infinitesimal, la ecuación (7.3) nos da el torque sobre el centro del dipolo incluso en un campo no uniforme, y, para cualquier otro punto $\vec{N} = (\vec{p} \times \vec{E}) + (\vec{r} \times \vec{F})$

Según el modelo de la derecha

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\theta+} &= \vec{F}_{\theta-} = -qE \sin\theta \hat{\theta} \\ d\vec{l}_{\theta+} &= d\vec{l}_{\theta-} = -\frac{d}{2} d\theta \hat{\theta} \end{aligned}$$

La energía electrostática de una molécula polar será

$$U = U_+ + U_- = \int \vec{F}_{\theta+} \cdot d\vec{l}_{\theta+} + \int \vec{F}_{\theta-} \cdot d\vec{l}_{\theta-} = 2 \int \vec{F}_{\theta+} \cdot d\vec{l}_{\theta+} = 2 \int qE \sin\theta \frac{d}{2} d\theta = qEd \int \sin\theta d\theta = -qEd \cos\theta$$

entonces, como $p = qd$, la energía electrostática se puede reescribir como

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

El signo negativo indica que el torque actúa minimizando la energía electrostática de la molécula polar.

7.1.4 Polarización

¿Qué le ocurre a un dieléctrico situado dentro de un campo eléctrico? Si la sustancia consiste en átomos neutros, o moléculas apolares, el campo inducirá en cada una un pequeño momento dipolar apuntando en la misma dirección que el campo. Si el material está formado por moléculas polares, cada dipolo permanente experimentará un torque, tendiendo a alinearse en la dirección del campo. (Los movimientos térmicos aleatorios compiten con este proceso, impidiendo que el alineamiento termine de completarse, especialmente para altas temperaturas, y desaparece casi de inmediato cuando se retira el campo).

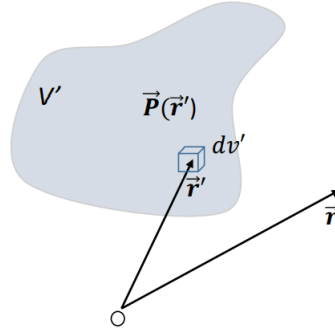
Date cuenta que estos dos mecanismos producen el mismo resultado: un montón de pequeños dipolos apuntando dirección al campo; el material se polariza. Una medida de este efecto es el llamado **vector polarización**, \vec{P} .

En un sistema macroscópico, dado el pequeño tamaño de átomos y moléculas, es muy buena aproximación reemplazar la distribución discreta de sus momentos dipolares por una distribución continua de momento dipolar. Se define el vector polarización \vec{P} , como la densidad de momento dipolar promedio en cada punto del material:

$$\vec{P}(\vec{r}') = \frac{1}{\delta V} \sum_{i=1}^N \vec{p}_i$$

Donde \vec{p}_i es el momento dipolar de cada átomo o molécula contenidos en un volumen δV pequeño en la escala macroscópica, pero suficientemente grande para contener un gran número N de átomos o moléculas. Al promediar un número grande de dipolos en cada punto, el vector polarización $\vec{P}(\vec{r}')$ varía suavemente con la posición (las fluctuaciones de son promediadas).

Incluso en moléculas polares habrá algo de polarización por desplazamiento (normalmente es más fácil rotar una molécula que estirla, por lo que el primer mecanismo es el dominante). En algunos materiales es posible mantener la polarización una vez extraído el campo.



7.2 El campo de un objeto polarizado

7.2.1 Cargas ligadas

Suponga que tenemos un material polarizado, esto es, un objeto compuesto por un montón de dipolos microscópicos alineados. Su momento dipolar por unidad de volumen es \vec{P} . ¿Cuál es el campo producido por este objeto (no el campo que causó la polarización, sino el campo que la polarización misma causa)? Ya conocemos el campo de un dipolo individual, entonces ¿Por qué no troceamos el material en dipolos infinitesimales e integramos para obtener el total? Es más sencillo trabajar con el potencial. Para un dipolo aislado \vec{p} tenemos la ecuación ??

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (7.5)$$

Cada $d\tau'$ en cada punto \vec{r}' contiene un dipolo puntual de momento dipolar $\vec{P}(\vec{r}')d\tau'$ y por tanto, aplicando el principio de superposición:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\tau' \quad (7.6)$$

Podemos reescribir esta expresión empleando la relación

$$\nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = -\nabla \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

donde la diferenciación es con respecto a las coordenadas (\vec{r}')

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \vec{P}(\vec{r}') \cdot \nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) d\tau'$$

y esta se puede reescribir utilizando

$$\nabla' \left(\frac{\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = \frac{\nabla' \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \vec{P}(\vec{r}') \nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)$$

Entonces

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_{V'} \nabla' \cdot \left(\frac{\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) d\tau' - \int_{V'} \frac{\nabla' \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau' \right]$$

Usando el teorema de la divergencia, podemos escribir:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{S'} \frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot d\vec{S}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\nabla' \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau' \quad (7.7)$$

El primer término luce igual que el potencial de una carga superficial si

$$\sigma_b(\vec{r}') \equiv \vec{P}(\vec{r}') \cdot \hat{n} \quad (7.8)$$

con $\hat{n} = d\vec{S}/dS'$ un vector unitario en el sentido de $d\vec{S}$ en cada punto \vec{r}' de la superficie que V' (perpendicular a la superficie, de dentro hacia afuera). Mientras que el segundo término luce igual que el potencial de una carga volumétrica si

$$\rho_b(\vec{r}') \equiv -\nabla' \cdot \vec{P}(\vec{r}') \quad (7.9)$$

Con estas definiciones, 7.7 queda

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{S'} \frac{\sigma_p(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho_p(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau' \quad (7.10)$$

Esto quiere decir que el potencial (y también el campo) de un objeto polarizado es el mismo que el producido por una densidad de carga ρ_p más una densidad de carga superficial σ_p . Estasson denominadas **densidades de carga de polarización** o **densidad de carga de frontera** o **densidades de carga ligada**, por unidad de superficie y por unidad de volumen, respectivamente, en el medio dieléctrico. Si $\vec{P}(\vec{r}')$ es uniforme, entonces $\rho_p(\vec{r}') = 0$. En lugar de integrar las contribuciones de todos los dipolos infinitesimales, como en la ecuación 7.6, buscamos las **cargas ligadas**, y luego calculamos el campo que estas producen.

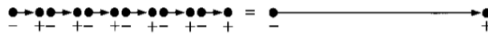
La carga total de polarización en el dieléctrico es cero (debido a la ley de conservación de la carga). Esto se puede comprobar usando el teorema de la divergencia, pues:

$$\oint_{S'} \vec{P}(\vec{r}') \cdot d\vec{S}' = \int_{V'} \nabla' \cdot \vec{P}(\vec{r}') d\tau' \Rightarrow \oint_{S'} \sigma_p(\vec{r}') dS' + \int_{V'} \rho_p(\vec{r}') d\tau' = 0$$

7.2.2 Interpretación física de las cargas de frontera

Algunos autores dan la impresión de que las cargas de frontera son, en algún sentido, ficticias, que se trata de una herramienta que facilita el cálculo de campos. Nada más lejos de la realidad: ρ_b y σ_b representan perfectamente auténticas acumulaciones de carga.

Suponga que tenemos una cadena de dipolos como en la figura. A lo largo de la línea, la cabeza de uno de los dipolos es cancelado por la cola del dipolo vecino, pero en los extremos hay dos cargas sobrantes: positiva a la izquierda y negativa a la derecha. Llamamos a la carga neta de los extremos cargas de frontera.

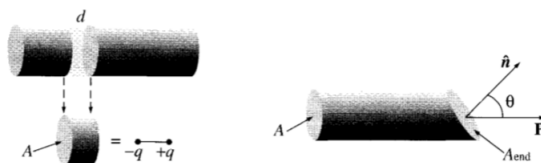


Para calcular la cantidad de carga de frontera resultante de una polarización se examina un cilindro de un dieléctrico paralelo a \vec{P} . El momento dipolar de un pequeño trozo mostrado en la figura es $P(Ad)$, donde A es el área de la sección transversal del tubo y d es la longitud de trozo. En términos de la carga (q) en los extremos, este mismo momento dipolar puede escribirse como qd . La carga de frontera que se acumula en el extremo derecho del tubo es entonces

$$q = PA$$

Si el corte es perpendicular, la densidad de carga superficial es

$$\sigma_b = \frac{q}{A} = P$$



Para un corte oblicuo, la carga sigue siendo la misma, pero $A = A_{end} \cos\theta$, entonces

$$\sigma_b = \frac{q}{A_{end}} = P \cos\theta = \vec{P} \cdot \hat{n}$$

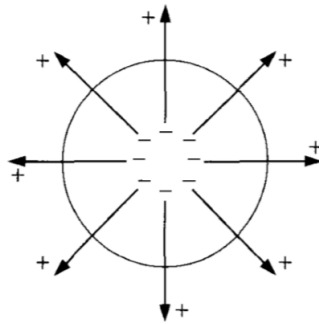
El efecto de la polarización, entonces, es producir una carga de frontera $\sigma_b = \vec{P} \cdot \hat{n}$ sobre la superficie del material.

Si la polarización no es uniforme tenemos acumulaciones de carga de frontera tanto en el material como en la superficie. Una mirada a la figura sugiere que una divergencia \vec{P} resulta en una acumulación de carga negativa. De acuerdo con esto, la carga de frontera neta $\int \rho_b d\tau$ en un volumen dado es igual y opuesta a la cantidad que ha sido empujada hacia la superficie. El segundo es $\vec{P} \cdot \hat{n}$ por unidad de área, entonces

$$\int_V \rho_b d\tau = - \oint_S \vec{P} \cdot d\vec{a} = - \int_V (\nabla \cdot \vec{P}) d\tau$$

Ya que esto es cierto para cualquier volumen, tenemos

$$\rho_b = -\nabla \cdot \vec{P}$$



7.2.3 El campo dentro de un dieléctrico

He sido descuidado sobre la distinción entre dipolos "puros" y "físicos". En el desarrollo de la teoría de cargas ligadas, asumimos que estábamos trabajando con dipolos puros; se comenzó con la ecuación 7.5, la fórmula para un potencial de un dipolo puro. Un dieléctrico polarizado consiste en diminutos dipolos físicos. Es más, se representó dipolos moleculares discretos por una función de densidad continua \vec{P} . ¿Cómo puedo justificar este método? Fuera del dieléctrico no hay problema; lejos de las moléculas (donde R es mucho más grande que la distancia de separación entre las cargas positivas y negativas), el potencial dipolar y la "granulación" detallada de la fuente es nublado por la distancia. Dentro del dieléctrico, sin embargo, es difícil pretender estar lejos de todos los dipolos, por lo que el procedimiento antes empleado parece ser erróneo.

De hecho, el verdadero campo microscópico es demasiado caótico e imposible de calcular. Ignorando las propiedades microscópicas de las moléculas podemos definir un campo macroscópico. Este se define como el campo promedio de regiones suficientemente grandes como para contener varios miles de átomos.

El campo macroscópico es el que obtenemos cuando usamos los métodos anteriormente expuestos. Supongamos que queremos calcular el campo macroscópico en un punto \vec{r} dentro de un dieléctrico. Sabemos que debemos promediar el verdadero campo microscópico sobre un volumen apropiado, por lo que dibujamos una pequeña esfera en \vec{r} , contenida en el dieléctrico, de radio R_e (miles de veces el tamaño de una molécula). Entonces, el campo macroscópico en \vec{r} consiste en dos partes: el campo promedio sobre la esfera debido a todas las cargas externas, más el campo promedio de todas las cargas internas:

$$\vec{E} = \vec{E}_{out} + \vec{E}_{in}$$

El campo promedio sobre una esfera producido por las cargas externas, es igual al campo que producen situadas en el centro, por lo que \vec{E}_{out} es el campo en \vec{r} debido a los dipolos fuera de la esfera. Estos se encuentran lo suficientemente alejados como para emplear 7.6:

$$V_{out} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{out} \frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\tau' \quad (7.11)$$

Los dipolos dentro de la esfera están demasiado cerca como para tratarlos de esta manera. Pero afortunadamente, todo lo que necesitamos es su campo promediado, que, de acuerdo con la ecuación ??, es

$$\vec{E}_{in} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}}{R_e^3}$$

independientemente de los detalles de la distribución de carga dentro de la esfera. La única cantidad relevante es el momento dipolar total, $\vec{p} = (\frac{4}{3}\pi R_e^3)\vec{P}$:

$$\vec{E}_{in} = -\frac{1}{3\epsilon_0}\vec{P} \quad (7.12)$$

Asumiendo que la esfera es lo suficientemente pequeña como para que \vec{P} no varíe significativamente sobre el volumen, entonces sale fuera de la integral en 7.11. Desarrollando, el resultado tiene la misma forma que 7.12, por lo que el campo macroscópico total viene dado por el potencial

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\tau' \quad (7.13)$$

donde se integra sobre to el volumen del dieléctrico. Este es el que hemos empleado en secciones anteriores; sin darnos cuenta, estábamos calculando el campo macroscópico promedio.

7.3 Desplazamiento eléctrico

7.3.1 Ley de Gauss en presencia de dieléctricos

En la sección anterior vimos que la polarización produce acumulaciones de carga de frontera, $\rho_b = -\nabla \cdot \vec{P}$ dentro del dieléctrico y $\sigma_b = \vec{P} \cdot \hat{n}$ en la superficie. El campo generado por el medio polarizado es tan solo el campo de su carga de frontera. Pongámoslo todo junto: el campo atribuido a la carga de frontera mas el campo producido por todo lo demás (por la **carga libre- free charge**). La carga libre es toda la carga que no es resultado de la polarización. Entonces, la densidad de carga total del dieléctrico puede escribirse como:

$$\rho = \rho_b + \rho_f, \quad (7.14)$$

que, junto con la ley de Gauss

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \rho = \rho_b + \rho_f = -\nabla \cdot \vec{P} + \rho_f$$

donde \vec{E} es el campo total. Es conveniente combinar los dos términos de divergencia:

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_f$$

La expresión dentro del paréntesis se designa por la letra \vec{D} ,

$$\vec{D} \equiv \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad (7.15)$$

es conocido como **desplazamiento eléctrico**. En términos de \vec{D} , la ley de Gauss se lee

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f \quad (7.16)$$

o, en su forma integral,

$$\oint_{S'} \vec{D} \cdot d\vec{S}' = Q_{f_{enc}} \quad (7.17)$$

donde $Q_{f_{enc}}$ denota la carga libre total encerrada en el volumen. Esta es una manera muy útil de expresar la ley de Gauss, en el contexto de dieléctricos, porque hace referencia solo a la carga libre, que es lo que controlamos. En particular, siempre que haya simetría, se puede calcular \vec{D} por los métodos estándar de la ley de Gauss.

7.3.2 Un paralelismo engañoso

La ecuación 7.16 se ve exáctamente como la ley de Gauss, solo que la densidad de carga ρ es reemplazada por la densidad de carga libre ρ_f , y $\epsilon_0 \vec{E}$ es sustituido por \vec{D} . Por esta razón podrías verte tentado a concluir que \vec{D} es exáctamente como \vec{E} , excepto que su fuente es ρ_f en vez de ρ . Entonces, para resolver problemas deberíamos olvidarnos de la carga de frontera y calcular \vec{D} como se haría con \vec{E} . Esto daría conclusiones falsas, porque no existe ley de Coulomb para \vec{D} :

$$\vec{D}(\vec{r}) \neq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_f(\vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\tau'$$

El paralelismo entre \vec{E} y \vec{D} es más sutil que esto. Solo la divergencia es insuficiente para determinar un campo vectorial; necesitas saber el rotacional también. Uno tiende a olvidar esto en el caso del campo eléctrico porque su rotacional es siempre cero. Pero el rotacional de \vec{D} no siempre es cero

$$\nabla \times \vec{D} = \epsilon_0(\nabla \times \vec{E}) + (\nabla \times \vec{P}) = \nabla \times \vec{P} \quad (7.18)$$

y no hay razón, en general, para suponer que el rotacional de \vec{P} es nulo. Como $\nabla \times \vec{D} \neq 0$, \vec{D} no puede ser expresado como el gradiente de un escalar, es decir, no hay un potencial para \vec{D} . Si el rotacional del vector desplazamiento no se anula, entonces las fuentes de \vec{D} no son solo las cargas libres.

Cuando tengas que computar el desplazamiento eléctrico, primero busca por simetría. Si el problema presenta simetría esférica, cilíndrica, o plana, entonces puedes obtener \vec{D} directamente de la ecuación 7.17 a partir de las cargas libres por los métodos usuales de la ley de Gauss.

7.4 Dieléctricos lineales

7.4.1 Relación constitutiva. Susceptibilidad, permitividad y constante dieléctrica

En secciones anteriores omitimos la causa de \vec{P} , solo nos ocupamos de los efectos de la polarización. Sabemos que la polarización de un dieléctrico resulta de un campo eléctrico, que alinea los dipolos atómicos. Para muchas sustancias la polarización es proporcional al campo:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \quad (7.19)$$

La constante de proporcionalidad, χ_e , es llamada **susceptibilidad eléctrica del medio** (el factor ϵ_0 se añade para hacer a χ_e adimensional). El valor de χ_e depende de la estructura microscópica de la sustancia en cuestión (y también de las condiciones externas como la temperatura). Llamaremos a los materiales que obedecen la ecuación 7.19 **dieléctricos lineales e isótropos**.

Nota que \vec{E} en la ecuación 7.19 es el campo total; el generado en parte por las cargas libres y por otra parte por la polarización. Si, por ejemplo, ponemos un dieléctrico dentro de un campo eléctrico externo \vec{E}_0 , no podemos computar \vec{P} directamente de la ecuación (7.19); el campo eléctrico externo polarizará el material, y esta polarización producirá su propio campo, que contribuirá al campo total, modificando la polarización.

En un medio lineal tenemos

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi_e \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E}, \quad (7.20)$$

entonces \vec{D} también es proporcional a \vec{E} :

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (7.21)$$

donde

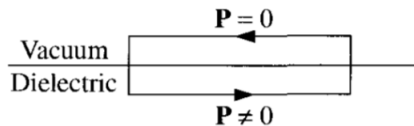
$$\epsilon \equiv \epsilon_0 (1 + \chi_e) \quad (7.22)$$

Esta nueva constante ϵ es llamada **permitividad** de la materia. En el vacío, donde no hay materia que polarizar, la susceptibilidad es cero, y la permitividad es ϵ_0 . Si eliminamos el factor ϵ_0 , la cantidad adimensional sobrante

$$\epsilon_r \equiv 1 + \chi_e = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \quad (7.23)$$

se denomina **permitividad relativa**, o **constante dieléctrica**, de un material. Siempre $\chi_e > 0$, puesto que los dipolos se orientan en la dirección y sentido del campo eléctrico \vec{E} . Por tanto, $\epsilon_r > 1$ y $\epsilon > \epsilon_0$.

Podría suponer que los dieléctricos lineales escaparían del defecto en el paralelismo entre \vec{E} y \vec{D} . Ya que \vec{P} y \vec{D} son ambos proporcionales a \vec{E} , ¿No significaría que sus rotacionales deberían de desaparecer? Esto no ocurre; para la integral de \vec{P} alrededor de un camino cerrado que abarca la frontera entre un tipo de material y otro es distinto de cero, incluso si la integral de \vec{E} alrededor del mismo círculo debe serlo. La razón es que el factor de proporcionalidad $\epsilon_0 \chi_e$ es diferente en cada lado. Por ejemplo, en la separación entre un dieléctrico polarizado y el vacío (figura), \vec{P} es cero en uno de los lados pero no en el otro. Alrededor del camino $\oint \vec{P} \cdot d\vec{l} \neq 0$, y por lo tanto, por el teorema de Stokes, el rotacional de \vec{P} no puede ser cero en todo el loop (de hecho, es infinito en la frontera).



Por supuesto, si el espacio está enteramente lleno de un dieléctrico lineal homogéneo, entonces no hay problema alguno. En estas circunstancias

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f \quad y \quad \nabla \times \vec{D} = 0,$$

entonces \vec{D} puede obtenerse de la carga libre como si el dieléctrico no estuviera ahí presente:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}_0$$

donde \vec{E}_0 es el campo que la misma distribución de carga libre produciría en la ausencia de un dieléctrico. De acuerdo con la ecuación (7.21) y (7.23), entonces

$$\vec{E} = \frac{1}{\epsilon} \vec{D} = \frac{1}{\epsilon_r} \vec{E}_0 \quad (7.24)$$

7.4.2 Condiciones de frontera

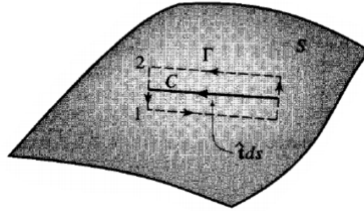
Debido a que el campo \vec{E} es irrotacional, la componente tangencial del campo electrostático es continua al atravesar la frontera entre dos medios. Consideremos la superficie S de separación entre dos medios 1 y 2, y una trayectoria cerrada Γ como en la figura. La línea C tiene todos sus puntos en dicha superficie.

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = 0 \Rightarrow \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

En el límite en que la longitud de las líneas de Γ perpendiculares a la superficie S tiende a cero, las líneas de Γ paralelas a S tienden a la línea C, y se tiene, para cualquier línea C en la frontera:

$$\int_C (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot d\vec{l} \vec{u}_t = 0 \Rightarrow \vec{E}_2 \cdot \vec{u}_t - \vec{E}_1 \cdot \vec{u}_t = 0 \quad (7.25)$$

\vec{u}_t un vector unitario tangencial a la superficie frontera en la dirección de C.



Para la componente normal se emplea la segunda figura junto con la ley de Gauss:

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E}_2 \cdot \hat{n} - \vec{E}_1 \cdot \hat{n} = \frac{\sigma_f + \sigma_p}{\epsilon_0} \quad (7.26)$$

donde \vec{n} es un vector unitario perpendicular a la superficie frontera en el sentido de 1 a 2.

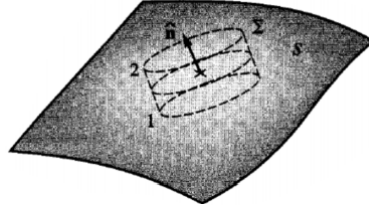
Debido a que $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f$, la componente normal del campo \vec{D} es continua al atravesar la superficie frontera entre dos medios salvo que exista carga libre en dicha superficie. Consideremos la superficie S de separación entre dos medios 1 y 2, y un volumen en forma de pastilla encerrado por una superficie Σ como en la figura. Siempre tendremos:

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = Q_f$$

En el límite en que las caras de Σ paralelas a la superficie S se acercan a S y la superficie lateral tiende a cero,

$$\begin{aligned} \vec{D}_2 \cdot dS \vec{n} - \vec{D}_1 \cdot dS \vec{n} &= \sigma_f dS \\ \vec{D}_2 \cdot \vec{n} - \vec{D}_1 \cdot \vec{n} &= \sigma_f \end{aligned} \quad (7.27)$$

donde \vec{n} es un vector unitario perpendicular a la superficie frontera en el sentido de 1 a 2.



(cambiar)mientras que la ecuación (7.18) y el teorema de Stokes da la discontinuidad de las componente paralelas

$$\nabla \times \vec{D} = \nabla \times \vec{P} \Rightarrow \oint_{\Gamma} \vec{D} \cdot d\vec{l} = \oint_{\Gamma} \vec{P} \cdot d\vec{l} \Rightarrow$$

Análogamente como se hizo con el rotacional de \vec{E}

$$\oint_C (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot d\vec{l} \vec{u}_t = \oint_C (\vec{P}_2 - \vec{P}_1) \cdot d\vec{l} \vec{u}_t$$

$$\vec{D}_2 \cdot \vec{u}_t - \vec{D}_1 \cdot \vec{u}_t = \vec{P}_2 \cdot \vec{u}_t - \vec{P}_1 \cdot \vec{u}_t \Rightarrow D_2^{\parallel} - D_1^{\parallel} = P_2^{\parallel} - P_1^{\parallel} \quad (7.28)$$

En un dieléctrico lineal homogéneo la densidad de carga de frontera (ρ_b) es proporcional a la densidad de carga libre (ρ_f):

$$\rho_b = -\nabla \cdot \vec{P} = -\nabla \cdot \left(\epsilon_0 \frac{\chi_e}{\epsilon} \vec{D} \right) = - \left(\frac{\chi_e}{1 + \chi_e} \right) \rho_f \quad (7.29)$$

En particular, si la carga libre se encuentra incrustada en el material, y además $\rho = 0$, entonces cualquier carga neta debe residir en la superficie. Por lo que, si dentro de un dieléctrico se cumple $\rho = 0$, entonces el potencial obedece la ecuación de Laplace. Es conveniente reescribir las condiciones de frontera de tal forma que solo haga referencia a la carga libre. Sustituyendo (7.21) en la ecuación (7.27)

$$\epsilon_2 \vec{E}_2 \cdot \vec{n} - \epsilon_1 \vec{E}_1 \cdot \vec{n} = \sigma_f \quad (7.30)$$

o, en términos del potencial

$$\epsilon_2 \frac{\partial V_2}{\partial n} - \epsilon_1 \frac{\partial V_1}{\partial n} = -\sigma_f \quad (7.31)$$

Como ya se dedujo, el potencial es continuo a través de cualquier superficie (3.5):

$$V_2 = V_1 \quad (7.32)$$

7.5 Energía en sistemas dieléctricos

Partiendo de la ecuación (4.4), donde la integral de volumen está extendida a todo el espacio. La expresión sugiere que la energía está localizada en los puntos donde hay carga. Supongamos de momento que las cargas están en el vacío. A partir de la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

se multiplica ambos lados por V

$$\rho V = -\epsilon_0 (\nabla^2 V) V = -\epsilon_0 \nabla \cdot (V \nabla V) + \epsilon_0 (\nabla V)^2$$

y por tanto:

$$U = -\frac{1}{2} \int \epsilon_0 \nabla \cdot (V \nabla V) d\tau + \frac{1}{2} \int \epsilon_0 (\nabla V)^2 d\tau$$

Finalmente, usando el teorema de la divergencia en la primera integral:

$$U = -\frac{1}{2} \oint \epsilon_0 (V \nabla V) d\tau + \frac{1}{2} \int \epsilon_0 (\nabla V)^2 d\tau$$

donde la primera integral es cero, pues la superficie cerrada se extiende al infinito, encerrando todo el espacio, y en todos sus puntos el integrando se anula porque $V = 0$ en el infinito. Entonces

$$U = \frac{1}{2} \int \epsilon_0 E^2 d\tau$$

que nos dice que la energía está asociada al campo. Sea la **densidad de energía electrostática** definida como $u = \frac{dU}{d\tau} = \frac{U}{\tau}$, entonces, la densidad de energía electrostática en el vacío será:

$$u_0 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$$

De forma análoga, en presencia de medios materiales se obtiene:

$$U = \frac{1}{2} \int \varepsilon E^2 d\tau = \frac{1}{2} \int \vec{D} \cdot \vec{E} d\tau \quad (7.33)$$

con ε la permitividad en cada punto del espacio. La segunda expresión, más general, es válida también para el caso en que la permitividad no sea un escalar (medios anisótropos). Podemos definir

$$u = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}$$

como la densidad de energía electrostática en presencia de medios materiales.

Consideremos un condensador, un sistema formado por dos conductores con cargas Q y $-Q$, y a potenciales V_2 y V_1 respectivamente ($V_2 > V_1$). Como solo existe carga en la superficie de los conductores, la ecuación (4.4) resulta

$$U = \frac{1}{2} \int \sigma V dS = \frac{1}{2} \int_{S_2} \sigma V_2 dS - \frac{1}{2} \int_{S_1} \sigma V_1 dS$$

Como las superficies son equipotenciales, estas salen de sus integrales

$$U = \frac{1}{2} Q(V_2 - V_1) = \frac{1}{2} QV$$

con $V \equiv V_2 - V_1$

$$U = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CV^2$$

Otra forma de obtener este resultado para la energía del condensador es calcular el trabajo necesario para cargar el condensador con una carga Q . Para llevar un dQ' desde el conductor 1 al 2, el trabajo necesario es:

$$dW = V dQ' = \frac{Q'}{C} dQ'$$

y el trabajo total necesario para cargarlo con carga Q es

$$U = \int_0^Q \left(\frac{Q'}{C} dQ' \right) = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CV^2$$

Si entre los conductores o placas del condensador hay un dieléctrico de constante dieléctrica ε_r , la capacidad será

$$C_d = \varepsilon_r C_0$$

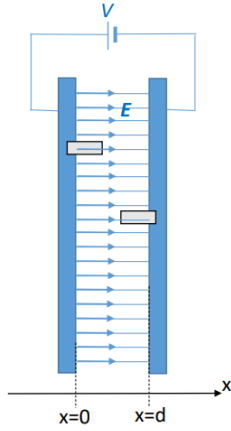
y la energía almacenada en el condensador para una determinada diferencia de potencial V será un factor ε_r mayor que la del condensador en el vacío:

$$U = \frac{1}{2} C_d V^2$$

y un factor ε_r menor que la del condensador en el vacío para una determinada carga Q en los conductores

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_d}$$

Problema 1: Campo creado por dos conductores planos, paralelos, separados una distancia d , en el vacío, y cuya superficie S es grande, $S \gg d^2$, de forma que podemos despreciar efectos de borde, si los conectamos a una batería que mantiene una diferencia de potencial V entre ellos. Hallar la capacidad del condensador.



Por simetría, los campos \vec{E} y \vec{D} deben tener la dirección del eje x . Empezamos calculando el potencial a partir de la definición del potencial de un condensador:

$$V = V_+ - V_- = V(0) - V(d) = - \int_d^0 \vec{E} \cdot d\vec{x} = Ed \Rightarrow \vec{E} = \frac{V}{d} \vec{u}_x$$

y vector desplazamiento en el vacío será $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$. Por el teorema de Gauss, (7.17), obtenemos que:

$$\text{La carga libre superficial en } x = 0 \text{ es } \sigma_f(0) = \sigma_f = \epsilon_0 E$$

$$\text{y la carga libre superficial en } x = d \text{ es } \sigma_f(d) = -\sigma_f = -\epsilon_0 E$$

Se define la capacidad de un condensador, en este caso en vacío, como

$$C_0 = \frac{Q_f}{V} = \frac{S\sigma_f}{Ed} = \epsilon_0 \frac{S}{d}$$

Si existe un dieléctrico de permitividad ϵ entre las placas:

$$V = V(0) - V(d) = - \int_d^0 \vec{E} \cdot d\vec{x} = Ed \Rightarrow \vec{E} = \frac{V}{d} \vec{u}_x$$

Aplicando el teorema de Gauss, (7.17), obtenemos que:

$$\text{La carga libre superficial en } x = 0 \text{ es } \sigma_f(0) = \sigma_f = \epsilon E$$

$$\text{y la carga libre superficial en } x = d \text{ es } \sigma_f(d) = -\sigma_f = -\epsilon E$$

La capacidad del condensador, en este caso, será:

$$C = \frac{Q_f}{V} = \frac{S\sigma_f}{Ed} = \epsilon \frac{S}{d}$$

$C > C_0$ porque $\epsilon > \epsilon_0$. Teniendo en cuenta que $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0$, entonces

$$C = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{S}{d} = \epsilon_r C_0$$

En este caso, además de tener carga libre en el condensador también habrá carga de polarización en el dieléctrico. El vector polarización es

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E} = (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E}$$

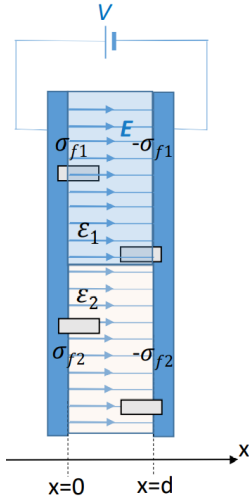
La densidad de carga polarizada será, según (7.8),

$$\sigma_p(0) = -\sigma_p = -(\epsilon - \epsilon_0)E \quad \text{en } x = 0, \text{ y}$$

$$\sigma_p(d) = \sigma_p = (\epsilon - \epsilon_0)E \quad \text{en } x = d.$$

Además, como \vec{E} es constante, también lo será \vec{P} , y, por tanto, según la expresión (??), la densidad de carga de polarización en volumen es cero.

Problema 2: determinar los campos \vec{E} y \vec{D} en el interior de un condensador plano paralelo en cuyo interior existen 2 medios dieléctricos uniformes de permitividades ε_1 y ε_2 y la capacidad para cada caso.



En el primer caso se tiene un capacitor conectado a una batería que suministra cierto potencial V . En su interior se encuentran dos dieléctricos separados verticalmente de permitividad ε_1 y ε_2 . Por simetría, los campos \vec{E} y \vec{D} deben tener la dirección del eje x . El potencial del condensador será, por definición

$$V = V(0) - V(d) = - \int_d^0 \vec{E} \cdot d\vec{x} = Ed \Rightarrow \vec{E} = \frac{V}{d} \vec{u}_x$$

tanto en un medio como en el otro (porque el potencial es el mismo en ambos medios porque viene suministrado por la batería). En el exterior el campo \vec{E} es cero. El desplazamiento es $\vec{D}_1 = \varepsilon_1 \vec{E}$ y $\vec{D}_2 = \varepsilon_2 \vec{E}$. Aplicando el teorema de Gauss obtenemos que la carga libre en $x = 0$ es

$$\begin{aligned} \sigma_{f1}(0) &= \sigma_{f1} = D_1 = \varepsilon_1 E = \varepsilon_1 V/d \\ \sigma_{f2}(0) &= \sigma_{f2} = D_2 = \varepsilon_2 E = \varepsilon_2 V/d \end{aligned}$$

y la carga libre en $x = d$ es igual pero negativa. La carga libre total situada en $x = 0$ es $Q_f = Q_{f1} + Q_{f2} = S_1 \sigma_{f1} + S_2 \sigma_{f2}$. Para la capacidad del condensador:

$$C = \frac{Q_f}{V} = \frac{S_1 \varepsilon_1 E + S_2 \varepsilon_2 E}{Ed} = \varepsilon \frac{S_1}{d} + \varepsilon_2 \frac{S_2}{d} = C_1 + C_2$$

En el segundo caso se tiene un capacitor conectado a una batería que suministra cierto potencial V . En su interior se encuentran dos dieléctricos separados horizontalmente de permitividad ε_1 y ε_2 . Por simetría los campos \vec{E} y \vec{D} deben tener la dirección del eje x . El potencial del capacitor de la izquierda es:

$$V = V(0) - V(d) = - \int_d^0 \vec{E} \cdot d\vec{x} = - \int_d^t \vec{E}_2 \cdot d\vec{x} - \int_t^0 \vec{E}_1 \cdot d\vec{x} = E_1 t + E_2 (d - t)$$

Según la condición de frontera $\vec{D}_2 \cdot \hat{n} = \vec{D}_1 \cdot \hat{n}$ ya que en $(x = t)$ no hay carga libre, por lo que $D_1 = D_2$. Entonces $\vec{D}_1 = \vec{D}_2 = \vec{D}$. Aplicando el teorema de Gauss se obtiene que la carga libre en $x = 0$ y en $x = d$ es, respectivamente:

$$\begin{aligned} \sigma_f(0) &= +\sigma_f = D \\ \sigma_f(d) &= -\sigma_f = -D \end{aligned}$$

La carga es igual en módulo pero de sentido contrario en las placas. El campo eléctrico en ambas regiones

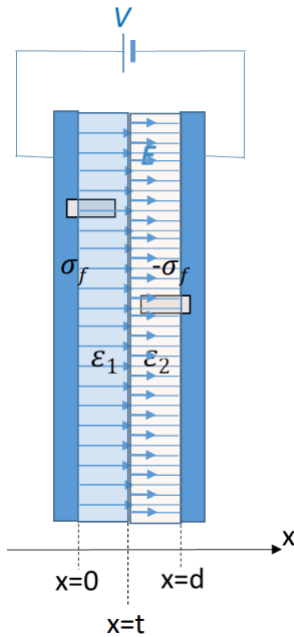
$$\begin{aligned} \vec{E}_1 &= \frac{\vec{D}_1}{\varepsilon_1} = \frac{D}{\varepsilon_1} \vec{u}_x = \frac{\sigma_f}{\varepsilon_1} \vec{u}_x \\ \vec{E}_2 &= \frac{\vec{D}_2}{\varepsilon_2} = \frac{D}{\varepsilon_2} \vec{u}_x = \frac{\sigma_f}{\varepsilon_2} \vec{u}_x \end{aligned}$$

sustituyendo en la expresión de V

$$V = \frac{\sigma_f}{\varepsilon_1} t + \frac{\sigma_f}{\varepsilon_2} (d - t)$$

y la capacidad del condensador:

$$\frac{1}{C} = \frac{V}{Q} = \frac{\frac{\sigma_f}{\varepsilon_1} t + \frac{\sigma_f}{\varepsilon_2} (d - t)}{S \sigma_f} = \frac{t}{\varepsilon_1 S} + \frac{d - t}{\varepsilon_2 S} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$



Problema 3: Hallar la energía electrostática del condensador

En el primer caso el condensador está conectado a una batería que suministra una diferencia de potencial constante V . Inicialmente su interior es vacío. Entonces, como ya se calculó

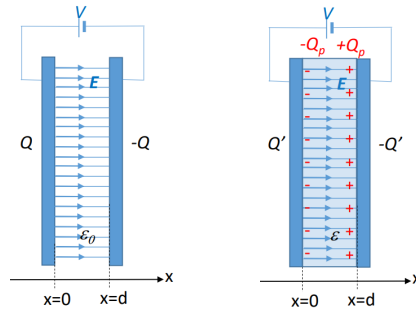
$$D = \epsilon_0 E = \epsilon_0 \frac{V}{d}, \quad Q = DS, \quad C_0 = \frac{Q}{V} = \epsilon_0 \frac{S}{d} \quad y \quad U_0 = \frac{1}{2} C_0 V^2$$

Al introducir un dieléctrico la carga de las placas aumenta para compensar las cargas de polarización y mantener el potencial V constante y, por tanto, en este caso, el campo eléctrico constante.

$$P = \epsilon_0 \chi \frac{V}{d}, \quad Q' = Q + Q_p = C_0 V + PS = \epsilon_0 \frac{S}{d} V + \epsilon_0 \chi \frac{V}{d} S \quad y \quad C_d = \frac{Q'}{V} = \epsilon_0 (1 + \chi) \frac{S}{d} = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{S}{d} = \epsilon \frac{S}{d}$$

y la energía electrostática será

$$U = \frac{1}{2} C_d V^2 = \epsilon_r U_0$$



En este segundo caso, lo que se mantiene constante es la carga en los conductores. Inicialmente su interior es vacío. Entonces, como ya se calculó

$$D = \epsilon_0 E = \epsilon_0 \frac{V}{d}, \quad C_0 = \frac{Q}{V} = \epsilon_0 \frac{S}{d} \quad y \quad U_0 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_0}$$

Al introducir el dieléctrico la diferencia de potencial (y por lo tanto el campo eléctrico) entre las placas disminuye debido a las cargas de polarización. Como la carga libre se mantiene constante el vector desplazamiento no varía.

$$D = \epsilon E' = \epsilon \frac{V'}{d}, \quad P = \epsilon_0 \chi E' = \epsilon_0 \chi \frac{V'}{d}$$

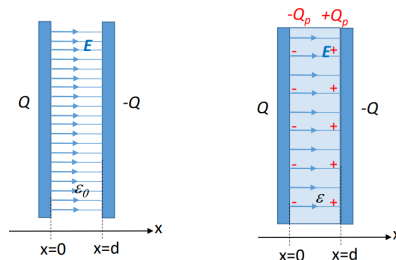
Comparando los vectores desplazamiento

$$\left. \begin{aligned} D &= \epsilon_0 E = \epsilon_0 \frac{V}{d} \\ D &= \epsilon E' = \epsilon \frac{V'}{d} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \epsilon_0 V = \epsilon V' \Rightarrow V' = \frac{\epsilon_0}{\epsilon} V$$

$$C_d = \frac{Q}{V'} = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} C_0 = \epsilon \frac{S}{d}$$

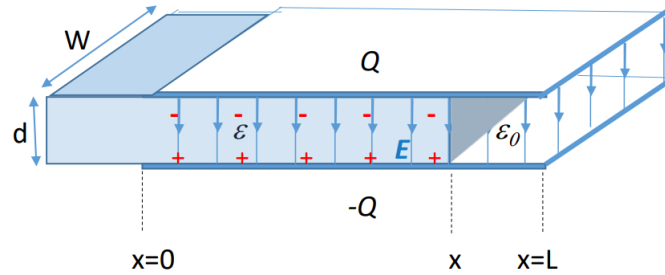
y la energía electrostática será

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_d} = \frac{U_0}{\epsilon_r}$$



7.5.1 Fuerzas en dieléctricos

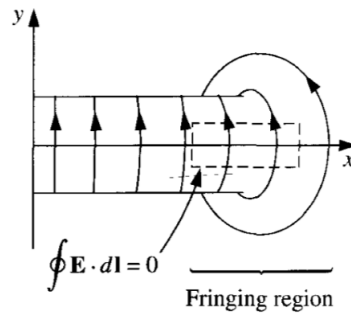
Al igual que un conductor es atraído por un campo eléctrico, también lo hace un dieléctrico: la carga ligada tiende a acumularse cerca de la carga libre del signo opuesto.



Considere un condensador plano paralelo parcialmente relleno con un dieléctrico lineal (figura). Entonces su capacidad será

$$C = \epsilon \frac{Wx}{d} + \epsilon_0 \frac{W(L-x)}{d}$$

Siempre hemos simulado que el campo es uniforme dentro del capacitor y cero en el exterior. Si esto fuera literalmente cierto, no habría ninguna fuerza resultante en el dieléctrico, ya que el plano sería perpendicular a las láminas. Sin embargo, en realidad hay un **fringing fiel** (fig) entorno a los bordes, que en este caso no puede ser ignorado. Es este fringing field el que tira el dieléctrico hacia dentro del capacitor.



Los fringing fields son difíciles de calcular; por suerte, podemos evitarlos con un ingenioso método.

Si el condensador está aislado, y por tanto la carga es constante en las placas, la variación en la energía electrostática al desplazar el dieléctrico hacia el exterior un dx hasta $x - dx$ es igual a menos el trabajo realizado por la fuerza electrostática:

$$dU = -\vec{F}_e \cdot d\vec{x} \Rightarrow \vec{F}_e = -\nabla U|_{Q=cte}$$

Como la energía electrostática es $U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$, se obtiene

$$\vec{F}_e = -\nabla U|_{Q=cte} = \frac{1}{2} \frac{Q^2 d}{W} \frac{(\epsilon - \epsilon_0)}{(\epsilon x + \epsilon_0(L-x))^2} = \frac{1}{2} \frac{W}{d} (\epsilon - \epsilon_0) V^2$$

La fuerza disminuye con x . El signo positiva indica que el dieléctrico es tirado hacia el interior del capacitor.

Si el condensador está conectado a una batería que mantiene constante la ddp entre sus placas, la variación en la energía electrostática al mover el dieléctrico un dx hasta $x - dx$ es igual a menos el trabajo realizado por la fuerza electrostática más el trabajo realizado por la batería ($dQ V$) para mantener V constante:

$$dU = dQ V - \vec{F}_e \cdot d\vec{x}$$

En este caso $U = \frac{1}{2} QV \Rightarrow dU = \frac{1}{2} dQ V + \frac{1}{2} Q dV$. Sustituyendo:

$$dU = 2dU - \vec{F}_e \cdot d\vec{x} \Rightarrow \vec{F}_e = \nabla U|_{V=cte}$$

Desarrollando el gradiente se obtiene:

$$\vec{F}_e = \nabla U|_{V=cte} = \frac{1}{2} \frac{W}{d} (\epsilon - \epsilon_0) V^2$$

Esta expresión es la misma que a Q constante, pero con V constante la fuerza no depende de x .

Date cuenta que hemos sido capaces de determinar la fuerza sin saber nada acerca de los fringing field que son los responsables de esta. La energía almacenada en los fringing fields se mantiene constante con el movimiento del dieléctrico; lo que cambia es la energía dentro del capacitor, donde el campo es uniforme.

Nota: Estas expresiones no son válidas si x está próximo a los bordes 0 o L debido a los efectos de borde.