Geometría diferencial

Uneducated_Physicist

Contents

1 Teoría de curvas

1.1 $\mathbb{R}^n$ y propiedades

1.1.1 Espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$

Se define $\mathbb{R}^n$ como el **espacio vectorial** formado por los elementos (vectores) de la forma

$$\mathbb{R}^n = \{\vec{x} \equiv (x_1, \ldots, x_n) \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

La **base canónica** de $\mathbb{R}^n$ es

$$\vec{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \quad \vec{e}_1 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \quad \ldots, \quad \vec{e}_n = (0, \ldots, 0, 1)$$

Cualquier vector de $\mathbb{R}^n$ se puede expresar en esta base (y en cualquier base de $\mathbb{R}^n$)

$$\vec{x} \equiv (x_1, \ldots, x_n) = x_1\vec{e}_1 + \ldots + x_n\vec{e}_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\, \vec{e}_i$$

Se puede definir un **producto escalar** en $\mathbb{R}^n$ según:

$$\left.\begin{array}{r} \vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \\ \vec{y} = (y_1, \ldots, y_n) \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \vec{x} \cdot \vec{y} = x_1\, y_1 + \ldots + x_n\, y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i$$

Debido a las propiedades del producto escalar, es posible definir una norma (euclídea) asociada a él

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

También podemos definir la **distancia** entre dos puntos (representados por vectores) de $\mathbb{R}^n$ mediante

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

Por último, se define el **ángulo** θ entre dos vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$

$$cos\, \theta = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\|\, \|\vec{y}\|}$$

La base canónica de $\mathbb{R}^n$ verifica

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$$

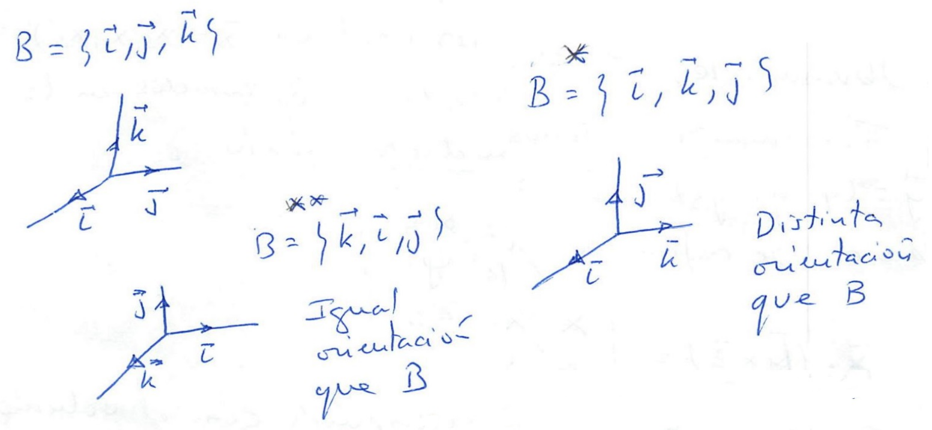
Toda base de $\mathbb{R}^n$ que verifique esta propiedad se denomina **base ortonormal**.

Los elementos de una base se dan en forma ordenada. Esto nos lleva al concepto de **orientación** de una base. Dadas dos bases de $\mathbb{R}^n$ $\;B = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ y $B^* = \{\vec{e}_1^{\,*}, \ldots, \vec{e}_n^{\,*}\}$, diremos que tienen la misma orientación si el determinante de la matriz de cambio de base es positivo.

$$\vec{e}_i^{\,*} = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\vec{e}_j$$

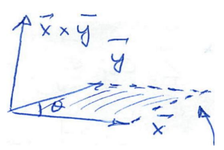
B y B^* igual orientación $\Leftrightarrow det(c_{ij}) > 0$

-Ejemplo ($\mathbb{R}^3$)



Las bases con igual orientación pueden transformarse entre ellas mediante un movimiento rígido (rotación).

1.1.2 Producto vectorial y mixto (n=3)



En $\mathbb{R}^3$, se define el **producto vectorial** de dos vectores $\vec{x} = \sum_{i=1}^{3} x_i \, \vec{e}_i$, $\vec{y} = \sum_{i=1}^{3} y_i \, \vec{e}_i$

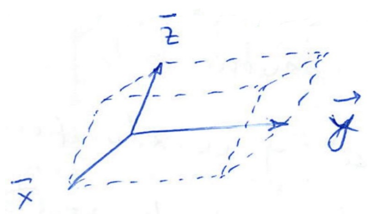
$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

donde $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Geométricamente representa un vector perpendicular al plano que contiene los vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$. El valor absoluto del producto vectorial es

$$\|\vec{x} \times \vec{y}\| = \|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\| \, sen \, \theta$$

donde $\|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\|$ es el área del paralelogramo. Además, se puede ver a simple vista que

$$\vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x}$$



Finalmente, dados los vectores $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$, $\vec{z} = (z_1, z_2, z_3)$ (expresados en la base canónica) se define su **producto mixto** como

$$\vec{x} \cdot (\vec{y} \times \vec{z}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

Geométricamente se corresponde con el volumen (con signo) del paralelepípedo de lados $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$.

1.1.3 Isometrías de $\mathbb{R}^n$

Una **isometría** en $\mathbb{R}^n$ es una transformación (aplicación)

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ \vec{x} &\to T\,\vec{x} \end{aligned}$$

que conserva las distancias, es decir

$$d(T\vec{x}, T\vec{y}) = d(\vec{x}, \vec{y}) \quad \forall \, \vec{x}, \, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$$

Las isometrías en $\mathbb{R}^n$ son: traslaciones, rotaciones o reflexiones, así como composición de un número finito de ellas. El conjunto de isometrías se denomina **grupo de isometría**. Las isometrías en $\mathbb{R}^n$ se pueden escribir como

$$T\vec{x} = R\,\vec{x} + \vec{b}$$

donde $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ es un vector constante y R es una matriz ortogonal. En esta ecuación se expresa $\vec{x}$ y $\vec{b}$ como vectores columna. Las propiedades de R (matriz ortogonal) son:

- Por definición $\quad R\,R^T = \mathbb{I} \;\Rightarrow\; det\,R = \pm 1$
- Conserva el producto escalar $\quad (R\,\vec{x})\cdot(R\,\vec{y}) = \vec{x}\cdot\vec{y}$
- R transforma bases ortogonales en bases ortogonales, pero puede cambiar su orientación si det(R)$= -1$

Si $\vec{b} = \vec{0}$, se tiene el subgrupo de isometrías formado por las transformaciones ortogonales $O(n)$. El grupo de rotaciones (det (R)$= +1$) es un subgrupo de $O(n)$ y se denomina grupo especial ortogonal $SO(n)$.

$$G_{iso} > O(n) > SO(n)$$

1.2 Curvas parametrizadas

1.2.1 Parametrización

Una **curva parametrizada** es una aplicación

$$\begin{aligned} \vec{x} : I \subseteq \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^n \\ t &\to \vec{x}(t) \end{aligned}$$

donde $\vec{x}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ (La base empleada es la canónica), I es un intervalo de $\mathbb{R}$ y las funciones $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ son **funciones continuas** en I.

Dado que estamos interesados en calcular derivadas de $\vec{x}$ con respecto a t, es conveniente imponer condiciones más estrictas a las componentes $x_1(t), \ldots, x_n(t)$. Una curva parametrizada se dice **de clase** C^r con I intervalo abierto, si $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ son funciones de clase C^r en I.

Dada una curva parametrizada llamamos **curva asociada C** a la imagen de la curva parametrizada (como conjunto de $\mathbb{R}^n$).

Dada una curva parametrizada $\vec{x}(t)$ de clase C^r, $r \geq 1$, definimos su **velocidad** como la derivada de $\vec{x}(t)$ con respecto a t.

$$\vec{v}(t) = \vec{x}\,'(t) = \frac{d\,\vec{x}(t)}{d\,t} \quad \Rightarrow \quad \vec{x}\,'(t) = (x_1'(t), \ldots, x_n'(t))$$

Una curva paramétrica de clase C^r, $r \geq 1$, se dice **regular** si su velocidad no se anula. Sea $\vec{x}(t) : I \to \mathbb{R}^n$ de clase C^r, $r \geq 1$ entonces

$$\vec{x}\,'(t) = (x_1'(t), \ldots, x_n'(t)) \neq \vec{0}, \quad \forall t \in I \;\; abierto$$

Su interpretación geométrica es el vector tangente a la curva en el punto t.

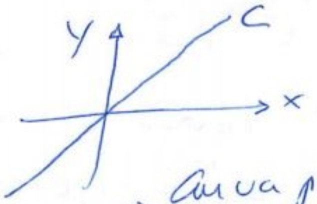
Una curva parametrizada puede no ser regular por dos causas: la curva (imagen) tenga un pico o la parametri zación usada no sea buena aún siendo la curva suave.

Nota: Si al derivar un vector solo derivamos las componentes, estamos suponiendo que la base no depende del tiempo

$$\vec{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i(t)\,\vec{e}_i \qquad \{\vec{e}_i\} \text{ base canónica} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{v}(t) = \frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{dx_i(t)}{dt}\,\vec{e}_i + \sum_{i=1}^{n} x_i(t)\,\frac{d\vec{e}_i}{dt}$$

Ejemplo 1

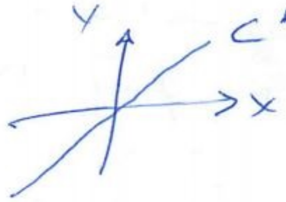
$\vec{x}(t) = (t, t), \quad t \in \mathbb{R}$



$\vec{x}'(t) = (1, 1) \neq (0, 0), \quad \forall t \in \mathbb{R} \implies$ Curva parametrizada regular

Ejemplo 2

$\vec{x}(t) = (t^5, t^5), \quad t \in \mathbb{R}$



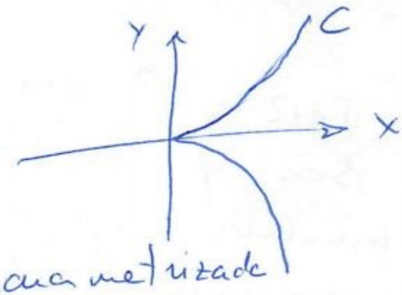
Misma imagen que en 1

$\vec{x}'(t) = (5t^4, 5t^4), \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Pero $\vec{x}'(0) = (0, 0) \implies$ Curva parametrizada no regular en $t = 0$

Ejemplo 3

$\vec{x}(t) = (t^2, t^3), \quad t \in \mathbb{R}$



$\vec{x}'(t) = (2t, 3t^2), \quad t \in \mathbb{R}$

$\vec{x}'(0) = (0, 0) \implies$ Curva parametrizada no regular en $t = 0$

Motivo: En $(0, 0)$ la curva tiene un "pico".

1.2.2 Reparametrización

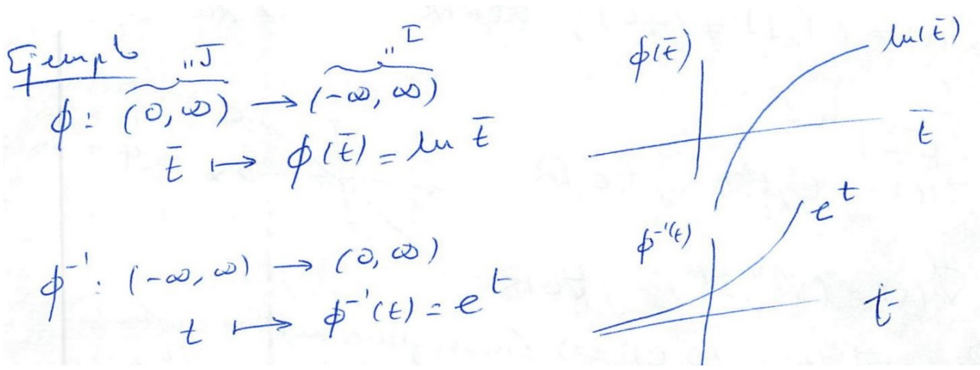
Recordemos el concepto de **difeomorfismo** entre intervalos en $\mathbb{R}$. Dados 2 intervalos abiertos $I \subset \mathbb{R}$ y $J \subset \mathbb{R}$, decimos que

$$\begin{aligned} \phi : J &\to I \\ \bar{t} &\to \phi(\bar{t}) \end{aligned}$$

es un difeomorfismo si es una aplicación que verifica

- ϕ es biyectiva
- $\phi \in C^\infty(J)$
- $\phi^{-1} \in C^\infty(I)$

Por el teorema de la función inversa, si $\phi(t)$ es un difeomorfismo, $\phi'(\bar{t}) \neq 0, \ \forall \bar{t} \in J$

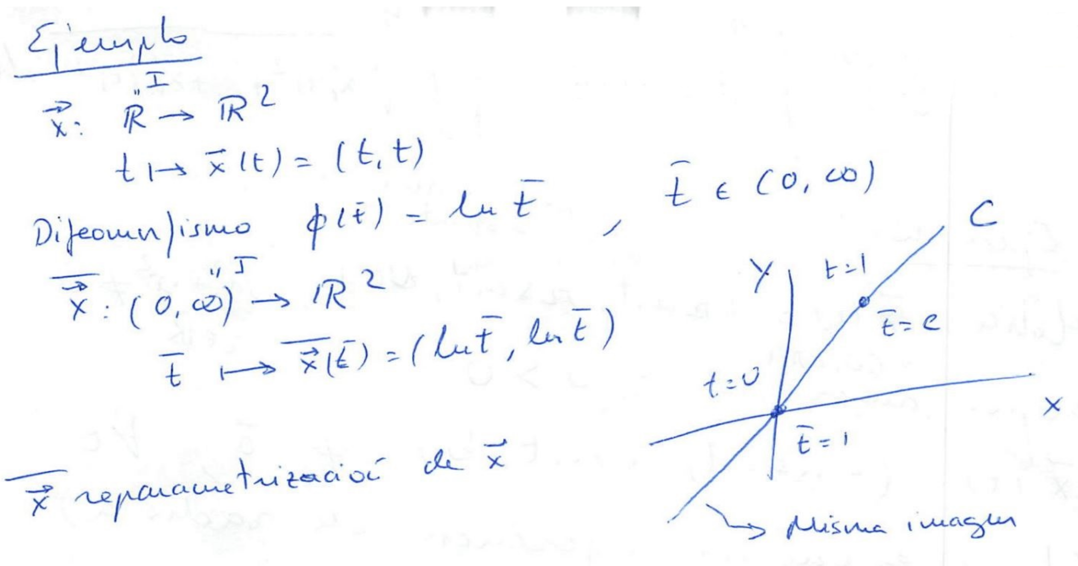


ϕ es un difeomorfismo.

Sea $\vec{x} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una curva parametrizada regular. Sea $\phi : J \subseteq \mathbb{R} \to I \subseteq \mathbb{R}$ un difeomorfismo. Llamamos **reparametrización** de $\vec{x}(t)$ con el difeomorfismo $\phi(\bar t\,)$ a la curva parametrizada regular

$$\begin{aligned} \overline{\vec{x}} : J \subset \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^n \\ \bar t &\to \overline{\vec{x}}(\bar t\,) = \vec{x}(\phi(\bar t\,)) \end{aligned}$$

Como se puede observar, una reparametrización no es más que cambiar la variable t en la curva parametrizada por una función $\phi(\bar t\,)$ de otro parámetro $\bar t$ tal que ϕ es un difeomorfismo. Esencialmente es cambiar la forma en la que se recorre la curva, es decir cambiar la velocidad en la que se recorre; el vector tangente tendrá la mis dirección pero distinto módulo y , quizá, en sentido opuesto.



Dado que ϕ es un difeomorfismo el signo de su derivada no cambia en J. Así tenemos dos posibilidades:

- $\phi'(\bar t\,) > 0, \ \forall\, \bar t \in J \quad \Rightarrow \quad$ La reparametrización conserva la orientación en que se recorre la curva
- $\phi'(\bar t\,) < 0, \ \forall\, \bar t \in J \quad \Rightarrow \quad$ La reparametrización invierte la orientación en que se recorre la curva

1.3 Longitud de arco

1.3.1 Longitud de arco de una curva

Sea $\vec{x} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una curva parametrizada de clase C^r, $r \geq 1$, I intervalo abierto. Dado el intervalo $[a, b] \subset I$, definimos la longitud del arco de una curva comprendida entre $\vec{x}(a)$ y $\vec{x}(b)$ mediante

$$\boxed{l = \int_a^b \|\vec{x}\,'(t)\|\, dt = \int_a^b \sqrt{x_1'^2(t) + \ldots + x_n'^2(t)}\; dt}$$

donde el vector está expresado en una base ortonormal constante.

Ejemplo

Hélice $\vec{x}(t) = (r\cos t, r\sin t, vt)$, $r^2+v^2 \neq 0$, $t\in\mathbb{R}$

$t\in[0,2\pi] = [a,b]$

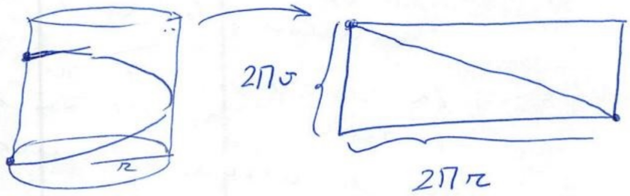
Supongamos que $r, v > 0$

$\vec{x}\,'(t) = (-r\sin t, r\cos t, v) \neq \vec{0}, \quad \forall t$

($v = 0$ es una circunferencia de radio r)

$\|\vec{x}\,'(t)\| = \sqrt{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t + v^2} = \sqrt{r^2+v^2}$

$\Rightarrow l = \int_{a=0}^{b=2\pi} \sqrt{r^2+v^2}\,dt = \sqrt{r^2+v^2}\,(b-a) = 2\pi\sqrt{r^2+v^2}$ Para $a=0$, $b=2\pi$



Veremos que esto está relacionado con el concepto de geodésica. Las hélices son geodésicas en el cilindro y las rectas en el plano.

1.3.2 Invariancia de la longitud de arco bajo isometrías en $\mathbb{R}^n$ y bajo reparametrizaciones

Cuando hagamos una transformación que implique "mirar la curva desde fuera" usaremos $\sim$ para la transformación; cuando hagamos una transformación que implique "mirar la curva desde dentro" (reparametrizaciones) usaremos - para la transformación.

Isometrías

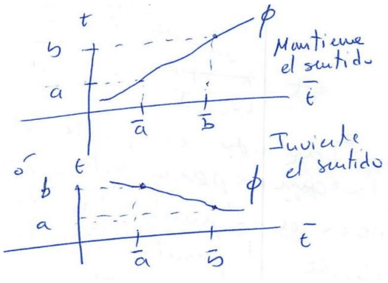
$$T : \vec{x}\,(t) \to \tilde{\vec{x}}\,(t) = R\,\vec{x}\,(t) + \vec{b}, \quad R \ ortogonal \ (R\,R^T = \mathbb{I})$$

$$l = \int_a^b \|\vec{x}\,'(t)\|\,dt$$

$$\tilde{l} = \int_a^b \|\,\tilde{\vec{x}}\,'(t)\|\,dt = \int_a^b \|R\,\vec{x}\,'(t)\|\,dt = \int_a^b \|\vec{x}\,'(t)\|\,dt = l$$

donde hemos empleado el siguiente argumento: el módulo de un vector es invariante bajo rotaciones. Entonces, la longitud de arco es invariante bajo isometrías en $\mathbb{R}^n$.

Reparametrizaciones



Sea una reparametrización

$$\vec{x}(t) \to \overline{\vec{x}}(\,\bar{t}\,) = \vec{x}(\phi(\,\bar{t}\,))$$

donde ϕ es un difeomorfismo $\phi : J \to I$.

$$\begin{cases} \bar{a} = min(\phi^{-1}(a),\, \phi^{-1}(b)) \\ \bar{b} = max(\phi^{-1}(a),\, \phi^{-1}(b)) \end{cases}$$

$$l = \int_a^b \|\vec{x}\,'(t)\|\, dt \qquad \bar{l} = \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} \|\bar{\vec{x}}\,'(\bar{t}\,)\|\, d\bar{t}$$

empleando la regla de la cadena

$$\bar{\vec{x}}\,'(\bar{t}\,) = \underbrace{\vec{x}\,'(\phi(\bar{t}\,))}_{d\vec{x}/dt}\, \underbrace{\phi'(\bar{t}\,)}_{d\phi/dt}$$

entonces

$$\|\bar{\vec{x}}\,'(\bar{t}\,)\| = \|\vec{x}\,'(\phi(\bar{t}\,))\|\, |\phi'(\bar{t}\,)|$$

Ahora calculamos la longitud de arco de una reparametrización

$$\bar{l} = \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} \|\vec{x}\,'(\phi(\bar{t}\,))\|\, |\phi'(\bar{t}\,)|\, d\bar{t} = \int_a^b \|\vec{x}\,'(t)\|\, dt = l$$

donde hemos empleado el cambio de variable $t = \phi(\bar{t}\,)$ y la derivada $\dfrac{dt}{d\bar{t}} = \dfrac{d}{d\bar{t}}\phi(\bar{t}\,) = \phi'(\bar{t}\,) \;\Rightarrow\; dt = \phi'(\bar{t}\,)\, d\bar{t}$

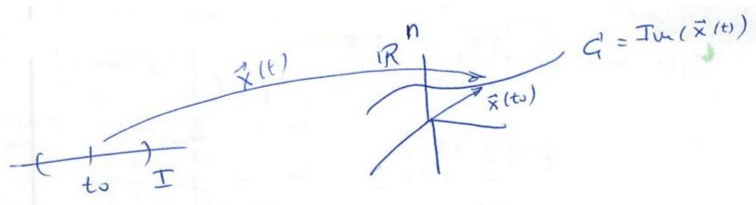
Entonces, la longitud de arco es invariante bajo reparametrizaciones. Esto quiere decir que la longitud de arco es una propiedad geométrica de la curva.

1.3.3 Parámetro natural de una curva

Consideremos una curva parametrizada regular de clase C^r, $r \geq 1$:

$$\begin{aligned} \vec{x} : I \subseteq \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^n \\ t &\to \vec{x}(t) \end{aligned}$$

con I intervalo abierto. Sea $t_0 \in I$



Teniendo en cuenta el sentido en que se recorre la curva para esta parametrización, podemos usar como parámetro la distancia (con signo) desde el punto $\vec{x}(t_0)$ a un punto genérico de la curva $\vec{x}(t)$

$$s_{t_0}(t) = \int_{t_0}^{t} \|\vec{x}\,'(t^*)\|\, dt^*$$

(Nota: Técnicamente, la variable de integración debe llamarse con otro nombre distinto al del límite superior de integración. En la práctica se abusa de la notación y se emplea el mismo nombre)

Obviamente, esta distancia depende de t_0 pero es solo una traslación del origen de medida por lo que no se suele indicar. A veces no se indica la dependencia en t y se escribe como

$$\boxed{s = \int_{t_0}^{t} \|\vec{x}\,'(t^*)\|\, dt^*}$$

Ejemplo (hélice):

$$\vec{x}(t) = (3\,cos\,t, 3\,sen\,t, 4\,t) \quad t_0 = 0$$

$$s = \int_0^t 5\, d\,t^* = 5\,t$$

donde $s = \bar{t}$. Entonces, despejando $t = \dfrac{1}{5}s = \phi(\bar{t}\,)$

$$\bar{\vec{x}}(s) = \left(3\,cos\left(\frac{s}{5}\right), 3\,sen\left(\frac{s}{5}\right), \frac{4}{5}s\right)$$ □

En general, no es posible reparametrizar una curva de forma explícita usando la longitud de arco como parámetro (porque no se pueden hacer las integrales o no se puede invertir la relación explícitamente). El parámetro s se denomina **parámetro natural**.

Notación: Dada una curva parametrizada $\vec{x}(t)$, regular de clase C^r, $r \geq 1$. Si la reparametrizamos usando el parámetro natural s deberíamos cambiar la notación a $\overline{\vec{x}}(s)$. Normalmente obviaremos la raya que indica la reparametrización y escribiremos simplemente $\vec{x}(s)$. Además, las derivadas con respecto al parámetro natural las indicaremos con un punto

$$\begin{cases} \vec{x}(t) & \rightarrow & \vec{x}\,'(t) = \dfrac{d\vec{x}(t)}{dt} \\[2ex] \vec{x}(s) & \rightarrow & \dot{\vec{x}}(s) = \dfrac{d\vec{x}(s)}{ds} \end{cases}$$

En el parámetro natural la velocidad es un vector unitario tangente sobre toda la curva

$$\dot{\vec{x}}(s) = \frac{d\vec{x}(s)}{ds} = \frac{d\vec{x}(t)}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\|\vec{x}\,'(t)\|}\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \frac{1}{\|\vec{x}\,'(t)\|}\vec{x}\,'(t) \quad \text{Vector Unitario}$$

donde hemos empleado $1/(ds/dt) = 1/\|\vec{x}\,'(t)\|$ entonces

$$\boxed{\|\dot{\vec{x}}(s)\| = 1, \ \ \forall\, s}$$

1.4 Curvaturas para una curva en $\mathbb{R}^n$

1.4.1 Sistema ortonormal de Frenet

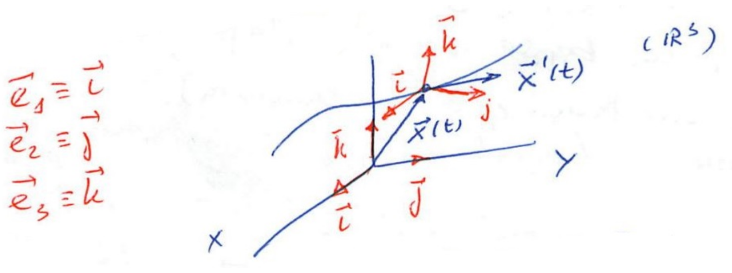
Cuando escribimos una curva parametrizada damos sus componentes en la base canónica (cartesiana) de $\mathbb{R}^n$

$$\vec{x}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)) = \sum_{i=1}^{n} x_i(t)\,\vec{e}_i \qquad \{\vec{e}_i\} \text{ base canónica cartesiana (b.c.c)}$$

Cuando consideramos su velocidad, también lo expresamos en esa base constante

$$\vec{x}\,'(t) = (x_1'(t), \ldots, x_n'(t)) = \sum_{i=1}^{n} x_i'(t)\,\vec{e}_i$$

y al representarlos, los aplicamos a puntos distintos (vectores móviles)



Mientras el vector de posición se aplica en el origen, la velocidad se aplica en el punto de la curva. Y cuando la expresamos en la base canónica es como si pusiéramos la base sobre el punto de la curva. A medida que nos movemos sobre la curva, vamos vamos moviendo la base (que no cambia de orientación) sobre la curva. En realidad, podríamos escoger cualquier otra base ortonormal móvil. Nos interesaría la base que mejor se "ajuste/pegue" a la curva. Es lo que se conoce como el **sistema de referencia de Frenet**. La idea es similar a la del desarrollo de Taylor para aproximar una función en un punto. Así usaremos las (n-1) primeras derivadas de la curva parametrizada y el método de ortonormalización de Gram-Schmidt.

Método de Gram-Schmidt

Sea $\vec{x}: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una curva parametrizada regular de clase C^r, $r \geq n-1$. Supongamos que $\vec{x}\,'(t)$, $\vec{x}\,''(t)$, ... , $\vec{x}^{(n-1)}(t)$ son linealmente independientes para un t dado. A esos vectores les aplicamos el método de Gram-Schmidt fabricando vectores ortonormales $\vec{e}_1^{\,*}(t), \ldots, \vec{e}_{n-1}^{\,*}(t)$ y añadimos $\vec{e}_n^{\,*}(t)$ ortogonal a los otros n-1, unitario y de forma que la base sea orientada positivamente (misma orientación que la canónica).

El primer vector generador o ”pata” de la base es el vector unitario tangente a la curva, es decir, se forma a partir de la primera derivada de $\vec{x}$

$$\vec{e}_1^{\,*} = \frac{\vec{x}\,'}{\|\vec{x}\,'\|}$$

la segunda pata se forma a partir de la segunda derivada de $\vec{x}$ eliminando la componente de la primera pata para que sean ortogonales

$$\vec{v}_2 = \vec{x}\,'' - (\vec{e}_1^{\,*} \cdot \vec{x}\,'')\,\vec{e}_1^{\,*} \quad \to \quad \vec{e}_2^{\,*} = \frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|}$$

donde $(\vec{e}_1^{\,*} \cdot \vec{x}\,'')\,\vec{e}_1^{\,*}$ es la componente de $\vec{x}\,''$ en la dirección de $\vec{e}_1^{\,*}$

$$\vec{v}_3 = \vec{x}\,''' - (\vec{e}_1^{\,*} \cdot \vec{x}\,''')\,\vec{e}_1^{\,*} - (\vec{e}_2^{\,*} \cdot \vec{x}\,''')\,\vec{e}_2^{\,*} \quad \to \quad \vec{e}_3^{\,*} = \frac{\vec{v}_3}{\|\vec{v}_3\|}$$

obteniendo de forma análoga los primeros n-1 patas, siendo la n-1

$$\vec{v}_{n-1} = \vec{x}^{\,(n-1)} - (\vec{e}_1^{\,*} \cdot \vec{x}^{\,(n-1)})\,\vec{e}_1^{\,*} - \ \ldots\ - (\vec{e}_{n-2}^{\,*} \cdot \vec{x}^{\,(n-1)})\,\vec{e}_{n-2}^{\,*} \quad \to \quad \vec{e}_{n-1}^{\,*} = \frac{\vec{v_{n-1}}}{\|\vec{v}_{n-1}\|}$$

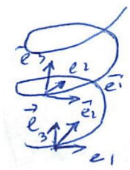
La ultima pata, $\vec{e}_n^{\,*}$, se elige tal que:

- $\|\vec{e}_n^{\,*}\| = 1$
- $\vec{e}_n^{\,*} \cdot \vec{e}_i^{\,*} = 0, \quad i = 1, \ldots, n-1$
- La base $\{\vec{e}_1^{\,*}, \ldots, \vec{e}_n^{\,*}\}$ sea orientada positivamente

Ejemplo:

$\vec{x}(t) = (cos\,t, sen\,t, t)$ en $\mathbb{R}^3$ (hélice)

$\vec{x}\,'(t) = (-sen\,t, cos\,t, 1) \to \vec{e}_1^{\,*}(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-sen\,t, cos\,t, 1)$



$\vec{x}\,''(t) = (-cos\,t, -sen\,t, 0) \ \Rightarrow\ \vec{v}_2 = \vec{x}\,'' - (\vec{e}_1^{\,*} \cdot \vec{x}\,'')\,\vec{e}_1^{\,*} = \vec{x}\,''(t) = (-cos\,t, -sen\,t, 0)$

entonces $\vec{e}_2^{\,*}(t) = (-cos\,t, -sen\,t, 0)$

$\vec{e}_3^{\,*} = \vec{e}_1^{\,*} \times \vec{e}_2^{\,*} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(sen\,t, -cos\,t, 1)$. (En $\mathbb{R}^3$ tenemos el producto vectorial)

□

1.4.2 Curvaturas

A partir de este punto se deja de utilizar el asterisco para denotar a los vectores generadores de la base de Frenet. ¿Cómo varían los vectores de la base ortonormal al movernos por la curva?

$$\{\vec{e}_1(t), \ldots, \vec{e}_n(t)\} \ \text{ base ortogonal de Frenet} \quad \Rightarrow \quad \vec{e}_i\,'(t) = \sum_{j=1}^{n} \omega_{ij}(t)\,\vec{e}_j(t)$$

entonces

$$\boxed{\omega_{ij}(t) = \vec{e}_i\,'(t) \cdot \vec{e}_j(t)}$$

Como $\vec{e}_i(t) \cdot \vec{e}_j(t) = \delta_{ij}, \ \forall\, t$, su derivada

$$\vec{e}_i\,'(t) \cdot \vec{e}_j(t) + \vec{e}_i(t) \cdot \vec{e}_j\,'(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_{ij}(t) = -\omega_{ji}(t)$$

Esto significa que (ω_{ij}) es una matriz antisimétrica. Además, por construcción de la base, $\vec{e}_1$ contiene $\vec{x}\,'$, $\vec{e}_2$ contiene $\vec{x}\,'$ y $\vec{x}\,''$, $\vec{e}_3$ contiene $\vec{x}\,'$, $\vec{x}\,''$ y $\vec{x}\,'''$, y así sucesivamente; por lo que $\vec{e}_1\,'$ contiene $\vec{x}\,'$ y $\vec{x}\,''$, $\vec{e}_1\,'$ contiene $\vec{x}\,'$, $\vec{x}\,''$ y $\vec{x}\,'''$ (contiene la derivada de orden $i+1$) y así sucesivamente. Así que,

$$\vec{e}_i\,' = \alpha(t)\,\vec{e}_{i+1}(t) + \beta(t)\,\vec{e}_i(t) + \gamma(t)\,\vec{e}_{i-1}(t) + \sum_{p=1}^{i-2} \eta_p(t)\,\vec{e}_p(t)$$

Recordando que $\vec{e}_i(t)$ es unitario y por lo tanto su derivada será ortogonal $\Rightarrow$ $\vec{e}_i(t)\cdot\vec{e}_i(t)\,' = 0$ $\Rightarrow$

$$\beta(t) = \vec{e}_i\,'\cdot\vec{e}_i(t) = \omega_{ii}(t) = 0, \quad y \quad \alpha(t) = \vec{e}_i\,'\cdot\vec{e}_{i+1}(t) = \omega_{i,i+1}(t)$$

Entonces, por la condición de antisimetría $\quad \omega_{i,i+1}(t) = -\omega_{i,i-1}(t) \;\Rightarrow\; \alpha(t) = -\gamma(t)$

Además, para $k > i+1$ $\;\vec{e}_i\,'\!\cdot\vec{e}_k(t) = \omega_{ik} = 0$, y, por la condición de antisimetría, $k < i+1$ $\;\vec{e}_i\,'\!\cdot\vec{e}_k(t) = \omega_{ik} = 0$. Por tanto, $\omega_{ij} = 0$, si $j > i+1$. Recopilando todo nos queda

$$\vec{e}_i\,' = \omega_{i,i+1}(t)\,\vec{e}_{i+1}(t) - \omega_{i,i-1}(t)\,\vec{e}_{i-1}(t)$$

Así tenemos el sistema matricial

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1\,' \\ \vec{e}_2\,' \\ \vec{e}_3\,' \\ \vdots \\ \vec{e}_n\,' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} & \cdots & 0 \\ 0 & -\omega_{23} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \\ \vdots \\ \vec{e}_n \end{pmatrix}$$

Todos los elementos son nulos salvo dos diagonales. Hay n-1 cantidades independientes $\omega_{12}, \omega_{23}, \ldots, \omega_{n-1,n}$.

¿Son las $\omega_{ij}(t)$ cantidades geométricas de la curva? Es decir, ¿Son invariantes bajo isometrías y reparametrizaciones?

Isometrías

$$\begin{aligned} \vec{x} : I \subset \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^n \\ t &\to \vec{x}(t) \end{aligned} \qquad \text{con } \{\vec{e}_1(t), \ldots, \vec{e}_n(t)\} \text{ sistema de Frenet}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\vec{x}} : I \subseteq \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^n \\ t &\to \tilde{\vec{x}}(t) = R\,\vec{x}(t) + \vec{b} \end{aligned} \qquad \text{con } \{\tilde{\vec{e}}_1(t), \ldots, \tilde{\vec{e}}_n(t)\} \text{ sistema de Frenet}$$

R matriz ortonormal y $\vec{b}$ vector constante.

$$\tilde{\vec{x}}^{(k)}(t) = R\,\vec{x}^{\,k}(t), \qquad k = 1, \ldots, n-1$$

Supongamos ahora que la isometría es una rotación. Entonces $\vec{b} = 0$ y $det\,R > 0$. La base de Frenet bajo una rotación será

$$\tilde{\vec{e}}_1(t) = R\,\vec{e}_1(t),\; \tilde{\vec{e}}_2(t) = R\,\vec{e}_2(t),\; \ldots,\; \tilde{\vec{e}}_{n-1}(t) = R\,\vec{e}_{n-1}(t), \text{ y como } det\,R > 0 \quad\Rightarrow\quad \tilde{\vec{e}}_n(t) = R\,\vec{e}_n(t).$$

Si el determinante de R fuera negativo habría que añadir un signo negativo $\tilde{\vec{e}}_n(t) = -R\,\vec{e}_n(t)$. Las derivadas primeras de las patas son

$$\tilde{\vec{e}}_i\,'(t) = R\,\vec{e}_i\,'(t) \quad\Rightarrow\quad \tilde{\omega}_{ij}(t) = \tilde{\vec{e}}_i\,'(t)\cdot\tilde{\vec{e}}_j(t) = R\,\vec{e}_i\,'(t)\cdot R\,\vec{e}_j(t) = \vec{e}_i\,'(t)\cdot\vec{e}_j(t) = \omega_{ij}(t)$$

Donde hemos empleado la propiedad $R\,R^T = \mathbb{I}$, o físicamente hablando, si se coge el producto escalar de dos vectores y los rotas igual el producto escalar no cambia, es decir, $R\,\vec{e}_i\,'(t)\cdot R\,\vec{e}_j(t) = \vec{e}_i\,'(t)\cdot\vec{e}_j(t)$. Las $\omega_{ij}(t)$ son invariantes bajo rotaciones en $\mathbb{R}^n$.

Reparametrizaciones

$$\begin{aligned} \vec{x} : I \subset \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^n \\ t &\to \vec{x}(t) \end{aligned} \qquad \text{con} \quad \{\vec{e}_1(t), \dots, \vec{e}_n(t)\} \quad \text{sistema de Frenet}$$

$$\begin{aligned} \bar{\vec{x}} : J \subset \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^n \\ \bar{t} &\to \bar{\vec{x}}(\bar{t}\,) = \vec{x}(\phi(\bar{t}\,)) \end{aligned} \qquad \text{con} \quad \{\bar{\vec{e}}_1(t), \dots, \bar{\vec{e}}_n(t)\} \quad \text{sistema de Frenet}$$

Consideremos que $\phi'(\bar{t}\,) > 0$, $\forall\, \bar{t} \in J$. Ahora solo queda construir la base. Como normalizamos a 1 se ve que las bases son iguales salvo que con otro parámetro

$$\bar{\vec{e}}_1(\bar{t}\,) = \frac{\bar{\vec{x}}\,'(\bar{t}\,)}{\|\bar{\vec{x}}\,'(\bar{t}\,)\|} = \frac{\vec{x}\,'(\phi(\bar{t}\,))\,\phi'(\bar{t}\,)}{\|\vec{x}\,'(\phi(\bar{t}\,))\|\,|\phi'(\bar{t}\,)|} = \vec{e}_1(\phi(\bar{t}\,))$$

En conclusión, (aunque no vayamos a demostrarlo)

$$\bar{\vec{e}}_i(\bar{t}\,) = \vec{e}_i(\phi(\bar{t}\,)), \qquad \bar{\vec{e}}\,'_i(\bar{t}\,) = \vec{e}\,'_i(\phi(\bar{t}\,))\,\phi\,'(\bar{t}\,)$$

$$\bar{\omega}_{ij}(\bar{t}\,) = \bar{\vec{e}}_i\,'(\bar{t}\,) \cdot \bar{\vec{e}}_j(\bar{t}\,) = \vec{e}_i\,'(\phi(\bar{t}\,))\phi'(\bar{t}\,) \cdot \vec{e}_j(\phi(\bar{t}\,)) = \omega_{ij}(\phi(\bar{t}\,))\,\phi'(\bar{t}\,) = \omega_{ij}(t)\,\phi'(\bar{t}\,)$$

Esto quiere decir que las ω_{ij} no son invariantes bajo reparametrizaciones. Pero dado que

$$\bar{\vec{x}}\,'(\bar{t}\,) = \frac{d}{d\bar{t}}\,\bar{\vec{x}}(\bar{t}\,) = \frac{d}{d\bar{t}}\,\vec{x}(\phi(\bar{t}\,)) = \frac{d\vec{x}(\phi(\bar{t}\,))}{d\phi(\bar{t}\,)}\,\frac{d\phi(\bar{t}\,)}{d\bar{t}} = \vec{x}\,'(\phi(\bar{t}\,))\,\phi'(\bar{t}\,) = \vec{x}\,'(t)\,\phi'(\bar{t}\,)$$

$$\bar{\vec{x}}\,'(\bar{t}\,) = \vec{x}\,'(t)\,\phi'(\bar{t}\,) \quad \Rightarrow \quad \|\bar{\vec{x}}\,'(\bar{t}\,)\| = \|\vec{x}\,'(t)\|\,|\phi'(\bar{t}\,)|$$

entonces

$$\frac{\bar{\omega}_{ij}(\bar{t}\,)}{\|\bar{\vec{x}}\,'(\bar{t}\,)\|} = \frac{\omega_{ij}(t)\,\phi'(\bar{t}\,)}{\|\vec{x}\,'(t)\|\,|\phi'(\bar{t}\,)|} = \frac{\omega_{ij}(t)}{\|\vec{x}\,'(t)\|} \qquad \text{donde} \quad \phi'(\bar{t}\,) > 0.$$

Las cantidades $\omega_{ij}(t)/\|\vec{x}\,'(t)\|$ no dependen de las reparametrizaciones (ni de las isometrías). Por tanto, son propiedades geométricas. Definimos las **curvaturas** de una curva $\vec{x} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ como

$$\boxed{\kappa_i(t) = \frac{\omega_{i,i+1}(t)}{\|\vec{x}\,'(t)\|} = \frac{\vec{e}_i\,'(t) \cdot \vec{e}_{i+1}(t)}{\|\vec{x}\,'(t)\|}, \qquad i = 1, \dots, n-1}$$

siendo $\{\vec{e}_i(t)\}$ los vectores de la base ortonormal del sistema de Frenet

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1\,'(t) \\ \vec{e}_2\,'(t) \\ \vec{e}_3\,'(t) \\ \vdots \\ \vec{e}_n\,'(t) \end{pmatrix} = \|\vec{x}\,'(t)\| \begin{pmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\kappa_1 & 0 & \kappa_2 & \cdots & 0 \\ 0 & -\kappa_2 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \kappa_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & -\kappa_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1(t) \\ \vec{e}_2(t) \\ \vec{e}_3(t) \\ \vdots \\ \vec{e}_n(t) \end{pmatrix}$$

Donde las curvaturas $\kappa_i(t)$ dependen del tiempo. Si lo empresamos en función del parámetro natural

$$\text{Si} \quad t = s \;\Rightarrow\; \|\vec{x}\,'(t)\| = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\kappa_i(s) = \vec{e}_i\,'(s) \cdot \vec{e}_{i+1}(s)}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\vec{e}}_1(s) \\ \dot{\vec{e}}_2(s) \\ \dot{\vec{e}}_3(s) \\ \vdots \\ \dot{\vec{e}}_n(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\kappa_1 & 0 & \kappa_2 & \cdots & 0 \\ 0 & -\kappa_2 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \kappa_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & -\kappa_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1(s) \\ \vec{e}_2(s) \\ \vec{e}_3(s) \\ \vdots \\ \vec{e}_n(s) \end{pmatrix}$$

Dado que hemos usado el método de GS para construir el sistema de Frenet se cumple

$$\kappa_1(t) > 0, \;\dots,\; \kappa_{n-2}(t) > 0$$

y $\kappa_{n-1}(t)$ puede tener cualquier signo o anularse. (NOTA: Si no se puede construir el sistema de Frenet las $\kappa_i \quad i = 1, \ldots, n-2$ pueden anularse)

Teorema fundamental de teoría de curvas:

Si $\kappa_1(s) > 0, \ldots, \kappa_{n-2}(s) > 0, \kappa_{n-1}(s)$ están definidas en $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalo abierto existe una curva parametriza da por la longitud de arco

$$\begin{aligned} \vec{x} : I \subseteq \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^n \\ s &\to \vec{x}(s) \end{aligned}$$

con $\|\dot{\vec{x}}(s)\| = 1$, tal que las $\kappa_i(s), \ i = 1, \ldots, n-1$ son sus curvaturas.

1.4.3 Curvas en $\mathbb{R}^2$

En $\mathbb{R}^2$ las curvas solo tienen una curvatura. Para calcularla construiremos el sistema de Frenet. Sea

$$\begin{aligned} \vec{x} : I \subseteq \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\to \vec{x}(t) = (x(t), y(t)) \end{aligned}$$

una curva parametrizada regular de clase C^r, $r \geq 2$.

$$\vec{x}\,'(t) = (x'(t), y'(t)) \ \Rightarrow \ \vec{e}_1(t) = \frac{\vec{x}\,'(t)}{\|\vec{x}\,'(t)\|} = \frac{(x'(t), y'(t))}{\sqrt{x'^{\,2}(t) + y'^{\,2}(t)}}$$

Queremos calcular la curvatura

$$\kappa(t) = \frac{\vec{e}\,'_1(t) \cdot \vec{e}_2(t)}{\|\vec{x}\,'(t)\|}$$

La segunda pata debe ser perpendicular a la primera, unitaria y orientada positivamente.

$$\vec{e}_2(t) = \frac{(-y'(t), x'(t))}{\sqrt{x'^{\,2}(t) + y'^{\,2}(t)}}$$

derivamos la primera pata

$$\vec{e}\,'_1(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{x'^{\,2}(t) + y'^{\,2}(t)}}\right)(x'(t), y'(t)) + \frac{1}{\sqrt{x'^{\,2}(t) + y'^{\,2}(t)}}(x''(t), y''(t))$$

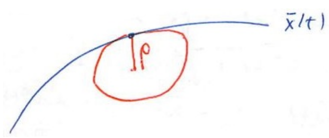
sustituyendo en la expresión de la curvatura

$$\boxed{\kappa(t) = \frac{x'(t)\, y''(t) - y'(t)\, x''(t)}{[x'^{\,2}(t) + y'^{\,2}(t)]}}$$

Radio de curvatura

Si en un punto de una curva $\kappa(t) \neq 0$, se define el **radio de curvatura** como

$$\boxed{\rho(t) = \frac{1}{|\kappa(t)|}}$$



Geométricamente, es el radio de una circunferencia que se aproxima cuadráticamente a la curva en ese punto

Parametrización natural (parámetro de arco)

Consideremos una parametrización de la curva en el parámetro natural $\vec{x}(s) = (x(s), y(s))$ (NOTA: Para saber si tenemos esta parametrización, basta comprobar que $\|\dot{\vec{x}}(s)\| = 1, \; \forall\, s$)

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{e}_1(s) = (\dot{x}(s),\, \dot{y}(s)) \\ \vec{e}_2(s) = (-\dot{y}(s),\, \dot{x}(s)) \end{array} \right.$$

Entonces, la curvatura es

$$\boxed{\kappa(s) = \vec{e}\,'_1(s) \cdot \vec{e}_2(s) = \dot{x}(s)\,\ddot{y}(s) - \dot{y}(s)\,\ddot{x}(s)}$$

Interpretación de la curvatura en $\mathbb{R}^2$

Sea $\begin{array}{r} \vec{x} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ s \to \vec{x}(s) \end{array}$ una curva parametrizada de clase $C^r, \; r \geq 2$ en términos del parámetro natural.

Denotemos por $\theta(s)$ el ángulo que forma la velocidad con el eje x. Además

$$\|\dot{\vec{x}}(s)\| = 1 \quad \Rightarrow \quad \dot{x}^2(s) + \dot{y}^2(s) = 1$$

entonces, por trigonometría

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos\theta(s) = \dot{x}(s) \\ \operatorname{sen}\theta(s) = \dot{y}(s) \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \ddot{x}(s) = -\operatorname{sen}\theta(s)\,\dot{\theta}(s) \\ \ddot{y}(s) = \cos\theta(s)\,\dot{\theta}(s) \end{array} \right.$$

$$\kappa(s) = \dot{x}(s)\,\ddot{y}(s) - \ddot{x}(s)\,\dot{y}(s) = \cos^2\theta(s)\,\dot{\theta}(s) + \sin^2\theta(s)\,\dot{\theta}(s) = \dot{\theta}(s)$$

$$\boxed{\kappa(s) = \dot{\theta}(s)}$$

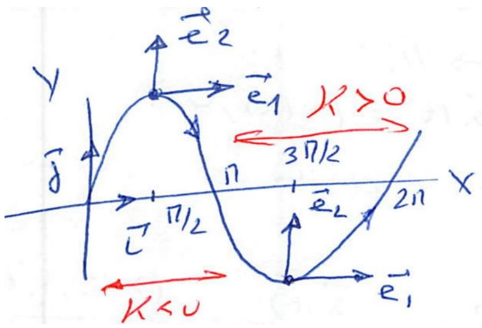
La curvatura nos da la variación del ángulo θ por longitud de arco.

Ejemplo: Sea la curva parametrizada $\vec{x}(t) = (t, \operatorname{sen} t)$ con $t \in \mathbb{R}$. La curvatura de esta curva es

$$\kappa(t) = \frac{-\operatorname{sen} t}{(1 + \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}$$

$\kappa(t)$ nos da el sentido en el que se curva la curva.

- Si $\kappa > 0$, la curva gira en el sentido que el ángulo que forma con el eje x aumenta, es decir, en el sentido que marca $\vec{e}_2$.
- Si $\kappa < 0$, la curva gira en el sentido que el ángulo que forma con el eje x disminuye, es decir, en el sentido opuesto al que marca $\vec{e}_2$.



Un punto se dice de **inflexión** si en él $\kappa = 0$ y $\kappa' \neq 0$.

Reconstrucción de una curva a partir de su curvatura (como función del parámetro natural, s)

Supongamos que conocemos $\kappa(s)$, siendo s el parámetro natural. Sabemos que

$$\dot{\theta}(s) = \kappa(s), \;\; con \; \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(s) = \cos\theta(s) \\ \dot{y}(s) = \operatorname{sen}\theta(s) \end{array} \right.$$

entonces, integando

$$\boxed{\theta(s) = \int \kappa(s)\,ds + \theta_0, \;\; con \; \left\{ \begin{array}{l} x(s) = \int \cos\theta(s)\,ds + x_0 \\ y(s) = \int \operatorname{sen}\theta(s)\,ds + y_0 \end{array} \right.}$$

donde θ_0 (libertad de rotación) y (x_0, y_0) (libertad de traslación) son constantes de integración.

1.5 Triedro de Frenet: curvas en $\mathbb{R}^3$

1.5.1 Con parámetro natural

Consideremos una curva parametrizada en función del parámetro natural de clase C^r, $r \geq 3$.

$$\begin{aligned} \vec{x} : I \subseteq \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^3 \\ s &\to \vec{x}(s) = (x(s), y(s), z(s)) \end{aligned}$$

La construcción del sistema de Frenet es sencilla ya que $\|\dot{\vec{x}}(s)\| = 1$

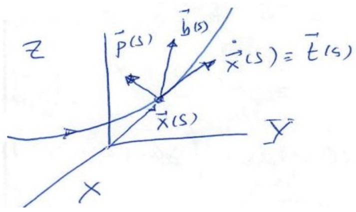
$$\boxed{\vec{e}_1 = \dot{\vec{x}}(s)} \qquad \boxed{\vec{t}(s) \equiv \vec{e}_1} \quad \textbf{Vector tangente unitario}$$

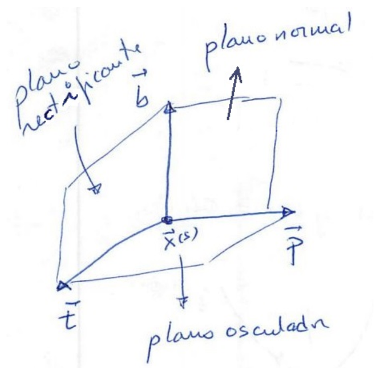
$$\boxed{\vec{e}_2 = \frac{\ddot{\vec{x}}(s)}{\|\ddot{\vec{x}}(s)\|}} \qquad \boxed{\vec{p}(s) \equiv \vec{e}_2} \quad \textbf{Vector normal principal}$$

$$\boxed{\vec{e}_3 = \vec{e}_1(s) \times \vec{e}_2(s) = \frac{\dot{\vec{x}}(s) \times \ddot{\vec{x}}(s)}{\|\ddot{\vec{x}}(s)\|}} \qquad \boxed{\vec{b}(s) \equiv \vec{e}_3} \quad \textbf{Vector binormal}$$

Sea $\vec{z} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ un punto genérico del espacio. Sea s fijo, entonces $\vec{x}(s)$ (punto de la curva en s), $\vec{t}(s)$, $\vec{p}(s)$ y $\vec{b}(s)$ son fijos. Los planos coordenados en el punto $\vec{x}(s)$ son

Plano normal:	$(\vec{z} - \vec{x}(s)) \cdot \vec{t} = 0$
Plano rectificante:	$(\vec{z} - \vec{x}(s)) \cdot \vec{p} = 0$
Plano osculador:	$(\vec{z} - \vec{x}(s)) \cdot \vec{b} = 0$





En $\mathbb{R}^3$ hay dos curvaturas:

$$\boxed{\kappa_1(s) \equiv \kappa(s) > 0} \quad \textbf{Curvatura}$$

$$\boxed{\kappa_2(s) \equiv \tau(s)} \quad \textbf{Torsión}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} \dot{\vec{t}}(s) \\ \dot{\vec{p}}(s) \\ \dot{\vec{b}}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{t}(s) \\ \vec{p}(s) \\ \vec{b}(s) \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{\vec{t}}(s) = \kappa(s)\, \vec{p}(s) \\ \dot{\vec{p}}(s) = -\kappa(s)\, \vec{t}(s) + \tau(s)\, \vec{b}(s) \\ \dot{\vec{b}}(s) = -\tau(s)\, \vec{p}(s) \end{cases}}$$

La forma explícita de la curvatura y la torsión es:

$$\kappa(s) = \kappa_1(s) = \dot{\vec{e}}_1 \cdot \vec{e}_2 = \ddot{\vec{x}} \cdot \frac{\ddot{\vec{x}}}{\|\ddot{\vec{x}}\|} = \|\ddot{\vec{x}}\| \quad \Rightarrow \quad \boxed{\kappa(s) = \|\ddot{\vec{x}}\| > 0}$$

Se puede dar otra expresión teniendo en cuenta que si $\dot{\vec{x}}$ y $\ddot{\vec{x}}$ son ortogonales y además $\|\dot{\vec{x}}\| = 1$

$$\|\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}\| = \|\dot{\vec{x}}\| \, \|\ddot{\vec{x}}\| sin\,\theta = \|\ddot{\vec{x}}\| = \kappa(s)$$

$$\boxed{\kappa(s) = \|\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}\|}$$

$\tau(s) = \kappa_2(s) = \dot{\vec{e}}_2 \cdot \vec{e}_3 \quad$ donde

$$\dot{\vec{e}}_2 = \frac{1}{\|\ddot{\vec{x}}\|}\,\dddot{\vec{x}} + \left[\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\|\ddot{\vec{x}}\|}\right)\right]\ddot{\vec{x}} = \frac{1}{\|\ddot{\vec{x}}\|}\,\dddot{\vec{x}} + \left[\|\ddot{\vec{x}}\|\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\|\ddot{\vec{x}}\|}\right)\right]\vec{e}_2$$

entonces

$$\tau(s) = \dot{\vec{e}}_2 \cdot \vec{e}_3 = \dot{\vec{e}}_2 \cdot (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) = \frac{1}{\|\ddot{\vec{x}}\|}\,\dddot{\vec{x}} \cdot (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) \Rightarrow$$

$$\boxed{\tau(s) = \frac{det(\dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}}, \dddot{\vec{x}})}{\|\ddot{\vec{x}}\|^2}}$$

Obviamente se tiene que poder construir el triedro de Frenet por lo que $\|\ddot{\vec{x}}\| \neq 0$. Podemos definir

- **Vector curvatura**: $\boxed{\vec{\kappa}(s) = \kappa(s)\,\vec{p}(s) = \ddot{\vec{x}}(s)}$
- **Centro de curvatura** (de cada punto de la curva): $\boxed{\vec{x}_{c.c}(s) = \vec{x}(s) + \dfrac{1}{\kappa(s)}\,\vec{p}(s)}$
- **Radio de curvatura**: $\boxed{\rho(s) = \dfrac{1}{\kappa(s)}}$

1.5.2 En parametrización arbitraria

Consideremos una curva parametrizada en función del parámetro t de clase C^r, $r \geq 3$.

$$\begin{aligned} \vec{x} : I \subseteq \mathbb{R} \quad &\to \mathbb{R}^3 \\ t \quad &\to \vec{x}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \end{aligned}$$

tal que admite un sistema de Frenet ($\vec{x}\,'$, $\vec{x}\,''$ linealmente independientes). Construyamos el triedro de Frenet

$\boxed{\vec{e}_1(t) = \dfrac{\vec{x}\,'(t)}{\|\vec{x}\,'(t)\|} \equiv \vec{t}(t)}$ **Vector tangente unitario**

$\boxed{\vec{e}_3(t) = \dfrac{\vec{x}\,'(t) \times \vec{x}\,''(t)}{\|\vec{x}\,'(t) \times \vec{x}\,''(t)\|} \equiv \vec{b}(t)}$ **Vector binormal**

$\boxed{\vec{e}_2(t) = \vec{e}_3(t) \times \vec{e}_1(t) = \vec{b}(t) \times \vec{t}(t) = \vec{p}(t)}$ **Vector normal principal**

Calculemos la curvatura y la torsión en función del parámetro t a partir de las expresiones del parámetro natural. Para ello, primero, calculamos las derivadas de la curva parametrizada

$$\dot{\vec{x}} = \vec{x}\,'\frac{1}{ds/dt} = \frac{\vec{x}\,'}{\|\vec{x}\,'\|}, \quad \ddot{\vec{x}} = \frac{\vec{x}\,''}{\|\vec{x}\,'\|^2} + \vec{x}\,'\frac{1}{\|\vec{x}\,'\|}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\|\vec{x}\,'\|}\right), \quad \dddot{\vec{x}} = \frac{\vec{x}\,'''}{\|\vec{x}\,'\|^3} + \vec{x}\,''a(t) + \vec{x}\,'b(t)$$

donde se ha simplificado la expresión con a(t) y b(t) porque se acaban anulando. Además, se ha empleado la relación $\frac{d}{ds} = \frac{1}{\|\vec{x}\,'\|}\frac{d}{dt}$. La curvatura en el parámetro natural es $\kappa(s) = \|\ddot{\vec{x}}(s)\| = \|\dot{\vec{x}}(s) \times \ddot{\vec{x}}(s)\|$, sustituyendo obtenemos la **curvatura para una parametrización arbitraria**

$$\boxed{\kappa(t) = \frac{\|\vec{x}\,'(t) \times \vec{x}\,''(t)\|}{\|\vec{x}\,'(t)\|^3}}$$

En el caso de la torsión

$$\tau(s) = \frac{det(\dot{\vec{x}},\ \ddot{\vec{x}},\ \dddot{\vec{x}})}{\|\ddot{\vec{x}}\|^2} = \frac{det(\dot{\vec{x}},\ \ddot{\vec{x}},\ \dddot{\vec{x}})}{\|\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}\|^2} = \frac{\dfrac{1}{\|\vec{x}\,'(t)\|^6}\ det(\vec{x}\,'(t),\ \vec{x}\,''(t),\ \vec{x}\,'''(t))}{\dfrac{1}{\|\vec{x}\,'(t)\|^6}\ \|\vec{x}\,'(t) \times \vec{x}\,''(t)\|^2}$$

Entonces, la **torsión para una parametrización arbitraria** es

$$\boxed{\tau(t) = \frac{det(\vec{x}\,'(t),\ \vec{x}\,''(t),\ \vec{x}\,'''(t))}{\|\vec{x}\,'(t) \times \vec{x}\,''(t)\|^2}}$$

1.5.3 Forma normal o canónica de una curva en un entorno de un punto (Taylor para curvas)

Consideremos una curva parametrizada en función del parámetro natural s, de clase C^r, $r \geq 3$

$$\begin{aligned} \vec{x} : I \subseteq \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^3 \\ s &\to \vec{x}(s) \end{aligned}$$

tal que admite su triedro de Frenet. Consideremos el punto con $s = 0$, $\vec{x}(0)$ y estudiemos la forma de la curva en un entorno próximo a $\vec{x}(0)$.

$$\vec{x}(s) = \vec{x}(0) + \dot{\vec{x}}(0)\, s + \frac{1}{2!}\,\ddot{\vec{x}}(0)\, s^2 + \frac{1}{3!}\,\dddot{\vec{x}}(0)\, s^3 + O(s^4)$$

Queremos expresar $\dot{\vec{x}}(0)$, $\ddot{\vec{x}}(0)$ y $\dddot{\vec{x}}(0)$ en términos del triedro de Frenet, la curvatura y la torsión. En $s = 0$

$$\dot{\vec{x}}(s) = \vec{t}(s) \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{x}}(0) = \vec{t}(0)$$

$$\ddot{\vec{x}}(s) = \dot{\vec{t}}(s) = \kappa(s)\, \vec{p}(s) \quad \Rightarrow \quad \ddot{\vec{x}}(0) = \kappa(0)\, \vec{p}(0)$$

$$\begin{aligned} \dddot{\vec{x}}(s) &= \dot{\kappa}(s)\, \vec{p}(s) + \kappa(s)\, \dot{\vec{p}}(s) = \dot{\kappa}(s)\, \vec{p}(s) + \kappa(s)\,[-\kappa(s)\, \vec{t}(s) + \tau(s)\, \vec{b}(s)] \ \Rightarrow \\ &\Rightarrow \dddot{\vec{x}}(0) = \dot{\kappa}(0)\, \vec{p}(0) - \kappa^2(0)\, \vec{t}(0) + \kappa(0)\, \tau(0)\, \vec{b}(0) \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \vec{x}(s) - \vec{x}(0) &= \vec{t}(0)\, s + \frac{1}{2}\,\kappa(0)\, \vec{p}(0)\, s^2 + \frac{1}{6}[\dot{\kappa}(0)\, \vec{p}(0) - \kappa^2(0)\, \vec{t}(0) + \kappa(0)\, \tau(0)\, \vec{b}(0)]\, s^3 + O(s^4) = \\ &= \left(s - \frac{1}{6}\,\kappa^2(0)\, s^3\right)\, \vec{t}(0) + \left(\frac{1}{2}\,\kappa(0)\, s^2 + \frac{1}{6}\,\dot{\kappa}(0)\, s^3\right) \vec{p}(0) + \frac{1}{6}\,\kappa(0)\, \tau(0)\, \vec{b}(0)\, s^3 + O(s^4) \end{aligned}$$

Los términos dominantes en cada "pata" del triedro de Frenet son

$$\boxed{\vec{x}(s) - \vec{x}(0) = s\, \vec{t}(0) + \frac{1}{2}\,\kappa(0)\, s^2\, \vec{p}(0) + \frac{1}{6}\,\kappa(0)\, \tau(0)\, s^3\, \vec{b}(0)}$$

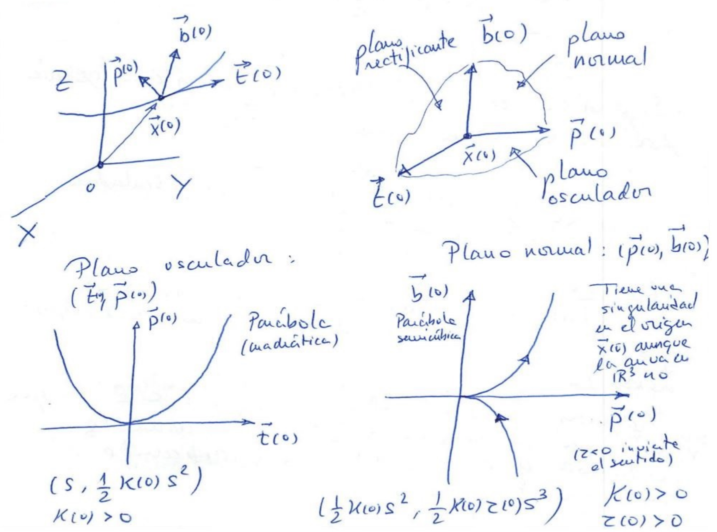
Forma canónica de la curva en torno al punto $\vec{\mathbf{x}}(\mathbf{0})$.

1.5.4 Interpretación geométrica

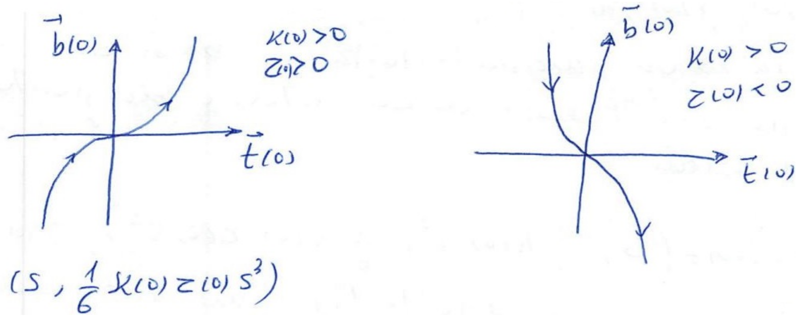
Si tomamos un sistema de referencia que tiene como origen el punto $\vec{x}(0)$ y como vectores unitarios los del triedro de Frenet $\{\vec{t}(0),\, \vec{p}(0),\, \vec{b}(0)\}$ las componentes de la curva parametrizada en base del triedro de Frenet en un entorno del punto $\vec{x}(0)$ serán

$$\vec{x}(s) - \vec{x}(0) = \left(s,\, \frac{1}{2}\,\kappa(0)\, s^2,\, \frac{1}{6}\,\kappa(0)\,\tau(0)\, s^3\right)$$

Para entender geométricamente el sentido de la curvatura y la torsión estudiaremos las proyecciones de la curva (en un entorno de $\vec{x}(0)$) sobre los planos definidos por el triedro de Frenet: plano normal, plano rectificante y plano osculador

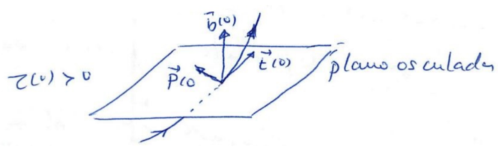


Plano rectificante: $(\vec{t}(0),\, \vec{b}(0))$

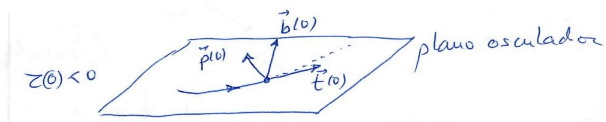


Vemos que si $\tau(0) \neq 0$, la curva atraviesa el plano osculador

- Si $\tau(0) > 0$, la curva atraviesa el plano osculador en el sentido de $\vec{b}(0)$



- Si $\tau(0) < 0$, la curva atraviesa el plano osculador en el sentido opuesto a $\vec{b}(0)$

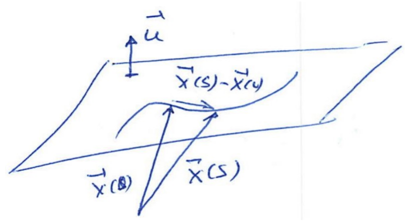


1.5.5 Curvas planas

Una curva se dice plana si está contenida en un plano de $\mathbb{R}^3$. Una curva es **plana** si, y solo si, $\vec{b}(s)$ es constante

Demostración: si la curva es plana se cumple

$$(\vec{x}(s) - \vec{x}(0)) \cdot \vec{u} = 0$$



$\vec{u}$ vector normal al plano que contiene a la curva. Derivando

$$\left.\begin{array}{l} \dot{\vec{x}}(s) \cdot \vec{u} = 0 \\ \ddot{\vec{x}}(s) \cdot \vec{u} = 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \vec{u} \parallel \vec{b}(s) \quad \Rightarrow \quad \vec{b}(s) \text{ es constante}$$

$\square$

Análogamente, una curva con curvatura distinta de cero es plana si, y solo si, la tosión es nula $\tau(s) = 0$, ya que $\dot{\vec{b}}(s) = -\tau(s)\,\vec{p}(s)$.

Entonces, una curva es plana $\leftrightarrow$ $\vec{b} = c\vec{te}$ $\Rightarrow$ $\dot{\vec{b}} = \vec{0}$ $\Rightarrow$ $\tau(s) = 0$

Y por último, una circunferencia tiene $\kappa = cte$ y $\tau = 0$ y $\vec{b} = c\vec{te}$, mientras que una hélice regular tendrá $\kappa = cte$ y $\tau = cte$

2 Superficies:Primera forma fundamental y cálculo tensorial

2.1 Concepto de superficie

De forma vaga, procedemos a decir que una superficie en $\mathbb{R}^3$ es un conjunto de puntos que constituye una variedad de dimensión 2. En este tema estamos interesados en el estudio local de superficies por lo que introduciremos el concepto de carta local de una superficie.

2.1.1 Definición

Un subconjunto $S \subseteq \mathbb{R}^3$ es una superficie regular de clase $\mathbb{R}^3$ si para cada punto $P \in S$ existen un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^2$, un conjunto **abierto** $V \subset \mathbb{R}^3$ y una aplicación $\vec{x}$ tal que

$$\begin{aligned} \vec{x} : U \subset \mathbb{R}^2 &\to V \cap S \\ (u,v) &\to \vec{x}(u,v) = (x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)) \end{aligned}$$

1) $\vec{x} : U \to V \cap S$ es de clase $C^\infty(U)$ (puede relajarse), es decir, x(u,v), y(u,v) y z(u,v) son funciones de clase C^∞ en su dominio U.

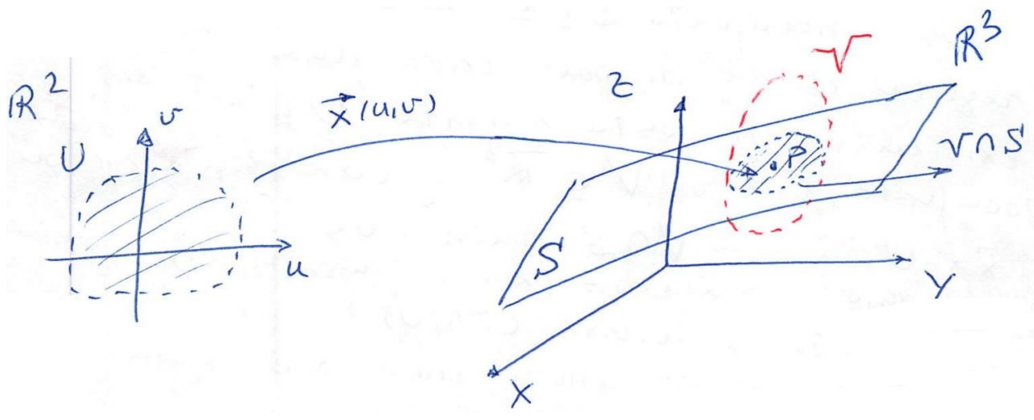
2) $\vec{x} : U \to V \cap S$ es un homeomorfismo, es decir, es biyectiva (aplicación 1 a 1) y su aplicación inversa es continua. Esta condición nos asegura que S no tiene autointersecciones

3) $\vec{x} : U \to V \cap S$ es regular, es decir, su imagen es bidimensional. Matemáticamente, esto equivale a pedir que la matriz de derivadas o matriz jacobiana tenga rango 2 en U

$$J(u,v) \equiv D\,\vec{x} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v) \\ \dfrac{\partial z}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial z}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}$$

$rango\,(J) = 2,\ \ \forall\,(u,v) \in U$

Esta última condición nos asegura que no tenemos casos degenerados (curvas o puntos descritos en términos de dos parámetros; ejemplo: $\vec{x}(u,v) = (u+v, u+v, u+v) \equiv \vec{x}(t) = (t,t,t)$).



La aplicación $\vec{x}(u,v)$ es una parametrización local de la superficie S. Al par $(U, \vec{x}(u,v))$ se le denomina **carta local** de la superficie S (en torno al punto P). Nos proporciona un sistema de coordenadas local a través de una parametrización local de la superficie.

Llamamos **atlas** de una superficie S a un conjunto de cartas locales de S tal que la unión de la imágenes de dichas cartas cubre toda la superficie (las cartas pueden solaparse)

2.1.2 Algunos ejemplos

Ejemplo 1: El plano XY se puede cubrir mediante una sola carta $\vec{x}(u,v) = (x\,(u,v),\ y\,(u,v),\ z\,(u,v)) = (u,v,0)$ con $u, v \in \mathbb{R}$

$$J(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad rango\,(J) = 2,\; \forall\, u, v \in \mathbb{R}$$

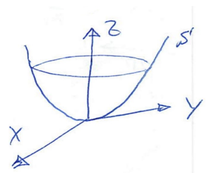
Lo mismo ocurre con la **carta de Monge**. Sea una función de 2 variables

$$\begin{aligned} f : U \subseteq \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (u,v) &\to f(u,v) \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} &\vec{x} : U \to \mathbb{R}^3 \\ &(u,v) \to \vec{x}(u,v) = (u, v, f(u,v)) \end{aligned}$$

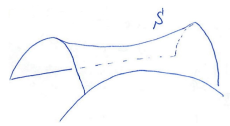
$$J(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix} \qquad rango\,(J) = 2$$



Ejemplo 2: Paraboloide de revolución $z = x^2 + y^2$.

$$\vec{x}(u,v) = (u, v, u^2 + v^2)$$

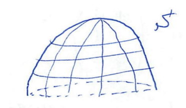
Se puede cubrir con una única carta



Ejemplo 3: Paraboloide hiperbólico $z = x^2 - y^2$.

$$\vec{x}(u,v) = (u, v, u^2 - v^2), \quad u, v \in \mathbb{R}$$

Se puede cubrir con una única carta



Ejemplo 4: Semiesfera $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Como la superficie asociada es regular, hay que quitar el ecuador por lo que el dominio es $x^2 + y^2 < 1$

$$\begin{aligned} &\vec{x} : U \to \mathbb{R}^3 \\ &(u,v) \to \vec{x}(u,v) = (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2}) \end{aligned}$$

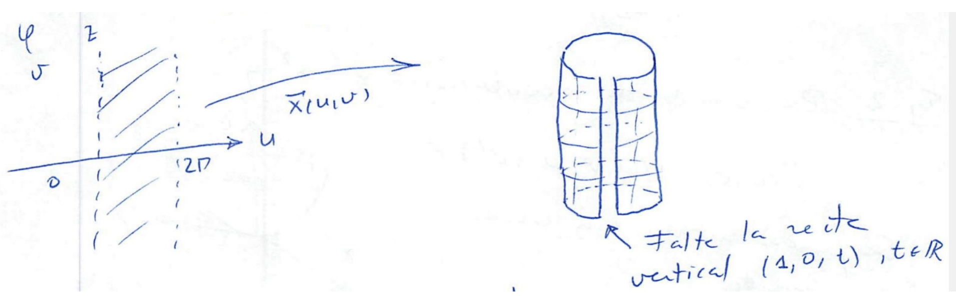
con $U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \,/\, u^2 + v^2 < 1\}$

Ejemplo 5: Cilindro $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 = 1\}$.

Sin embargo, no es posible cubrir todo el cilindro con una única carta en coordenadas cilíndricas (la condición de tomar intervalos abiertos no nos permite cerrar el intervalo)

$$\vec{x}(u,v) = (cos\, u, sen\, u, v) \quad \text{(coordenadas cilindricas)}$$

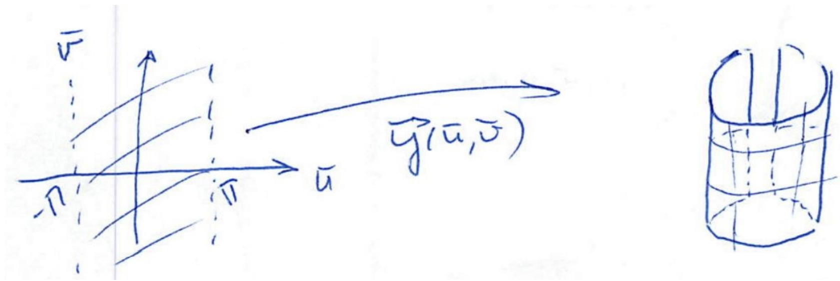
con $u \in (0, 2\pi)$, $v \in (-\infty, \infty)$



Para definir el cilindro entero necesitamos otra carta más, por ejemplo

$$\vec{y}\,(\bar{u}, \bar{v}) = (cos\,\bar{u},\ sen\,\bar{u}, \bar{v})$$

con $u \in (-\pi, \pi)$, $v \in (-\infty, \infty)$



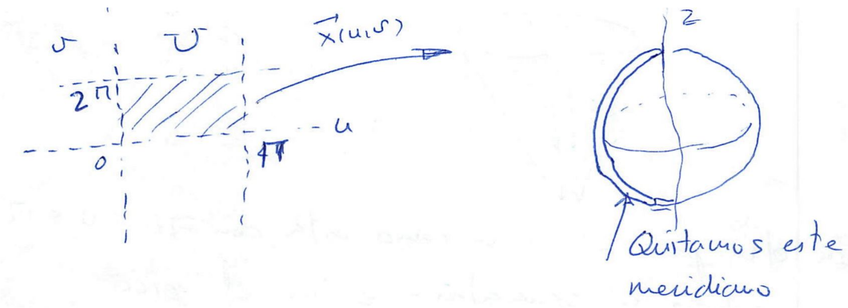
Nota: En realidad, el cilindro si se puede parametrizar con una sola carta, pero su expresión es notoriamente más compleja.

Ejemplo 6: Esfera $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

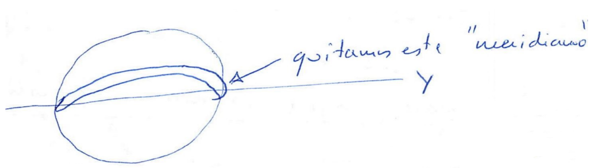
Mediante cartas de Monge necesitamos 6 cartas para cubrir la esfera completamente. Podemos cubrirla con 2 cartas usando coordenadas esféricas.

$$\vec{x}(u, v) = (sen\,u\; cos\,v,\ sen\,u\; sen\,v,\ cos\,u)$$

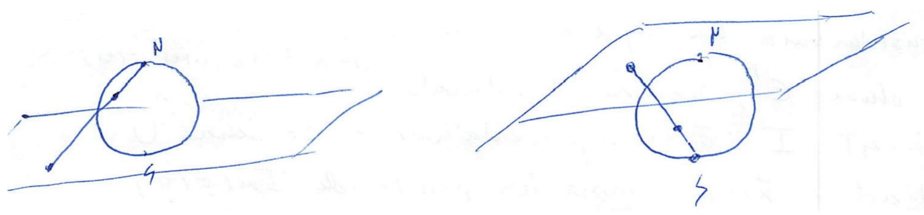
con $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 < u < \pi,\ 0 < v < 2\pi\}$

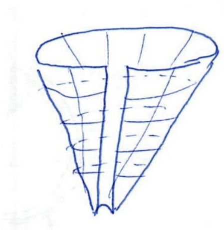


Podemos definir otra carta para que forme junto a esta un atlas de la esfera.



Otra posibilidad de construir un atlas de la esfera con 2 cartas es mediante proyección estereográfica desde los polos.





Ejemplo 7: Cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Obviamente, (0, 0, 0) es un pico, por lo que la superficie no puede ser regular allí. Podemos construir una carta local del cono (excluyendo su generatriz) mediante coordenadas cilíndricas

$$\vec{x}(u, v) = (u\,cos\,v,\; u\,sen\,v,\; u)$$

con $0 < u < \infty,\ 0 < v < 2\pi$, donde $\rho = u$ y $\phi = v$. Con otra parametrización como esta con $-\pi < v < \pi$ podemos cubrir la generatriz, salvo el pico.

Ejemplo 8: Helicoide (escalera de caracol infinita) Podemos encontrar una carta local para

$$\vec{x}(u, v) = (u\,cos\,v,\; u\,sen\,v,\; v)$$

con $0 < u < \infty,\ -\infty < v < \infty$.

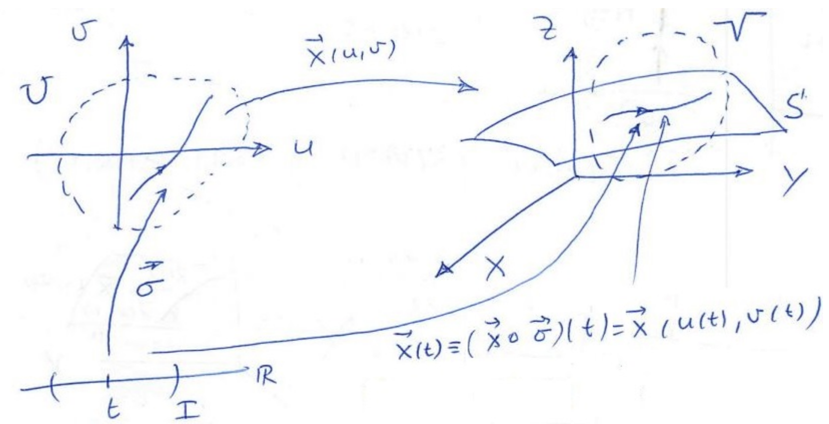
2.2 Curvas sobre superficies. Coordenadas curvilíneas

2.2.1 Definición

Consideremos una superficie S regular y una carta local de ella $(U,\, \vec{x}(u, v))$ (parametrización local de S). Consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} \vec{\sigma} : I \subseteq \mathbb{R} &\to U \subseteq \mathbb{R}^2 \\ t &\to \vec{\sigma}(t) = (u(t),\, v(t)) \end{aligned}$$

de clase C^r, $r \geq 1$ en el intervalo abierto I. $\vec{\sigma}(t)$ representa una curva dentro de U. Al actuar $\vec{x}(u, v)$ sobre los puntos de $Im(\vec{\sigma}(t))$ obtenemos una curva sobre a superficie S



$$\vec{x}\,(\vec{\sigma}(t)) = \vec{x}\,(u(t), v(t)) = (x\,(u(t), v(t)),\; y\,(u(t), v(t)),\; z\,(u(t), v(t)))$$

representa una curva parametrizada de clase C^r sobre S.

2.2.2 Curvas coordenadas: coordenadas curvilíneas sobre S

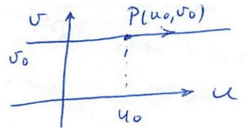
Dado un punto $P(u_0, v_0) \in U$, hay 2 curvas especialmente importantes que pasan por (u_0, v_0); aquellas paralelas a los ejes u y v, respectivamente. Dichas curvas se denominan **curvas coordenadas**

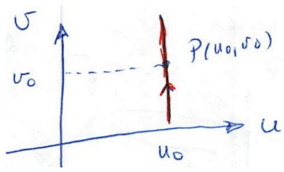
$$\left\{ \begin{array}{l} u(t) = t \\ v(t) = v_0 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \vec{\sigma}(t) = (t, v_0),\;\; t \in I$$

$$\vec{x}\,(t, v_0) = (x\,(t, v_0),\; y\,(t, v_0),\; z\,(t, v_0))$$

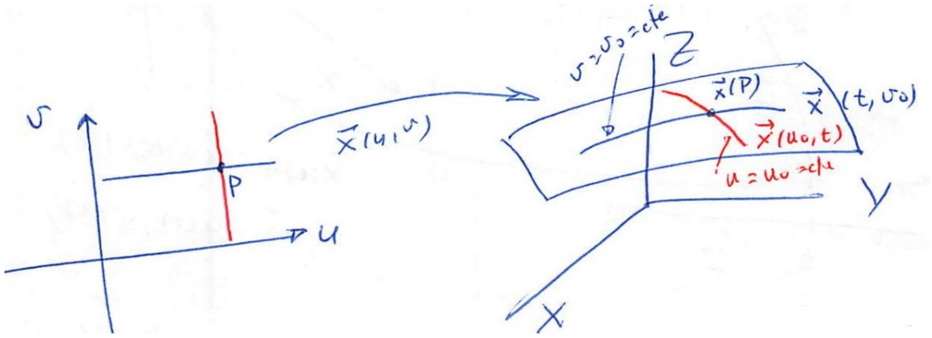
$$\left\{ \begin{array}{l} u(t) = u_0 \\ v(t) = t \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \vec{\sigma}(t) = (u_0, t),\;\; t \in I$$

$$\vec{x}\,(u_0, t) = (x\,(u_0, t),\; y\,(u_0, t),\; z\,(u_0, t))$$





Considerando familias de curvas coordenadas con varios valores de u_0 y v_0 obtenemos una malla sobre S y podemos caracterizar cada punto de S a través de los valores de (u, v) de las curvas coordenadas con $u = cte$ y $v = cte$ que pasan por el punto. Esto se conoce como **coordenadas curvilíneas** sobre S asociada a la carta $(U,\ \vec{x}(u,v))$. (Como $\vec{x}$ es biyectiva a cada punto de $V \cap S$ le corresponde un par (u,v) y un par de curvas coordenadas).



2.2.3 Vectores tangentes. Espacio tangente

Sea S una superficie regular. Cada una de las 2 curvas coordenadas es una curva de clase $C^r,\ r \geq 1$ en $\mathbb{R}^3$. Podemos calcular su vector velocidad (derivada) en cada uno de sus puntos.

Sea $v = v_0$ constante. $\vec{x}(t) = \vec{x}(t, v_0)$

$$\vec{x}\,'(t) = \frac{\partial \vec{x}}{\partial u}(t, v_0)\, u'(t) = \frac{\partial \vec{x}}{\partial u}(t, v_0) \quad \Rightarrow \quad \vec{x}\,'(u_0) = \frac{\partial \vec{x}}{\partial u}(u_0, v_0)$$

Sea $u = u_0$ constante. $\vec{x}(t) = \vec{x}(u_0, t)$

$$\vec{x}\,'(t) = \frac{\partial \vec{x}}{\partial v}(u_0, t)\, v'(t) = \frac{\partial \vec{x}}{\partial v}(u_0, t) \quad \Rightarrow \quad \vec{x}\,'(v_0) = \frac{\partial \vec{x}}{\partial v}(u_0, v_0)$$

Dado que por cada punto de S (al menos dentro de V) tenemos valores únicos de u y v, podemos definir en cada punto dos vectores tangentes a la superficie en ese punto

$$\boxed{\vec{x}_u \equiv \frac{\partial \vec{x}}{\partial u}, \qquad \vec{x}_v \equiv \frac{\partial \vec{x}}{\partial v}}$$

ambos vectores dependen de (u,v). Por hipótesis, la superficie es bidimensional por lo que

$$rango\,(J) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad rango \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = 2$$

que es equivalente a decir que $\vec{x}_u$ y $\vec{x}_v$

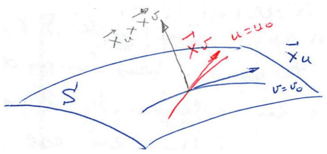
$$\vec{x}_u\,(u,v) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\,(u,v),\; \frac{\partial y}{\partial u}\,(u,v),\; \frac{\partial z}{\partial u}\,(u,v)\right)$$

$$\vec{x}_v\,(u,v) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\,(u,v),\; \frac{\partial y}{\partial v}\,(u,v),\; \frac{\partial z}{\partial v}\,(u,v)\right)$$

son linealmente independientes. Por tanto,

$$\vec{x}_u \times \vec{x}_v \neq \vec{0}$$

Este vector es perpendicular a la superficie, por lo que la regularidad nos asegura que podemos definir (localmente) la normal a la superficie en todos sus puntos.



Por tanto, un vector unitario normal a S será

$$\boxed{\vec{n} = \frac{\vec{x}_u \times \vec{x}_v}{\|\vec{x}_u \times \vec{x}_v\|}}$$

El conjunto $\{\vec{x}_u,\, \vec{x}_v, \vec{n}\}$ forma una base de $\mathbb{R}^3$ en cada punto de la superficie. Nótese que esta base no es ortogonal en general ($\vec{x}_u \cdot \vec{x}_v \neq 0$ en general) ni unitaria. Los vectores $\vec{x}_u$ y $\vec{x}_v$ no son colineales por lo que junto al punto de la superficie $\vec{x}(u,v)$ definen un plano. Dicho plano se denomina **plano tangente** a S en P (P es el punto $\vec{x}(u,v)$) (El plano tangente no depende de la parametrización, solo del punto y de la superficie)

Obviamente, en cada punto de S hay un plano tangente distinto. El plano tangente es un espacio vectorial. Una base en él es $\{\vec{x}_u\,(u,v),\, \vec{x}_v\,(u,v)\}$ (la base depende de la parametrización)

$$T_P(S) = lin\,\{\vec{x}_u,\, \vec{x}_v\}, \quad \vec{w} \in T_P(S): \quad \vec{w} = a\,\vec{x}_u + b\,\vec{x}_v, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

En particular, dada una curva $\vec{x}\,(u(t),\, v(t))$ que pasa por P su vector tangente se puede expresar como combinación lineal de $\vec{x}_u$ y $\vec{x}_v$ en el punto

$$\vec{x}\,'(t) = \frac{\partial \vec{x}}{\partial u}\,(u(t), v(t))\,u'(t) + \frac{\partial \vec{x}}{\partial v}\,(u(t), v(t))\,v'(t) = \vec{x}_u\,(u(t), v(t))\,u'(t) + \vec{x}_v\,(u(t), v(t))\,v'(t) \Rightarrow$$

$$\vec{x}\,'(t) = u'(t)\,\vec{x}_u + v'(t)\,\vec{x}_v$$

2.2.4 Notación compacta

Las coordenadas u y v son las coordenadas primera y segunda sobre la curva parametrizada (carta local). Por ello, emplearemos la notación compacta

$$u \equiv u^1, \qquad v \equiv u^2$$

La superficie parametrizada será: $\vec{x}(u^1, u^2)$. Los vectores tangentes a las curvas coordenadas

$$\vec{x}_1 \equiv \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^1}\,(u^1, u^2), \quad \vec{x}_2 \equiv \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^2}\,(u^1, u^2) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{x}_\alpha \equiv \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^\alpha}}$$

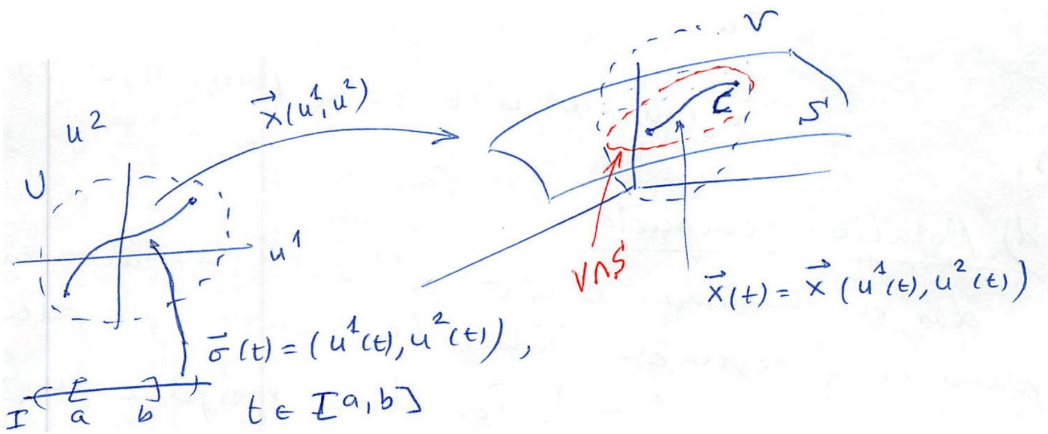
o de forma genérica $\vec{x}_\alpha$, $\alpha = 1, 2$. También consideraremos derivadas de orden superior

$$\frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial u^1\,\partial u^2} \equiv \vec{x}_{12}, \quad \text{o en general} \quad \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial u^\beta\,\partial u^\alpha} \equiv \vec{x}_{\alpha\beta}$$

2.3 Primera forma fundamental (métrica)

2.3.1 Definición

Consideremos una superficie parametrizada (carta local) y una curva sobre ella



Queremos calcular la longitud del arco de la curva C sobre la superficie

$$l = \int_a^b \|\vec{x}\,'(t)\|\, dt$$

Calculemos el vector velocidad

$$\vec{x}\,'(t) = \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^1}(u^1,u^2)\bigg|_{(u^1(t),u^2(t))} u^{1\prime}(t) + \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^2}(u^1,u^2)\bigg|_{(u^1(t),u^2(t))} u^{2\prime}(t) = \vec{x}_1(u^1(t),u^2(t))\, u^{1\prime}(t) + \vec{x}_2(u^1(t),u^2(t))\, u^{2\prime}(t)$$

Utilizando una notación más compacta

$$\vec{x}\,'(t) = u^{1\prime}(t)\, \vec{x}_1 + u^{2\prime}(t)\, \vec{x}_2$$

y su módulo al cuadrado

$$\|\vec{x}\,'(t)\|^2 = \vec{x}\,'(t)\cdot\vec{x}\,'(t) = u^{1\prime}(t)\, u^{1\prime}(t)\, \vec{x}_1\cdot\vec{x}_1 + u^{1\prime}(t)\, u^{2\prime}(t)\, \vec{x}_1\cdot\vec{x}_2 + u^{2\prime}(t)\, u^{1\prime}(t)\, \vec{x}_2\cdot\vec{x}_1 + u^{2\prime}(t)\, u^{2\prime}(t)\, \vec{x}_2\cdot\vec{x}_2$$

Introduzcamos la siguiente notación

$$g_{11} \equiv \vec{x}_1\cdot\vec{x}_1, \quad g_{12} \equiv \vec{x}_1\cdot\vec{x}_2, \quad g_{21} \equiv \vec{x}_2\cdot\vec{x}_1, \quad g_{22} \equiv \vec{x}_2\cdot\vec{x}_2$$

es decir,

$$\boxed{g_{\alpha\beta} \equiv \vec{x}_\alpha\cdot\vec{x}_\beta, \quad \alpha,\beta = 1,2}$$

Estas 4 cantidades están definidas sobre la superficie. Ampliando la notación podemos expresar

$$g_{\alpha\beta}\,(u^1(t),\, u^2(t)) = \vec{x}_\alpha\,(u^1(t),\, u^2(t))\cdot\vec{x}_\beta\,(u^1(t),\, u^2(t))$$

Con esta notación

$$\begin{aligned}\|\vec{x}\,'(t)\|^2 =& g_{11}\,(u^1(t),u^2(t))\, u^{1\prime}(t)\, u^{1\prime}(t) + g_{12}\,(u^1(t),u^2(t))\, u^{1\prime}(t)\, u^{2\prime}(t) + \\ &+ g_{21}\,(u^1(t),u^2(t))\, u^{2\prime}(t)\, u^{1\prime}(t) + g_{22}\,(u^1(t),u^2(t))\, u^{2\prime}(t)\, u^{2\prime}(t) \\ =& \sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\beta=1}^{2} g_{\alpha\beta}\,(u^1(t),u^2(t))\, u^{\alpha\prime}(t)\, u^{\beta\prime}(t)\end{aligned}$$

entonces, según el **convenio de suma de Einstein**

$$\|\vec{x}\,'(t)\|^2 = g_{\alpha\beta}\,(u^1(t),u^2(t))\, u^{\alpha\prime}(t)\, u^{\beta\prime}(t) = g_{\alpha\beta}\, u^{\alpha\prime}(t)\, u^{\beta\prime}(t)$$

En una suma los índices son mudos. **Siempre se suman por pares (uno arriba y otro abajo)**

$$\boxed{l = \int_a^b \sqrt{g_{\alpha\beta}\left(u^1(t), u^2(t)\right) u^{\alpha\prime}(t)\, u^{\beta\prime}(t)}\, dt = \int_a^b \sqrt{g_{\alpha\beta}\, du^\alpha\, du^\beta}}$$

donde hemos usado

$$\begin{cases} du^\alpha \equiv u^{\alpha\prime}(t)\, dt, \quad du^\beta \equiv u^{\beta\prime}(t)\, dt \\ g_{\alpha,\beta} \equiv g_{\alpha,\beta}\left(u^1(t), u^2(t)\right) \end{cases}$$

El radicando tiene unidades de L^2 por lo que representa una longitud infinitesimal al cuadrado

$$\boxed{ds^2 = g_{\alpha\beta}\, du^\alpha\, du^\beta}$$

A la hora de calcular la longitud de un arco de curva tenemos

- Cantidades que dependen de la curva: $u^{\alpha\prime}(t),\ \alpha = 1, 2$
- Cantidades que dependen de la superficie independientemente de la curva: $g_{\alpha\beta}(u^1, u^2)$

$g_{\alpha\beta}(u^1, u^2)$ se denomina **primera forma fundamental** de la superficie (en las coordenadas locales (u^1, u^2)). Se puede representar matricialmente como una matriz 2x2 simétrica

$$\boxed{(g_{\alpha\beta})(u^1, u^2) = \begin{pmatrix} g_{11}(u^1, u^2) & g_{12}(u^1, u^2) \\ \\ g_{21}(u^1, u^2) & g_{22}(u^1, u^2) \end{pmatrix}}$$

2.3.2 Ejemplos

Ejemplo 1: El plano XY en coordenadas cartesianas se puede escribir con una carta

$$\vec{x}(u^1, u^2) = (u^1, u^2, 0), \quad u^1,\, u^2 \in (-\infty,\, \infty)$$

$$\vec{x}_1 = (1, 0, 0),\ \vec{x}_2 = (0, 1, 0), \qquad \vec{n} = \frac{\vec{x}_1 \times \vec{x}_2}{\|\vec{x}_1 \times \vec{x}_2\|} = (0, 0, 1) \qquad (g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que son los coeficientes de la 1ª forma fundamental en cartesianas

Ejemplo 2: El plano XY en coordenadas polares (carta local que no cubre todo el plano)

$$\bar{\vec{x}}(\bar{u}^1, \bar{u}^2) = (\bar{u}^1\, cos\, \bar{u}^2, \bar{u}^1\, cos\, \bar{u}^2, 0), \qquad \bar{u}^1 > 0, \quad 0 < \bar{u}^2 < 2\pi$$

$$\begin{aligned} \bar{\vec{x}}_1 &= \frac{\partial \bar{\vec{x}}}{\partial \bar{u}^1} = (cos\, \bar{u}^2,\ sen\, \bar{u}^2,\ 0) \\ \bar{\vec{x}}_2 &= \frac{\partial \bar{\vec{x}}}{\partial \bar{u}^2} = (-\bar{u}^1\, cos\, \bar{u}^2,\ \bar{u}^1\, sen\, \bar{u}^2,\ 0) \end{aligned}$$

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\bar{u}^1)^2 \end{pmatrix}$$

que son los coeficientes de la 1ª forma fundamental en polares

Ejemplo 3: Cilindro, carta local

$$\vec{x}(u^1, u^2) = (cos\, u^1,\ sen\, u^1,\ u^2) \qquad 0 < u^1 < 2\pi, \quad u^2 \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \vec{x}_1 &= (-sen\, u^1,\ cos\, u^1,\ 0) \\ \vec{x}_2 &= (0,\ 0,\ 1) \end{aligned}$$

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ej 1 y Ej 2 tienen distinta 1ª forma fundamental pero son la misma superficie. Ej 1 y Ej 3 tiene la misma 1ª forma fundamental pero son distintas.

2.3.3 Interpretación geométrica de la primera forma fundamental

Dado un punto P de una superficie localmente parametrizada en un entorno de P (carta local que contiene a P)

$$\begin{aligned} \vec{x} : U \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow V \cap S, \qquad P \in V \cap S \\ (u^1,\, u^2) &\rightarrow \vec{x}(u^1,\, u^2) \end{aligned}$$

el **plano tangente a S en P**, $\mathbf{T_p(S)}$, constituye un espacio vectorial (de dimensión 2). Podemos tomar como base de $T_p(S)$ los vectores $\left\{ \vec{x}_1 \equiv \dfrac{\partial \vec{x}}{\partial u^1},\ \vec{x}_2 \equiv \dfrac{\partial \vec{x}}{\partial u^2} \right\}$, pudiendo expresar cualquier vector de $T_p(S)$ como combinación lineal de estos.

$$\vec{v} \in T_p(S) : \quad \vec{v} = v^1 \vec{x}_1 + v^2 \vec{x}_2 = v^\alpha \vec{x}_\alpha$$

Las componentes de $\vec{v}$ en la base $\{\vec{x}_1,\ \vec{x}_2\}$ se denominan **componente contravariantes** de $\vec{v}$. Obviamente, si cogemos otra parametrización local de S (otra carta), las componentes contravariantes de $\vec{v}$ cambiarán.

El motivo por el que hablamos de 1ª forma fundamental es que $g_{\alpha\beta}$ son las entradas de la matriz asociada a la forma cuadrática que define el producto escalar entre vectores en $T_p(S)$.

$$\text{Sea} \quad \left. \begin{aligned} \vec{v} \in T_p(S) : \quad \vec{v} = v^\alpha \vec{x}_\alpha \\ \vec{w} \in T_p(S) : \quad \vec{w} = w^\beta \vec{x}_\beta \end{aligned} \right\} \qquad \begin{aligned} q : T_p(S) \times T_p(S) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{v}, \vec{w}) &\rightarrow q(\vec{v}, \vec{w}) = \vec{v} \cdot \vec{w} \end{aligned} \qquad \text{desarrollando}$$

$$q(\vec{v}, \vec{w}) = \vec{v} \cdot \vec{w} = (v^\alpha \vec{x}_\alpha) \cdot (w^\beta \vec{x}_\beta) = v^\alpha w^\beta\, \vec{x}_\alpha \cdot \vec{x}_\beta = g_{\alpha\beta}\, v^\alpha w^\beta = \begin{pmatrix} v^1 & v^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{v} \cdot \vec{w} = g_{\alpha\beta}\, v^\alpha w^\beta = \begin{pmatrix} v^1 & v^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \end{pmatrix}}$$

Si tenemos un producto escalar en $T_p(S)$ entonces tenemos una norma y un ángulo entre vectores de dicho espacio.

$$\text{Sea} \quad \vec{v},\, \vec{w} \in T_p(S), \qquad \left. \begin{aligned} \vec{v} = v^\alpha\, \vec{x}_\alpha \\ \vec{w} = w^\beta\, \vec{x}_\beta \end{aligned} \right\}, \qquad \|\vec{v}\|^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} \qquad y \qquad cos\,\theta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\|\ \|\vec{w}\|} \qquad \text{entonces}$$

$$\boxed{\|\vec{v}\|^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = g_{\alpha\beta}\, v^\alpha v^\beta} \qquad \boxed{cos\,\theta = \frac{g_{\alpha\beta}\, v^\alpha w^\beta}{\sqrt{g_{\mu\nu}\, v^\mu\, v^\nu}\ \sqrt{g_{\rho\sigma}\, w^\rho\, w^\sigma}}}$$

Coordenadas ortogonales

Si tomamos $\vec{v}$, $\vec{w}$ como los vectores de la base asociada a la carta $\{\vec{x}_1,\ \vec{x}_2\}$, siendo estos

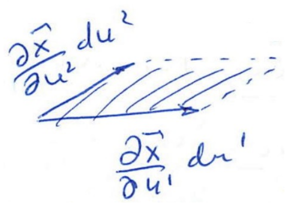
$$\left\{ \begin{aligned} \vec{v} = \vec{x}_1 = 1\, \vec{x}_1 + 0\, \vec{x}_2 \Rightarrow v^1 = 1,\ v^2 = 0 \\ \vec{w} = \vec{x}_2 = 0\, \vec{x}_1 + 1\, \vec{x}_2 \Rightarrow w^1 = 0,\ w^2 = 1 \end{aligned} \right. \qquad \text{entonces}$$

$$cos\,\theta = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}}\ \sqrt{g_{22}}}$$

Si $g_{12} = 0$, la parametrización local de S se dice ortogonal (en P) y las coordenadas u^1, u^2 se dicen ortogonales (en P). Si ocurre en todos los puntos de la carta, las coordenadas se dicen **ortogonales**.

Si ademas de $g_{12} = 0$, se tiene que $g_{11} = g_{22} = 1$ la parametrización local se llama **ortonormal**.

2.3.4 Elemento de área sobre la superficie



Consideremos una carta local de S (parametrización local)

$$\vec{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to V \cap S$$
$$(u^1,\, u^2) \to \vec{x}\,(u^1,\, u^2)$$

Sea $\Omega \subset U$ un cierto dominio cerrado y acotado en U. De cálculo sabemos que el área de $\Sigma \equiv \vec{x}(\Omega) \subset S$ es

$$A(\Sigma) = \iint_{\Omega} \left\| \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^1} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^2} \right\| \, du^1 \, du^2$$

donde $\left\| \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^1} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^2} \right\| \, du^1 \, du^2$ es un elemento infinitesimal de área

Expresemos $\|\vec{x}_1 \times \vec{x}_2\|$ en términos de la primera forma fundamental

$$\begin{aligned} \|\vec{x}_1 \times \vec{x}_2\|^2 &= \|\vec{x}_1\|^2 \, \|\vec{x}_2\|^2 \, sen^2\alpha = g_{11}\, g_{22} \, (1 - cos^2\alpha) = g_{11}\, g_{22} - g_{11}\, g_{22}\, cos^2\alpha = \\ &= g_{11}\, g_{22} - \|\vec{x}_1\|^2 \, \|\vec{x}_2\|^2 \, cos^2\alpha = g_{11}\, g_{22} - [\, \|\vec{x}_1\| \, \|\vec{x}_2\| \, cos\,\alpha \cdot \|\vec{x}_2\| \, \|\vec{x}_1\| \, cos\,\alpha\,] = \\ &= g_{11}\, g_{22} - \vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2 \cdot \vec{x}_2 \cdot \vec{x}_1 = g_{11}\, g_{22} - g_{12}\, g_{21} \end{aligned}$$

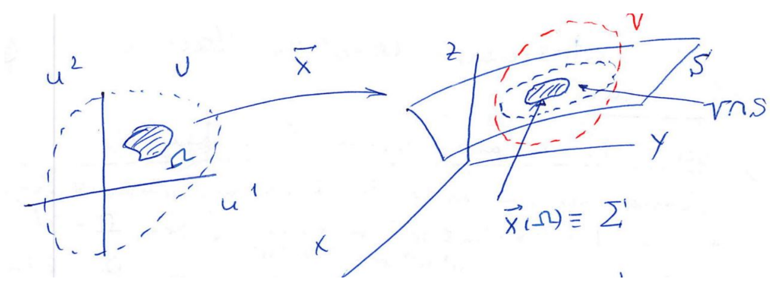
Denotando

$$\boxed{g \equiv \|\vec{x}_1 \times \vec{x}_2\|^2 = det \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\vec{x}_1 \times \vec{x}_2 = \sqrt{g}\, \vec{n}}$$

que es el **determinante de la 1ª forma fundamental** (en coordenadas u^1 y u^2). Se tiene

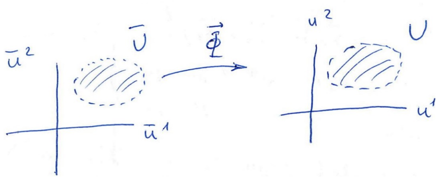
$$\boxed{A(\Sigma) = \iint_{\Omega} \sqrt{g} \;\, du^1 \, du^2}$$

El área sobre una superficie se puede escribir en términos de la primera forma fundamental.



2.4 Componentes contravariantes y covariantes

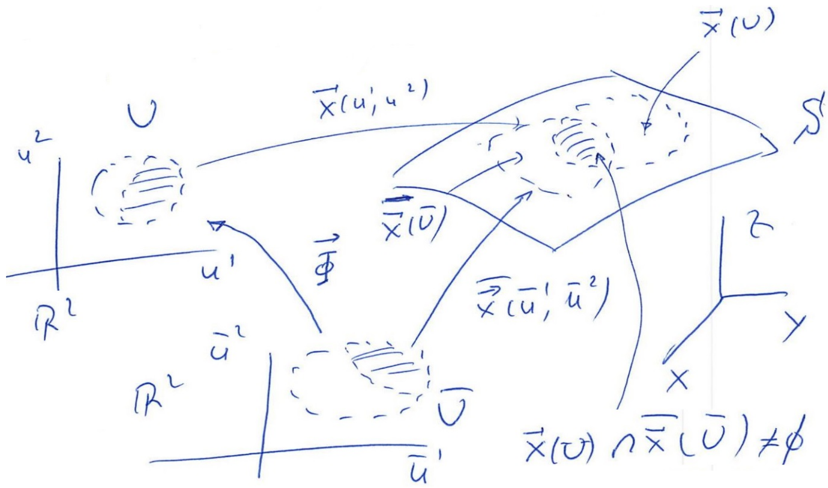
2.4.1 Reparametrizaciones (cambio de coordenadas)



En el caso de curvas una reparametrización era sustituir en $\vec{x}(t)$, $t = \phi(t)$, con $\phi(t)$ un difeomorfismo. Generalizamos esto a 2 dimensiones

$$\vec{\Phi} : \bar{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \to U \subseteq \mathbb{R}^2$$
$$(\bar{u}^1, \bar{u}^2) \to \vec{\Phi}(\bar{u}^1, \bar{u}^2) = (u^1(\bar{u}^1, \bar{u}^2),\ u^2(\bar{u}^1, \bar{u}^2))$$

siendo $\vec{\Phi}$ un difeomorfismo en $\overline{U}$ y U, es decir, un homeomorfismo diferenciable con función inversa diferenciable. Veamos qué ocurre en la región en que 2 cartas solapan



$$\vec{\Phi} : \overline{\vec{x}}^{\,-1}(\vec{x}(U) \cap \overline{\vec{x}}(\overline{U})) \to \vec{x}^{\,-1}(\vec{x}(U) \cap \overline{\vec{x}}(\overline{U}))$$
$$(\bar{u}^1, \bar{u}^2) \to \vec{\Phi}(\bar{u}^1, \bar{u}^2) = (u^1(\bar{u}^1, \bar{u}^2),\; u^2(\bar{u}^1, \bar{u}^2))$$

Función de transición entre cartas. Debe de ser un difeomorfismo.

- $\vec{\Phi} : \overline{U} \to U$ biyectiva
- $\vec{\Phi} : \overline{U} \to U$ diferenciable (normalmente pediremos que sea de clase $C^{\infty}(\overline{U})$)
- $\vec{\Phi}^{\,-1} : U \to \overline{U}$ diferenciable (normalmente pediremos que sea de clase $C^{\infty}(U)$)

Normalmente comprimiremos la notación escribiendo el difeomorfismo como

$$u^{\alpha} = u^{\alpha}(\bar{u}^{\beta}), \qquad \alpha,\, \beta = 1, 2$$

El jacobiano de la transformación es

$$\boxed{D \equiv det\left(\frac{\partial u^{\alpha}}{\partial \bar{u}^{\beta}}\right) \neq 0}$$

La transformación inversa es diferenciable y tiene jacobiano

$$\boxed{\bar{D} \equiv det\left(\frac{\partial \bar{u}^{\alpha}}{\partial u^{\beta}}\right) \neq 0}$$

Por el teorema de la función inversa sabemos que

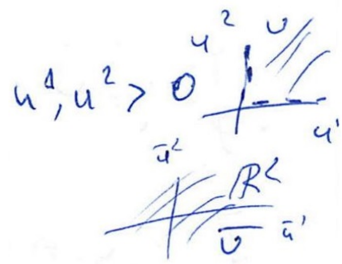
$$\boxed{D\bar{D} = 1}$$

Además, las matrices jacobianas de ambas transformaciones son inversas la una de la otra

$$\left.\begin{array}{lll} \vec{\Phi} \;\Rightarrow & \dfrac{\partial u^{\alpha}}{\partial \bar{u}^{\beta}}, & \alpha,\, \beta = 1,\, 2 \\[2ex] \vec{\Phi}^{-1} \;\Rightarrow & \dfrac{\partial \bar{u}^{\delta}}{\partial u^{\gamma}}, & \delta,\, \gamma = 1,\, 2 \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; \frac{\partial u^{\alpha}}{\partial \bar{u}^{\beta}} \frac{\partial \bar{u}^{\beta}}{\partial u^{\gamma}} = \delta^{\alpha}{}_{\gamma}$$

Ejemplo:

Sea



$$\left.\begin{array}{l} u^1 = e^{\bar u^1 + \bar u^2} \\ \\ u^2 = e^{\bar u^1 - \bar u^2} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} \bar u^1 = \dfrac{1}{2}\, ln\,(u^1\, u^2) \\ \\ \bar u^2 = \dfrac{1}{2}\, ln\,\left(\dfrac{u^1}{u^2}\right) \end{array}\right\}$$

$$\left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar u^\beta}\right) = \begin{pmatrix} e^{\bar u^1+\bar u^2} & e^{\bar u^1+\bar u^2} \\ e^{\bar u^1-\bar u^2} & -e^{\bar u^1-\bar u^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^1 & u^1 \\ u^2 & -u^2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{\partial \bar u^\alpha}{\partial u^\beta}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2u^1} & \dfrac{1}{2u^2} \\ \\ \dfrac{1}{2u^1} & -\dfrac{1}{2u^2} \end{pmatrix}, \qquad \left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar u^\beta}\right)\left(\frac{\partial \bar u^\alpha}{\partial u^\beta}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{ll} D & = -2e^{2\bar u^1} = -2u^1u^2 \\ \\ \bar D & = -\dfrac{1}{2u^1u^2} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad D\,\bar D = 1$$

□

Veamos ahora cómo se relacionan las bases asociadas a las 2 parametrizaciones (cartas locales)

$$\bar{\vec x}\,(\bar u^1, \bar u^2) = \vec x\,(\vec\Phi\,(\bar u^1, \bar u^2)) = \vec x\,(u^1(\bar u^1, \bar u^2),\; u^2(\bar u^1, \bar u^2))$$

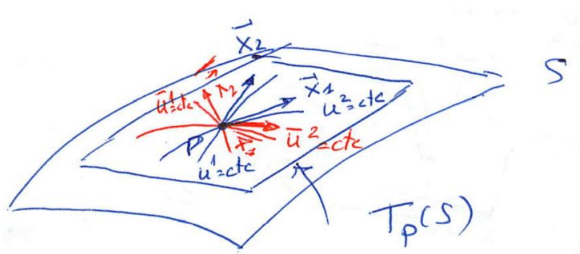
o, en notación compacta

$$\bar{\vec x}\,(\bar u^\beta) = \vec x\,(u^\alpha(\bar u^\beta))$$

Cada carta $(U,\, \vec x\,(u^\alpha))$ y $(\bar U,\, \bar{\vec x}\,(\bar u^\beta))$ tendrá unos vectores que forman base en el espacio tangente a S en P, $T_p(S)$

$$\left\{\vec x_1 = \frac{\partial \vec x}{\partial u^1},\, \vec x_2 = \frac{\partial \vec x}{\partial u^2}\right\} \qquad \left\{\bar{\vec x}_1 = \frac{\partial \bar{\vec x}}{\partial \bar u^1},\, \bar{\vec x}_2 = \frac{\partial \bar{\vec x}}{\partial \bar u^2}\right\}$$

$$\bar{\vec x}_\beta = \frac{\partial \bar{\vec x}}{\partial \bar u^\beta} = \frac{\partial \vec x}{\partial u^\alpha}\,\frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar u^\beta} = \frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar u^\beta}\,\vec x_\alpha$$



Entonces, la relación entre bases es

$$\boxed{\bar{\vec x}_\beta = \frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar u^\beta}\,\vec x_\alpha}$$

donde $\dfrac{\partial u^\alpha}{\partial \bar u^\beta}$ es la matriz de cambio de base. La transformación inversa será

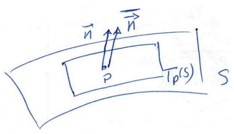
$$\boxed{\vec x_\alpha = \frac{\partial \bar u^\beta}{\partial u^\alpha}\,\bar{\vec x}_\beta}$$

Las cartas $(U,\, \vec{x}\,(u^\alpha))$ y $(\bar{U},\, \overline{\vec{x}}\,(\bar{u}^\beta))$ describen (cubren) la misma región de S. Anteriormente introdujimos la noción de normal a S. Para que las normales asociadas a ambas cartas coincidan, las bases en $T_p(S)$ asociadas a ambas cartas tienen que tener la misma orientación, es decir, la matriz de cambio de base tiene que tener determinante positivo

$$D = det\,\left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^\beta}\right) > 0$$

¿Y si no lo es? Pues intercambiamos el nombre de las variables y solucionado

$$\left\{\begin{array}{l} \bar{u}^1 \to \bar{u}^2 \\ \bar{u}^2 \to \bar{u}^1 \end{array}\right.$$



Esta solución es local pero ocurre a veces que no es posible extender el vector normal unitario a la superficie de forma coherente. Aquí surge la noción de orientabilidad. Una superficie se dice **orientable** si podemos cubrirla con una familia de cartas de forma que en todos los puntos en donde haya solapamiento de caras las normales coinciden.

2.4.2 Leyes de transformación de las componentes contravariantes de un vector, de la 1ª forma fundamental y de su determinante

Hemos visto cómo cambia la base coordenada en $T_p(S)$ al cambiar la parametrización local de la superficie (es decir, al cambiar las coordenadas curvilíneas sobre la superficie). Veamos cómo se transforman las cantidades que hemos estudiado hasta ahora.

Componentes contravariantes

$$\vec{v} \in T_p(S) \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{ll} \vec{v} = v^\alpha\, \vec{x}_\alpha & \{v^\alpha\} \text{ componentes en la base } \{\vec{x}_\alpha\} \\ \\ \vec{v} = \bar{v}^\alpha\, \overline{\vec{x}}_\alpha & \{\bar{v}^\alpha\} \text{ componentes en la base } \{\overline{\vec{x}}_\alpha\} \end{array}\right.$$

donde los índices son mudos. Igualando ambas expresiones y desarrollando

$$\vec{v} = v^\alpha\, \vec{x}_\alpha = v^\alpha\, \frac{\partial \bar{u}^\beta}{\partial u^\alpha}\, \overline{\vec{x}}_\beta = \bar{v}^\beta\, \overline{\vec{x}}_\beta,$$

Entonces, la ley de transformación de las componentes contravariantes de un vector bajo cambio de coordenadas es

$$\boxed{\bar{v}^\beta = \frac{\partial \bar{u}^\beta}{\partial u^\alpha}\, v^\alpha}$$

Componentes de la 1ª forma fundamental

Sea $\quad g_{\alpha\beta} = \vec{x}_\alpha \cdot \vec{x}_\beta \quad y \quad \bar{g}_{\alpha\beta} = \overline{\vec{x}}_\alpha \cdot \overline{\vec{x}}_\beta$

$$\bar{g}_{\alpha\beta} = \overline{\vec{x}}_\alpha \cdot \overline{\vec{x}}_\beta = \left(\frac{\partial u^\mu}{\partial \bar{u}^\alpha}\, \vec{x}_\mu\right) \cdot \left(\frac{\partial u^\nu}{\partial \bar{u}^\beta}\, \vec{x}_\nu\right) = \frac{\partial u^\mu}{\partial \bar{u}^\alpha}\, \frac{\partial u^\nu}{\partial \bar{u}^\beta}\, \vec{x}_\mu \cdot \vec{x}_\nu = \frac{\partial u^\mu}{\partial \bar{u}^\alpha}\, \frac{\partial u^\nu}{\partial \bar{u}^\beta}\, g_{\mu\nu}, \quad \text{entonces}$$

$$\boxed{\bar{g}_{\alpha\beta} = \frac{\partial u^\mu}{\partial \bar{u}^\alpha}\, \frac{\partial u^\nu}{\partial \bar{u}^\beta}\, g_{\mu\nu}}$$

es la ley de transformación de las componentes de la 1ª forma fundamental bajo cambio de coordenadas.

Determinante de la 1ª forma fundamental

$\bar{g} = \bar{g}_{11}\,\bar{g}_{22} - \bar{g}_{12}\,\bar{g}_{21}$

$$\bar{g} = \left(\frac{\partial u^\mu}{\partial \bar{u}^1}\frac{\partial u^\nu}{\partial \bar{u}^1}\,g_{\mu\nu}\right)\left(\frac{\partial u^\rho}{\partial \bar{u}^2}\frac{\partial u^\sigma}{\partial \bar{u}^2}\,g_{\sigma\rho}\right) - \left(\frac{\partial u^\mu}{\partial \bar{u}^1}\frac{\partial u^\nu}{\partial \bar{u}^2}\,g_{\mu\nu}\right)\left(\frac{\partial u^\rho}{\partial \bar{u}^2}\frac{\partial u^\sigma}{\partial \bar{u}^1}\,g_{\sigma\rho}\right) =$$

$$= g_{\mu\nu}\,g_{\rho\sigma}\,\frac{\partial u^\mu}{\partial \bar{u}^1}\frac{\partial u^\rho}{\partial \bar{u}^2}\left(\frac{\partial u^\nu}{\partial \bar{u}^1}\frac{\partial u^\sigma}{\partial \bar{u}^2} - \frac{\partial u^\nu}{\partial \bar{u}^2}\frac{\partial u^\sigma}{\partial \bar{u}^1}\right)$$

donde solo contribuyen $(\nu,\sigma) = (1,2)$ y $(\nu,\sigma) = (2,1)$

$$= g_{\mu 1}\,g_{\rho 2}\,\frac{\partial u^\mu}{\partial \bar{u}^1}\frac{\partial u^\rho}{\partial \bar{u}^2}\underbrace{\left(\frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^1}\frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^2} - \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^2}\frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^1}\right)}_{D} + g_{\mu 2}\,g_{\rho 1}\,\frac{\partial u^\mu}{\partial \bar{u}^1}\frac{\partial u^\rho}{\partial \bar{u}^2}\underbrace{\left(\frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^1}\frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^2} - \frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^2}\frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^1}\right)}_{-D}$$

donde $D \equiv det\left(\dfrac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^\beta}\right)$

$$= (g_{\mu 1}\,g_{\rho 2} - g_{\mu 2}\,g_{\rho 1})\,\frac{\partial u^\mu}{\partial \bar{u}^1}\frac{\partial u^\rho}{\partial \bar{u}^2}\,D, \quad \text{únicamente contribuyen } (\mu,\rho) = (1,2) \text{ y } (\mu,\rho) = (2,1) \text{, entonces}$$

$$= (g_{11}\,g_{22} - g_{12}\,g_{21})\,\frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^1}\frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^2}\,D + (g_{21}\,g_{12} - g_{22}\,g_{11})\,\frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^1}\frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^2}\,D = g\,\left(\frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^1}\frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^2} - \frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^1}\frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^2}\right)D = g\,D^2$$

$$\boxed{\bar{g} = g\,D^2}$$

g se transforma con el jacobiano al cuadrado.

Esta ley de transformación es justo la que se necesita para que el área sea invariante bajo reparametrizaciones (como debe ser)

$A(\Sigma) = \iint_\Omega \sqrt{g}\; du^1 du^2$

$\bar{A}(\Sigma) = \iint_{\bar{\Omega}} \sqrt{\bar{g}}\; d\bar{u}^1 d\bar{u}^2 = \iint_\Omega \sqrt{g\,D^2}\;|\bar{D}|\;du^1 du^2 = \int\int_\Omega \sqrt{g}\;|D|\,|D^{-1}|\;du^1 du^2 = \iint_\Omega \sqrt{g}\;du^1 du^2 = A(\Sigma)$

donde $\bar{D} = det\left(\dfrac{\partial \bar{u}^\alpha}{\partial u^\beta}\right)$. Entonces, el elemento infinitesimal de área es invariante

$$\boxed{dA = \sqrt{g}\,du^1 du^2}$$

2.4.3 Base dual: Componentes covariantes de un vector

Dado el espacio tangente $T_p(S)$ hemos construido la base $B \equiv \{\vec{x}_1,\, \vec{x}_2\}$. Ahora queremos construir otra base $\{\vec{x}^{\,1},\, \vec{x}^{\,2}\}$ tal que cumpla

$$\boxed{\vec{x}^{\,\alpha}\cdot\vec{x}_\beta = \delta^{\,\alpha}{}_{\beta}, \qquad \alpha,\,\beta = 1,2}$$

Nos permitirá utilizar un producto escalar ortonormal facilitando el cálculo. La base $B^* \equiv \{\vec{x}^{\,\alpha}\}$ se denomina **base dual** de la base $B \equiv \{\vec{x}_\alpha\}$

Ejemplo: Sea $\vec{x_1} = (2,0)$, $\vec{x}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ vectores de una base, calcule la base dual de esta.

$$\vec{x}^{\,2}\quad \begin{cases} \vec{x}^{\,2}\cdot\vec{x}_1 = \;\; 0 \;\;\Rightarrow\;\; \vec{x}^{\,2} = (0,a) \\ \vec{x}^{\,2}\cdot\vec{x}_2 = \;\; 1 \;\;\Rightarrow\;\; \dfrac{a}{\sqrt{2}} = 1 \;\;\Rightarrow\;\; a = \sqrt{2} \;\;\Rightarrow\;\; \vec{x}^{\,2} = (0,\sqrt{2}) \end{cases}$$

$$\vec{x}^{\,1} \quad \begin{cases} \vec{x}^{\,1}\cdot\vec{x}_2 = & 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{x}^{\,1} = (b,-b) \\ \vec{x}^{\,1}\cdot\vec{x}_1 = & 1 \quad \Rightarrow \quad 2b = 1 \quad \Rightarrow \quad b = \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \vec{x}^{\,1} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \end{cases}$$

□

La idea de introducir la base dual es poder calcular las componentes contravariantes de un vector mediante productos escalares, aun cuando $\{\vec{x}_\alpha\}$ no es una base ortonormal en el espacio tangente.

Sea $\vec{v} \in T_p(S)$, con $\vec{v} = v^{\,\alpha}\,\vec{x}_\alpha$ donde $\{\vec{x}_\alpha\}$ base de $T_p(S)$, entones $\vec{v}\cdot\vec{x}^{\,\beta} = (v^{\,\alpha}\,\vec{x}_\alpha)\cdot\vec{x}^{\,\beta} = v^{\,\alpha}\,\delta^{\,\beta}{}_{\alpha} = v^{\,\beta} \Rightarrow$

$$v^\beta = \vec{x}^{\,\beta}\cdot\vec{v}$$

Pero $\{\vec{x}^{\,\alpha}\}$ es por construcción base de $T_p(S)$. Para establecer la relación entre $\{\vec{x}_\alpha\}$ y $\{\vec{x}^{\,\alpha}\}$ definamos la matriz inversa de la matriz asociada a la 1ª forma fundamental

$$\boxed{g^{\alpha\beta} = (g_{\alpha\beta})^{-1}}$$

es decir, se cumple

$$\boxed{g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = g^{\,\alpha}{}_{\gamma} = \delta^{\,\alpha}{}_{\gamma}}$$

Los vectores de la base dual B^* se obtienen

$$\boxed{\vec{x}^{\,\alpha} = g^{\alpha\beta}\vec{x}_\beta}$$

$$\vec{x}^{\,\alpha}\cdot\vec{x}_\beta = g^{\alpha\rho}\vec{x}_\rho\cdot\vec{x}_\beta = g^{\alpha\rho}g_{\rho\beta} = \delta^{\,\alpha}{}_{\beta}$$

Además, las componentes de un vector en la base dual se denominan **componentes covariantes del vector**. Ser relaciona con las componentes contravariantes de la forma

$\vec{v} = v^\alpha\,\vec{x}_\alpha = v_\beta\,\vec{x}^{\,\beta} = g^{\beta\rho}\,v_\beta\,\vec{x}_\rho = g^{\alpha\beta}\,v_\beta\,\vec{x}_\alpha$, entonces

$$\boxed{v^\alpha = g^{\alpha\beta}\,v_\beta \quad o \quad v_\alpha = g_{\alpha\beta}\,v^\beta}$$

$v^\alpha \rightarrow$ **Componentes contravariantes** de $\vec{v}$

$v_\alpha \rightarrow$ **Componentes contravariantes** de $\vec{v}$

Los nombres contravariante y covariante provienen de la forma en la que se transforman comparada con la forma en al que se transforma la base $\{\vec{x}_\alpha\}$ bajo una reparametrización. Sea el cambio de coordenadas $u^\alpha = u^\alpha(\bar{u}^\beta)$

$$\bar{\vec{x}}_\alpha = \frac{\partial u^\beta}{\partial \bar{u}^\alpha}\,\vec{x}_\beta, \qquad \bar{\vec{x}}^{\,\alpha} = \frac{\partial \bar{u}^\alpha}{\partial u^\beta}\,\vec{x}^{\,\beta}$$

Componentes contravariantes

$\boxed{\bar{v}^{\,\alpha} = \dfrac{\partial \bar{u}^\alpha}{\partial u^\beta} v^\beta}$ se transforma con la matriz $\dfrac{\partial \bar{u}^\alpha}{\partial u^\beta}$, inversa de la matriz $\dfrac{\partial u^\beta}{\partial \bar{u}^\alpha}$

Componentes covariantes

$$\bar{v}_\alpha = \bar{g}_{\alpha\beta}\,\bar{v}^\beta = \frac{\partial u^\rho}{\partial \bar{u}^\alpha}\frac{\partial u^\sigma}{\partial \bar{u}^\beta}\,g_{\rho\sigma}\,\frac{\partial \bar{u}^\beta}{\partial u^\gamma}\,v^\gamma = \frac{\partial u^\rho}{\partial \bar{u}^\alpha}\,g_{\rho\sigma}\,\delta^\sigma_\gamma\,v^\gamma = \frac{\partial u^\rho}{\partial \bar{u}^\alpha}\,v_\rho \equiv \frac{\partial u^\beta}{\partial \bar{u}^\alpha}\,v_\beta \;\Rightarrow\; \boxed{\bar{v}_\alpha = \frac{\partial u^\beta}{\partial \bar{u}^\alpha}\,v_\beta}$$

se transforma con la matriz $\dfrac{\partial u^\beta}{\partial \bar{u}^\alpha}$ como la base $\{\vec{x}_\alpha\}$

Nota: El producto escalar en $T_p(S)$ puede escribirse en términos de componentes contravariantes y covariantes

$$\vec{v},\,\vec{w} \in T_p(S) \qquad \vec{v}\cdot\vec{w} = v^\alpha\,w^\beta\,\vec{x}_\alpha\cdot\vec{x}_\beta = v^\alpha\,w^\beta\,g_{\alpha\beta} = v_\beta\,w^\beta = v^\alpha\,w_\alpha$$

La contracción de componentes covariantes y contravariantes de un producto escalar. Dicho producto escalar es invariantes bajo reparametrizaciones (es un escalar).

2.4.4 Tensores

Hemos visto que para un vector podemos dar sus componentes contravariantes (con el índice arriba) o sus componentes covariantes (con indice abajo). El proceso de pasar de unas componentes a otras se hace mediante la 1ª forma fundamental ($g_{\alpha\beta}$) o su inversa ($g^{\alpha\beta}$)

Bajar índice: contravariante $\xrightarrow{g_{\alpha\beta}}$ covariante

$$V_\alpha = g_{\alpha\beta}\, V^\beta$$

Subir índice: covariante $\xrightarrow{g^{\alpha\beta}}$ contravariante

$$V^\alpha = g^{\alpha\beta}\, V_\beta$$

La primera forma fundamental es un objeto con 2 índices libres. Dichos objetos se llaman **tensores** de 2º orden. Si los 2 índices están abajo se llaman dos veces covariantes y si están arriba dos veces contravariante; si está uno arriba y otro abajo se dirá mixto. En el fondo, el tensor es el mismo (como pasaba con los vectores); son las componentes que son covariantes, contravariantes o mixtas las que cambian (también lo hacen sus bases). Lo que caracteriza la covariancia o contravariancia de las componentes de un tensor es la forma en la que se transforman bajo reparametrizaciones.

$$\text{Covariante 2 veces} \qquad \bar{g}_{\alpha\beta} = \frac{\partial u^\mu}{\partial \bar{u}^\alpha}\,\frac{\partial u^\nu}{\partial \bar{u}^\beta}\, g_{\mu\nu}$$

$$\text{Contravariante 2 veces} \qquad \bar{g}^{\,\alpha\beta} = \frac{\partial \bar{u}^\alpha}{\partial u^\mu}\,\frac{\partial \bar{u}^\beta}{\partial u^\nu}\, g^{\mu\nu}$$

$$\text{Mixto} \qquad \bar{g}^{\,\alpha}{}_{\beta} = \frac{\partial \bar{u}^\alpha}{\partial u^\mu}\,\frac{\partial u^\nu}{\partial \bar{u}^\beta}\, g^{\mu}{}_{\nu}$$

Podemos tener objetos con más índices que constituyen tensores de orden superior. Dichos índices pueden ser covariantes o contravariantes según sea la ley de transformación correspondiente. Lo veremos más general en el siguiente apartado.

2.5 Geometría riemanniana

La idea de la geometría riemanniana consiste en extraer lo esencial de lo que hemos visto para superficies y extrapolando a espacios (variedades diferenciables) de n dimensiones. Localmente en una variedad diferenciable de n dimensiones podemos introducir un sistema local de coordenadas $(u^1, u^2, \ldots\, u^n)$. Introduzcamos n^2 funciones $g_{\alpha\beta}(u^1, u^2, \ldots\, u^n)$, $\alpha, \beta = 1, \ldots\, n$ dispuestas en forma de matriz $n \times n$ tales que para cada punto $(u^1, u^2, \ldots\, u^n)$.

1. La matriz es simétrica $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}, \quad \forall\, \alpha, \beta = 1, \ldots, n$
2. La matriz es definida positiva ($\equiv$ todos sus determinantes menores son positivos)
3. Si cambiamos de carta (reparametrización), las nuevas funciones $\bar{g}_{\alpha\beta}$ se calculan según

$$\bar{g}_{\alpha\beta} = \frac{\partial u^\mu}{\partial \bar{u}^\alpha}\frac{\partial u^\nu}{\partial \bar{u}^\beta}\, g_{\mu\nu}$$

Las funciones ($g_{\alpha\beta}$) constituyen una métrica riemanniana en M y M pasa a ser un espacio métrico riemanniano. (Nota: Si la condición 2 no se cumple y algún menor es negativo, el espacio se llama pseudo-riemanniano; es lo que ocurre en RG).

En cada punto P de M hay un espacio tangente $T_p(M)$ donde "viven" los vectores tangentes a M (obviamente, ahora no es un plano; ni siquiera lo podemos representar). La dimensión de $T_p(M)$ es n y es un espacio vectorial (es isomorfo a $\mathbb{R}^n$).

La construcción de la base $\{\vec{x}_\alpha\}$ es delicada

$$\vec{x}_\alpha = \frac{\partial\, \vec{x}}{\partial\, u^\alpha}$$

Estos vectores se calcularían por curvas coordenadas (con todas la coordenadas constantes salvo u^α). Dado que no tenemos $\vec{x}$ lo "quitamos" de la definición y tomamos

$$\vec{x}_\alpha = \left.\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\right|_{(u^1,\,\dots\,,\,u^n)} \equiv \partial_\alpha$$

con $\vec{x}_\alpha \in T_P(M)$

$$\vec{v} \in T_p(M): \quad \vec{v} = v^\alpha\,\vec{x}_\alpha = v^\alpha\,\partial_\alpha$$

¿Cómo se transforma $\vec{v}$ bajo un cambio de parametrización de M: $(\bar{u}^1,\,\dots\,,\bar{u}^n) \to (u^1,\,\dots\,,u^n)$? La base $\{\vec{x}_\alpha\}$ son derivadas parciales; la regla de la cadena nos dará la ley de transformación.

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{v} = v^\alpha\,\vec{x}_\alpha = v^\alpha\,\partial_\alpha \equiv v^\alpha\,\dfrac{\partial}{\partial u^\alpha} = v^\alpha\,\dfrac{\partial \bar{u}^\beta}{\partial u^\alpha}\,\dfrac{\partial}{\partial \bar{u}^\beta} = v^\alpha\,\dfrac{\partial \bar{u}^\beta}{\partial u^\alpha}\,\partial_{\bar{\beta}} \\ \\ \overline{\vec{v}} = \bar{v}^\beta\,\overline{\vec{x}}_\beta = \bar{v}^\beta\,\bar{\partial}_\beta \equiv \bar{v}^\beta\,\dfrac{\partial}{\partial \bar{u}^\beta} \end{array}\right. \quad \Rightarrow \text{ comparando ambas expresiones}$$

$$\bar{v}^\beta = \frac{\partial\,\bar{u}^\beta}{\partial\,u^\alpha}\,v^\alpha$$

Se transforman como la componentes contravariantes en superficies. ¿Cuáles serán las componentes covariantes de $\vec{v}$? Aquí nos aparece un problema, porque no tenemos $\vec{x}$ y "necesitamos un producto escalar" para definir la base dual, por lo que lo haremos al revés: sabemos la ley de transformación de la base dual, la exigimos y a partir de ahí "cocinamos" el producto escalar para que nos quede la fórmula de superficies. Ese producto escalar está relacionado con la métrica

$$\vec{x}^{\,\alpha} \;\longrightarrow\; du^\alpha \quad \text{1-forma diferencial}$$

¿Cómo se transforma $\vec{x}^{\,\alpha}$?

$$\overline{\vec{x}}^{\,\alpha} = d\bar{u}^\alpha = \frac{\partial \bar{u}^\alpha}{\partial u^\beta}\,du^\beta = \frac{\partial \bar{u}^\alpha}{\partial u^\beta}\,\vec{x}^\beta$$

Se transforma correctamente. Definamos el producto escalar de una forma y un vector con

$$\langle\,\vec{x}^{\,\alpha},\,\vec{x}_\beta\,\rangle = \delta^{\,\alpha}{}_{\beta}$$

siendo bilineal. Este producto escalar tiene que coincidir con el que resulta de usar la métrica ($g_{\alpha\beta}$) que ya definimos

$$\vec{v},\vec{w} \in T_p(M): \quad \left\{\begin{array}{l} \vec{v} = v^\alpha\,\vec{x}_\alpha \\ \vec{w} = w^\alpha\,\vec{x}_\alpha \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \langle\vec{v},\,\vec{w}\rangle = \vec{v}\cdot\vec{w} = g_{\alpha\beta}\,v^\alpha\,w^\beta$$

Sea $\vec{v}^{\,*} = v_\alpha\,\vec{x}^{\,\alpha}$ la forma asociada a $\vec{v}$ tal que nos da los productos escalares correctos. Entonces

$$\langle\vec{v}^{\,*},\,\vec{w}\rangle = \langle v_\alpha\,\vec{x}^{\,\alpha},\,w^\beta\,\vec{x}_\beta\rangle = v_\alpha\,w^\beta\,\langle\vec{x}^{\,\alpha},\,\vec{x}_\beta\rangle = v_\alpha\,w^\beta\,\delta^{\,\alpha}{}_{\beta} = v_\beta\,w^\beta, \quad \text{comparando con la expresión de arriba}$$

$$v_\beta = g_{\alpha\beta}\,v^\alpha = g_{\beta\alpha}\,v^\alpha$$

La métrica baja los índices.

El espacio de la forma es el espacio tangente dual $T_P^*(M)$ o cotangente. De esta forma podemos definir tensores igual que hicimos para superficies. Un tensor de orden 2 (2 veces covariante) se define como

$$\begin{array}{rl} T: & T_P(M) \times T_P(M) \longrightarrow \mathbb{R} \quad (\textit{multilineal}) \\ & (\vec{v},\vec{w}) \longrightarrow T(\vec{v},\vec{w}) = T_{\alpha\beta}\,v^\alpha\,w^\beta \end{array}$$

Un tensor de orden 2 (2 veces contravariante) se define como

$$\begin{array}{rl} T: & T_P^*(M) \times T_P^*(M) \longrightarrow \mathbb{R} \quad (\textit{multilineal}) \\ & (\vec{v}^{\,*},\vec{w}^{\,*}) \longrightarrow T(\vec{v}^{\,*},\vec{w}^{\,*}) = T^{\alpha\beta}\,v_\alpha\,w_\beta \end{array}$$

Se suben y se bajan los índices con $g^{\alpha\beta}$ y $g_{\alpha\beta}$, respectivamente.

Tipos de tensores (según su ley de transformación)

- **Escalar**: $\bar{h} = h$ es decir $\bar{h}(\bar{u}^\alpha) = h(u^\alpha) = h(u^\alpha(\bar{u}^\beta))$. Simplemente sustituir las nuevas coordenadas (no hay matriz jacobiana). Un escalar es una cantidad geométrica; su valor no depende del sistema de coordenadas.
- **Vector (Tensor de orden 1)**:

$$\text{Componentes contravariantes:}\quad \bar{v}^\beta = \frac{\partial \bar{u}^\beta}{\partial u^\alpha}\, v^\alpha \quad \text{tipo}\ \binom{1}{0}$$

$$\text{Componentes covariantes:}\quad \bar{v}_\beta = \frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^\beta}\, v_\alpha \quad \text{tipo}\ \binom{0}{1}$$

- **Tensor de orden 2**:

$$\text{2 veces contravariantes:}\quad \bar{a}^{\alpha\beta} = \frac{\partial \bar{u}^\alpha}{\partial u^\mu}\frac{\partial \bar{u}^\beta}{\partial u^\nu}\, a^{\mu\nu} \quad \text{tipo}\ \binom{2}{0}$$

$$\text{2 veces covariantes:}\quad \bar{a}_{\alpha\beta} = \frac{\partial u^\mu}{\partial \bar{u}^\alpha}\frac{\partial u^\nu}{\partial \bar{u}_\beta}\, a^{\mu\nu} \quad \text{tipo}\ \binom{0}{2}$$

$$\text{Mixto:}\quad \bar{a}^\alpha{}_\beta = \frac{\partial \bar{u}^\alpha}{\partial u^\mu}\frac{\partial u^\nu}{\partial \bar{u}_\beta}\, a^\mu{}_\nu \quad \text{tipo}\ \binom{1}{1}$$

- **Tensor de orden (r+s)**: r veces covariantes y s veces contravariante. Tensor de tipo $\binom{s}{r}$

$$\boxed{\bar{h}_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}{}^{\beta_1 \ldots \beta_s} = \frac{\partial u^{\mu_1}}{\partial \bar{u}^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial u^{\mu_r}}{\partial \bar{u}^{\alpha_r}}\frac{\partial \bar{u}^{\beta_1}}{\partial u^{\nu_1}} \cdots \frac{\partial \bar{u}^{\beta_s}}{\partial u^{\nu_s}}\, h_{\mu_1 \ldots \mu_r}{}^{\nu_1 \ldots \nu_s}}$$

2.6 Fundamentos del cálculo tensorial

-Suma de tensores: La operación suma está definida para tensores del mismo tipo (misma disposición y número de índices)

$$\boxed{a^\mu{}_\nu + b^\mu{}_\nu = t^\mu{}_\nu}$$

$$\text{tensor de tipo}\ \binom{1}{1} + \text{tensor de tipo}\ \binom{1}{1} = \text{tensor de tipo}\ \binom{1}{1}$$

-Producto de tensores (Producto tensorial): definido para tensores de cualquier tipo

$$\boxed{a^\mu{}_\nu\, b^\rho = t^\mu{}_\nu{}^\rho}$$

$$\text{tensor de tipo}\ \binom{1}{1}\ \text{tensor de tipo}\ \binom{1}{0} = \text{tensor de tipo}\ \binom{2}{1}$$

-Contracción (de 2 índices):

$$\boxed{a^\mu{}_\nu \;\rightarrow\; a^\mu{}_\mu = a^1{}_1 + a^2{}_2 + \ldots + a^n{}_n}$$

-Subida y bajada de índices:

$$\boxed{v_\alpha = g_{\alpha\beta}\, v^\beta, \qquad v^\alpha = g^{\alpha\beta}\, v_\beta}$$

$$\boxed{R_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\mu\alpha}\, R^{\alpha}{}_{\nu\rho\sigma}}$$

-Simetrías: Un tensor es **simétrico** en 2 índices del mismo tipo si al intercambiarlos no cambia

$$\boxed{T^{\cdots\mu\cdots\nu\cdots} = T^{\cdots\nu\cdots\mu\cdots}} \qquad \text{simétrico en } \mu \ y \ \nu$$

Un tensor es **antisimétrico** en 2 índices del mismo tipo si al intercambiarlos cambia su signo

$$\boxed{T^{\cdots\mu\cdots\nu\cdots} = -\,T^{\cdots\nu\cdots\mu\cdots}} \qquad \text{antisimétrico en } \mu \ y \ \nu$$

-Elemento de (hiper)volumen: $\boxed{dV = \sqrt{g}\, du^1 \ldots du^n}$

2.7 Tensores especiales

2.7.1 Delta de Kronecker

$$\boxed{\delta^{\alpha}{}_{\beta} = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta \\ 0, & \alpha \neq \beta \end{cases}}$$

Esta cantidad es la misma en cualquier sistema de de coordenadas. ¿Es un tensor o sólo un símbolo? Tenemos que ver si se transforma como un tensor mixto.

$$\delta^{\alpha}{}_{\beta}\, \frac{\partial \bar{u}^\beta}{\partial u^\mu}\, \frac{\partial u^\nu}{\partial \bar{u}^\alpha} = \frac{\partial \bar{u}^\alpha}{\partial u^\mu}\, \frac{\partial u^\nu}{\partial \bar{u}^\alpha} = \delta^{\nu}{}_{\mu} \quad \Rightarrow \quad \bar{\delta}^{\alpha}{}_{\beta} = \delta^{\alpha}{}_{\beta}$$

Por tanto, es un tensor mixto que no cambia bajo un cambio de coordenadas. De hecho, se cumple $\delta^{\alpha}{}_{\beta} = g^{\alpha}{}_{\beta}$

Extra: $\delta_{\mu}{}^{\nu} = g_{\mu}{}^{\nu} = g_{\mu\rho}\, g^{\rho\nu} = g_{\rho\mu}\, g^{\nu\rho} = g^{\nu}{}_{\mu} = \delta^{\nu}{}_{\mu} \qquad \delta_{\mu}{}^{\nu} = \delta^{\nu}{}_{\mu}$

2.7.2 Símbolo de Levi-Civita

No todo objeto con índices es un tensor. Lo que caracteriza a un tensor es su ley de transformación bajo cambio de coordenadas (sobre sus componentes).

El símbolo de Levi-Civita en 2 dimensiones se define como

$$\boxed{\varepsilon_{\alpha\beta} = \begin{cases} 0, & \alpha = \beta = 1 & (\epsilon_{11} = 0) \\ 1, & \alpha = 1, \beta = 2 & (\epsilon_{12} = 1) \\ -1, & \alpha = 2, \beta = 1 & (\epsilon_{21} = -1) \\ 0, & \alpha = \beta = 2 & (\epsilon_{22} = 0) \end{cases}}$$

Esta definición no depende del sistema de coordenadas. ¿Será un tensor que no cambia como la delta de Kronecker? La respuesta es no; no es un tensor

$$\varepsilon_{\alpha\beta}\, \frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^\mu}\, \frac{\partial u^\beta}{\partial \bar{u}^\nu} \qquad \text{¿Es un tensor?} \qquad \text{Para} \left.\begin{array}{l} \mu = \nu = 1 \\ \mu = \nu = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow 0$$

Para $\mu = 1,\ \nu = 2$ $\qquad \varepsilon_{\alpha\beta} \dfrac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^1} \dfrac{\partial u^\beta}{\partial \bar{u}^2} = \dfrac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^1} \dfrac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^2} - \dfrac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^1} \dfrac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^2} = D$

Para $\mu = 2,\ \nu = 1$ $\qquad \varepsilon_{\alpha\beta} \dfrac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^2} \dfrac{\partial u^\beta}{\partial \bar{u}^1} = \dfrac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^2} \dfrac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^1} - \dfrac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^2} \dfrac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^1} = -D$

Entonces

$$\bar{\varepsilon}_{\mu\nu} = \varepsilon_{\alpha\beta} \frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^\mu} \frac{\partial u^\beta}{\partial \bar{u}^\nu} = D\, \varepsilon_{\mu\nu}$$

En conclusión, como no se transforma como lo haría un tensor se concluye que $\varepsilon_{\alpha\beta}$ no es un tensor.

2.7.3 (Pseudo-)Tensor de Levi-Civita

Si recordamos que $\bar{g} = gD^2$, tenemos que $\|D\| = \sqrt{\dfrac{\bar{g}}{g}}$

Si $D > 0$ (transformación que conserve la orientación), las cantidades $\sqrt{g}\ \varepsilon_{\alpha\beta}$ si se transforman como un tensor de 2º orden 2 veces covariante

$$\boxed{\epsilon_{\alpha\beta} = \sqrt{g}\ \varepsilon_{\alpha\beta} = \begin{cases} \epsilon_{11} = 0 \\ \epsilon_{12} = \sqrt{g} = -\epsilon_{21} \\ \epsilon_{22} = 0 \end{cases}}$$

El calificativo "pseudo" se incluye porque si la transformación cambia la orientación $\epsilon_{\alpha\beta}$ tiene un signo menos y no se transforma correctamente.

El pseudo-tensor de Levi-Civita en 2 dimensiones nos da el área del paralelogramo formado por 2 vectores de $T_P(S)$

$$\vec{v},\, \vec{w} \in T_P(S)\ \ (n=2) \quad \begin{cases} \vec{v} = v^1\, \vec{x}_1 + v^2\, \vec{x}_2 \\ \vec{w} = w^1\, \vec{x}_1 + w^2\, \vec{x}_2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \epsilon_{\alpha\beta}\, v^\alpha\, w^\beta = \sqrt{g}\,(v^1 w^2 - v^2 w^1)$$

$$\vec{v} \times \vec{w} = (v^1\, w^2 - v^2\, w^1)\ \vec{x}_1 \times \vec{x}_2 = \sqrt{g}\ (v^1\, w^2 - v^2\, w^1)\ \vec{n}$$

ya que $\sqrt{g} = \|\vec{x}_1 \times \vec{x}_2\|$ y $\vec{n} = \dfrac{\vec{x}_1 \times \vec{x}_2}{\|\vec{x}_1 \times \vec{x}_2\|}$. Como aparece $\vec{n}$ al cambiar la orientación cambia el signo de $\vec{v} \times \vec{w}$

En n dimensiones se define el símbolo de Levi-Civita

$$\boxed{\varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_n} = \begin{cases} 0 & \text{si hay 2 o más índices iguales} \\ 1 & \text{si es una permutación par de } (1, \dots, n) \\ -1 & \text{si es una permutación impar de } (1, \dots, n) \end{cases}}$$

El pseudo-tensor de Levi-Civita se define

$$\boxed{\epsilon_{\mu_1 \dots \mu_n} = \sqrt{g}\ \varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_n}}$$

y su contracción con n vectores nos da el hiper-volumen del paralelepípedo que describen.

(Nota: En el caso de relatividad general, $g < 0$, por lo que el pseudo-tensor de Levi-civita se define

$$\epsilon_{\mu_1 \dots \mu_n} = \sqrt{-g}\ \varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_n}\ )$$

3 Segunda forma fundamental, curvatura media y curvatura gaussiana

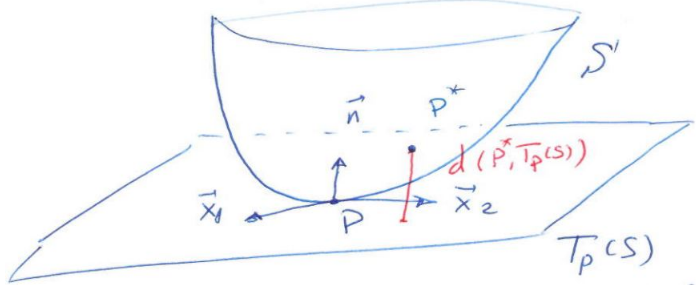
3.1 Segunda forma fundamental

3.1.1 Definición

En el tema 2 vimos que un plano y un cilindro son localmente equivalentes desde el punto de vista de la 1ª forma fundamental. ¿Qué los hace distintos? Para verlo tenemos que mirar a ambas superficies **desde fuera** y fijarnos en su curvatura. Realmente, nos interesa medir curvatura dentro de la variedad, ya que no siempre vamos a poder salir fuera de esta para medirla. La idea de curvatura para superficies es una medida de cómo se separa (localmente) una superficie de su plano tangente; si al moverme sobre la variedad el plano tangente en un punto cambia, entonces la variedad no es plana. Consideremos una superficie parametrizada

$$\begin{aligned} \vec{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 &\rightarrow V \cap S \\ (u^1,\, u^2) &\rightarrow \vec{x}(u^1,\, u^2) \end{aligned}$$

y un punto genérico $P \in V \cap S$; consideremos también el espacio (plano) tangente a S en P, $T_P(S)$. En P tenemos la base de $\mathbb{R}^3$ formada por $\left\{ \vec{x}_1 = \dfrac{\partial \vec{x}}{\partial u^1},\, \vec{x}_2 = \dfrac{\partial \vec{x}}{\partial u^2},\, \vec{n} = \dfrac{\vec{x}_1 \times \vec{x}_2}{\|\vec{x}_1 \times \vec{x}_2\|} \right\}$, evaluada en P. Consideremos también un punto $P^* \in V \cap S$ infinitesimalmente próximo a P; sean $(u^1,\, u^2)$ y $(u^1 + h^1,\, u^2 + h^2)$ las coordenadas locales (curvilíneas) de P y P^*, respectivamente



Como la curvatura es una medida de la separación de la superficie al plano tangente, consideremos la distancia (con signo) del punto P* al plano tangente a S en P, $T_P(S)$.

$$d(P^*,\, T_P(S)) = [\, \vec{x}(u^\rho + h^\rho) - \vec{x}(u^\rho)\,] \cdot \vec{n}$$

donde $\vec{x}(u^\rho + h^\rho) \equiv$ vector de posición del punto P* y $\vec{x}(u^\rho) \equiv$ vector de posición del punto P. Dado que P y P* están infinitesimalmente próximos podemos hacer un desarrollo en serie

$$\vec{x}(u^\rho + h^\rho) = \vec{x}(u^\rho) + \vec{x}_\alpha(u^\rho)\, h^\alpha + \tfrac{1}{2}\, \vec{x}_{\alpha\beta}(u^\rho)\, h^\alpha h^\beta + \vec{R}_2$$

donde $\vec{R}_2$ son los términos de orden superior en h, y $\boxed{\vec{x}_{\alpha\beta} \equiv \dfrac{\partial}{\partial u^\beta}\left(\dfrac{\partial \vec{x}}{\partial u^\alpha}\right)}$. Entonces

$$d(P^*,\, T_P(S)) = \left[\vec{x}_\alpha(u^\rho)\, h^\alpha + \frac{1}{2}\, \vec{x}_{\alpha\beta}(u^\rho)\, h^\alpha h^\beta + \ldots \right] \cdot \vec{n} = \frac{1}{2}\, \vec{x}_{\alpha\beta}(u^\rho) \cdot \vec{n}\, h^\alpha h^\beta + \ldots$$

donde $\vec{x}_\alpha \cdot \vec{n} = 0$ porque son vectores de la misma base. Definimos la **segunda forma fundamental** como

$$\boxed{b_{\alpha\beta} = \vec{x}_{\alpha\beta} \cdot \vec{n}}$$

Derivando el producto escalar $\vec{x}_\alpha \cdot \vec{n} = 0$ sobre la variable u^β se tiene: $\vec{x}_{\alpha\beta} \cdot \vec{n} + \vec{x}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta = 0\,$; por lo que la segunda forma fundamental puede expresarse como

$$\boxed{b_{\alpha\beta} = -\vec{x}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta}$$

Igual que para la 1ª forma fundamental, denotamos el determinante de la 2ª forma fundamental

$$\boxed{b = det(b_{\alpha\beta})}$$

El nombre de 2ª forma fundamental proviene de que

$$d(P^*, T_P(S)) = \frac{1}{2}\, b_{\alpha\beta}\, h^\alpha h^\beta + \ldots$$

constituye (a orden dominante) una **forma cuadrática**

$$Q(h^\rho) \equiv \frac{1}{2}\, b_{\alpha\beta}\, h^\alpha h^\beta$$

Al contrario que la 1ª forma fundamental, la segunda no tiene por qué ser definida positiva.

3.1.2 Propiedades de la 2ª forma fundamental

• Si $(b_{\alpha\beta}) = 0$ sobre una carta, la superficie en esa carta es un plano. El recíproco también es cierto. La 2ª forma fundamental para un plano es nula.

Supongamos que $b_{\alpha\beta} = 0$ en la carta local de S (en todos los puntos de la carta). Sabemos que $\vec{n}_\alpha \in T_P(S)$ en cada punto de la carta ya que

$$\|\vec{n}\| = 1 \;\Rightarrow\; \vec{n}\cdot\vec{n}_\alpha = 0 \;\Rightarrow\; \vec{n}_\alpha \in T_P(S)$$

Como $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ es base de $T_P(S)$, $\vec{n}_\alpha$ se expresa como combinación lineal de $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$. Pero

$$b_{\alpha\beta} = 0 \;\Leftrightarrow\; \vec{x}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta = 0 \;\Rightarrow\; \vec{n} = \vec{cte}$$

Por tanto,

$$(\vec{x}\cdot\vec{n})_\alpha = \cancelto{0}{\vec{n}\cdot\vec{x}_\alpha} + \cancelto{0}{\vec{n}_\alpha}\cdot\vec{x} = 0 \quad\Rightarrow\quad \vec{x}\cdot\vec{n} = cte \quad \text{ecuación de un plano.}$$

• $b_{\alpha\beta}$ son las componentes covariantes de un tensor de 2º orden (en realidad, pseudo-tensor)

$$\bar{b}_{\alpha\beta} = -\bar{\vec{x}}_\alpha \cdot \bar{\vec{n}}_\beta = -\left(\frac{\partial u^\mu}{\partial \bar{u}^\alpha}\,\vec{x}_\mu\right)\cdot\left(\frac{\partial u^\nu}{\partial \bar{u}^\beta}\,\vec{n}_\nu\right) = \frac{\partial u^\mu}{\partial \bar{u}^\alpha}\,\frac{\partial u^\nu}{\partial \bar{u}^\beta}\, b_{\mu\nu}$$

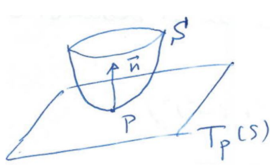
Esto se cumple si no cambia el sentido de $\vec{n}$ al cambiar de carta.

• La ley de transformación del determinante de la 2ª forma fundamental es

$$\boxed{\bar{b} = D^2\, b}$$

3.1.3 Clasificación de los puntos de la superficie en función de la 2ª forma fundamental

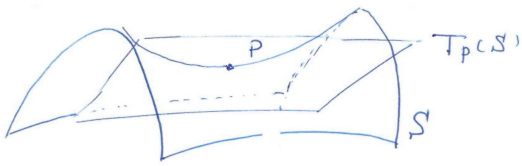
Dependiendo de como se separa la superficie del plano tangente en un punto P de la misma, dicho punto P puede clasificarse de 4 formas:



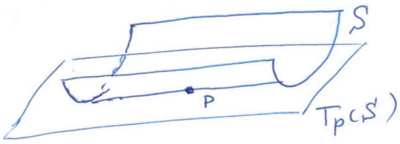
• **Punto elíptico:** se cumple $b > 0$. La superficie se comporta localmente como un paraboloide elíptico.

Si $b_{11} > 0$, la superficie está en el sentido de $\vec{n}$. Si $b_{11} < 0$, la superficie está en el sentido contrario de $\vec{n}$.

• **Punto hiperbólico:** Si $b < 0$. La superficie se comporta localmente como un paraboloide hiperbólico (silla de montar)



• **Punto parabólico:** Si $b = 0$ pero $(b_{\alpha\beta}) \neq (0)$ (determinante nulo pero la matriz no es nula). Localmente la superficie se comporta como un cilindro parabólico.



• **Punto plano:** Si $b_{\alpha\beta} = 0$ (la 2ª forma fundamental se anula). La variedad no es necesariamente plana Quiere decir que en el punto P la curvatura es nula (localmente se comporta como un plano, al igual que le sucede a la función x^4 en $x = 0$).

Ejemplo: Clasifique los puntos de la superficie $\vec{x}(u^1, u^2) = (u^1, u^2, (u^1)^2 + (u^2)^3)$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{x}_1 = \big(1,\, 0,\, 2u^1\big) \\ \\ \vec{x}_2 = \big(0,\, 1,\, 3(u^2)^2\big) \end{array}\right\} \quad \vec{n} = \frac{\vec{x}_1 \times \vec{x}_2}{\|\vec{x}_1 \times \vec{x}_2\|} = \frac{(-2u^1,\, -3(u^2)^2,\, 1)}{\sqrt{1 + 4(u^1)^2 + 9(u^2)^4}}$$

vamos a emplear la expresión $b_{\alpha\beta} = \vec{x}_{\alpha\beta} \cdot \vec{n}$

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{x}_{11} = (0,\, 0,\, 2) \\ \\ \vec{x}_{12} = \vec{x}_{21} = (0,\, 0,\, 0) \\ \\ \vec{x}_{22} = (0,\, 0,\, 6u^2) \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} b_{11} = \dfrac{2}{\sqrt{1 + 4(u^1)^2 + 9(u^2)^4}} > 0 \\ \\ b_{12} = b_{21} = 0 \\ \\ b_{22} = \dfrac{6u^2}{\sqrt{1 + 4(u^1)^2 + 9(u^2)^4}} \end{array}\right.$$

$(b_{\alpha\beta}) \neq (0)$ la 2ª forma fundamental no es idénticamente nula en ningún punto.

El signo del determinante de la segunda forma fundamental depende únicamente de la variable u^2:

- $b > 0$ para $u^2 > 0$ Puntos elípticos
- $b < 0$ para $u^2 < 0$ Puntos hiperbólicos
- $b = 0$ para $u^2 = 0$ Puntos parabólicos

3.2 Curvaturas principales, curvatura media y curvatura gaussiana

Cuando consideramos una curva dentro de una superficie, la curvatura de la curva dependerá en parte de la superficie y en parte de la curva. Es más, una misma curva (misma curvatura) puede meterse en dos superficies distintas y el desglose de ambas contribuciones será distinto.

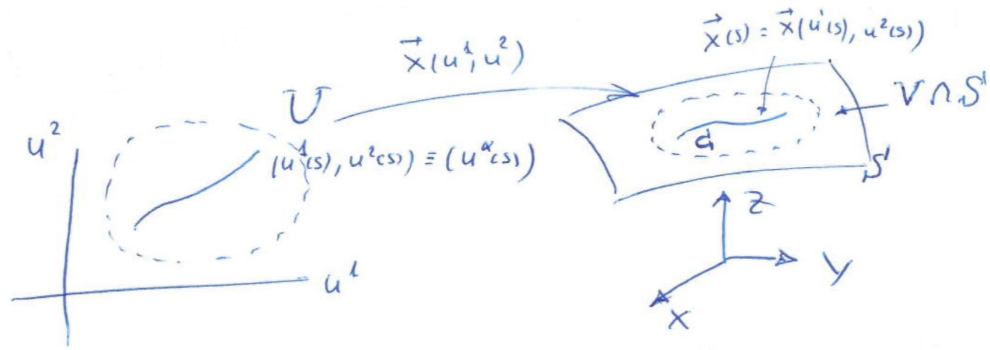
La contribución a la curvatura de la curva, proveniente de la superficie, radica en cómo varía la normal sobre la superficie, así como el ángulo que forma $\vec{n}$ y $\vec{\kappa}$ $(\vec{\kappa} = \kappa\,\vec{p})$. Descompongamos el vector curvatura en la componente paralela a $\vec{n}$ y el resto

$$\boxed{\vec{\kappa} = \vec{\kappa}_n + \vec{\kappa}_g}$$

$\boxed{\vec{\kappa}_n = \kappa_n\,\vec{n}} \equiv$ **vector curvatura normal** (debida a la superficice)

$\vec{\kappa}_g \equiv$ **vector curvatura geodésica** (debida al tipo de curva)

Consideremos una superficie parametrizada S (carta local) y una curva C en S parametrizada en parámetro longitud de arco, $\vec{x}(s)$, $\|\dot{\vec{x}}\| = 1$.



La curvatura normal se puede escribir como $\kappa_n = \vec{\kappa}\cdot\vec{n}$. Recordando el vector de curvatura de una curva en parámetro natural $\vec{\kappa} = \dot{\vec{t}} = \ddot{\vec{x}}$. Como $\vec{x}(s) \equiv \vec{x}(u^\alpha(s))$, aplicando la regla de la cadena tendremos

$$\dot{\vec{x}} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^\alpha}\,\dot{u}^\alpha = \vec{x}_\alpha\,\dot{u}^\alpha$$

$$\ddot{\vec{x}} = \vec{x}_{\alpha\beta}\,\dot{u}^\alpha\,\dot{u}^\beta + \vec{x}_\alpha\,\ddot{u}^\alpha$$

donde $\dot{a} \equiv \dfrac{da}{ds}$. Por tanto,

$$\kappa_n = \vec{\kappa}\cdot\vec{n} = \ddot{\vec{x}}\cdot\vec{n} = (\vec{x}_{\alpha\beta}\,\dot{u}^\alpha\,\dot{u}^\beta + \vec{x}_\alpha\,\ddot{u}^\alpha)\cdot\vec{n} = \vec{x}_{\alpha\beta}\cdot\vec{n}\,\dot{u}^\alpha\,\dot{u}^\beta, \qquad \text{ya que} \quad \vec{x}_\alpha\cdot\vec{n} = 0. \quad \text{Finalmente}$$

$$\boxed{\kappa_n(s) = b_{\alpha\beta}\,\dot{u}^\alpha\,\dot{u}^\beta}$$

La curvatura κ_n se denomina curvatura normal y es la parte de la curvatura forzada por estar dentro de S. Veamos su expresión en una parametrización arbitraria.

$$\dot{u}^\alpha = \frac{du^\alpha}{ds} = \frac{du^\alpha}{dt}\,\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\|\vec{x}\,'\|}\,\frac{du^\alpha}{dt} = \frac{1}{\|\vec{x}\,'\|}\,u^{\alpha\,\prime}, \qquad \text{entonces}$$

$$\boxed{\kappa_n(t) = \kappa\cos\alpha = \frac{1}{\|\vec{x}\,'\|^2}\,b_{\alpha\beta}\,u^{\alpha\,\prime}\,u^{\beta\,\prime} = \frac{b_{\alpha\beta}\,u^{\alpha\,\prime}\,u^{\beta\,\prime}}{g_{\mu\nu}\,u^{\mu\,\prime}\,u^{\nu\,\prime}}}$$

Puede apreciarse que κ_n = cociente entre la 2ª y la 1ª forma fundamental evaluadas sobre la curva. Vemos que el ángulo entre $\vec{n}$ y $\vec{\kappa}$ determina la curvatura normal de la curva. Vamos a definir las **curvaturas normales principales** de la superficie en el punto $P = (u^\alpha_o)$ fijo como los valores mayor y menor de la curvatura normal de todas las curvas contenidas en S que pasan por P. κ_n depende únicamente de la dirección de la velocidad de la curva en P, ya que el punto donde se evalúa la curvatura es fijo. Cambiemos la notación

$$u^{\alpha\,\prime} \equiv l^\alpha \quad \Rightarrow \quad \kappa_n(l^\rho) = \frac{b_{\alpha\beta}\,l^\alpha\,l^\beta}{g_{\mu\nu}\,l^\mu\,l^\nu} = \frac{A}{B}, \qquad \text{siendo} \quad A \equiv b_{\alpha\beta}\,l^\alpha\,l^\beta, \quad B \equiv g_{\mu\nu}\,l^\mu\,l^\nu$$

Para maximizar derivamos con respecto a los parámetros l^1 y l^2 e igualamos a cero

$$\frac{\partial \kappa_n}{\partial l^\alpha} = \frac{B\,\frac{\partial A}{\partial l^\alpha} - A\,\frac{\partial B}{\partial l^\alpha}}{B^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial A}{\partial l^\alpha} - \kappa_n\,\frac{\partial B}{\partial l^\alpha} = 0, \qquad \text{calculemos las derivadas parciales}$$

$\dfrac{\partial A}{\partial l^\alpha} = \dfrac{\partial}{\partial l^\alpha}\,(b_{\alpha\beta}\; l^\alpha\, l^\beta)$ hay tres $\alpha' s$; el criterio de Einstein no se puede hacer con tres índices iguales por lo que tenemos que hacer un cambio de índices, uno que no cambie el resultado. En este caso cambiaremos los $\alpha' s$ contraídos

$$\frac{\partial A}{\partial l^\alpha} = \frac{\partial}{\partial l^\alpha}\,(b_{\mu\beta}\; l^\mu\, l^\beta) = b_{\mu\beta}\,\frac{\partial l^\mu}{\partial l^\alpha}\,l^\beta + b_{\mu\beta}\,l^\mu\,\frac{\partial l^\beta}{\partial l^\alpha} = b_{\mu\beta}\,\delta^{\mu}{}_{\alpha}\,l^\beta + b_{\mu\beta}\,l^\mu\,\delta^{\beta}{}_{\alpha} = b_{\alpha\beta}\,l^\beta + b_{\mu\alpha}\,l^\mu = 2\,b_{\alpha\beta}\,l^\beta$$

$$\frac{\partial B}{\partial l^\alpha} = \frac{\partial}{\partial l^\alpha}\,(g_{\mu\beta}\; l^\mu\, l^\beta) = 2\,g_{\alpha\beta}\,l^\beta$$

Sustituyendo

$$(b_{\alpha\beta} - \kappa_n\,g_{\alpha\beta})\,l^\beta = 0, \qquad \alpha = 1,2 \quad \Rightarrow \quad [\,(b_{\alpha\beta}) - \kappa_n\,(g_{\alpha\beta})\,]\,\vec{l}_n = 0$$

donde $\vec{l}_n$ son las **direcciones principales**. Explícitamente

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha = 1 & (b_{11} - \kappa_n\,g_{11})\,l^1 + (b_{12} - \kappa_n\,g_{12})\,l^2 = 0 \\[2ex] \alpha = 2 & (b_{21} - \kappa_n\,g_{21})\,l^1 + (b_{22} - \kappa_n\,g_{22})\,l^2 = 0 \end{array}\right\}$$

Se trata de un sistema lineal homogéneo en l^1 y l^2. Dado que l^1 y l^2 no pueden ser cero a la vez, $(l^1, l^2) \neq (0,0)$, la única solución es que se anule el paréntesis. Esto se da si el determinante del sistema se anula.

$$\boxed{det\,(b_{\alpha\beta} - \kappa_n\,g_{\alpha\beta}) = \begin{vmatrix} b_{11} - \kappa_n\,g_{11} & b_{12} - \kappa_n\,g_{12} \\[2ex] b_{21} - \kappa_n\,g_{21} & b_{22} - \kappa_n\,g_{22} \end{vmatrix} = 0}$$

Dado que $(b_{\alpha\beta})$ y $(g_{\alpha\beta})$ están fijos en el punto P, esta ecuación de 2 soluciones de κ_n es un polinomio de 2º orden en κ_n. Estas soluciones denotadas por κ_1 y κ_2 (asumimos $\kappa_1 \geq \kappa_2$) se denominan **curvaturas normales principales de S** en P.

Podemos calcular las curvaturas normales principales en términos del **operador de Weingarten** ($\equiv\ b^{\mu}{}_{\nu}$) subiendo índices con la primera forma fundamental, convirtiendo así el sistema de ecuaciones en un problema de autovalores.

$$g^{\mu\alpha}\,(b_{\alpha\beta} - \kappa_n\,g_{\alpha\beta})\,l^\beta = 0 \quad \Rightarrow \quad (b^{\mu}{}_{\beta} - \kappa_n\,\delta^{\mu}{}_{\beta})\,l^\beta = 0 \quad \Rightarrow \quad \Big[(b^{\mu}{}_{\beta}) - \kappa_n\,\mathbb{I}\Big]\,\vec{l}_n = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{det\,(b^{\mu}{}_{\beta} - \kappa_n\,\delta^{\mu}{}_{\beta}) = \begin{vmatrix} b^{1}{}_{1} - \kappa_n & b^{1}{}_{2} \\[2ex] b^{2}{}_{1} & b^{2}{}_{2} - \kappa_n \end{vmatrix} = 0} \quad \Rightarrow$$

$$\kappa_n^2 - (b^{1}{}_{1} + b^{2}{}_{2})\,\kappa_n + (b^{1}{}_{1}\,b^{2}{}_{2} - b^{1}{}_{2}\,b^{2}{}_{1}) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\kappa_n^2 - (b^{\alpha}{}_{\alpha})\,\kappa_n + \frac{b}{g} = 0}$$

ya que $det\,(b^{\mu}{}_{\nu}) = det\,(g^{\mu\alpha}\,b_{\alpha\nu}) = det\,(g^{\mu\alpha})\,det(\,b_{\alpha\nu}) = \dfrac{1}{g}\,b$

Recordando las soluciones de una ecuación polinómica de segundo orden

$$(\kappa_n - \kappa_1)(\kappa_n - \kappa_2) = 0 \ \Rightarrow\ \kappa_n^2 - (\kappa_1 + \kappa_2)\,\kappa_n + \kappa_1\,\kappa_2 = 0$$

por lo que

$$\boxed{\kappa_1 + \kappa_2 = b^{\alpha}{}_{\alpha}} \qquad y \qquad \boxed{\kappa_1 \cdot \kappa_2 = \frac{b}{g}}$$

Definamos 2 curvaturas de la superficie

- **Curvatura media:** $\boxed{H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) = \frac{1}{2}\, b^{\alpha}{}_{\alpha}}$

- **Curvatura Gaussiana:** $\boxed{K = \kappa_1 \kappa_2 = \frac{b}{g}}$

Nota: κ_1 y κ_2 son dos curvaturas máxima y mínima en dos direcciones distintas, por lo que se define la curvatura media H como una media de las curvaturas. H es un pseudo-escalar, ya que cambia de signo si al reparametrizar cambiamos la dirección de $\vec{n}$.

Nota: Una superficie se dice **minimal** si $H = 0$ en sus puntos. Corresponde a una superficie de área mínima.

Veamos por último cómo se transforman H y K bajo cambios de coordenadas. Recordemos que $b_{\alpha\beta}$ es un pseudo-tensor y que $g_{\alpha\beta}$ es un tensor. Además κ_n sólo cambia el signo si cambia el sentido de $\vec{n}$ en el cambio de coordenadas; por lo que K, al ser un producto de dos elementos que cambian de signo con dicho tipo de reparametrización, es invariante bajo cualquier cambio de coordenadas. Esplícitamente

$$\bar{b} = b\, D^2, \quad \bar{g} = g\, D^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\bar{b}}{\bar{g}} = \frac{b}{g}$$

Por tanto, K es un **escalar**

Extra: vamos a calcular $\kappa_n(t)$ en la dirección determinada por una curva. Sea

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa_n = \vec{\kappa} \cdot \vec{n} \\ \\ \vec{\kappa} = \ddot{\vec{x}} = \dfrac{1}{\|\vec{x}\,'\|} \left(\dfrac{\vec{x}\,''}{\|\vec{x}\,'\|} + A(t)\, \vec{x}\,' \right) \\ \\ ds = \|\vec{x}\,'\|\, dt \\ \\ \vec{x}\,' \cdot \vec{n} = 0 \end{array} \right. \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\kappa_n(t) = \frac{\vec{n}(t) \cdot \vec{x}\,''(t)}{\|\vec{x}\,'(t)\|^2}}$$

3.3 Fórmulas de Weingarten y de Gauss. Símbolos de Christoffel

Busquemos del análogo a las fórmula de Frenet para el caso de superficies. Es decir, dada la base $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{n}\}$ expresar su variación (derivadas parciales) al movernos sobre la superficie en términos de la propia base.

$$\{\dot{\vec{t}}, \dot{\vec{p}}, \dot{\vec{b}}\} \quad \text{en términos de } \{\vec{t}, \vec{p}, \vec{b}\} \quad \text{(Curvas)}$$

$$\{\vec{x}_{\alpha\beta}, \vec{n}_{\beta}\} \quad \text{en términos de } \{\vec{x}_{\alpha}, \vec{n}\} \quad \text{(Superficies)}$$

Derivemos los vectores de la base $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{n}\}$ con respecto a las coordenadas curvilíneas locales. Al derivar un vector del plano tangente, el vector resultante, por lo general, no se encuentra en dicho plano, así que expresemoslos en la propia base $\{\vec{x}_{\alpha}, \vec{n}\}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{x}_{\alpha\beta} \equiv \dfrac{\partial}{\partial u^{\beta}}\, \vec{x}_{\alpha} = \Gamma_{\alpha\beta}{}^{\gamma}\, \vec{x}_{\gamma} + a_{\alpha\beta}\, \vec{n} \\ \\ \vec{n}_{\beta} \equiv \dfrac{\partial}{\partial u^{\beta}}\, \vec{n} = C_{\beta}{}^{\gamma}\, \vec{x}_{\gamma} + d_{\beta}\, \vec{n} \end{array} \right.$$

Empecemos con la segunda ecuación. Como $\|\vec{n}\| = 1 \;\Rightarrow\; \vec{n}_{\beta} \cdot \vec{n} = 0 \;\Rightarrow\; d_{\beta} = 0$. Usando la base dual

$$\left. \begin{array}{r} \vec{x}^{\,\gamma} \cdot \vec{n}_{\beta} = g^{\gamma\rho}\, \vec{x}_{\rho} \cdot \vec{n}_{\beta} = -g^{\gamma\rho}\, b_{\rho\beta} = -b^{\gamma}{}_{\beta} = -b_{\beta}{}^{\gamma} \\ \\ \vec{x}^{\,\mu} \cdot \vec{n}_{\beta} = C_{\beta}{}^{\gamma}\, \vec{x}^{\,\mu} \cdot \vec{x}_{\gamma} = C_{\beta}{}^{\gamma}\, \delta^{\mu}{}_{\gamma} = C_{\beta}{}^{\mu} \;\;\Rightarrow\;\; \vec{x}^{\,\gamma} \cdot \vec{n}_{\beta} = C_{\beta}{}^{\gamma} \end{array} \right\} \;\Rightarrow\; C_{\beta}{}^{\gamma} = -b_{\beta}{}^{\gamma}$$

En cuanto a la primera ecuación

$$\left.\begin{array}{l}\vec{n}\cdot\vec{x}_{\alpha\beta}=a_{\alpha\beta}\\ \vec{n}\cdot\vec{x}_{\alpha\beta}=b_{\alpha\beta}\end{array}\right\}\;\Rightarrow\; a_{\alpha\beta}=b_{\alpha\beta}$$

Usando de nuevo la base dual

$$\boxed{\vec{x}^{\,\gamma}\cdot\vec{x}_{\alpha\beta}=\Gamma_{\alpha\beta}{}^{\gamma}}$$

Las cantidades $\Gamma_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$ se denominan **símbolos de Christoffel de 2º especie** (no es un tensor). Se definen los **símbolos de Christoffel de primera especie** como

$$\boxed{\Gamma_{\alpha\beta\gamma}=\vec{x}_{\gamma}\cdot\vec{x}_{\alpha\beta}=g_{\gamma\mu}\,\Gamma_{\alpha\beta}{}^{\mu}}$$

donde hemos utilizado $\vec{x}_{\gamma}=g_{\gamma\mu}\,\vec{x}^{\,\mu}$. Realmente no estamos bajando índices, eso solo se puede hacer con tensores. Por tanto, las ecuaciones de Gauss y Weingarten se escriben

$$\boxed{\left\{\begin{array}{ll}\vec{x}_{\alpha\beta}=\Gamma_{\alpha\beta}{}^{\gamma}\,\vec{x}_{\gamma}+b_{\alpha\beta}\,\vec{n} & (Gauss)\\ \\ \vec{n}_{\beta}=-b_{\beta}{}^{\gamma}\,\vec{x}_{\gamma} & (Weingarten)\end{array}\right.}$$

3.4 Propiedades de los símbolos de Christoffel

3.4.1 Simetrías y fórmulas explícitas

Si la parametrización de la superficie es suficientemente regular (al menos de clase $C^2(U)$), por el teorema de Schwarz se cumple

$$\vec{x}_{\alpha\beta}=\vec{x}_{\beta\alpha}\qquad \alpha,\,\beta=1,\,2$$

En consecuencia, los símbolos de Christoffel

$$\Gamma_{\alpha\beta}{}^{\gamma}=\vec{x}^{\,\gamma}\cdot\vec{x}_{\alpha\beta}$$

son simétricas bajo el intercambio $\alpha\leftrightarrow\beta$

$$\boxed{\Gamma_{\alpha\beta}{}^{\gamma}=\Gamma_{\beta\alpha}{}^{\gamma}}$$

Por tanto, de los $2\times2\times2=8$ símbolos, sólo 6 son independientes (en una variedad n dimensional, de los n^3 solo $n\,\frac{n\,(n+1)}{2}$ son independientes).

Los símbolos de Christoffel se pueden calcular en términos de la primera forma fundamental (y sus derivadas).

$$g_{\alpha\lambda}=\vec{x}_{\alpha}\cdot\vec{x}_{\lambda}$$

Derivando con respeto a u^{β}

1. $\dfrac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial u^{\beta}}=\vec{x}_{\alpha\beta}\cdot\vec{x}_{\lambda}+\vec{x}_{\alpha}\cdot\vec{x}_{\lambda\beta}=\Gamma_{\alpha\beta\lambda}+\Gamma_{\lambda\beta\alpha}$

Rotando cíclicamente $\alpha\to\beta\to\lambda\to\alpha$

2. $\dfrac{\partial g_{\lambda\beta}}{\partial u^{\alpha}}=\Gamma_{\lambda\alpha\beta}+\Gamma_{\alpha\lambda\beta}$

3. $\dfrac{\partial g_{\beta\alpha}}{\partial u^{\lambda}} = \Gamma_{\beta\lambda\alpha} + \Gamma_{\beta\alpha\lambda}$

$$1) + 2) - 3) = \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial u^{\beta}} + \frac{\partial g_{\lambda\beta}}{\partial u^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\beta\alpha}}{\partial u^{\lambda}} = 2\,\Gamma_{\alpha\beta\lambda} \;\Rightarrow$$

$$\boxed{\Gamma_{\alpha\beta\lambda} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial u^{\beta}} + \frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial u^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^{\lambda}}\right) \qquad \textbf{Símbolos de Chritoffel de 1}^{\textbf{a}}\textbf{ especie}}$$

$$\boxed{\Gamma_{\alpha\beta}{}^{\mu} = g^{\mu\lambda}\,\Gamma_{\alpha\beta\lambda} = \frac{1}{2}\,g^{\mu\lambda}\left(\frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial u^{\beta}} + \frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial u^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^{\lambda}}\right) \qquad \textbf{Símbolos de Chritoffel de 2}^{\textbf{a}}\textbf{ especie}}$$

Nota: Dado que los símbolos de Christoffel se pueden expresar en términos de la 1ª forma fundamental, sus expresiones son válidas en cualquier variedad diferenciable n-dimensional simplemente haciendo que los índices corran de 1 a n.

Ejemplo 1: Símbolos de Christoffel para coordenadas ortogonales (n=2 superficies)

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 \\ 0 & g_{22} \end{pmatrix} \qquad g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{g_{11}} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{g_{22}} \end{pmatrix} \qquad \text{entonces}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll}
\Gamma_{11}{}^{1} = \dfrac{1}{2\,g_{11}}\,\dfrac{\partial g_{11}}{\partial u^{1}}, & \Gamma_{22}{}^{1} = -\dfrac{1}{2\,g_{11}}\,\dfrac{\partial g_{22}}{\partial u^{1}} \\[2ex]
\Gamma_{11}{}^{2} = -\dfrac{1}{2\,g_{22}}\,\dfrac{\partial g_{11}}{\partial u^{2}}, & \Gamma_{22}{}^{2} = \dfrac{1}{2\,g_{22}}\,\dfrac{\partial g_{22}}{\partial u^{2}} \\[2ex]
\Gamma_{12}{}^{1} = \Gamma_{21}{}^{1} = \dfrac{1}{2\,g_{11}}\,\dfrac{\partial g_{11}}{\partial u^{2}}, & \Gamma_{12}{}^{2} = \Gamma_{21}{}^{2} = \dfrac{1}{2\,g_{22}}\,\dfrac{\partial g_{22}}{\partial u^{1}}
\end{array}}$$

Ejemplo 2: Símbolos de Christoffel en el plano en coordenadas polares (caso particular de Ejemplo 1)

$$\vec{x}(u^1,\, u^2) = (u^1\,cos\,u^2,\; u^1\,sen\,u^2,\; 0) \quad \text{con} \quad \left\{\begin{array}{l} u^1 \equiv r \\ u^2 \equiv \theta \end{array}\right. \qquad (g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

Entonces, los símbolos de Christoffel son

$$\Gamma_{22}{}^{1} = \Gamma_{\theta\theta}{}^{r} = -r$$

$$\Gamma_{12}{}^{2} = \Gamma_{r\theta}{}^{\theta} = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma_{21}{}^{2} = \Gamma_{12}{}^{2} = \Gamma_{\theta r}{}^{\theta} = \frac{1}{r}$$

El resto son nulos.

Relación importante:

$$\Gamma_{\alpha\beta}{}^{\alpha} = \frac{1}{2}\,g^{\alpha\lambda}\left(\frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial u^{\beta}} + \overbrace{\cancel{\frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial u^{\alpha}}} - \cancel{\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^{\lambda}}}}^{\text{por simetría}}\right) = \frac{1}{2}\,g^{\alpha\lambda}\,\frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial u^{\beta}}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial u^\beta} =&\frac{\partial}{\partial u^\beta}\left(g_{11}\, g_{22}-(g_{12})^2\right)=\frac{\partial g_{11}}{\partial u^\beta}\, g_{22}+g_{11}\,\frac{\partial g_{22}}{\partial u^\beta}-2g_{12}\,\frac{\partial g_{12}}{\partial u^\beta}=\\ =&g\, g^{11}\,\frac{\partial g_{11}}{\partial u^\beta}+g\, g^{22}\,\frac{\partial g_{22}}{\partial u^\beta}+2\, g\, g^{12}\,\frac{\partial g_{12}}{\partial u^\beta}=g\, g^{\alpha\lambda}\,\frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial u^\beta}\ \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\boxed{\Gamma_{\alpha\beta}{}^{\alpha}=\frac{1}{2g}\,\frac{\partial g}{\partial u^\beta}=\frac{\partial}{\partial u^\beta}\left[\, ln\ (\sqrt{g})\,\right]}$$

3.4.2 Ley de transformación de los símbolos de Christoffel

Consideremos 2 cartas de una misma región de S: $(U,\, \vec{x}(u^\alpha))$ y $(\bar{U},\, \bar{\vec{x}}(\bar{u}^\alpha))$. Veamos la relación entre los símbolos de Christoffel en ambos sistemas de coordenadas. Sabemos que

$$\bar{\vec{x}}_\alpha=\frac{\partial u^\gamma}{\partial \bar{u}^\alpha}\,\vec{x}_\gamma, \qquad \bar{\vec{x}}^{\lambda}=\frac{\partial \bar{u}^\lambda}{\partial u^\sigma}\,\vec{x}^{\,\sigma}$$

Entonces

$$\bar{\vec{x}}_{\alpha\beta}=\frac{\partial}{\partial \bar{u}^\beta}\left(\bar{\vec{x}}_\alpha\right)=\frac{\partial u^\gamma}{\partial \bar{u}^\alpha}\,\frac{\partial u^\mu}{\partial \bar{u}^\beta}\,\vec{x}_{\gamma\mu}+\frac{\partial^2 u^\gamma}{\partial \bar{u}^\alpha\,\partial \bar{u}^\beta}\,\vec{x}_\gamma$$

Los símbolos de Christoffel (de 2º especie) en la carta $(\bar{U},\, \bar{\vec{x}}(\bar{u}^\alpha))$ será

$$\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^{\lambda}=\bar{\vec{x}}_{\alpha\beta}\cdot\bar{\vec{x}}^{\lambda}=\frac{\partial u^\gamma}{\partial \bar{u}^\alpha}\,\frac{\partial u^\mu}{\partial \bar{u}^\beta}\,\frac{\partial \bar{u}^\lambda}{\partial u^\sigma}\,\vec{x}_{\gamma\mu}\cdot\vec{x}^{\,\sigma}+\frac{\partial^2 u^\gamma}{\partial \bar{u}^\alpha\,\partial \bar{u}^\beta}\,\frac{\partial \bar{u}^\lambda}{\partial u^\sigma}\,\underbrace{\vec{x}_\gamma\cdot\vec{x}^{\,\sigma}}_{\delta_\gamma{}^\sigma}$$

$$\boxed{\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^{\lambda}=\frac{\partial u^\gamma}{\partial \bar{u}^\alpha}\,\frac{\partial u^\mu}{\partial \bar{u}^\beta}\,\frac{\partial \bar{u}^\lambda}{\partial u^\sigma}\,\Gamma_{\gamma\mu}{}^{\sigma}+\frac{\partial^2 u^\gamma}{\partial \bar{u}^\alpha\,\partial \bar{u}^\beta}\,\frac{\partial \bar{u}^\lambda}{\partial u^\gamma}}$$

donde el segundo término impide que $\Gamma_{\lambda\mu}{}^{\sigma}$ sea un tensor.

Nota: bajo transformaciones lineales el término inhomogéneo es nulo y los $\Gamma_{\lambda\mu}{}^{\sigma}$ se transforman como tensores.

3.5 Tensor de curvatura de Riemann

3.5.1 Ecuaciones de Mainardi-Codazzi

En general, dada una $(g_{\alpha\beta})$ simétrica y definida positiva, y una $(b_{\alpha\beta})$ simétrica arbitrarias no existe ninguna superficie que tenga ambas cantidades como primera y segunda formas fundamentales. El motivo es que para que esto ocurra, los tensores $(g_{\alpha\beta})$ y $(b_{\alpha\beta})$ deben cumplir unas condiciones derivadas de las condiciones de integrabilidad de las formulas de Gauss y Weingarten. Dichas condiciones se traducen en unas relaciones conocidas como las **fórmulas de Mainardi-Codazzi**.

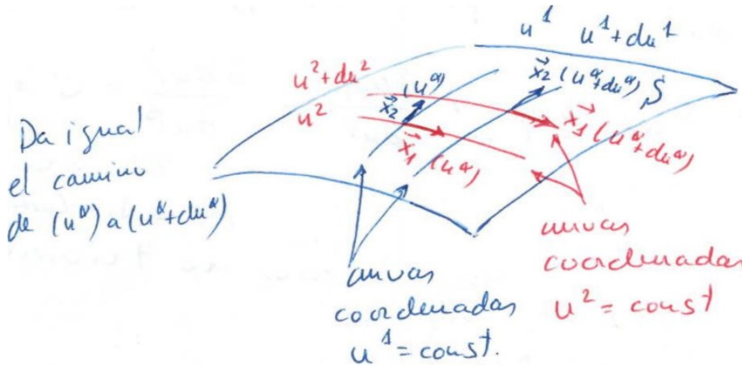
$$\boxed{\vec{x}_{\alpha\beta\gamma}=\vec{x}_{\alpha\gamma\beta}\qquad \text{Condiciones de integrabilidad}}$$

La interpretación geométrica de las anteriores relaciones es la siguiente: $\vec{x}_\alpha$ son los vectores de la base coordenada; es equivalente mover dichos vectores en una dirección y luego en la otra o al revés (figura)

Derivando las fórmulas de Gauss $\vec{x}_{\alpha\beta}=\Gamma_{\alpha\beta}{}^{\sigma}\,\vec{x}_\sigma+b_{\alpha\beta}\,\vec{n}$, resulta

$$\vec{x}_{\alpha\beta\gamma}=\frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}{}^{\sigma}}{\partial u^\gamma}\,\vec{x}_\sigma+\Gamma_{\alpha\beta}{}^{\sigma}\,\vec{x}_{\sigma\gamma}+\frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma}\,\vec{n}+b_{\alpha\beta}\,\vec{n}_\gamma$$

y usando las fórmulas de Weingarten $\vec{n}_\gamma=-b_\gamma{}^{\sigma}\,\vec{x}_\sigma$ y Gauss otra vez



$$\vec{x}_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial\,\Gamma_{\alpha\beta}{}^{\sigma}}{\partial u^\gamma}\,\vec{x}_\sigma + \Gamma_{\alpha\beta}{}^{\sigma}\left(\Gamma_{\sigma\gamma}{}^{\rho}\,\vec{x}_\rho + b_{\sigma\gamma}\,\vec{n}\right) + \frac{\partial\,b_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma}\,\vec{n} - b_{\alpha\beta}\,b_\gamma{}^{\sigma}\,\vec{x}_\sigma =$$

$$= \left(\frac{\partial\,\Gamma_{\alpha\beta}{}^{\sigma}}{\partial u^\gamma} + \Gamma_{\alpha\beta}{}^{\rho}\,\Gamma_{\rho\gamma}{}^{\sigma} - b_{\alpha\beta}\,b_\gamma{}^{\sigma}\right)\vec{x}_\sigma + \left(\Gamma_{\alpha\beta}{}^{\sigma}\,b_{\sigma\gamma} + \frac{\partial\,b_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma}\right)\vec{n}$$

Como $\{\,\vec{x}_\alpha,\,\vec{n}\,\}$ son L.I exigiendo $\vec{x}_{\alpha\beta\gamma} = \vec{x}_{\alpha\gamma\beta}$ obtenemos 2 conjuntos de relaciones

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial\,\Gamma_{\alpha\beta}{}^{\sigma}}{\partial u^\gamma} - \dfrac{\partial\,\Gamma_{\alpha\gamma}{}^{\sigma}}{\partial u^\beta} + \Gamma_{\alpha\beta}{}^{\rho}\,\Gamma_{\rho\gamma}{}^{\sigma} - \Gamma_{\alpha\gamma}{}^{\rho}\,\Gamma_{\rho\beta}{}^{\sigma} = b_{\alpha\beta}\,b_\gamma{}^{\sigma} - b_{\alpha\gamma}\,b_\beta{}^{\sigma} \\[2ex] \Gamma_{\alpha\beta}{}^{\sigma}\,b_{\sigma\gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma}{}^{\sigma}\,b_{\sigma\beta} + \dfrac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} - \dfrac{\partial b_{\alpha\gamma}}{\partial u^\beta} = 0 \quad \text{(Fórmulas de Mainardi-Codazzi)} \end{cases}}$$

Nota: para $n=2$, sólo hay 2 casos no triviales $\vec{x}_{112} = \vec{x}_{121}$, $\vec{x}_{212} = \vec{x}_{221}$

3.5.2 Tensor de Riemann

La primera relación nos dice que el miembro de la izquierda es un tensor de 4º orden ($b_{\alpha\beta}$ es un pseudo-tensor, pero al ir multiplicado 2 veces el resultado es un tensor). Dado que depende de $b_{\alpha\beta}$ que es una medida de la curvatura de la superficie, dicho tensor se denomina **tensor de curvatura de Riemann** (o simplemente **tensor de Riemann**

$$\boxed{R^{\sigma}{}_{\alpha\gamma\beta} = \frac{\partial\,\Gamma_{\alpha\beta}{}^{\sigma}}{\partial u^\gamma} - \frac{\partial\,\Gamma_{\alpha\gamma}{}^{\sigma}}{\partial u^\beta} + \Gamma_{\alpha\beta}{}^{\rho}\,\Gamma_{\rho\gamma}{}^{\sigma} - \Gamma_{\alpha\gamma}{}^{\rho}\,\Gamma_{\rho\beta}{}^{\sigma} = b_{\alpha\beta}\,b_\gamma{}^{\sigma} - b_{\alpha\gamma}\,b_\beta{}^{\sigma}}$$

Para ver las simetrías del tensor de Riemann consideremos su versión 4 veces covariante

$$\boxed{R_{\mu\alpha\gamma\beta} = g_{\mu\sigma}\,R^{\sigma}{}_{\alpha\gamma\beta} = b_{\alpha\beta}\,b_{\gamma\mu} - b_{\alpha\gamma}\,b_{\beta\mu}}$$

1. $R_{\mu\alpha\gamma\beta} = R_{\gamma\beta\mu\alpha}$ (simetría por pares)
2. $R_{\mu\alpha\gamma\beta} = -R_{\alpha\mu\gamma\beta}$ (antisimetría en los 2 primeros índices)
3. $R_{\mu\alpha\gamma\beta} = -R_{\mu\alpha\beta\gamma}$ (antisimetría en los 2 últimos índices)
4. $R_{\mu\alpha\gamma\beta} + R_{\mu\gamma\beta\alpha} + R_{\mu\beta\alpha\gamma} = 0$ (propiedad cíclica)

Estas propiedades reducen el número de componentes independientes del tensor de Riemann. Como tensor de 4º orden tendría n^4 componentes. Sin embargo, el número de cantidades independientes se reduce a

$\frac{n^2\,(n^2-1)}{12}$ Componentes independientes del tensor de Riemann.

Una variedad será plana si su tensor de Riemann es nulo en todos sus puntos.

3.6 Teorema egregio de Gauss (n=2)

Para $n=2$, solo hay una componente independiente del tensor de Riemann. De hecho, las únicas componentes de $R_{\mu\alpha\gamma\beta}$ no nulas son

$$R_{1212} = R_{2121} = -R_{2112} = -R_{1221}$$

Teniendo en cuenta que

$$R_{\mu\alpha\gamma\beta} = b_{\alpha\beta}\, b_{\gamma\mu} - b_{\alpha\gamma}\, b_{\beta\mu}$$

se tiene

$$R_{1212} = b_{22}\, b_{11} - b_{21}\, b_{21} = b$$

Recordando la expresión de la curvatura gaussiana resulta

$$\boxed{K = \frac{b}{g} = \frac{R_{1212}}{g} \qquad \text{(Teorema egregio de Gauss)}}$$

Dado que el tensor de Riemann se calcula en términos de los símbolos de Christoffel y estos se calculan a partir de la primera forma fundamental, resulta que la curvatura gaussiana depende solo se la 1ª forma fundamental. Por lo tanto, dos superficies con la misma primera forma fundamental tendrán la misma curvatura gaussiana.

Nota: El teorema de egregio nos da un mecanismo rápido de calcular el tensor de Riemann para una superficie sin tener que calcular los símbolos de Christoffel. Además, nos permite medir la curvatura de una variedad desde dentro de esta (sin introducir un vector normal)

Nota: Se define el tensor de Ricci como $\boxed{R_{\mu\nu} = R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu}}$, y el de Einstein $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu}\, R$, $\boxed{R = R^{\mu}{}_{\mu}}$

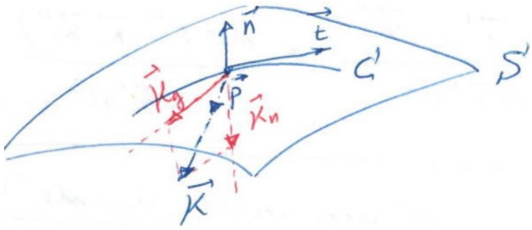
4 Curvatura geodésica y geodésicas

4.1 Curvatura geodésica

4.1.1 Concepto y cálculo

Dada una curva C en una superficie S vimos que el vector de curvatura de C, $\vec{\kappa}$, podía descomponerse en 2 componentes: una paralela al vector normal a S denominada curvatura normal $\vec{\kappa}_n$ y otra (el resto) denominada curvatura geodésica $\vec{\kappa}_g$

$$\vec{\kappa} = \vec{\kappa}_n + \vec{\kappa}_g, \qquad \vec{\kappa} = \kappa\,\vec{p}$$



La dirección de $\vec{\kappa}_g$ debe ser perpendicular a la dirección de $\vec{\kappa}_n$, es decir, ortogonal a $\vec{n}$ (ya que es su componente en dicha dirección), y a su vez, perpendicular a $\vec{t}$ (debido a que es una rotación). Entonces

$$\vec{\kappa}_g \propto \vec{e} \quad \text{siendo} \quad \vec{e} = \vec{n} \times \vec{t}, \quad \text{unitario, teniendo}$$

$$\kappa_g = \vec{e} \cdot \vec{\kappa} = (\vec{n} \times \vec{t}\,) \cdot \vec{\kappa}$$

Recordando las ecuaciones de Frenet en parámetro longitud de arco (parámetro natural)

$$\vec{\kappa} = \ddot{\vec{x}}, \quad \vec{t} = \dot{\vec{x}} \quad con \quad \|\dot{\vec{x}}\| = 1, \quad \vec{p} = \frac{\ddot{\vec{x}}}{\|\ddot{\vec{x}}\|}$$

$$\boxed{\kappa_g(s) = (\vec{n} \times \dot{\vec{x}}) \cdot \ddot{\vec{x}} = det\,(\vec{n},\, \dot{\vec{x}},\, \ddot{\vec{x}})}$$

Si usamos una parametrización arbitraria

$$\dot{\vec{x}} = \frac{\vec{x}\,'}{\|\vec{x}\,'\|}, \qquad \ddot{\vec{x}} = \frac{1}{\|\vec{x}\,'\|^2}\,\vec{x}\,'' + \underbrace{\frac{1}{\|\vec{x}\,'\|}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\|\vec{x}\,'\|}\right)\right]\vec{x}\,'}_{\text{parte L.D}}$$

substituyendo en la expresión de κ_g en parámetro natural se obtiene

$$\boxed{\kappa_g(t) = \frac{(\vec{n} \times \vec{x}\,') \cdot \vec{x}\,''}{\|\vec{x}\,'\|^3} = \frac{det\,(\vec{n},\, \vec{x}\,',\, \vec{x}\,'')}{\|\vec{x}\,'\|^3}}$$

4.1.2 Curvatura geodésica vista desde la carta

La anterior fórmula no se puede generalizar fácilmente a variedades generales (no tendremos $\vec{x}$ ni $\vec{n}$). Vamos a ver que se puede reescribir en términos de derivadas de las coordenadas curvilíneas y la métrica de la superficie, es decir, de cantidades intrínsecas a la superficie.

$$\dot{\vec{x}}(u^\nu(s)) = \frac{d\vec{x}(u^\mu(s))}{ds} = \frac{\partial \vec{x}(u^\nu(s))}{\partial u^\alpha}\,\frac{du^\alpha}{ds} = \vec{x}_\alpha\,\dot{u}^\alpha$$

$$\ddot{\vec{x}}(u^\nu(s)) = \frac{d}{ds}(\vec{x}_\alpha\,\dot{u}^\alpha) = \frac{d\vec{x}_\alpha}{ds}\,\dot{u}^\alpha + \vec{x}_\alpha\,\ddot{u}^\alpha = \frac{\partial \vec{x}_\alpha}{\partial u^\beta}\,\frac{du^\beta}{ds}\,\dot{u}^\alpha + \vec{x}_\alpha\,\ddot{u}^\alpha = \vec{x}_{\alpha\beta}\,\dot{u}^\alpha\,\dot{u}^\beta + \vec{x}_\alpha\,\ddot{u}^\alpha$$

$$\kappa_g(s) = det\,(\vec{n},\, \dot{\vec{x}},\, \ddot{\vec{x}}\,) = det\,(\dot{\vec{x}},\, \ddot{\vec{x}},\, \vec{n}) = (\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}\,) \cdot \vec{n}$$

desarrollando el producto vectorial

$$\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}} = \vec{x}_\gamma\, \dot{u}^\gamma \times \left(\vec{x}_{\alpha\beta}\, \dot{u}^\alpha\, \dot{u}^\beta + \vec{x}_\alpha\, \ddot{u}^\alpha\right) = \vec{x}_\gamma\, \dot{u}^\gamma \times \Big(\Gamma_{\alpha\beta}{}^\sigma\, \vec{x}_\sigma\, \dot{u}^\alpha\, \dot{u}^\beta + b_{\alpha\beta}\, \vec{n}\, \dot{u}^\alpha\, \dot{u}^\beta + \vec{x}_\alpha\, \ddot{u}^\alpha\Big)$$

Sustituimos

$$\kappa_g(s) = (\vec{x}_\gamma \times \vec{x}_\sigma)\cdot \vec{n}\; \Gamma_{\alpha\beta}{}^\sigma\, \dot{u}^\gamma\, \dot{u}^\alpha\, \dot{u}^\beta + \cancelto{0}{(\vec{x}_\gamma \times \vec{n})\cdot \vec{n}}\; b_{\alpha\beta}\, \dot{u}^\gamma\, \dot{u}^\alpha\, \dot{u}^\beta + (\vec{x}_\gamma \times \vec{x}_\alpha)\cdot \vec{n}\; \dot{u}^\gamma\, \ddot{u}^\alpha$$

Teniendo en cuenta que $\vec{x}_\gamma \times \vec{x}_\sigma = \epsilon_{\gamma\sigma}\, \vec{n}$ (solo sobreviven los términos con $\gamma \neq \sigma$)

$$\boxed{\kappa_g(u^\gamma(s)) = \sqrt{g}\, \left(\Gamma_{\alpha\beta}{}^2\, \dot{u}^1\, \dot{u}^\alpha\, \dot{u}^\beta + \dot{u}^1\, \ddot{u}^2 - \Gamma_{\alpha\beta}{}^1\, \dot{u}^2\, \dot{u}^\alpha\, \dot{u}^\beta - \dot{u}^2\, \ddot{u}^1\right)}$$

Vemos que κ_g se puede calcular en términos de la 1ª forma fundamental y las derivadas de la curva en coordenadas locales. Es, por tanto, una cantidad intrínseca.

4.2 Geodésicas

4.2.1 Pregeodésicas y geodésicas

Llamamos **pregeodésica** a toda curva con curvatura geodésica nula $\kappa_g = 0$ en todos sus puntos

Llamamos **geodésica** a toda curva con curvatura geodésica nula $\kappa_g = 0$ en todos sus puntos y además $\|\vec{x}\,'\| =$ constante.

Nota: realmente una pregeodésica y una geodésica son la misma curva, pero la geodésica está representada en función del parámetro natural. Una geodésica es una pregeodésica, al revés no es cierto.

Dada la curva en la carta $(\, u^\alpha(s)\,) = (\, u^1(s),\, u^2(s)\,)$ su imagen bajo la parametrización de S será $\vec{x}(u^\alpha(s)) = (x(u^\alpha),\, y(u^\alpha),\, z(u^\alpha))$, siendo el parámetro longitud de arco sobre C

$$(ds)^2 = \vec{x}_1\cdot\vec{x}_1\,(du^1)^2 + \vec{x}_1\cdot\vec{x}_2\, du^1\, du^2 + \vec{x}_2\cdot\vec{x}_1\, du^2\, du^1 + \vec{x}_2\cdot\vec{x}_2\,(du^2)^2 = g_{\alpha\beta}\, du^\alpha\, du^\beta, \quad \left\{\begin{array}{l} du^1 = \dot{u}^1\, ds \\ du^2 = \dot{u}^2\, ds \end{array}\right. \quad \Rightarrow$$

$$(ds)^2 = \underbrace{g_{\mu\nu}\, \dot{u}^\alpha\, \dot{u}^\beta}_{\|\dot{\vec{x}}\|=1}\,(ds)^2$$

Obviamente, si reparametrizamos una geodésica seguirá cumpliendo $\kappa_g = 0$, pero puede ocurrir que $\|\bar{\vec{x}}\,'\| \neq cte$. Vemos, por tanto que una geodésica es una pregeodésica parametrizada en su **parámetro afín**, siendo este una transformación afín del parámetro longitud de arco s

$$t_{_{afin}}(s) = a\, s + b, \qquad a,\, b \text{ constantes}$$

Ejemplo:

$$\left\{\begin{array}{ll} \vec{x}(t) = (ln\, t,\, ln\, t,\, ln\, t) & \text{es pregeodésica} \\ \vec{x}(\bar{t}) = (\bar{t},\, \bar{t},\, \bar{t}) & \text{es geodésica} \end{array}\right.$$

□

Corolario: Físicamente, la condición $\|\vec{x}\,'\| = cte$ de las geodésicas significa que en una geodésica la aceleración $\vec{x}\,''$ es paralela a $\vec{n}$

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\|\vec{x}\,'\|^2}_{cte} = 2\,\vec{x}\,'\cdot\vec{x}\,'' = 0 \quad\Rightarrow\quad \vec{x}\,' \perp \vec{x}\,'' \quad \text{y como} \quad \kappa_g = 0 \;\Rightarrow\; (\vec{n}\times\vec{x}\,')\cdot\vec{x}\,'' = 0 \;\Rightarrow\; \vec{n},\, \vec{x}\,',\, \vec{x}\,'' \;\text{ son coplanarios}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{x}\,' \perp \vec{x}\,'' \\ \vec{n} \perp \vec{x}\,' \\ \vec{n},\, \vec{x}\,',\, \vec{x}\,'' \text{ coplanarios} \end{array}\right. \qquad\Rightarrow\qquad \vec{n} \parallel \vec{x}\,''$$

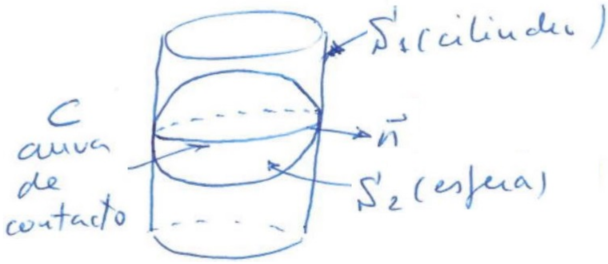
Ejemplo**Consecuencias**

1) Las rectas (curvas de curvatura nula) son pregeodésicas en cualquier superficie que las contenga

2) Si S_1 y S_2 son 2 superficies tangentes a lo largo de una curva C, entonces:

$$\text{C pregeodésica de } S_1 \;\Leftrightarrow\; \text{C pregodesica de } S_2$$

Ejemplo:



4.2.2 Ecuación de las geodésicas

Consideremos una curva sobre la superficie S parametrizada en longitud de arco

$\vec{x}(s) = \vec{x}(u^1(s),\, u^2(s)) \equiv \vec{x}(u^\alpha(s))$

Recordemos que

$$\left.\begin{array}{l} \vec{\kappa} = \kappa\,\vec{p} = \ddot{\vec{x}} \\ \vec{\kappa} = \vec{\kappa}_g + \vec{\kappa}_n = \vec{\kappa}_g + \kappa_n\,\vec{n} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \vec{\kappa}_g \text{ es la parte de } \ddot{\vec{x}} \text{ perpendicular a } \vec{n}$$

$$\dot{\vec{x}} = \vec{x}_\alpha\,\dot{u}^\alpha$$

$$\ddot{\vec{x}} = \vec{x}_{\alpha\beta}\,\dot{u}^\alpha\,\dot{u}^\beta + \vec{x}_\alpha\,\ddot{u}^\alpha = ({\Gamma_{\alpha\beta}}^\gamma\,\vec{x}_\gamma + b_{\alpha\beta}\,\vec{n})\,\dot{u}^\alpha\,\dot{u}^\beta + \vec{x}_\alpha\,\ddot{u}^\alpha = \underbrace{(\ddot{u}^\gamma + {\Gamma_{\alpha\beta}}^\gamma\,\dot{u}^\alpha\,\dot{u}^\beta)\,\vec{x}_\gamma}_{\vec{\kappa}_g} + \underbrace{b_{\alpha\beta}\,\dot{u}^\alpha\,\dot{u}^\beta}_{\kappa_n}\,\vec{n}$$

La ecuación de una geodésica es

$$\boxed{\ddot{u}^\gamma + {\Gamma_{\alpha\beta}}^\gamma\,\dot{u}^\alpha\,\dot{u}^\beta = 0}$$

es decir

$$\frac{d^2u^\gamma}{ds^2} + {\Gamma_{\alpha\beta}}^\gamma\,\frac{du^\alpha}{ds}\,\frac{du^\beta}{ds} = 0$$

La estructura de esta ecuación solo es válida para parámetros afines, es decir, $t_{afin} = a\,s + b$. Por tanto, al resolver esta ecuación se obtienen las curvas en parámetro afín.

Notación: A veces el parámetro afín se denomina λ, escribiendo la ecuación de las geodésicas

$$\frac{d^2u^\gamma}{d\lambda^2} + {\Gamma_{\alpha\beta}}^\gamma\,\frac{du^\alpha}{d\lambda}\,\frac{du^\beta}{d\lambda} = 0$$

con $\lambda = a\,s + b$.

Vemos que la ecuación de las geodésicas puede generalizarse a cualquier dimensión

$$\frac{d^2u^\gamma}{ds^2} + {\Gamma_{\alpha\beta}}^\gamma\,\frac{du^\alpha}{ds}\,\frac{du^\beta}{ds} = 0, \qquad \begin{array}{l} \gamma = 1,\, \dots\, ,\, n \\ \alpha,\, \beta = 1,\, \dots\, ,\, n \end{array}$$

Ejemplo: Geodésica del plano XY en cartesianas, $\vec{x}(u^1,\, u^2) = (u^1,\, u^2,\, 0)$

$$\Gamma_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} \dfrac{d^2u^1}{ds^2} = 0 \\ \\ \dfrac{d^2u^2}{ds^2} = 0 \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{matrix} u^1 = a\,s + b \\ u^2 = c\,s + d \end{matrix} \qquad con\ a,\, b,\, c,\, d \in \mathbb{R}$$

La solución serían todas las rectas en el plano XY.

4.3 Propiedades extremales de las geodésicas: arcos de longitud mínima

4.3.1 Arco de longitud mínima. Relación con las geodésicas

Consideremos dos puntos P_1 y P_2 sobre una superficie S. Consideremos una curva C en S que une ambos puntos tal que para $t = t_1$ la curva pasa por P_1 y para $t = t_2 > t_1$ la curva pasa por P_2.

La longitud del arco entre P_1 y P_2 es

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{\alpha\beta}\,(u^\alpha)'\,(u^\beta)'}\,dt$$

El integrando puede interpretarse como un lagrangiano de mecánica clásica que depende de $(u^1,\, u^2)$ y sus velocidades $((u^1)',\, (u^2)')$

$$\boxed{L(u^\rho,\, (u^\rho)') = \sqrt{g_{\alpha\beta}\,(u^\alpha)'\,(u^\beta)'}}$$

Si queremos que el arco que une P_1 y P_2 tenga longitud mínima, tendremos que resolver las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a este lagrangiano

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial u^\mu} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial (u^\mu)'}\right) = 0}$$

Las derivadas parciales en función del parámetro t serían

$$\frac{\partial L}{\partial u^\mu} = \frac{1}{2\sqrt{g_{\alpha\beta}\,(u^\alpha)'\,(u^\beta)'}}\,\frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial u^\mu}\,(u^\rho)'\,(u^\sigma)'$$

$$\frac{\partial L}{\partial (u^\mu)'} = \frac{1}{2\sqrt{g_{\alpha\beta}\,(u^\alpha)'\,(u^\beta)'}}\left[g_{\rho\sigma}\,\frac{\partial (u^\rho)'}{\partial (u^\mu)'}\,(u^\sigma)' + g_{\rho\sigma}\,(u^\rho)'\,\frac{\partial (u^\sigma)'}{\partial (u^\mu)'}\right] = \frac{1}{\sqrt{g_{\alpha\beta}\,(u^\alpha)'\,(u^\beta)'}}\,g_{\mu\sigma}\,(u^\sigma)'$$

donde $\dfrac{\partial (u^\rho)'}{\partial (u^\mu)'} = \delta^\rho{}_\mu$

Esto es cierto para cualquier parametrización. Hagamos el cálculo en el caso en que el parámetro sea la longitud de arco ($' \to \dot{}$)

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial u^\mu} - \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}^\mu}\right) = 0}$$

Las derivadas parciales en función del parámetro s serían

$$\frac{\partial L}{\partial u^\mu} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial u^\mu}\,\dot{u}^\rho\,\dot{u}^\sigma$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{u}^\mu} = g_{\mu\sigma}\,\dot{u}^\sigma \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}^\mu}\right) = \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial u^\rho}\,\dot{u}^\rho\,\dot{u}^\sigma + g_{\mu\sigma}\,\ddot{u}^\sigma, \qquad \text{sustituyendo y multiplicando por } g^{\nu\mu}$$

$$g_{\mu\sigma}\,\ddot{u}^\sigma + \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial u^\rho}\,\dot{u}^\rho\,\dot{u}^\sigma - \frac{1}{2}\,\frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial u^\mu}\,\dot{u}^\rho\,\dot{u}^\sigma = 0 \;\Rightarrow\; \ddot{u}^\nu + \frac{1}{2}\,g^{\nu\mu}\left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial u^\rho} + \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial u^\sigma} - \frac{1}{2}\,\frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial u^\mu}\right)\dot{u}^\rho\,\dot{u}^\sigma = 0,$$

donde $\displaystyle \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial u^\rho}\,\dot u^\rho\,\dot u^\sigma = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial u^\rho}\,\dot u^\rho\,\dot u^\sigma + \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial u^\sigma}\,\dot u^\sigma\,\dot u^\rho\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial u^\rho} + \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial u^\sigma}\right)\dot u^\rho\,\dot u^\sigma$ entonces

$$\boxed{\ddot u^\nu + \Gamma_{\rho\sigma}{}^{\nu}\,\dot u^\rho\,\dot u^\sigma = 0}$$

Esta es la **ecuación de los arcos de longitud mínima** que es igual a la **ecuación de las geodésicas**.

4.3.2 Cálculo de los símbolos de Christoffel por método variacional

Dado que $\sqrt{g_{\alpha\beta}\,\dot u^\alpha\,\dot u^\beta}$ es definida positiva y la función cuadrado es monótona creciente en $(0,\infty)$ podemos derivar las mismas ecuaciones para curvas de longitud mínima usando el lagrangiano

$$\boxed{L(u^\mu,\,\dot u^\mu) = \frac{1}{2}\,g_{\alpha\beta}\,\dot u^\alpha\,\dot u^\beta}$$

De mecánica sabemos que para unas determinadas ecuaciones de movimiento pueden existir más de un lagrangiano. Sus ecuaciones de Euler-Lagrange son

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial u^\mu} &= \frac{1}{2}\,\frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial u^\mu}\,\dot u^\rho\,\dot u^\sigma \\ \frac{\partial L}{\partial \dot u^\mu} &= g_{\mu\sigma}\,\dot u^\sigma \end{aligned}\right\} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2}\,\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\mu}\,\dot u^\alpha\,\dot u^\beta - \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial u^\beta}\,\dot u^\alpha\,\dot u^\beta - g_{\mu\alpha}\,\ddot u^\alpha = 0$$

$$\boxed{\ddot u^\rho + \Gamma_{\alpha\beta}{}^{\rho}\,\dot u^\alpha\,\dot u^\beta = 0}$$

que es idéntica a a de las geodésicas. Por lo tanto, construyendo el lagrangiano y hallando las ecuaciones de Euler-Lagrange podemos extraer los símbolos de Christoffel comparando ambas expresiones.

Ejemplo: Símbolos de Christoffel en el plano en polares

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} r \equiv u^1 \\ \theta \equiv u^2 \end{matrix} \qquad \langle\, ds^2 = dr^2 + r^2\,d\theta^2\,\rangle$$

$$L(r,\,\theta,\,\dot r,\,\dot\theta) = \frac{1}{2}\,g_{\alpha\beta}\,\dot u^\alpha\,\dot u^\beta = \frac{1}{2}\,\dot r^2 + \frac{1}{2}\,r^2\,\dot\theta^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial u^\mu} - \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot u^\mu}\right) = 0$$

$$\mu = 1: \qquad \left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial r} &= r\,\dot\theta^2 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot r} &= \dot r \end{aligned}\right\} \;\Rightarrow\; \ddot r - r\,\dot\theta^2 = 0$$

$$\mu = 2: \qquad \left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot\theta} &= r^2\,\dot\theta \end{aligned}\right\} \;\Rightarrow\; r^2\,\ddot\theta + 2\,r\,\dot r\,\dot\theta = 0 \;\Rightarrow\; \ddot\theta + \frac{2}{r}\,\dot r\,\dot\theta = 0$$

Comparando con $\ddot u^\mu + \Gamma_{\alpha\beta}{}^{\mu}\,\dot u^\alpha\,\dot u^\beta = 0$ tenemos que los símbolos de Christoffel no nulos son:

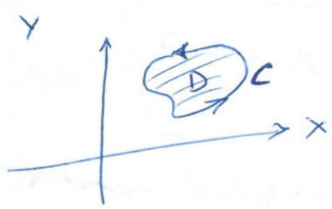
$\mu = 1:$ $\quad \ddot r + \Gamma_{rr}{}^{r}\,\dot r^2 + \Gamma_{r\theta}{}^{r}\,\dot r\,\dot\theta + \Gamma_{\theta r}{}^{r}\,\dot\theta\,\dot r + \Gamma_{\theta\theta}{}^{r}\,\dot\theta^2 = 0 \;\Rightarrow\; \ddot r + \Gamma_{rr}{}^{r}\,\dot r^2 + 2\,\Gamma_{r\theta}{}^{r}\,\dot r\,\dot\theta + \Gamma_{\theta\theta}{}^{r}\,\dot\theta^2 = 0 \;\Rightarrow$

$\Gamma_{\theta\theta}{}^{r} = -r$ (el resto son nulos)

$\mu = 2:$ $\quad \ddot\theta + \Gamma_{rr}{}^{\theta}\,\dot r^2 + 2\,\Gamma_{r\theta}{}^{\theta}\,\dot r\,\dot\theta + \Gamma_{\theta\theta}{}^{\theta}\,\dot\theta^2 = 0 \;\Rightarrow\; \qquad \Gamma_{r\theta}{}^{\theta} = \Gamma_{\theta r}{}^{\theta} = \dfrac{1}{r}$ (el resto son nulos)

4.4 Teorema de Gauss-Bonnet

4.4.1 Teorema de Green en el plano



Sean $P : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $Q : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funciones de clase $C^1(U)$, U abierto. Sea C una curva cerrada simple orientada positivamente (sentido horario) y D la región acotada delimitada por C ($C = \partial D$). Entonces, se verifica

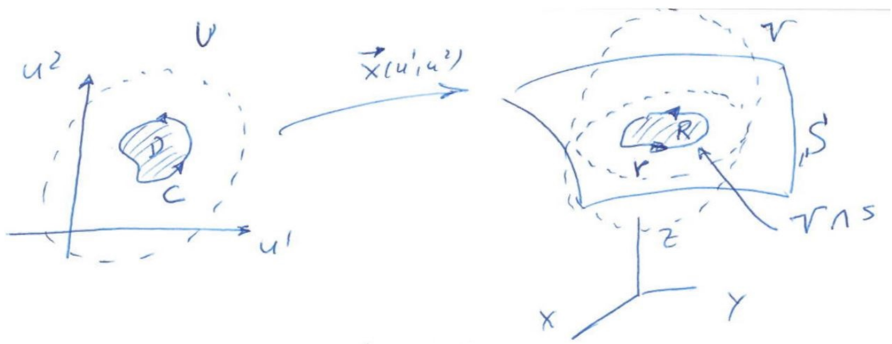
$$\int_C (Pdx + Qdy) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

4.4.2 Teorema de Gauss-Bonnet

Sea R una región simplemente conexa de una superficie S para la que existe una parametrización

$$\begin{aligned} \vec{x}: \ & U \subset \mathbb{R}^2 \to V \cap S \\ & (u^1, u^2) \to \vec{x}(u^1, u^2) \end{aligned}$$

con $R \subset V \cap S$ que es de clase $r \geq 3$. Sea γ la frontera de R en S ($\gamma = \partial R$) una curva cerrada simple que puede parametrizarse por $(\vec{x} \circ \vec{\sigma})(s) = \vec{x}(u^1(s), u^2(s))$ siendo s el parámetro longitud de arco sobre γ. $\vec{\sigma}(s) = (u^1(s), u^2(s))$ es una curva cerrada simple en U.



$$\begin{cases} \gamma \text{ es la imagen de C bajo } \vec{x} \\ R \text{ es la imagen de D bajo } \vec{x} \end{cases}$$

Si κ_g es la curvatura geodésica de γ y K es la curvatura gaussiana de S, entonces

$$\boxed{\int_\gamma \kappa_g \, ds + \iint_R K \, dA = 2\pi}$$

siendo ds el elemento de longitud sobre γ y dA el elemento de área sobre R.

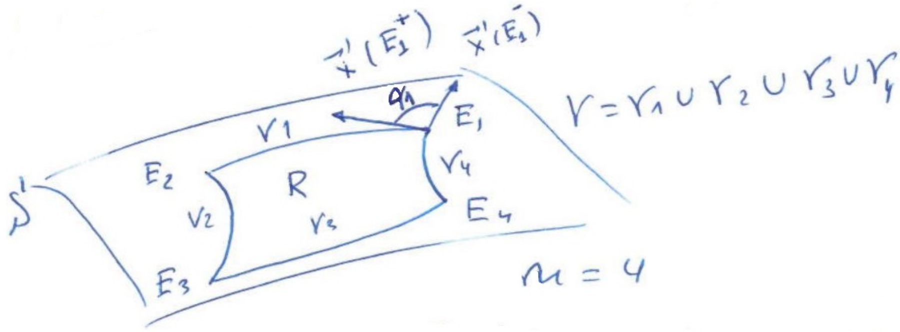
Dem: (no puesta)

4.4.3 Extensión a fronteras poligonales

Si la curva γ que encierra la región R sobre S tiene "picos" ($\equiv$ está formada por arcos en S que se cortan en ángulo no nulo), la integral de la curvatura gaussiana debe calcularse como la suma de las integrales de arco de la curvatura gaussiana sobre cada uno de los arcos más la suma de los ángulos en que cambia la dirección tangente a la curva γ en cada uno de los "picos"

Supongamos que γ tiene m "picos" (está formada por m arcos). Vimos que

$$\int_\gamma \kappa_g \, ds + \iint_R K \, dA = \int_\gamma \dot{\theta} \, ds$$



La integral de la derecha, al evaluarla sobre los arcos γ_j, $j = 1, \ldots, m$, además de 2π nos da un exceso de ángulo proveniente de los "picos". (Notación: θ_j^- ángulo entre $\vec{x}'(E_j^-)$ y $\vec{x}_1$ en E_j)

$$\int_\gamma \dot{\theta}\, ds = (\theta_2^- - \theta_1^+) + (\theta_3^- - \theta_2^+) + \ldots + (\theta_1^- - \theta_m^+) + 2\pi = 2\pi - (\theta_1^+ - \theta_1^-) - \ldots - (\theta_m^+ - \theta_m^-) = 2\pi - \sum_{j=1}^{m} \alpha_j$$

Siendo α_j los ángulos externos de la tangente en los vértices medidos en el sentido de avance de la curva. Teniendo en cuenta la relación entre los ángulos externos α_j y los internos β_j en los vértices

$$\alpha_j = \pi - \beta_j, \qquad j = 1, \ldots, m$$

obtenemos

$$\boxed{\int_\gamma \kappa_g\, ds + \iint_R K\, dA = \sum_{j=1}^{m} \beta_j - (m-2)\pi}$$

Nota: Si estamos en el plano $K = 0$ y los arcos son segmentos de recta $\kappa_g = 0$, se obtiene la fórmula clásica para polígonos cerrados

$$\sum_{j=1}^{m} \beta_j = (m-2)\,\pi$$

Nota: Un polígono geodésico sobre una superfiicie verifica ($\kappa_g = 0$)

$$\sum_{j=1}^{m} \beta_j = (m-2)\,\pi + \iint_R K\, dA$$

4.4.4 Teorema de Gauss-Bonnet para superficies cerradas

En topología de superficies las superficies cerradas se clasifican mediante un número entero p denominado género. Intuitivamente el género se correspondo con el número de "asas" que tiene la superficie cerrada (esfera $p = 0$, toro $p = 1$). Es posible aplicar el teorema de Gauss-Bonnet a superficies cerradas dividiéndolas por un número suficiente de curvas ($2p$, $p \geq 1$ o una para $p = 0$) y aplicándolo a cada una de las superficies simplemente conexas resultantes. Se cumple:

Dada una superficie cerrada orientable S que admite una parametrización de clase C^r, $r \geq 3$, la integral de su curvatura gaussiana vale

$$\boxed{\mathcal{K} = \iint_S K\, dA = 4\pi\,(1-p)}$$

donde, para una superficie cerrada, $\mathcal{K}$ se denomina **curvatura total**.

Dem:

5 Derivación covariante y transporte paralelo

5.1 Derivada covariante

5.1.1 Derivada covariante de un vector (contravariante)

Consideremos un **campo vectorial** $\vec{v}$ definido sobre una carta local de una superficie. En general, tanto el vector como sus componentes contravariantes dependerán del punto de la superficie, es decir, de las coordenadas locales de la carta. Además, los vectores de la base también dependerán de las coordenadas locales (A diferencia de la base canónica, la base del espacio tangente $T_p(S)$ varía sobre la superficie). En definitiva, las derivadas del campo vectorial con respecto a las coordenadas tendrán dos contribuciones: una de las componentes y otra de la base coordenada.

$$\vec{v} = v^\alpha\,\vec{x}_\alpha \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial u^\beta} = \frac{\partial v^\alpha}{\partial u^\beta}\,\vec{x}_\alpha + v^\alpha\,\vec{x}_{\alpha\beta} = \frac{\partial v^\alpha}{\partial u^\beta}\,\vec{x}_\alpha + v^\alpha\left(\Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma\,\vec{x}_\gamma + b_{\alpha\beta}\,\vec{n}\right) = \left(\frac{\partial v^\gamma}{\partial u^\beta} + \Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma\,v^\alpha\right)\vec{x}_\gamma + b_{\alpha\beta}\,v^\alpha\,\vec{n}$$

El término $b_{\alpha\beta}\,v^\alpha\,\vec{n}$ proviene del hecho de que nuestra variedad (la superficie) está inmersa en un espacio mayor ($\mathbb{R}^3$ en este caso); en los casos que tendremos en RG no habrá dicha inmersión y no tendremos concepto de 2ª forma fundamental fundamental.

Definimos la **derivada covariante** de $\vec{v}$ (tensor de tipo $\binom{1}{0}$) con respecto a u^β según

$$\nabla_\beta\vec{v} = \left(\frac{\partial v^\gamma}{\partial u^\beta} + \Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma\,v^\alpha\right)\vec{x}_\gamma$$

Las componentes de esta derivada covariante son

$$\boxed{v^\gamma{}_{;\,\beta} = \frac{\partial v^\gamma}{\partial u^\beta} + \Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma\,v^\alpha = v^\gamma{}_{,\,\beta} + \Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma\,v^\alpha}$$

donde

$$v^\gamma{}_{,\,\beta} \equiv \frac{\partial v^\gamma}{\partial u^\beta} \qquad \text{derivada parcial ordinaria}$$

$v^\gamma{}_{;\,\beta}$ son las componentes de un tensor de 2º orden de tipo $\binom{1}{1}$. Sin embargo, $v^\gamma{}_{,\,\beta}$ no es un tensor en general. La derivada covariante produce un tensor; la ordinaria no. Veamos explícitamente que $v^\gamma{}_{;\,\beta}$ se transforma como un tensor de tipo $\binom{1}{1}$

$$\bar{v}^\gamma{}_{;\,\beta} = \frac{\partial \bar{v}^\gamma}{\partial \bar{u}^\beta} + \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^\gamma\,\bar{v}^\alpha = \frac{\partial}{\partial \bar{u}^\beta}\left(\frac{\partial \bar{u}^\gamma}{\partial u^\sigma}\,v^\sigma\right) + \left(\frac{\partial u^\lambda}{\partial \bar{u}^\alpha}\,\frac{\partial u^\mu}{\partial \bar{u}^\beta}\,\frac{\partial \bar{u}^\gamma}{\partial u^\sigma}\,\Gamma_{\lambda\mu}{}^\sigma + \frac{\partial^2 u^\lambda}{\partial \bar{u}^\alpha\,\partial \bar{u}^\beta}\,\frac{\partial \bar{u}^\gamma}{\partial u^\lambda}\right)\frac{\partial \bar{u}^\alpha}{\partial u^\tau}\,v^\tau =$$

$$= \frac{\partial u^\rho}{\partial \bar{u}^\beta}\,\frac{\partial^2 \bar{u}^\gamma}{\partial u^\rho\,\partial u^\sigma}\,v^\sigma + \frac{\partial u^\rho}{\partial \bar{u}^\beta}\,\frac{\partial \bar{u}^\gamma}{\partial u^\sigma}\,\frac{\partial v^\sigma}{\partial u^\rho} + \left(\frac{\partial u^\lambda}{\partial \bar{u}^\alpha}\,\frac{\partial u^\mu}{\partial \bar{u}^\beta}\,\frac{\partial \bar{u}^\gamma}{\partial u^\sigma}\,\Gamma_{\lambda\mu}{}^\sigma + \frac{\partial^2 u^\lambda}{\partial \bar{u}^\alpha\,\partial \bar{u}^\beta}\,\frac{\partial \bar{u}^\gamma}{\partial u^\lambda}\right)\frac{\partial \bar{u}^\alpha}{\partial u^\tau}\,v^\tau =$$

$$= \frac{\partial u^\rho}{\partial \bar{u}^\beta}\,\frac{\partial \bar{u}^\gamma}{\partial u^\sigma}\left(\frac{\partial v^\sigma}{\partial u^\rho} + \Gamma_{\alpha\rho}{}^\sigma\,v^\alpha\right) + \underbrace{\left(\frac{\partial u^\rho}{\partial \bar{u}^\beta}\,\frac{\partial^2 \bar{u}^\gamma}{\partial u^\rho\,\partial \bar{u}^\sigma} + \frac{\partial^2 u^\lambda}{\partial \bar{u}^\alpha\,\partial \bar{u}^\beta}\,\frac{\partial \bar{u}^\gamma}{\partial u^\lambda}\,\frac{\partial \bar{u}^\alpha}{\partial u^\sigma}\right)}_{0} v^\sigma = \frac{\partial u^\rho}{\partial \bar{u}^\beta}\,\frac{\partial \bar{u}^\gamma}{\partial u^\sigma}\,v^\sigma{}_{;\,\rho}$$

ya que $\quad \delta^\gamma{}_\beta = \dfrac{\partial \bar{u}^\gamma}{\partial \bar{u}^\beta} = \dfrac{\partial \bar{u}^\gamma}{\partial u^\rho}\dfrac{\partial u^\rho}{\partial \bar{u}^\beta}, \qquad$ derivando con respecto a $u^\sigma \qquad 0 = \dfrac{\partial^2 \bar{u}^\gamma}{\partial u^\rho\,\partial \bar{u}^\sigma}\,\dfrac{\partial u^\rho}{\partial \bar{u}^\beta} + \dfrac{\partial \bar{u}^\gamma}{\partial u^\lambda}\,\dfrac{\partial^2 u^\lambda}{\partial \bar{u}^\alpha\,\partial \bar{u}^\beta}\,\dfrac{\partial \bar{u}^\alpha}{\partial u^\sigma}$

Pero $v^\gamma{}_{,\,\beta}$ no se transforma como un tensor.

5.1.2 Derivada covariante de un vector (covariante)

Escribiendo $\vec{v}$ como $\vec{v} = v_\alpha \, \vec{x}^{\,\alpha}$, con un razonamiento similar al del apartado anterior podemos definir la derivada covariante de un vector covariante como

$$\boxed{v_{\alpha;\beta} = \frac{\partial v_\alpha}{\partial u^\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}{}^{\sigma} \, v_\sigma = v_{\alpha,\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}{}^{\sigma} \, v_\sigma}$$

donde

$$v_{\alpha,\beta} = \frac{\partial v_\alpha}{\partial u^\beta}$$

$v_{\alpha;\beta}$ son las componentes de un tensor de 2º orden 2 veces covariante.

$$\bar{v}_{\alpha;\beta} = \frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial \bar{u}^\beta} - \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^{\sigma} \, \bar{v}_\sigma = \frac{\partial}{\partial \bar{u}^\beta}\left(\frac{\partial u^\rho}{\partial \bar{u}^\alpha} \, v_\rho\right) - \left(\frac{\partial u^\lambda}{\partial \bar{u}^\alpha} \, \frac{\partial u^\mu}{\partial \bar{u}^\beta} \, \frac{\partial \bar{u}^\sigma}{\partial u^\rho} \, \Gamma_{\lambda\mu}{}^{\rho} + \frac{\partial^2 u^\lambda}{\partial \bar{u}^\alpha \, \partial \bar{u}^\beta} \, \frac{\partial \bar{u}^\sigma}{\partial u^\lambda}\right) \frac{\partial u^\gamma}{\partial \bar{u}^\sigma} \, v_\gamma =$$

$$= \frac{\partial^2 u^\rho}{\partial \bar{u}^\alpha \, \partial \bar{u}^\beta} \, v_\rho + \frac{\partial u^\rho}{\partial \bar{u}^\alpha} \, \frac{\partial u^\gamma}{\partial \bar{u}^\beta} \, \frac{\partial v_\rho}{\partial u^\gamma} - \left(\frac{\partial u^\lambda}{\partial \bar{u}^\alpha} \, \frac{\partial u^\mu}{\partial \bar{u}^\beta} \, \frac{\partial \bar{u}^\sigma}{\partial u^\rho} \, \Gamma_{\lambda\mu}{}^{\rho} + \frac{\partial^2 u^\lambda}{\partial \bar{u}^\alpha \, \partial \bar{u}^\beta} \, \frac{\partial \bar{u}^\sigma}{\partial u^\lambda}\right) \frac{\partial u^\gamma}{\partial \bar{u}^\sigma} \, v_\gamma =$$

$$= \frac{\partial u^\rho}{\partial \bar{u}^\alpha} \, \frac{\partial u^\gamma}{\partial \bar{u}^\beta}\left(\frac{\partial v_\rho}{\partial u^\gamma} - \Gamma_{\rho\gamma}{}^{\sigma} \, v_\sigma\right) + \underbrace{\left(\frac{\partial^2 u^\rho}{\partial \bar{u}^\alpha \, \partial \bar{u}^\beta} - \frac{\partial^2 u^\rho}{\partial \bar{u}^\alpha \, \partial \bar{u}^\beta}\right)}_{0} v_\rho = \frac{\partial u^\rho}{\partial \bar{u}^\alpha} \, \frac{\partial u^\gamma}{\partial \bar{u}^\beta} \, v_{\rho;\nu}$$

5.1.3 Derivada covariante de un tensor general

Consideremos primero un tensor mixto de segundo orden tipo $\binom{1}{1}$: $T^{\mu}{}_{\nu}$

$$\boxed{T^{\mu}{}_{\nu;\beta} = \frac{\partial T^{\mu}{}_{\nu}}{\partial u^\beta} + \Gamma_{\alpha\beta}{}^{\mu} \, T^{\alpha}{}_{\nu} - \Gamma_{\nu\beta}{}^{\alpha} \, T^{\mu}{}_{\alpha} = T^{\mu}{}_{\nu,\beta} + \Gamma_{\alpha\beta}{}^{\mu} \, T^{\alpha}{}_{\nu} - \Gamma_{\nu\beta}{}^{\alpha} \, T^{\mu}{}_{\alpha}}$$

Por cada índice covariante aparece un término $-\Gamma \, T$ y por cada contravariante uno $+\Gamma \, T$ con los índices convenientemente contraídos. Para un tensor T de tipo $\binom{1}{1}$

$$\boxed{T_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}{}^{\beta_1 \ldots \beta_s}{}_{;\sigma} = T_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}{}^{\beta_1 \ldots \beta_s}{}_{,\sigma} - \sum_{i=1}^{r} \Gamma_{\alpha_i \sigma}{}^{\lambda} \, T_{\alpha_1 \ldots \alpha_{i-1} \, \lambda \, \alpha_{i+1} \ldots \alpha_r}{}^{\beta_1 \ldots \beta_s} + \sum_{j=1}^{s} \Gamma_{\lambda\sigma}{}^{\beta_j} \, T_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}{}^{\beta_1 \ldots \beta_{j-1} \, \lambda \, \beta_{j+1} \ldots \beta_s}}$$

5.1.4 Propiedades de la derivada covariante

1) Linealidad: sean c,d constantes

$$\left(c \, a_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}{}^{\beta_1 \ldots \beta_s} + d \, b_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}{}^{\beta_1 \ldots \beta_s}\right)_{;\tau} = c \, a_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}{}^{\beta_1 \ldots \beta_s}{}_{;\tau} + d \, b_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}{}^{\beta_1 \ldots \beta_s}{}_{;\tau}$$

2) Propiedad de Leibniz (regla del producto):

$$\left(a_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}{}^{\beta_1 \ldots \beta_s} \, t_{\rho_1 \ldots \rho_p}{}^{\sigma_1 \ldots \sigma_q}\right)_{;\tau} = a_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}{}^{\beta_1 \ldots \beta_s}{}_{;\tau} \, t_{\rho_1 \ldots \rho_p}{}^{\sigma_1 \ldots \sigma_q} + a_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}{}^{\beta_1 \ldots \beta_s} \, t_{\rho_1 \ldots \rho_p}{}^{\sigma_1 \ldots \sigma_q}{}_{;\tau}$$

Demostración: por la propiedad del producto tensorial podemos definir cualquier vector de orden n como un producto de n vectores de orden 1 con los índices adecuados. Sea $T^{\mu\nu} \equiv v^\mu \, w^\nu$, calculemos su derivada covariante

$$T^{\mu\nu}{}_{;\alpha} = T^{\mu\nu}{}_{,\alpha} + \Gamma_{\rho\alpha}{}^{\mu} \, T^{\rho\nu} + \Gamma_{\rho\alpha}{}^{\nu} \, T^{\mu\alpha} = (v^\mu \, w^\nu)_{,\alpha} + \Gamma_{\rho\alpha}{}^{\mu} \, v^\rho \, w^\nu + \Gamma_{\rho\alpha}{}^{\nu} \, v^\mu \, w^\rho = v^\mu{}_{,\alpha} \, w^\nu + v^\mu \, w^\nu{}_{,\alpha}$$

$$+\Gamma_{\rho\alpha}{}^{\mu}\, v^{\rho}\, w^{\nu} + \Gamma_{\rho\alpha}{}^{\nu}\, v^{\mu}\, w^{\rho} = \underbrace{\left(v^{\mu}{}_{,\alpha} + \Gamma_{\rho\alpha}{}^{\mu}\, v^{\rho}\right)}_{v^{\mu}{}_{;\alpha}} w^{\nu} + v^{\mu}\, \underbrace{\left(w^{\nu}{}_{,\alpha} + \Gamma_{\rho\alpha}{}^{\nu}\, w^{\rho}\right)}_{w^{\nu}{}_{;\alpha}} \;\Rightarrow$$

$$(v^{\mu}\, w^{\nu})_{;\alpha} = v^{\mu}{}_{;\alpha}\, w^{\nu} + v^{\mu}\, w^{\nu}{}_{;\alpha}$$

□

3) La derivada covariante conmuta con la contracción (da lo mismo derivar covariantemente y contraer un índice que contraer el índice y derivar covariantemente)

Ejemplo: Sea el tensor $T^{\mu\nu}{}_{\rho}$ tipo $\binom{2}{1}$. Al contraer ν y ρ queda un tensor $T^{\mu\rho}{}_{\rho}$ tipo $\binom{1}{0}$

-Si derivo y luego contraigo:

$$T^{\mu\nu}{}_{\rho;\sigma} = T^{\mu\nu}{}_{\rho,\sigma} + \Gamma_{\lambda\sigma}{}^{\mu}\, T^{\lambda\nu}{}_{\rho} + \Gamma_{\lambda\sigma}{}^{\nu}\, T^{\mu\lambda}{}_{\rho} - \Gamma_{\rho\sigma}{}^{\lambda}\, T^{\mu\nu}{}_{\lambda} = T^{\mu\rho}{}_{\rho,\sigma} + \Gamma_{\lambda\sigma}{}^{\mu}\, T^{\lambda\rho}{}_{\rho} + \underbrace{\Gamma_{\lambda\sigma}{}^{\rho}\, T^{\mu\lambda}{}_{\rho} - \Gamma_{\rho\sigma}{}^{\lambda}\, T^{\mu\rho}{}_{\lambda}}_{\text{iguales} \Rightarrow \text{ se cancelan}} \;\Rightarrow$$

$$T^{\mu\nu}{}_{\rho;\sigma} = T^{\mu\rho}{}_{\rho,\sigma} + \Gamma_{\lambda\sigma}{}^{\mu}\, T^{\lambda\rho}{}_{\rho}$$

-Si contraigo y luego derivo el tensor contraido $T^{\mu\rho}{}_{\rho}$ (procedimiento más corto):

$$T^{\mu\rho}{}_{\rho;\sigma} = T^{\mu\rho}{}_{\rho,\sigma} + \Gamma_{\lambda\sigma}{}^{\mu}\, T^{\lambda\rho}{}_{\rho}$$

Lo mismo que antes.

4) Las derivadas covariantes de $g_{\alpha\beta}$, $g^{\alpha\beta}$ y $g^{\alpha}{}_{\beta}$ son nulas ($\equiv$ la métrica es covariantemente constante)

- $g_{\alpha\beta;\mu} = g_{\alpha\beta,\mu} - \Gamma_{\alpha\mu}{}^{\lambda}\, g_{\lambda\beta} - \Gamma_{\beta\mu}{}^{\lambda}\, g_{\alpha\lambda} = g_{\alpha\beta,\mu} - \dfrac{1}{2}\, g^{\lambda\rho}\left(g_{\alpha\rho,\mu} + g_{\mu\rho,\alpha} - g_{\alpha\mu,\rho}\right) g_{\lambda\beta} - \dfrac{1}{2}\, g^{\lambda\rho}\left(g_{\beta\rho,\mu} + g_{\mu\rho,\beta}\right.$ $\left.- g_{\beta\mu,\rho}\right) g_{\alpha\lambda} = g_{\alpha\beta,\mu} - \dfrac{1}{2}\left(g_{\alpha\beta,\mu} + g_{\mu\beta,\alpha} - g_{\alpha\mu,\beta}\right) - \dfrac{1}{2}\left(g_{\beta\alpha,\mu} + g_{\mu\alpha,\beta} - g_{\beta\mu,\alpha}\right) = 0$

- $g^{\alpha}{}_{\beta;\mu} = \delta^{\alpha}{}_{\beta;\mu} = \cancelto{0}{\delta^{\alpha}{}_{\beta,\mu}} + \Gamma_{\lambda\mu}{}^{\alpha}\, \delta^{\lambda}{}_{\beta} - \Gamma_{\beta\mu}{}^{\lambda}\, \delta^{\alpha}{}_{\lambda} = \Gamma_{\beta\mu}{}^{\alpha} - \Gamma_{\beta\mu}{}^{\alpha} = 0$

- $g^{\alpha\beta}{}_{;\mu} = g^{\alpha\beta}{}_{,\mu} + \Gamma_{\lambda\mu}{}^{\alpha}\, g^{\lambda\beta} + \Gamma_{\lambda\mu}{}^{\beta}\, g^{\alpha\lambda} = -g^{\alpha\rho}\, g^{\beta\sigma}\, g_{\rho\sigma,\mu} + \dfrac{1}{2}\, g^{\alpha\rho}\left(g_{\lambda\rho,\mu} + g_{\mu\rho,\lambda} - g_{\lambda\mu,\rho}\right) g^{\lambda\beta} + \dfrac{1}{2}\, g^{\beta\rho}\left(g_{\lambda\rho,\mu}\right.$ $\left.+ g_{\mu\rho,\lambda} - g_{\lambda\mu,\rho}\right) g^{\alpha\lambda} = 0$

Entonces

$$\boxed{g_{\alpha\beta;\mu} = g^{\alpha}{}_{\beta;\mu} = g^{\alpha\beta}{}_{;\mu} = 0}$$

Consecuencia: La subida y bajada de índices conmuta con la derivación covariante. Esto no es cierto para la derivada parcial porque $g_{\alpha\beta,\mu} = g^{\alpha}{}_{\beta,\mu} = g^{\alpha\beta}{}_{,\mu} \neq 0$ y porque al derivar parcialmente un tensor no se obtiene otro tensor (en general), lo que nos impide bajar y subir índices con la primera forma fundamental.

5) Las derivadas covariantes no conmutan, en general. Sea f función escalar de clase C^{r}, $r \geq 2$

$f_{;\alpha} = f_{,\alpha}$

$f_{;\alpha;\beta} = (f_{,\alpha})_{,\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}{}^{\lambda}\, f_{,\lambda} = f_{,\alpha\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}{}^{\lambda}\, f_{,\lambda}$

$f_{;\beta;\alpha} = (f_{,\beta})_{,\alpha} - \Gamma_{\beta\alpha}{}^{\lambda}\, f_{,\lambda} = f_{,\beta\alpha} - \Gamma_{\beta\alpha}{}^{\lambda}\, f_{,\lambda}$

Por tanto, simetría de la derivada mixta y los símbolos de Christoffel, $f_{;\alpha;\beta} = f_{;\beta;\alpha}$

Esta igualdad no es cierta para tensores de orden superior.

6) Un campo tensorial se dice **covariantemente constante** si sus derivadas covariantes se anulan.

5.2 Identidad de Ricci

Veamos qué ocurre para un vector (covariante).

$$\begin{array}{ccccc} a_\mu & \to & a_{\mu;\alpha} = a_{\mu,\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha}{}^{\lambda}\, a_\lambda & \to & a_{\mu;\alpha;\beta} \\ \text{tipo}\binom{0}{1} & & \text{tipo}\binom{0}{2} & & \text{tipo}\binom{0}{3} \end{array}$$

$$a_{\mu;\alpha;\beta} = (a_{\mu;\alpha})_{,\beta} - \Gamma_{\mu\beta}{}^{\rho}\, a_{\rho;\alpha} - \Gamma_{\alpha\beta}{}^{\rho}\, a_{\mu;\rho} = \left(a_{\mu,\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha}{}^{\lambda}\, a_\lambda\right)_{,\beta} - \Gamma_{\mu\beta}{}^{\rho}\left(a_{\rho,\alpha} - \Gamma_{\rho\alpha}{}^{\lambda}\, a_\lambda\right)$$
$$-\Gamma_{\alpha\beta}{}^{\rho}\left(a_{\mu,\rho} - \Gamma_{\mu\rho}{}^{\lambda}\, a_\lambda\right) = a_{\mu,\alpha\beta} - \Gamma_{\mu\alpha}{}^{\lambda}{}_{,\beta}\, a_\lambda - \Gamma_{\mu\alpha}{}^{\lambda}\, a_{\lambda,\beta} - \Gamma_{\mu\beta}{}^{\rho}\, a_{\rho,\alpha} + \Gamma_{\mu\beta}{}^{\rho}\,\Gamma_{\rho\alpha}{}^{\lambda}\, a_\lambda - \Gamma_{\alpha\beta}{}^{\rho}\, a_{\mu,\rho}$$
$$+\Gamma_{\alpha\beta}{}^{\rho}\,\Gamma_{\mu\rho}{}^{\lambda}\, a_\lambda$$

$$a_{\mu;\alpha;\beta} - a_{\mu;\beta;\alpha} = \Gamma_{\mu\beta}{}^{\lambda}{}_{,\alpha}\, a_\lambda - \Gamma_{\mu\alpha}{}^{\lambda}{}_{,\beta}\, a_\lambda + \Gamma_{\mu\beta}{}^{\rho}\,\Gamma_{\rho\alpha}{}^{\lambda}\, a_\lambda - \Gamma_{\mu\alpha}{}^{\rho}\,\Gamma_{\rho\beta}{}^{\lambda}\, a_\lambda = \Big(\Gamma_{\mu\beta}{}^{\lambda}{}_{,\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha}{}^{\lambda}{}_{,\beta} + \Gamma_{\mu\beta}{}^{\rho}\,\Gamma_{\rho\alpha}{}^{\lambda}$$
$$-\Gamma_{\mu\alpha}{}^{\rho}\,\Gamma_{\rho\beta}{}^{\lambda}\Big)\, a_\lambda = R^{\lambda}{}_{\mu\alpha\beta}\, a_\lambda \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{a_{\mu;\alpha;\beta} - a_{\mu;\beta;\alpha} = a_\lambda\, R^{\lambda}{}_{\mu\alpha\beta}} \qquad \textbf{Identidad de Ricci}$$

Si lo hubiéramos hecho para un vector contravariante, el resultado habría sido

$$\boxed{a^{\mu}{}_{;\alpha;\beta} - a^{\mu}{}_{;\beta;\alpha} = -a_\lambda\, R^{\mu}{}_{\lambda\alpha\beta}} \qquad \textbf{Identidad de Ricci}$$

En general, para un tensor de tipo $\binom{s}{r}$ la diferencia de derivadas covariantes de 2º orden cruzadas es

$$\boxed{\begin{aligned} T_{\alpha_1\ldots\alpha_r}{}^{\beta_1\ldots\beta_s}{}_{;\rho;\sigma} - {} & T_{\alpha_1\ldots\alpha_r}{}^{\beta_1\ldots\beta_s}{}_{;\sigma;\rho} = \\ = {} & \sum_{i=1}^{r} T_{\alpha_1\ldots\alpha_{i-1}\,\lambda\,\alpha_{i+1}\ldots\alpha_r}{}^{\beta_1\ldots\beta_s}\, R^{\lambda}{}_{\alpha_i\rho\sigma} - \sum_{j=1}^{s} T_{\alpha_1\ldots\alpha_r}{}^{\beta_1\ldots\beta_{j-1}\,\lambda\,\beta_{j+1}\ldots\beta_s}\, R^{\beta_j}{}_{\lambda\rho\sigma} \end{aligned}}$$

Identidad de Ricci general

Conclusión: Las derivadas cruzadas de un tensor no son, en general, iguales. Su diferencia, al depender del tensor de Riemann, es nula cuando dicho tensor se anula (ej: en una superficie plana). Como es obvio, también puede anularse si las sumas se cancelan.

5.3 Identidad de Bianchi

En una variedad riemanniana n dimensional se verifica

$$\boxed{R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu;\sigma} + R^{\alpha}{}_{\beta\nu\sigma;\mu} + R^{\alpha}{}_{\beta\sigma\mu;\nu} = 0}$$

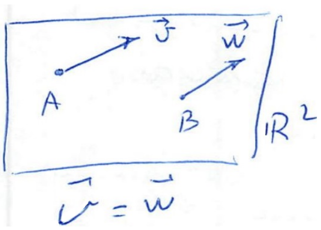
o su versión covariante

$$\boxed{R_{\alpha\beta\mu\nu;\sigma} + R_{\alpha\beta\nu\sigma;\mu} + R_{\alpha\beta\sigma\mu;\nu} = 0}$$

Para $n = 2$ el teorema es consecuencia de las propiedades de simetría del tensor de Riemann. La prueba puede hacerse por cálculo implícito (muy larga). Normalmente se simplifica eligiendo coordenadas para las que los símbolos de Christoffel (pero no sus derivada) se anulen en el punto.

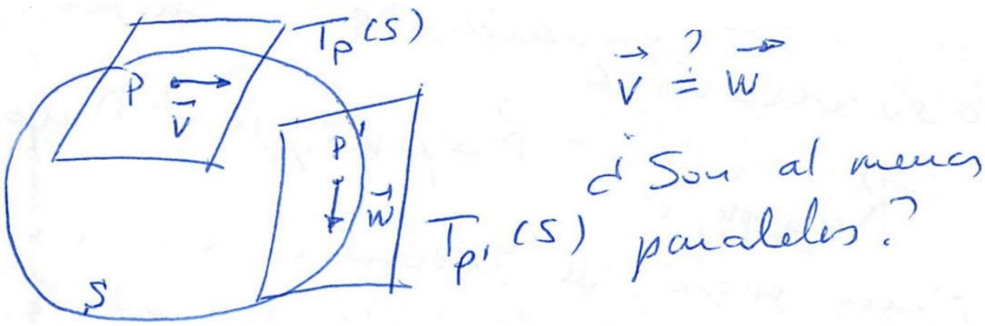
5.4 Transporte paralelo

5.4.1 Noción de paralelismo sobre variedades



La noción de igualdad entre dos vectores aplicados en dos puntos del plano ($\mathbb{R}^2$) o del espacio tridimensional ($\mathbb{R}^3$) es trivial: si sus componentes son iguales en la base asociada.

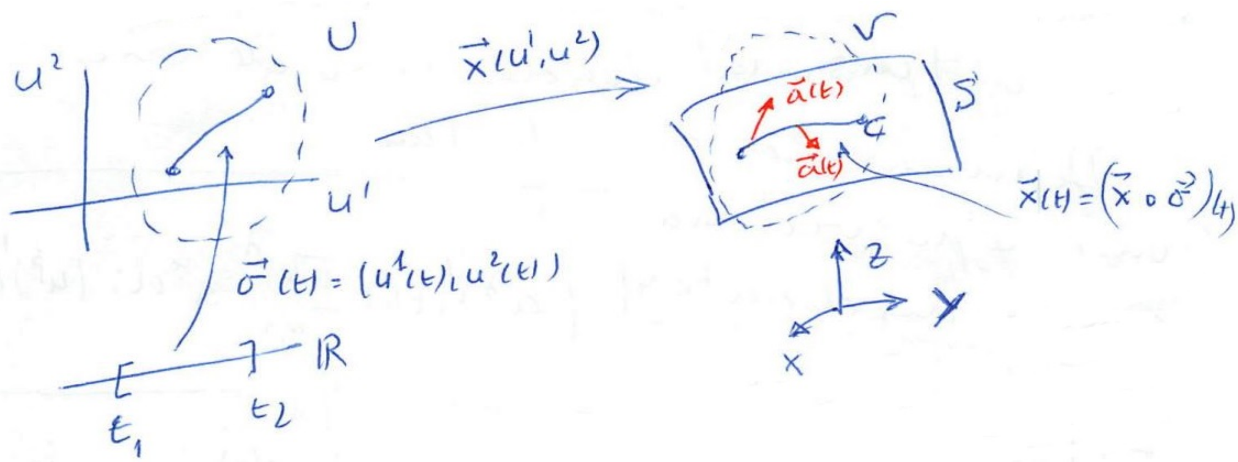
El problema viene cuando consideramos vectores sobre una variedad. Dichos vectores viven en el espacio tangente y cada punto tiene su propio espacio tangente y, por lo tanto, su propia base.



Para poder definir la idea de paralelismo en el caso de variedades vamos primero a ver el concepto de derivada covariante de un vector a lo largo de una curva en una superficie.

5.4.2 Derivada covariante de un campo vectorial a lo largo de una curva

Consideremos una superficie parametrizada S (carta local) y una curva sobe ella. Supongamos que en cada punto de la curva (parametrizada por un parámetro t) asignamos un vector $\vec{a}(t)$; se trata de un campo vectorial definido sobre la curva.



$\vec{a}(t)$ se puede expresar en términos de la base coordenada asociada al punto $\vec{x}(u^\alpha(t))$

$$\vec{a}(t) = a^\alpha(t)\, \vec{x}_\alpha(u^\beta(t))$$

Veamos cómo varía $\vec{a}(t)$ con respecto al parámetro t (se va a eliminar la dependencia explícita en t y $u^\beta(t)$)

$$\frac{d\vec{a}(t)}{dt} = (a^\alpha)'\, \vec{x}_\alpha + a^\alpha\, \vec{x}_{\alpha\beta}\, (u^\beta)' = (a^\alpha)'\, \vec{x}_\alpha + a^\alpha \left[{\Gamma_{\alpha\beta}}^\lambda\, \vec{x}_\lambda + b_{\alpha\beta}\, \vec{n} \right] (u^\beta)' =$$

$$= \Big[(a^\lambda)' + \Gamma_{\alpha\beta}{}^\lambda\, a^\alpha\, (u^\beta)' \Big]\, \vec{x}_\lambda + b_{\alpha\beta}\, a^\alpha\, (u^\beta)'\, \vec{n}$$

La presencia del término en $\vec{n}$ es debido a que hacemos una inmersión de nuestra variedad (superficie) es $\mathbb{R}^3$. El término importante desde el punto de vista del cálculo tensorial es el del espacio tangente.

Definimos la derivada covariante de un campo vectorial a lo largo de una curva mediante

$$\boxed{\frac{Da^\lambda}{dt} \equiv \frac{\nabla a^\lambda}{dt} = (a^\lambda)'(t) + \Gamma_{\alpha\beta}{}^\lambda\, a^\alpha(t)\, (u^\beta)'(t)}$$

donde los símbolos de Christoffel están evaluados sobre la curva $\Gamma_{\alpha\beta}{}^\lambda(u^\alpha(t))$. El campo $a^\lambda(t)$ se dice que se **transporta paralelamente a lo lardo de la curva** si cumple

$$\boxed{\frac{Da^\lambda}{dt} = 0}$$

Condición de transporte paralelo a lo largo de la curva

5.4.3 Expresión en términos de la derivada covariante

Supongamos que el campo vectorial $\vec{a}$ está definido sobre toda la carta (no sólo sobre la curva)

$$\vec{a}(u^\beta) = a^\alpha(u^\beta)\, \vec{x}_\alpha(u^\beta)$$

Al evaluar $\vec{a}$ sobre la curva

$$\vec{a}(t) = (\vec{a} \circ \vec{\sigma})(t) = a^\alpha(u^\beta(t))\, \vec{x}_\alpha(u^\beta(t))$$

Si derivamos con respecto al parámetro t

$$\frac{d\vec{a}(t)}{dt} = \frac{\partial a^\alpha}{\partial u^\beta}\, \left(u^\beta\right)'\, \vec{x}_\alpha + a^\alpha\, \vec{x}_{\alpha\beta}\, \left(u^\beta\right)' = \frac{\partial a^\alpha}{\partial u^\beta}\, \left(u^\beta\right)'\, \vec{x}_\alpha + a^\alpha\, \Big[\Gamma_{\alpha\beta}{}^\lambda\, \vec{x}_\lambda + b_{\alpha\beta}\, \vec{n} \Big]\, \left(u^\beta\right)' =$$

$$= \underbrace{\overbrace{\left[\frac{\partial a^\lambda}{\partial u^\beta} + \Gamma_{\alpha\beta}{}^\lambda\, a^\alpha \right]}^{a^\lambda{}_{;\beta}} \left(u^\beta\right)'}_{Da^\lambda/dt}\, \vec{x}_\lambda + b_{\alpha\beta}\, a^\alpha\, (u^\beta)'\, \vec{n} \qquad \text{entonces}$$

$$\boxed{\frac{Da^\lambda}{dt} = a^\lambda{}_{;\beta}\, \left(u^\beta\right)'(t)}$$

Derivada covariante a lo largo de la curva en término de la derivada covariante

donde $a^\lambda{}_{;\beta}$ está evaluado sobre la curva $u^\sigma = u^\sigma(t)$. Esto nos permite calcular la derivada covariante de cualquier tensor a lo largo de una curva

$$\boxed{\frac{D\, T_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}{}^{\beta_1 \ldots \beta_s}}{dt} = T_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}{}^{\beta_1 \ldots \beta_s}{}_{;\rho}\, (u^\rho)'\,(t)}$$

5.4.4 Propiedades de la derivada covariante a lo largo de una curva y el transporte paralelo

- El transporte paralelo a lo largo de una curva es independiente de las coordenadas que usemos al parametrizar la variedad (obviamente, pues todo el cálculo es tensorial)

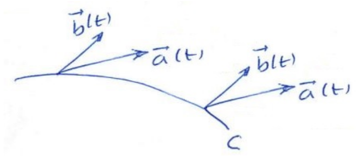
- Una curva $u^\alpha(s)$ es una geodésica si y solo si, su velocidad/vector tangente se transporta paralelamente a ella

$$\vec{a}(s) = \dot{\vec{x}}(s) = \dot{u}^\alpha(s)\, \vec{x}_\alpha \;\;\Rightarrow\;\; a^\alpha = \dot{u}^\alpha$$

$$0 = \frac{Da^\lambda}{ds} = \frac{D\dot{u}^\lambda}{ds} = \ddot{u}^\lambda + \Gamma_{\alpha\beta}{}^\lambda \, \dot{u}^\alpha \, \dot{u}^\beta = 0 \quad \text{ecuación geodésica}$$

• $\vec{a}(t)$ es paralelo a lo largo de $C \Leftrightarrow \vec{a}\,'(t)$ es perpendicular a S; como $\dfrac{Da^\lambda}{dt} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{a}\,'(t) \propto \vec{n}$

• El producto escalar es invariante bajo transporte paralelo, es decir, si $\vec{a}(t)$ y $\vec{b}(t)$ transportados paralelamente a lo largo de C, entonces $\frac{d}{dt}(\vec{a}(t)\cdot\vec{b}(t)) = 0$.



$$\frac{Da^\lambda}{dt} = 0, \qquad \frac{Db^\lambda}{dt} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{a}(t)\cdot\vec{b}(t)) = \underbrace{\frac{d\vec{a}(t)}{dt}}_{\parallel \vec{n}} \cdot \underbrace{\vec{b}(t)}_{\in T_p(S)} + \underbrace{\vec{a}(t)}_{\in T_p(S)} \cdot \underbrace{\frac{d\vec{a}(t)}{dt}}_{\parallel \vec{n}} = 0$$

Consecuencias:

-El transporte paralelo a lo largo de una curva conserva el módulo del campo vectorial (tomar $\vec{a} = \vec{b}$).

-El transporte paralelo a lo largo de una curva conserva el ángulo entre los vectores.

-El ángulo en $\vec{a}(t)$ y la curva (su vector tangente/velocidad) se mantiene constante sólo si la curva es una geodésica (lo que asegura que el vector tangente se conserve).

• Si S_1 y S_2 son dos superficies tangentes a lo largo de la curva C (entonces comparten la normal en los puntos de C)

$\vec{a}(t)$ es paralelo a lo largo de C en $S_1 \;\Leftrightarrow\; \vec{a}(t)$ es paralelo a lo largo de C en S_2, y viceversa.

6 Apéndice

6.1 Convenio de suma de Einstein

También podemos especificar que no hay convenio de suma de Einstein sobre dos índices convariante y contravariante del mismo símbolo añadiendo un punto encima de estos.

Ej: Sea $\alpha, \beta, \gamma, \rho = u^1, u^2 = \theta, \phi$ y el tensor ${\Gamma_{\alpha\beta}}^{\gamma}\, w_{\gamma\rho}$. Si, por algún motivo, queremos especificar que, por ejemplo, $\gamma, \rho = \theta$, deberíamos de expresarlo como:

${\Gamma_{\alpha\beta}}^{\dot\theta}\, w_{\dot\theta\dot\theta}$ donde el punto indica que no hay convenio de suma de Einstein.

6.2 Tensores y sus índices

6.2.1 Índices libres y contraídos

Los **índices libres** están fijos, no pueden cambiarse, mientras que los **contraídos** dos a dos, al estar sumados, puedes cambiar su símbolo

Ej: Sea el tensor $A^{\alpha}{}_{\mu\nu} = \dfrac{\partial u^{\alpha}}{\partial \bar{u}^{\beta}}\, {\Gamma_{\nu\mu}}^{\beta}$ el índice β es el único contraído y el resto son libres. Entonces podemos reescribir

$$A^{\alpha}{}_{\mu\nu} = \frac{\partial u^{\alpha}}{\partial \bar{u}^{\beta}}\, {\Gamma_{\nu\mu}}^{\beta} = \frac{\partial u^{\alpha}}{\partial \bar{u}^{\gamma}}\, {\Gamma_{\nu\mu}}^{\gamma}$$

6.2.2 Relación entre objetos simétrico y antisimétricos

Sea $S_{\alpha\beta}$ un objeto simétrico y $A^{\alpha\beta}$ un objeto antisimétrico, entonces

$$S_{\alpha\beta} = S_{\beta\alpha} \qquad A^{\alpha\beta} = -A^{\beta\alpha}$$

Veamos qué ocurre cuando dos objetos simétrico y antisimétrico se multiplican

$$A^{\alpha\beta}\, S_{\alpha\beta} = A^{\beta\alpha}\, S_{\beta\alpha} = -A^{\alpha\beta}\, S_{\alpha\beta} \quad \Rightarrow \quad A^{\alpha\beta}\, S_{\alpha\beta} = 0$$

Ej: $$\underbrace{\left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^{\nu}} - \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial u^{\beta}}\right)}_{\text{antisimétrico en } \nu,\beta} \underbrace{(u^{\alpha})'\,(u^{\beta})'\,(u^{\nu})'}_{\text{simétrico en } \nu,\beta} = 0$$

6.2.3 Juego con índices

Podemos simplificar la expresión $g^{\mu}{}_{\sigma}\, g_{\nu\mu}$ de dos maneras:

- Considerando $g^{\mu}{}_{\sigma}$ como una delta $\quad\Rightarrow\quad g^{\mu}{}_{\sigma}\, g_{\nu\mu} = \delta^{\mu}{}_{\sigma}\, g_{\nu\mu} = g_{\nu\sigma}$
- Bajando un índice con la primera forma fundamental $g_{\nu\mu} \quad\Rightarrow\quad g^{\mu}{}_{\sigma}\, g_{\nu\mu} = g_{\nu\sigma}$

Podemos intercambiar el tipo de dos tensores de un producto

$$T_{\mu\nu}\, H^{\mu}{}_{\sigma} = T_{\mu\nu}\, g^{\mu\rho}\, H_{\rho\sigma} = T^{\rho}{}_{\nu}\, H_{\rho\sigma}$$

6.3 Simetría mixta en tensores simétricos

Sea $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$ simétrico, entonces $T^{\mu}{}_{\nu} = g^{\mu\rho}\, T_{\rho\nu} = g^{\mu\rho}\, T_{\nu\rho} = T_{\nu}{}^{\mu} \quad \Rightarrow \quad T^{\mu}{}_{\nu} = T_{\nu}{}^{\mu}$

6.4 Geometría diferencial para variedades de orden n