Distribuições teóricas de probabilidades

- Modelos discretos
  - Binomial
  - Poisson
- Modelos Contínuos
  - Exponencial
  - Normal

Fonte: MORETTIN, L.G. Estatística Básica. Volume único. Probabilidade e Inferência. Pearson, 2010

Distribuições Discretas

1. **Modelos discretos**

   a) Distribuição Binomial

   b) Distribuição de Poisson

Distribuição Binomial

Consideremos n tentativas de um experimento tipo sucesso/fracasso

(p probabilidade de sucesso   e   q probabilidade de fracasso).

Seja X a quantidade de sucessos nas n tentativas do experimento.

X pode ser : 0 ou 1 ou 2 ou … ou n .

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!.(n-k)!}p^k q^{n-k}$$

notação: X:B(n,p)

propriedades: média   E(X)=np

variância   Var(X)=npq

Distribuição Binomial

Exemplo 1:

Um inspetor de qualidade recusa peças defeituosas numa proporção de 10% das peças examinadas. Calcular a probabilidade de que sejam recusadas:

a) pelo menos 3 peças de um lote de 20 peças examinadas ?

b) no máximo 2 peças de um lote de 25 peças examinadas?

$$\text{a) } X : B(20;0,10)$$

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - \{P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)\} =$$

$$= 1 - \left\{ \binom{20}{0}(0,10)^{0}(0,90)^{20} + \ldots + \binom{20}{2}(0,10)^{2}(0,90)^{18} \right\} =$$

$$= 1 - \{0,12158 + 0,27017 + 0,28518\} = 1 - 0,67693 = 0,32307$$

Distribuição Binomial

$$\text{b)}\ X : B(25;0{,}10)$$

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) =$$

$$= \binom{25}{0}(0{,}10)^0(0{,}90)^{25} + \binom{25}{1}(0{,}10)^1(0{,}90)^{24} + \binom{25}{2}(0{,}10)^2(0{,}90)^{23} =$$

$$= 0{,}07179 + 0{,}19942 + 0{,}26589 = 0{,}53710$$

Distribuição Binomial

1) Um lote de aparelhos de TV é recebido por uma firma. Vinte aparelhos são inspecionados. O lote é rejeitado se pelo menos 4 forem defeituosos. Sabendo-se que 5% dos aparelhos é defeituoso:

a) Determine a probabilidade de a firma rejeitar todo o lote. Resp: 0,0159
b) Determine o número esperado de televisores com defeito no lote. R.: 1
c) Determine o desvio padrão do número esperado de televisores com defeito. R.: 1

2) Certo curso de treinamento aumenta a produtividade de uma certa população de funcionários em 80% dos casos. Se 6 funcionários quaisquer participarem do curso, calcule:

a) A probabilidade de que três deles não apresentem aumento na produtividade? (R.: 0,0819)
b) O número esperado de funcionários que não apresentam aumento na produtividade. (R.: 1)

Distribuição Binomial

3)A probabilidade de um arqueiro acertar um alvo com uma única flecha é de 0,2. Se ele lança 30 flechas no alvo, qual a probabilidade de que:

a) exatamente 4 acertem o alvo? R: 0,13252
b) pelo menos 3 acertem o alvo? R: 0,95581

4)Achar a média e a variância da variável aleatória X, sabendo que a mesma tem distribuição binomial de parâmetros 20 e 0,3, ou seja, X: B(20; 0,3). R: E(X)=6 e VAR(X)=4,2

Distribuição de Poisson

características:

- **observação de ocorrência de sucessos em um determinado intervalo;**
- **o intervalo pode ser relativo a tempo, comprimento, área …**
- **a quantidade de sucessos é proporcional ao tamanho do intervalo;**
- **se em um determinado intervalo a média da quantidade de sucessos é 1, a probabilidade da ocorrência de outros sucessos, nesse intervalo, é relativamente pequena.**

Distribuição de Poisson

Seja X o número de sucessos no intervalo, no qual a quantidade média de sucessos é λ , então

$$P(X=k)= \frac{e^{-\lambda} \times \lambda^{k}}{k!}$$

obs: $E(X)=Var(X)=\lambda$

Distribuição de Poisson

exemplos de aplicação

- **quantidade de carros que passam num cruzamento por minuto;**
- **quantidade de erros tipográficos por página de texto;**
- **quantidade de furos em um pneu num percurso de 5000km;**
- **quantidade de defeitos em uma chapa metálica por m^2;**
- **quantidade de mortes por afogamento em um grupo populacional;**
- **quantidade de acidentes de trabalho em um grupo de operários.**

Distribuição de Poisson

Exemplo 1:

Uma fábrica de automóveis verificou que ao testar seus carros na pista de prova, há em média um estouro de pneu em 300 km, e que o número de estouros segue razoavelmente uma distribuição de Poisson.

Qual a probabilidade de que:

a) num teste de 900 km haja no máximo um pneu estourado?

b) um carro ande 450 km na pista sem estourar nenhum pneu?

Distribuição de Poisson

a)

$$\begin{cases} 300\text{km} \rightarrow 1\,\text{estouro} \\ 900\text{km} \rightarrow \lambda \ \text{estouros} \end{cases} \qquad \therefore \ \lambda = 3$$

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) =$$

$$= \frac{e^{-3}.3^0}{0!} + \frac{e^{-3}3^1}{1!} = 0{,}049787 + 0{,}149361 =$$

$$= 0{,}199148$$

Distribuição de Poisson

b)

$$\begin{cases} 300km \rightarrow 1\,estouro \\ 450km \rightarrow \lambda \;\; estouros \end{cases} \qquad \therefore \lambda = 1{,}5$$

$$P(X=0) = \frac{e^{-1,5}.(1,5)^{0}}{0!} = 0{,}223130$$

Distribuição de Poisson

1) Uma firma recebe 720 mensagens em seu faz em 8 horas de funcionamento. Qual a probabilidade de que:

a) em 4 minutos não receba mensagem? R: 0,002479
b) em 6 minutos receba pelo menos 4 mensagens? R: 0,978774

2) Num livro de 800 páginas há 800 erros de impressão. Qual a probabilidade de que uma página contenha pelo menos um erro?

Distribuição de Poisson

3) Numa estrada há 2 acidentes para cada 100 km. Qual a probabilidade de que em 250 km ocorram pelo menos 3 acidentes? R: 0,875348

4) A experiência mostra que de cada 400 lâmpadas, 2 se queimam ao serem ligadas. Qual a probabilidade de que numa instalação de 900 lâmpadas, exatamente 8 se queimem? R: 0,046330