Distribuições teóricas de probabilidades

- Modelos Contínuos
  - Exponencial
  - Normal

Fonte: MORETTIN, L.G. Estatística Básica. Volume único. Probabilidade e Inferência. Pearson, 2010

Distribuições Contínuas

2. **Modelos contínuos**

   a) Distribuição Exponencial

   b) Distribuição Normal

   c) Distribuição t de Student (será apresentada no estudos dos Intervalos de Confiança e Testes de Hipóteses)

Distribuição Exponencial

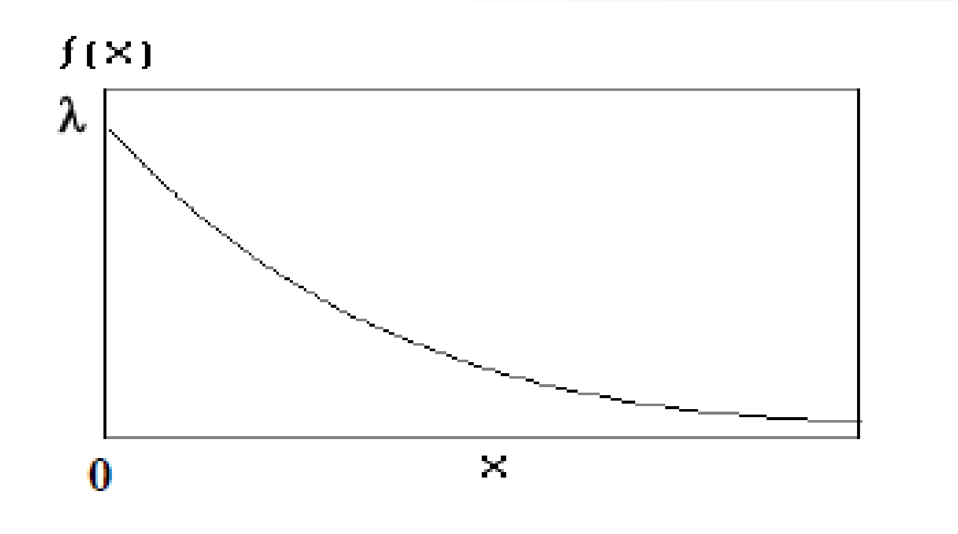
Uma variável aleatória contínua X tem distribuição exponencial de probabilidade se a sua função densidade de probabilidade for dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda * e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Esta distribuição é a correspondente contínua da Distribuição de Poisson. Quando uma variável comporta-se como Poisson em sua taxa média de sucessos, ela também segue a Distribuição Exponencial em termos de tempo entre a ocorrência de cada sucesso.

Distribuição Exponencial

O gráfico de uma distribuição exponencial é dado por:



Além disso, $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ e $VAR(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

Facilitando os cálculos com a Distribuição Exponencial

Podemos utilizar integrais definidas para calcular probabilidades relacionadas à uma variável aleatória que segue a Distribuição Exponencial.

Porém, podemos suprimir essa necessidade sabendo que:

$$P(X \leq k) = \int_0^k f(x)\,dx = 1 - e^{-\lambda * k}$$

Exercício: Distribuição Exponencial

O intervalo de tempo, em minutos entre emissões consecutivas de uma fonte radioativa se distribui exponencialmente com média 5. Sabendo-se que o intervalo foi maior ou igual a 5 minutos, determine a probabilidade do intervalo estar entre 3 e 8 minutos.

Distribuição Normal

Uma variável aleatória contínua X tem distribuição normal de probabilidade se a sua função densidade de probabilidade for dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad (\text{para} -\infty < x < +\infty)$$

cujo gráfico é uma curva chamada Gaussiana.

Distribuição Normal

Na função densidade de probabilidades da variável aleatória normal, temos que: $E(X) = \mu$ e $VAR(X) = \sigma^2$. Ou seja, se X é variável normal de média μ e variância σ^2, ela é denotada por $X:N(\mu; \sigma^2)$.

Utilizando integração numérica, é possível mostrar que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = 1$$

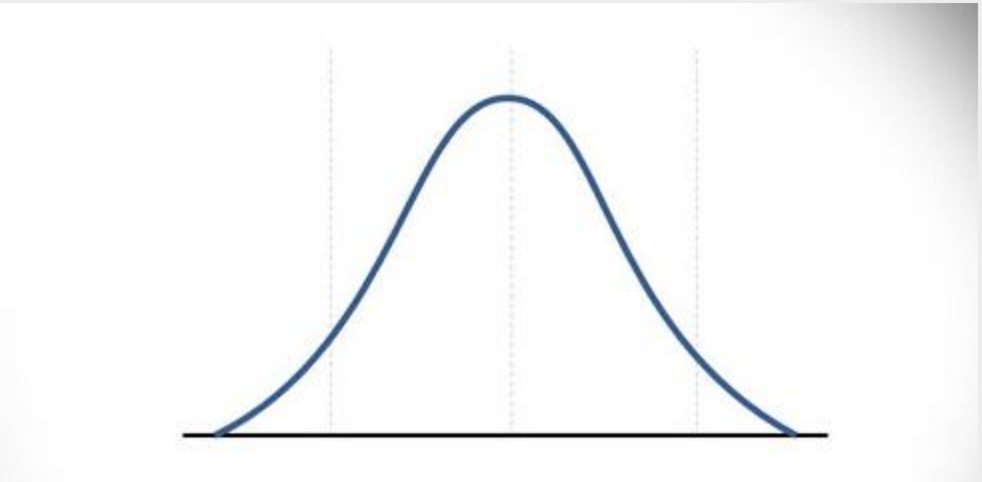
Distribuição Normal – Curva Gaussiana

A curva Gaussiana se assemelha a um sino com a boca voltada para baixo e suas principais características são:

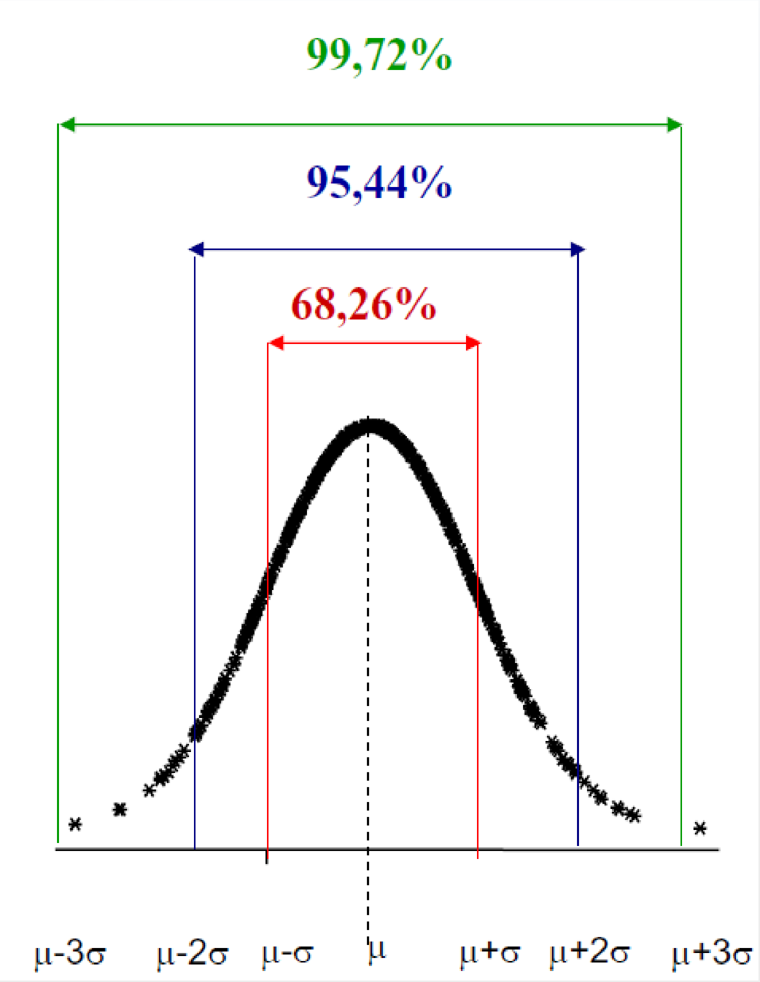
a) É sempre positiva;

b) Tem um ponto de máximo e,

c) É simétrica com relação ao ponto de máximo.



Distribuição Normal – Curva Gaussiana



Observe que a média μ é o ponto de máximo da curva (então, a área à esquerda de μ é igual à área à direita de μ que é igual a 0,5).

Os intervalos mostrados na figura são formados somando-se ou subtraindo-se desvios padrão da média da variável.

Os valores de X com maior probabilidade de ocorrência estão no intervalo de amplitude 6σ.

Cálculo de probabilidade com a Distribuição Normal

Para calcular probabilidades envolvendo variáveis normalmente distribuídas, devemos aplicar integração numérica (regra do Trapézio, Regra de Simpson, ...).

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2} dx \quad \text{(grau relativo de dificuldade)}$$

Para minimizar o esforço, podemos fazer uma mudança de variável para Z, chamada normal padrão, e consultar áreas em uma tabela.

Variável normal padrão Z

Seja X: N(μ,σ^2) e Z uma variável aleatória tal que:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Sendo Z uma combinação linear de X, Z também terá distribuição normal considerada padrão uma vez que: E(Z)=0 e VAR(Z)=1.

Exercício: Distribuição Normal

1) Considere que as notas de uma prova de Estatística se distribuem normalmente com média 7,8 e desvio padrão 1,5. Escolhe-se um aluno ao acaso. Calcule a probabilidade de:

a) Ele ter nota maior do que 7,5.

b) Ele ter nota menor do que 8,2.

c) Ele ter nota entre 7,5 e 8,2.

d) Ele ter nota maior do que 7,5 dado que sua nota foi menor que 8,2.

e) Se 24,2% dos alunos serão dispensados da prova final por terem sido os melhores da turma, qual é a nota mínima para que ocorra esta dispensa?

Exercício: Distribuição Normal

2) Seja X: N(100, 25). Calcular:

a) $P(100 \leq X \leq 106)$

b) $P(89 \leq X \leq 107)$

c) $P(112 \leq X \leq 116)$

d) $P(X \geq 108)$

3) Um fabricante de baterias sabe, por experiência passada, que as baterias de sua fabricação têm vida média de 600 dias e desvio padrão de 100 dias, sendo que a duração tem aproximadamente distribuição normal. Oferece uma garantia de 312 dias, isto é, troca as baterias que apresentarem falhas nesse período. Fabrica 10000 baterias mensalmente. Quantas deverá trocar pelo uso da garantia, mensalmente?

Exercício: Distribuição Normal

4) Uma fábrica de carros sabe que os motores de sua fabricação têm duração normal com média de 150.000km e desvio padrão de 5.000 km.

Qual a probabilidade de que um carro, escolhido ao acaso, dos fabricados por essa firma, tenha um motor que dure menos de 170.000 km?

Distribuições de Funções de Variáveis Aleatórias Normais

Sejam n variáveis aleatórias (X_i; $i = 1, \dots, n$) **independentes**, cada uma com distribuição normal, isto é, X_i: $N(\mu_i, \sigma^2_i)$.

Qualquer combinação linear entre estas variáveis (função das variáveis) resultará em uma nova variável que também será normalmente distribuída (já sabemos que é assim com Z).

Para resolver problemas que envolvam essa combinação, será necessário utilizar as propriedades já vistas de esperança e variância, no caso de variáveis independentes.

Distribuições de Funções de Variáveis Aleatórias Normais

Então, para esperança (média), valem:

1) $E(k * X) = k * E(X)$

2) $E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$

3) $E(aX \pm bY) = a * E(X) \pm b * E(Y)$

Distribuições de Funções de Variáveis Aleatórias Normais

E, para variância (variáveis independentes), valem:

1) $VAR(k * X) = k^2 * VAR(X)$

2) $VAR(X \pm Y) = VAR(X) + VAR(Y)$

3) $VAR(aX \pm bY) = a^2 * VAR(X) + b^2 * VAR(Y)$

Exercícios

1) Sejam X_1: N(180,40) e X_2:N(160,50) independentes. Seja $Y = 4X_1 - 3X_2$ também com distribuição normal.

Calcule $P(239 \leq Y \leq 242)$.

2) Latas de refrigerante são cheias por uma máquina automática de enchimento. O volume médio de enchimento é 350ml com desvio padrão 5ml. Suponha que os volumes de enchimento sigam distribuição normal e sejam independentes entre as latas. Qual a probabilidade de que o volume total de 10 latas selecionadas aleatoriamente da esteira seja menor do que 3,45l?