Aproximações da Distribuição Binomial

- Usando a Distribuição de Poisson (discreta)
- Usando a Distribuição Normal (contínua)

Fonte: MORETTIN, L.G. Estatística Básica. Volume único. Probabilidade e Inferência. Pearson, 2010

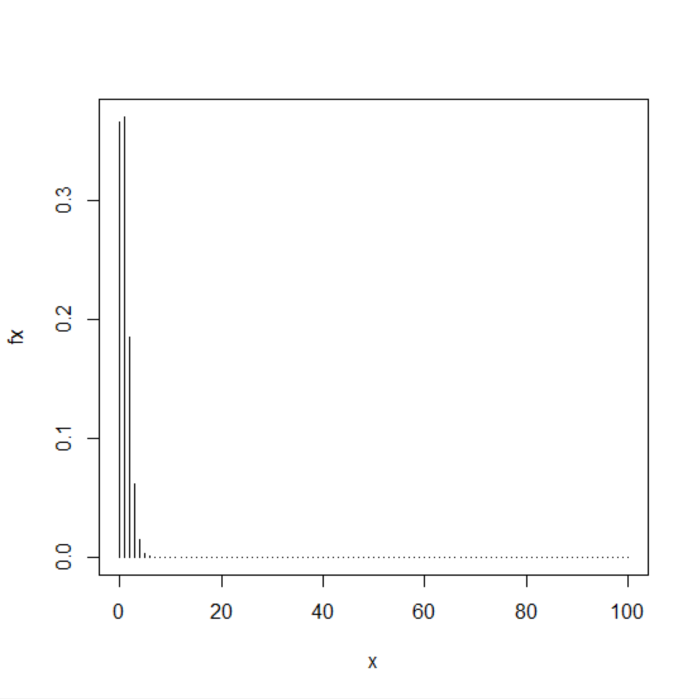
Aproximação da Distribuição Binomial pela Distribuição de Poisson

No uso da Binomial, quando $n \to \infty$ (maior que o maior valor tabelado, no caso, $n>30$) e $p \to 0$ ($p < 0,1$), é possível fazer uma aproximação da Binomial pela distribuição de Poisson. Isto ocorre pois a Distribuição de Poisson é o limite (com $n \to \infty$) da Distribuição Binomial.

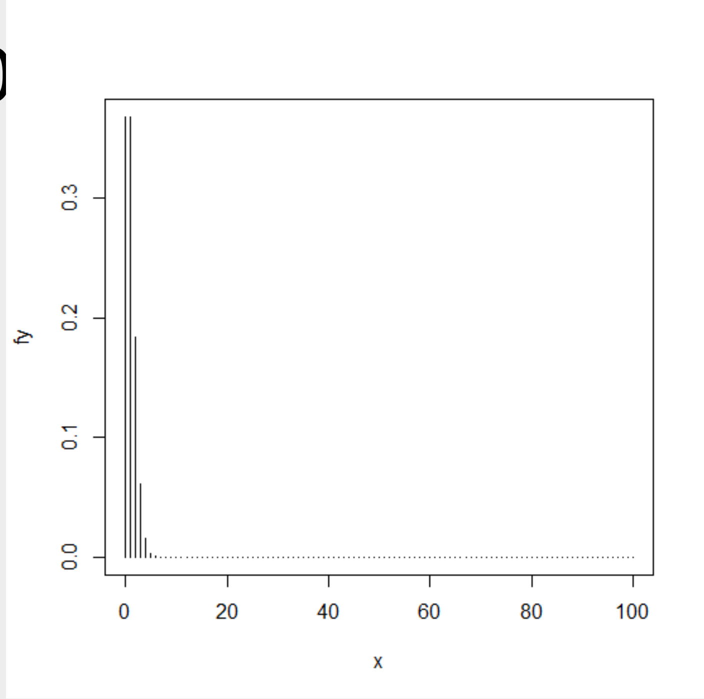
Neste caso, $E(X)=n*p$ será tomada como $\lambda = n*p$ e, em seguida, utiliza-se a fórmula de Poisson.

Aproximação da Distribuição Binomial pela Distribuição de Poisson

Veja este exemplo gráfico, de uma variável X binomial de parâmetros n=100 e p=0,01; aproximada por uma distribuição de Pois



= n*p = 100



Aproximação da Binomial por Poisson
Dica para saber quando usar

Seja X:B(200 ; 0,005); calcule P(X = 50).

Ao tentarmos executar esse cálculo pela Binomial, podem ocorrer dois problemas no uso da calculadora:

1) Obter uma mensagem MATH ERROR pois a calculadora não possui memória suficiente para mostrar o valor do combinatório C(200,50) ou,
2) O valor de $p^{50} = 0{,}005^{50}$ é tão próximo de zero que a calculadora mostra seu resultado efetivamente como zero.

Aproximação da Binomial por Poisson
Dica para saber quando usar

Então, se o seu resultado, após o uso da calculadora e da Binomial, for MATH ERROR ou zero, observe se $n > 30$ e $p < 0{,}1$. Caso seja verdade, use a Poisson ao invés da Binomial.

No exemplo, fazendo $\lambda = n*p = 200*0{,}05 = 10$ e aplicando a fórmula de probabilidade de Poisson, teremos:

$$P(\ X = 50\ ) = [\ \exp(-10) * 10^{50}] \ /\ 50! = 1{,}49*10^{-19}$$

que é um valor aproximado para P(X = 50), se X é Binomial.

Exercícios:
Aproximação da Binomial por Poisson

1. A probabilidade de um aparelho de DVD da marca K apresentar defeito é de 0,02. Qual a probabilidade de que, em um lote de 500 aparelhos desta empresa:

a) Nenhum apresente defeito? **Resp: $4{,}1 \times 10^{-5}$**

b) 50 aparelhos apresentem defeito? **Resp: $1{,}5 \times 10^{-19}$**

c) Pelo menos 1 apresente defeito? **Resp: 0,99996**

Exercícios:
Aproximação da Binomial por Poisson

$p = 0{,}02 \; ; \; n = 500$

$\lambda = n \cdot p = 500 \cdot 0{,}02 = 10$

a) $P(X=0) = \dfrac{e^{-10} \cdot 10^{0}}{0!} = 4{,}5 \times 10^{-5}$

b) $P(X=50) = \dfrac{e^{-10} \cdot 10^{50}}{50!} = 1{,}49 \times 10^{-19}$

Exercícios:
Aproximação da Binomial por Poisson

c) $P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1)$

$= 1 - P(X = 0)$

$1 - 4,5 \times 10^{-5} = 0,99996$

Exercícios:
Aproximação da Binomial por Poisson

2. Em determinada empresa, a probabilidade de um automóvel ter um tipo específico de defeito de fabricação é 0,0004. Para uma amostra de 6000 automóveis, calcule a probabilidade de:

a. Exatamente 4 terem este defeito. **Resp.: 0,13**

b. Exatamente 30 terem este defeito. **Resp.: 9×10^{-23}**

$p = 0{,}0004 \quad n = 6000$

$\lambda = n \cdot p = 6000 \cdot 0{,}0004 = 2{,}4$

a) $P(X=4) = \dfrac{e^{-2{,}4} \cdot 2{,}4^{4}}{4!} = 0{,}125$

b) $P(X=30) = \dfrac{e^{-2{,}4} \cdot 2{,}4^{30}}{30!} = 9 \times 10^{-23}$

Aproximação da Distribuição Binomial pela Distribuição Normal

É muito comum, no uso da Binomial, trabalharmos com grandes amostras ($n > 30$). Porém, nem sempre as condições são adequadas para se usar a Distribuição de Poisson no lugar da Binomial, ou seja, nem sempre é verdade que $p \to 0$.

Neste caso, podemos usar a Distribuição Normal para aproximar a Binomial, conforme nos mostra o Teorema do Limite Central.

Teorema do Limite Central

Considere n variáveis aleatórias X_1, X_2, ..., X_n, independentes e com a mesma distribuição de probabilidades (não normal), tais que $E(X_i)=\mu_i$ e $VAR(X_i)=\sigma^2_i$, i=1,2,...,n. Seja $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Então, em condições gerais e para n bastante grande, a variável

$Z = \frac{X-[\sum_{i=1}^{n} \mu_i]}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} {\sigma_i}^2}}$ tem distribuição aproximadamente N(0, 1).

Teorema do Limite Central

Em linguagem comum, o teorema do limite central expressa o fato de que a soma de muitas variáveis aleatórias independentes e com mesma distribuição de probabilidade (mesmo não normais) tendem à distribuição normal ("cada vez mais normal à medida que o número de variáveis aumenta").

Exemplo de aplicação do Teorema do Limite Central: Aproximação da Binomial pela Normal

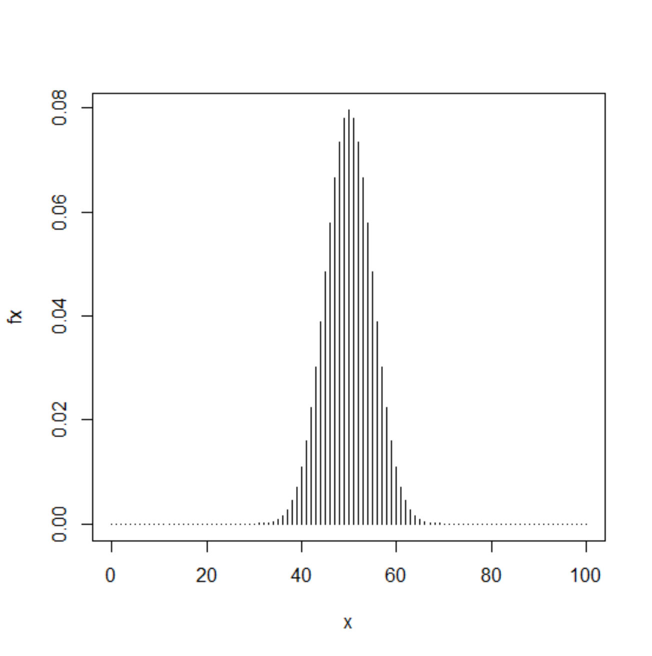
Seja $X = \Sigma X_i$ ($i = 1, 2, 3, ..., n$) onde cada X_i é uma variável de Bernoulli de média p e variância p*q.

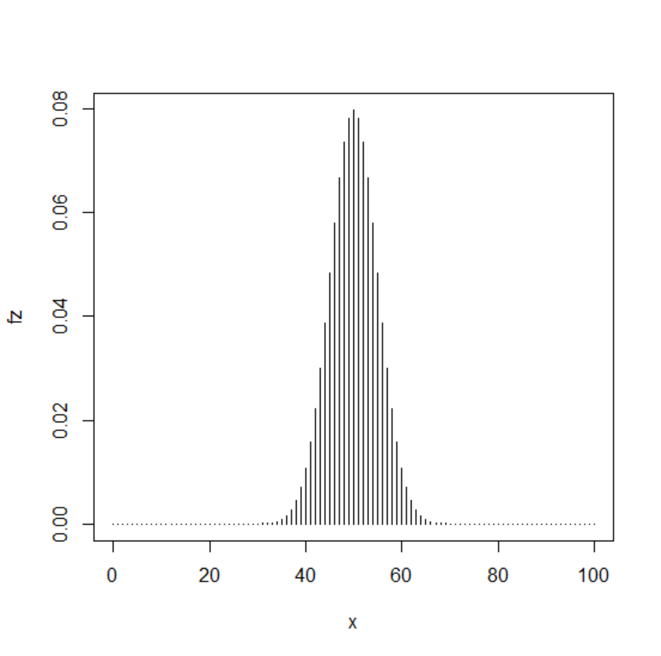
Determinada desta forma, X é uma variável Binomial de média $E(X) = n*p$ e variância $VAR(X) = n*p*q$.

Pelo Teorema do Limite Central, então, se n é um número suficientemente grande, podemos afirmar que X é uma variável aproximadamente normal, com média $\mu = E(X)$ e $\sigma^2 = VAR(X)$.

Aproximação da Distribuição Binomial pela Normal

Veja este exemplo gráfico, de uma variável X binomial de parâmetros n=100 e p=0,5; aproximada por uma distribuição Normal de parâmetros $\mu = n*p = 100*0,5 = 50$ e $\sigma^2 = n*p*q = 100*0,5*0,5 = 25$.





Aproximação da Binomial pela Normal
Correção de Continuidade

Aproximar a Binomial pela Poisson parece bastante razoável, especialmente porque as duas distribuições são de mesmo tipo, ou seja, discretas.

Aproximar a Binomial pela Normal, no entanto, apesar de graficamente se mostrar satisfatório, causa uma certa estranheza pois a Normal é uma distribuição contínua de probabilidades (e sabemos que, neste caso, não existem cálculos do tipo $P(X = k)$).

Aproximação da Binomial pela Normal
Correção de Continuidade

Assim, para resolver esta incompatibilidade, transformamos todo valor discreto da variável Binomial em intervalos de pequena amplitude (1 unidade de comprimento), para os quais a Normal pode ser aplicada.

Essa transformação chama-se **correção de continuidade** e consiste em somar e/ou subtrair meio (0,5) ponto, conforme a necessidade.

Vejamos os casos a seguir:

Aproximação da Binomial pela Normal
Correções de Continuidade

$$1)\, P(X = k) \overset{cc}{=} P(k - 0{,}5 \leq X \leq k + 0{,}5)$$

$$2)\, P(a \leq X \leq b) \overset{cc}{=} P(a - 0{,}5 \leq X \leq b + 0{,}5)$$

$$2.1)\, P(X \geq a) \overset{cc}{=} P(X \geq a - 0{,}5)$$

$$2.2)\, P(X \leq b) \overset{cc}{=} P(X \leq b + 0{,}5)$$

$$3)\, P(a < X < b) \overset{cc}{=} P(a + 0{,}5 < X < b - 0{,}5)$$

$$3.1)\, P(X > a) \underset{cc}{\overset{cc}{=}} P(X > a + 0{,}5)$$

$$3.2)\, P(X < b) \underset{cc}{\cong} P(X < b - 0{,}5)$$

Aproximação da Binomial pela Normal
Dica para saber quando usar

Existem dois problemas básicos que podem aparecer quando precisamos usar a Normal para substituir a Binomial. Se X:B(n;p), notamos que essa aproximação é necessária quando:

1) O combinatório C(n,k) resulta em MATH ERROR na calculadora ou,
2) O número de termos binomiais necessários para obter a resposta da probabilidade é muito, muito grande.

Exercícios:
Aproximação da Binomial pela Normal

1. De um lote de produtos manufaturados, extraímos 100 itens ao acaso. Se 12% dos itens desta produção são defeituosos, calcule a probabilidade de haver:

   a. 25 itens defeituosos na amostra. **(R.: 0,0001)**

   b. No máximo 30 e no mínimo 20 itens defeituosos. **(R.: 0,0104)**

   c. Menos que 22 itens defeituosos. **(R.: 0,998)**

   d. Mais do que 21 itens defeituosos. **(R.: 0,002)**

Exercícios:
Aproximação da Binomial pela Normal

$n = 100 \quad ; \quad p = 0{,}12$

$E(x) = n \cdot p = 100 \cdot 0{,}12 = 12$

$VAR(x) = n \cdot p \cdot q = 100 \cdot 0{,}12 \cdot 0{,}88 = 10{,}56$

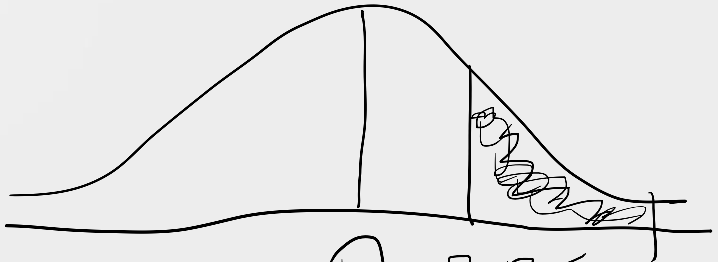
$\sigma_x = \sqrt{10{,}56} = 3{,}25$

(a) $P(X = 25) \overset{CC}{=} P(24{,}5 \leq x \leq 25{,}5)$

Exercícios:
Aproximação da Binomial pela Normal

$$z_1 = \frac{24{,}5 - 12}{3{,}25} = 3{,}85$$

$$z_2 = \frac{25{,}5 - 12}{3{,}25} = 4{,}15$$



$$P(3{,}85 < z < 4{,}15) =$$

$$P(0 \leq z \leq 4{,}15) -$$

$$P(0 \leq z \leq 3{,}85) =$$

Exercícios:
Aproximação da Binomial pela Normal

$0{,}5 - 0{,}4999 = 0{,}0001$

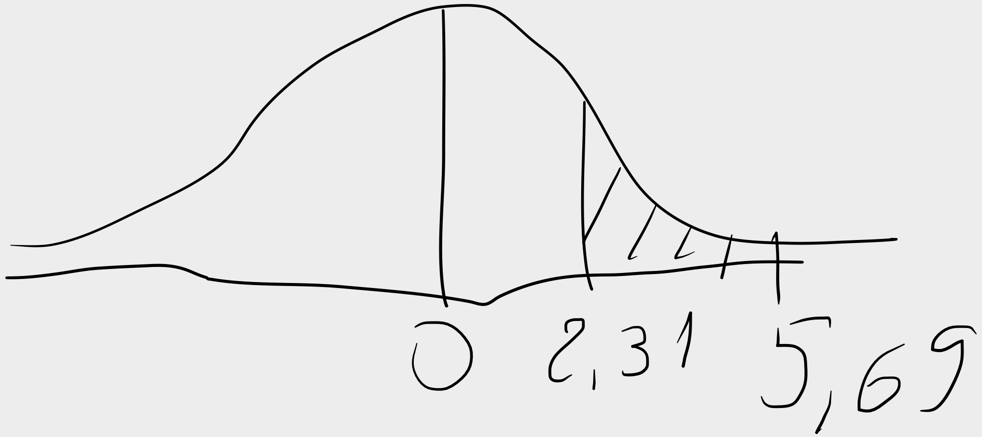
b $P(20 \leq x \leq 30) \stackrel{cc}{=}$

$P(19{,}5 \leq x \leq 30{,}5)$

Exercícios:
Aproximação da Binomial pela Normal

$$z_1 = \frac{19,5-12}{3,25} = 2,31$$

$$z_2 = \frac{30,5-12}{3,25} = 5,69$$



Exercícios:
Aproximação da Binomial pela Normal

$$P(2,31 < z < 5,69) =$$

$$P(0 \leq z \leq 5,69) - P(0 \leq z \leq 2,31)$$

$$= 0,5 - 0,4896 = 0,0104$$

c) $P(X < 22) \overset{cc}{=} P(X < 21,5)$

d) $P(X > 21) \overset{cc}{=} P(X > 21,5)$

Exercícios:
Aproximação da Binomial pela Normal

2. Um sistema é formado por 100 componentes, cada um dos quais possui confiabilidade de 0,95. Se esses componentes funcionam independentes uns dos outros e se o sistema completo funciona adequadamente quando pelo menos 80 componentes funcionam, qual a confiabilidade do sistema? **Resposta: 0,9941**

Exercícios:
Aproximação da Binomial pela Normal

$n = 100 \quad ; \quad p = 0{,}95$

$\mu = n \cdot p = 100 \cdot 0{,}95 = 95$

$\sigma^2 = n \cdot p \cdot q = 100 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}05 = 4{,}75$

$\sigma = \sqrt{4{,}75} = 2{,}18$

$P(80 \leq X \leq 100) \overset{cc}{=} P(79{,}5 \leq X \leq 100{,}5)$

Exercícios:
Aproximação da Binomial pela Normal

$$z_1 = \frac{79,5 - 95}{2,19} = -7,11$$

$$z_2 = \frac{100,5 - 95}{2,18} = 2,52$$

$$P(-7,11 < z < 2,52) = P(0 < z < 7,11) + P(0 < z < 2,52) = 0,5 + 0,4941$$

$$= 0,9941 \,//$$