UNIVERSIDAD
POLITÉCNICA
DE MADRID

Hito 1

Ampliación de matemáticas

15 de noviembre de 2023

Álvaro Zurdo Navajo

Índice

1. Introducción

Este primer hito consiste en crear unas funciones para integrar ecuaciones empleando los siguientes esquemas numéricos:

- Método de Euler.
- Método de Crank-Nicolson.
- Método de Runge-Kutta de orden 4.

Para probar la efectividad de las funciones, se integrará la ecuación de las órbitas de Kepler, empleando diferentes pasos temporales.

2. Desarrollo

2.1. Método de Euler

La integración numérica mediante el método de Euler se realiza empleando la siguiente ecuación:

$$U^{n+1} = U^n + \delta t F\left(U^n\right) \tag{2.1}$$

2.2. Método de Crank-Nicolson

La integración numérica mediante el método de Crank-Nicolson se realiza empleando la siguiente ecuación:

$$U^{n+1} = U^n + \frac{\delta t}{2}\left(F\left(U^n\right) + F\left(U^{n+1}\right)\right) \tag{2.2}$$

Este es un método de integración implícito, lo que significa que 'es necesario conocer la solución para obtener la solución'. Inicialmente se pensó en resolverlo de forma iterativa, introduciendo primero el valor obtenido siguiendo el método de Euler (sección 2.1) para obtener el nuevo U^{n+1}, y volviendo a introducirlo en la ecuación hasta que la diferencia entre input y output sea menor que un cierto valor. Finalmente, se ha decidido emplear un método Newton-Raphson para obtener la solución en cada paso temporal.

2.3. Método de Runge-Kutta de orden 4

La integración numérica mediante el método de Runge-Kutta de orden 4 se realiza empleando las siguientes ecuaciones:

$$k_1 = F\left(t, U^n\right) \tag{2.3}$$

$$k_2 = F\left(t + \frac{\delta t}{2}, U^n + k_1 \frac{\delta t}{2}\right) \tag{2.4}$$

$$k_3 = F\left(t + \frac{\delta t}{2}, U^n + k_2 \frac{\delta t}{2}\right) \tag{2.5}$$

$$k_4 = F\left(t + \delta t, U^n + k_3 \delta t\right) \tag{2.6}$$

$$U^{n+1} = U^n + \frac{\delta t}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) \tag{2.7}$$

2.4. Ecuación de Kepler

Para probar la efectividad de los algoritmos, se va a emplear la ecuación de Kepler:

$$\ddot{\vec{x}} = -\frac{\mu}{x^3}\vec{x} \tag{2.8}$$

Se va a implementar la ecuación para el caso de 2 dimensiones, empleando el valor del parámetro gravitacional $\mu = 1$. Dado que contiene una derivada de segundo orden, es necesario emplear el siguiente vector como variable a resolver por los métodos de integración:

$$U = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

Cuya derivada es la siguiente:

$$\dot{U} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \frac{-x}{(x^2+y^2)^{1,5}} \\ \frac{-y}{(x^2+y^2)^{1,5}} \end{bmatrix} = F\left(U\right) \tag{2.10}$$

3. Código

A continuación se muestra el código empleado en este apartado:

```
1
2  from numpy import array, zeros, linalg
3  import matplotlib.pyplot as plt
4  from scipy import optimize
5
6
7  def F_Kepler(U):
8
9      x, y, vx, vy = U[0], U[1], U[2], U[3]
10     mr = (x**2 + y**2)**1.5
11     return array([vx, vy, -x/mr, -y/mr])
12
13 def G(x):
14     return x - A - dt/2 * (F_Kepler(A) + F_Kepler(x))
15
16
17 N = 10000
18 dt = 0.001
19
20 U = array(zeros((4,N)))
21 U[:,0] = [1, 0, 0, 1]
22
23 for ii in range(0,N-1):
24     F = F_Kepler(U[:,ii])
25     U[:,ii+1] = U[:,ii] + dt * F
26
27 plt.axis('equal')
28 plt.plot(U[0,:],U[1,:])
29 plt.show()
30
31 ###################################
32
33 U = array(zeros((4,N)))
34 U[:,0] = [1, 0, 0, 1]
35
36 for ii in range(0,N-1):
37     A = U[:,ii]
38     U[:,ii+1] = optimize.newton(func = G, x0 = A)
39
40 plt.axis('equal')
41 plt.plot(U[0,:],U[1,:])
42 plt.show()
43
```

```
44 ################################
45
46 U = array(zeros((4,N)))
47 U[:,0] = [1, 0, 0, 1]
48
49 for ii in range(0,N-1):
50     k1 = F_Kepler(U[:,ii])
51     k2 = F_Kepler(U[:,ii] + k1*dt/2)
52     k3 = F_Kepler(U[:,ii] + k2*dt/2)
53     k4 = F_Kepler(U[:,ii] + k3*dt)
54     U[:,ii+1] = U[:,ii] + dt/6 * (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)
55
56 plt.axis('equal')
57 plt.plot(U[0,:],U[1,:])
58 plt.show()
```

Código 1: Código del Hito 1

4. Resultados

A continuación se muestran los resultados para cada uno de los métodos de integración.

4.1. Método de Euler

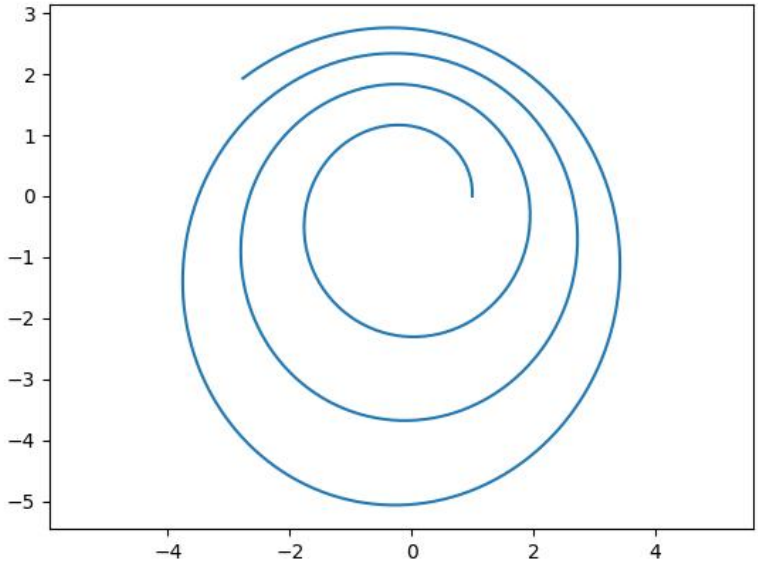

Figura 4.1: Método de Euler con $N = 1000$ y $dt = 0{,}1$

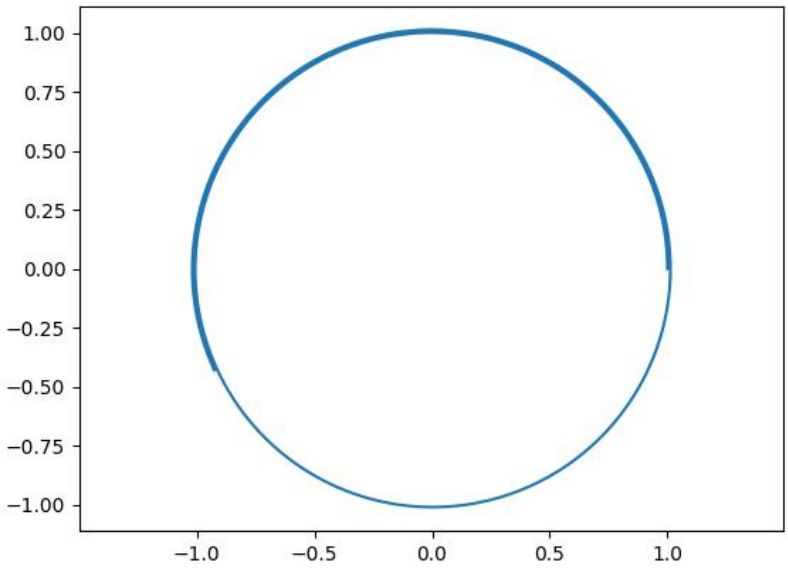

Figura 4.2: Método de Euler con $N = 10000$ y $dt = 0{,}001$

4.2. Método de Crank Nicolson

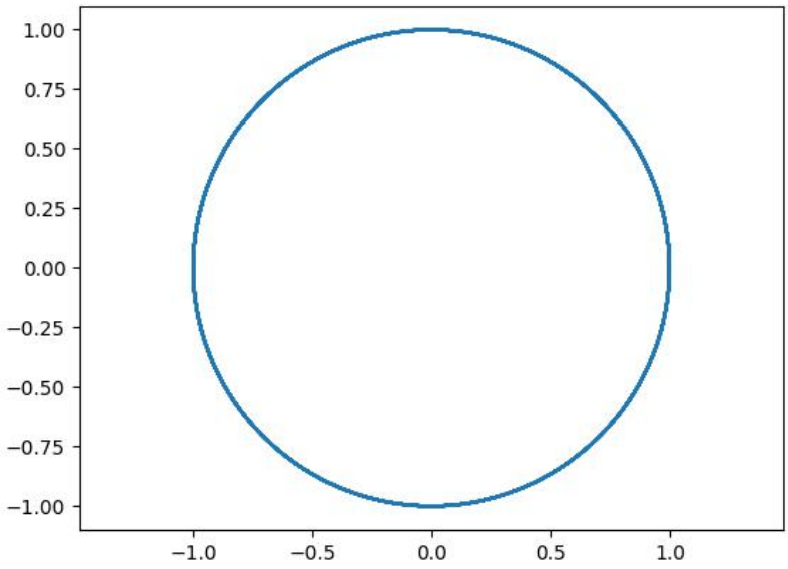

Figura 4.3: Método de Crank Nicolson con $N = 1000$ y $dt = 0{,}1$

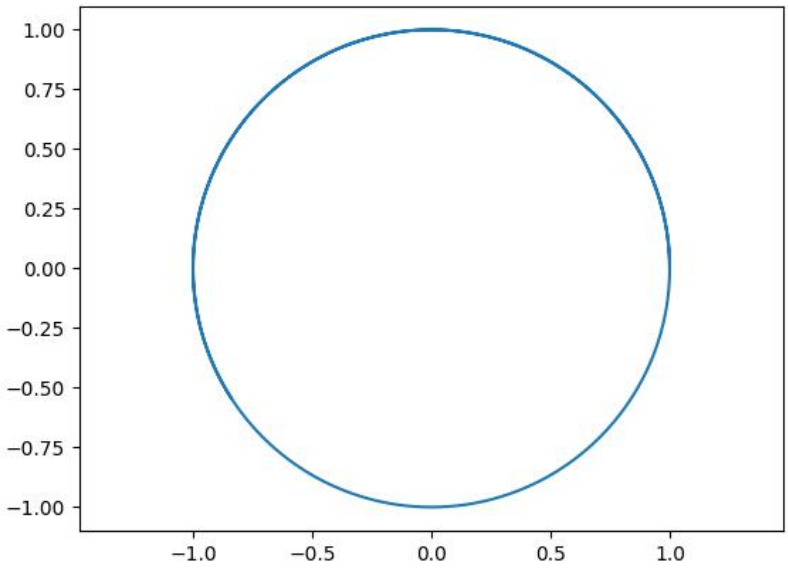

Figura 4.4: Método de Crank Nicolson con $N = 10000$ y $dt = 0{,}001$

4.3. Método de Runge Kutta 4

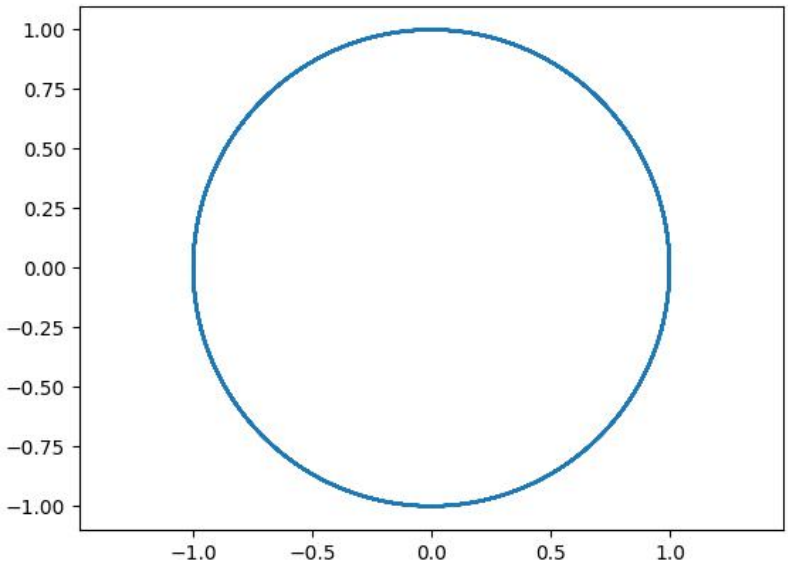

Figura 4.5: Método de Runge Kutta 4 con $N = 1000$ y $dt = 0{,}1$

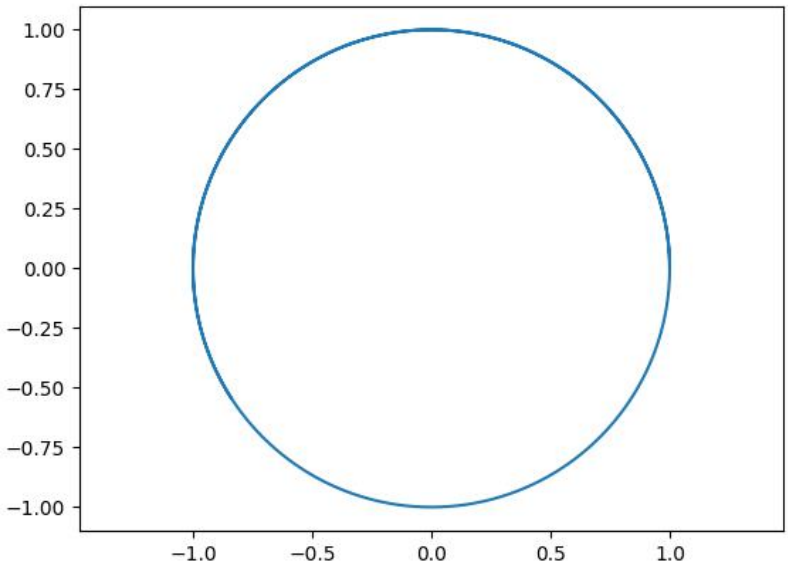

Figura 4.6: Método de Runge Kutta 4 con $N = 10000$ y $dt = 0{,}001$